

# Équivalence rationnelle sur une hypersurface cubique de mauvaise réduction

Séminaire de théorie des nombres de Caen

David A. Madore

david.madore@ens.fr

<http://www.dma.ens.fr/~madore/>

27 janvier 2006

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Plan

## Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de Brauer

## Position du problème

## Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

## Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

## Plan

### Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

### Position du problème

### Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

### Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Groupes de Chow

- ▶ Si  $X$  est une variété, on note  $\mathrm{CH}_i(X)$  le groupe de Chow des cycles de dimension  $i$  modulo équivalence rationnelle.
- ▶ Pour  $X$  propre,  $\mathrm{CH}_0^0(X)$  désignera les zéro-cycles de degré 0.

## Remarques :

- ▶ Si  $x, y \in X(k)$  sont (directement)  $\mathbb{R}$ -équivalents, i.e.  $\exists f: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow X$  tel que  $f(0) = x$  et  $f(\infty) = y$  alors  $x$  et  $y$  sont rationnellement équivalents ( $[x] - [y] = 0 \in \mathrm{CH}_0^0(X)$ ).
- ▶ On a un accouplement  $\mathrm{CH}_0^0(X) \times (\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)) \rightarrow \mathrm{Br}(k)$

**Swinerton-Dyer (1981)** : Si  $X$  est une surface cubique lisse sur un corps fini alors  $\text{CH}_0^0(X) = 0$ .

En fait, le résultat porte sur l'équivalence universelle, plus fine que l'équivalence rationnelle.

**Kato & Saito (1983)** : Si  $X$  est une variété projective lisse simplement connexe (en particulier une hypersurface cubique lisse) sur un corps fini alors  $\text{CH}_0^0(X) = 0$ .

# Sur les $p$ -adiques en bonne réduction

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

« Bonne réduction », pour une hypersurface cubique, signifie qu'on se donne un modèle dont la fibre spéciale est une hypersurface cubique lisse.

On suppose la caractéristique résiduelle,  $p$ , différente de 2 ou 3.

**Swinnerton-Dyer (1981)** : Si  $X$  est une surface cubique lisse de bonne réduction sur un corps  $p$ -adique, alors  $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ .

**DAM (2003)** : Si  $X$  est une hypersurface cubique lisse de bonne réduction sur un corps  $p$ -adique, alors  $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ .

**Kollár & Szabó (2003)** : Généralisation aux variétés sur un corps  $p$ -adique dont la réduction est lisse et séparablement rationnellement connexe.

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de Brauer

Position du problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Autres résultats d'annulation

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

**Colliot-Thélène (1983)** : Si  $X$  est une surface rationnelle lisse sur un corps  $C_1$  (ou même de dim. coh.  $\leq 1$ ) alors  $\text{CH}_0^0(X) = 0$ .

**DAM (2005)** : Si  $X$  est une hypersurface cubique :

- ▶ de dimension  $\geq 4$  sur un corps  $C_1$ , ou
- ▶ de dimension  $\geq 10$  sur un corps  $C_2$  ou  $p$ -adique,

alors  $\text{CH}_0^0(X) = 0$ .

**Remarque** : Pour  $X$  une hypersurface cubique lisse de dimension 3 sur un corps  $C_1$ , il est très plausible que  $\text{CH}_0^0(X) = 0$ .

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de Brauer

Position du problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Détection par le groupe de Brauer

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Ici,  $\text{Br}(X) = H_{\text{ét}}^2(X, \mathbb{G}_m)$  est le groupe de Brauer cohomologique.

Pour  $X$  propre, on a un accouplement

$$\text{CH}_0^0(X) \times (\text{Br}(X)/\text{Br}(k)) \rightarrow \text{Br}(k) \quad (*)$$

Si  $k$  est  $p$ -adique,  $\text{Br}(k) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

Si  $X$  est une *surface* rationnelle lisse sur  $k$  un corps  $p$ -adique, alors  $(*)$  est non dégénéré à gauche : l'évaluation des éléments du groupe de Brauer détecte complètement l'équivalence rationnelle.

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de Brauer

Position du problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Un exemple de mauvaise réduction

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

On considère dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^3$  la surface cubique  $\mathcal{S}$  d'équation

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + pT^3 = 0$$

Sa fibre spéciale est un cône sur la courbe de genre 1,  $E$  :  
 $X^3 + Y^3 + Z^3 = 0$  (et aucun point ne se réduit sur le  
sommet du cône, d'où une application  $\mathcal{S}(\mathbb{Q}_p) \rightarrow E(\mathbb{F}_p)$ ).

Grâce à l'accouplement  $(*)$ , on peut calculer explicitement :  
 $\text{CH}_0^0(\mathcal{S}_{\text{Spec } \mathbb{Q}_p}) = E(\mathbb{F}_p)/3E(\mathbb{F}_p)$ .

Notamment, si  $p \geq 5$  et  $p \equiv 2 \pmod{3}$ , les deux points  
 $\mathbb{Q}_p$ -rationnels  $(1 : -1 : 0 : 0)$  et  $(\sqrt[3]{2} : -1 : -1 : 0)$  de  $\mathcal{S}$  ne  
sont pas rationnellement équivalents.

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme



# Un exemple de mauvaise réduction (suite)

On considère toujours dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^3$  la surface cubique  $\mathcal{S}$

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + pT^3 = 0$$

Un modèle régulier  $\widetilde{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbb{Z}_p$  s'obtient en éclatant dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}_p}^3$  le point singulier  $(0 : 0 : 0 : 1)$  de la fibre spéciale.

La fibre spéciale de  $\widetilde{\mathcal{S}}$  est un DCN avec deux composantes :

- ▶ avec multiplicité 3 : la fibre spéciale ( $\cong \mathbb{P}_{\mathbb{F}_p}^2$ ) du diviseur exceptionnel de l'éclatement, et
- ▶ le transformé propre de la fibre spéciale de  $\mathcal{S}$ , qui est un fibré en  $\mathbb{P}^1$  (non trivial) sur  $E$ .

Idée pour la suite : détecter la non nullité d'un 0-cycle sur la fibre générique en regardant son intersection (comme 1-cycle sur le modèle) avec une composante de la fibre spéciale.

# Annulation de Brauer en dimension $\geq 3$

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

**Zéro-cycles et groupe de  
Brauer**

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

**Prop. :** Si  $X \subseteq \mathbb{P}^N$  est une intersection complète lisse de dimension  $\geq 3$  sur un corps  $k$  de caractéristique 0 alors  $\text{Br } X = \text{Br } k$ .

Donc au-delà du cas des surfaces, pas d'espoir d'utiliser le groupe de Brauer pour détecter la non équivalence rationnelle !

On va faire appel à la théorie de l'intersection sur un modèle régulier.

# Que cherche-t-on ?

Comme on l'a vu, pour une hypersurface cubique  $X$  de dimension  $d$  sur  $\mathbb{Q}_p$  :

- ▶ si  $d \geq 10$ , on a  $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ ,
- ▶ si  $d = 2$  on peut avoir  $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$ .

Jusqu'à quelle dimension peut-on monter ?

On cherche un exemple de dimension 3 avec  $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$ .

Candidats sérieux :

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + pU^3 + p^2 V^3 = 0,$$

$$X^3 + Y^3 + Z^3 + p(U^3 + \alpha V^3) = 0 \text{ où } \alpha \text{ n'est pas un cube.}$$

Malheureusement, le premier exemple conduit à des calculs inextricables dans la théorie de l'intersection, et le second amène au final à étudier le conoyau d'une norme  $E(\mathbb{F}') \rightarrow E(\mathbb{F}) \dots$  qui est nul sur un corps fini !

# Sur quel corps ?

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

À défaut d'un exemple sur  $\mathbb{Q}_p$ , cherchons un corps  $K$  « aussi proche » que possible :

- ▶ de caractéristique zéro,
- ▶ de dimension cohomologique 2 et même  $C_2$ ,
- ▶ complet pour une valuation discrete,
- ▶ avec  $\text{Br}(K) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ .

...  $K = \mathbb{C}((\alpha))((t))$

Hypersurface candidate :

$$X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 + t(U^3 + \alpha V^3) = 0$$

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de Brauer

Position du problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Principe de construction du modèle

Posons désormais  $k = \mathbb{C}((\alpha))$ .

On cherche un modèle projectif régulier de l'hypersurface sur  $k((t))$  :

$$\{X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 + tU^3 + \alpha tV^3 = 0\} \subset \mathbb{P}_{k((t))}^4$$

Plutôt que désingulariser le modèle évident, on monte à  $k((t^{1/3}))$  (posons  $h = t^{1/3}$ ) :

$$\{X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 + (hU)^3 + \alpha(hV)^3 = 0\} \subset \mathbb{P}_{k((h))}^4$$

Changement de coordonnées  $\tilde{U} = hU$  et  $\tilde{V} = hV$  :

$$\{X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 + \tilde{U}^3 + \alpha \tilde{V}^3 = 0\} \subset \mathbb{P}_{k((h))}^4$$

L'hypersurface de départ est le quotient par  $\mu_3$ .

# Quotient par $\mu_3$

Notons  $\mathcal{X} \subset \mathbb{P}_k^4 \times \mathbb{A}_k^1$  l'hypersurface d'équation

$$X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 + \tilde{U}^3 + \alpha \tilde{V}^3 = 0$$

La coordonnée  $h$  sur  $\mathbb{A}^1$  n'intervient pas : ceci est le produit par  $\mathbb{A}^1$  d'une hypersurface dans  $\mathbb{P}^4$ .

Le groupe  $\mu_3$  agit sur  $\mathbb{P}_k^4 \times \mathbb{A}_k^1$  par

$$((X : Y : Z : \tilde{U} : \tilde{V}), h) \mapsto ((X : Y : Z : \zeta \tilde{U} : \zeta \tilde{V}), \zeta h)$$

On cherche à décrire une désingularisation  $\mathcal{Y}$  de  $\mathcal{X}/\mu_3$ .

Les deux lieux singuliers de  $\mathcal{X}/\mu_3$  sont donnés par les points fixes de l'action de  $\mu_3$  :

- ▶ la courbe  $E: X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 = 0$  (d'équation  $\tilde{U} = \tilde{V} = 0$  et  $h = 0$ ),
- ▶ le point fermé  $\Omega: \tilde{U}^3 + \alpha \tilde{V}^3 = 0$  (d'équation  $X = Y = Z = 0$  et  $h = 0$ ).

# Description « toroïdale »

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Sur l'ouvert  $X \neq 0$  de  $\mathcal{X}$ , on définit la flèche vers  $\mathbb{A}_k^3$

$$\psi: \left( y = \frac{Y}{X}, z = \frac{Z}{X}, u = \frac{\tilde{U}}{X}, v = \frac{\tilde{V}}{X}, h \right) \mapsto (u, v, h) \\ \{1 + y^3 + \alpha z^3 + u^3 + \alpha v^3 = 0\} \rightarrow \mathbb{A}^3$$

Cette flèche est lisse, et si  $\mu_3$  agit sur  $\mathbb{A}^3$  par  $(u, v, w) \mapsto (\zeta u, \zeta v, \zeta w)$  alors  $\psi$  passe au quotient et reste lisse.

Autrement dit :  $\mathcal{X}_{X \neq 0} / \mu_3$  est lisse sur  $\mathbb{A}^3 / \mu_3$ .

On va donc chercher à désingulariser le point singulier  $O = (0, 0, 0)$  de  $\mathbb{A}^3 / \mu_3$ .

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de Brauer

Position du problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Description « toroïdale » (suite)

Si  $\varphi: \mathcal{U}_{\sharp} \rightarrow \mathbb{A}^3/\mu_3$  est un morphisme birationnel propre avec  $\mathcal{U}_{\sharp}$  régulier, alors en construisant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{X \neq 0} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{U}_{\sharp} \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{X}_{X \neq 0}/\mu_3 & \xrightarrow{\psi/\mu_3} & \mathbb{A}^3/\mu_3 \end{array} \quad \square$$

on a  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$  régulier.

Reste donc :

- ▶ à résoudre la singularité de  $\mathbb{A}^3/\mu_3$ ,
- ▶ à recoller les morceaux !

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

**Résolutions toriques**

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme



# Comment résoudre $\mathbb{A}^3/\mu_3$ ?

La variété  $\mathcal{U} = \mathbb{A}^3/\mu_3$  admet la description torique

$$\mathcal{U} = \text{Spec } k[\chi^r : r \in T^* \cap \sigma^\vee]$$

où  $k[\chi^r : r \in T^* \cap \sigma^\vee]$  désigne l'algèbre sur  $T^* \cap \sigma^\vee$  (algèbre de monoïde),

où  $T^*$  est le réseau dual de  $T_* = \mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  
et où  $\sigma \subseteq T_{*,\mathbb{R}}$  est le cône  $\sigma = \{(a, b, c) : a, b, c \geq 0\}$ , et  
 $\sigma^\vee$  désigne le cône dual.

On résout  $\sigma$  comme réunion de trois cônes (chacun engendré par une base de  $T_*$ ) :

- ▶  $\sigma_a$  engendré par  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ .
- ▶  $\sigma_b$  engendré par  $(1, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  et  $(0, 0, 1)$ .
- ▶  $\sigma_c$  engendré par  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

**Résolutions toriques**

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Comment résoudre $\mathbb{A}^3/\mu_3$ (suite) ?

**Rappel :** On a posé  $\mathcal{U} = \mathbb{A}^3/\mu_3$ .

En posant  $\mathcal{U}_a = \text{Spec } k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_a)^\vee]$  et idem pour  $\mathcal{U}_b$  et  $\mathcal{U}_c$ , la variété

$$\mathcal{U} = \text{Spec } k[u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^2w, uvw, v^2w, uw^2, vw^2, w^3]$$

admet la résolution  $\varphi: \mathcal{U}_\sharp \rightarrow \mathcal{U}$  où  $\mathcal{U}_\sharp$  est réunion des ouverts (chacun isomorphe à  $\mathbb{A}^3$ )

$$\mathcal{U}_a = \text{Spec } k[(u^3), (u^{-1}v), (u^{-1}w)]$$

$$\mathcal{U}_b = \text{Spec } k[(uv^{-1}), (v^3), (v^{-1}w)]$$

$$\mathcal{U}_c = \text{Spec } k[(uw^{-1}), (vw^{-1}), (w^3)]$$

La fibre  $\mathcal{H}$  de  $\varphi$  sur point singulier  $O \in \mathcal{U}$  a l'équation  $(u^3) = 0$  (resp.  $(v^3) = 0$ , resp.  $(w^3) = 0$ ) dans  $\mathcal{U}_a$  (resp.  $\mathcal{U}_b$ , resp.  $\mathcal{U}_c$ ) : c'est un  $\mathbb{P}_k^2$ .

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

**Résolutions toriques**

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Description de $\mathcal{Y}$

Au final on obtient une description du modèle  $\mathcal{Y}$  recherché comme recollement d'ouverts affines réguliers (seize au total) tels que

$$\mathcal{Y}_{X \neq 0, a} = \text{Spec } k[y_{X \neq 0}, z_{X \neq 0}, (u^3)_{X \neq 0}, (u^{-1}v)_{X \neq 0}, (u^{-1}w)_{X \neq 0}] / (1 + y_{X \neq 0}^3 + \alpha z_{X \neq 0}^3 + (u^3)_{X \neq 0} + \alpha (u^3)_{X \neq 0} (u^{-1}v)_{X \neq 0}^3)$$

$$\mathcal{Y}_{Y \neq 0, b} = \text{Spec } k[x_{Y \neq 0}, z_{Y \neq 0}, (uv^{-1})_{Y \neq 0}, (v^3)_{Y \neq 0}, (v^{-1}w)_{Y \neq 0}] / (x_{Y \neq 0}^3 + 1 + \alpha z_{Y \neq 0}^3 + (uv^{-1})_{Y \neq 0}^3 (v^3)_{Y \neq 0} + \alpha (v^3)_{Y \neq 0})$$

$$\mathcal{Y}_{\tilde{U} \neq 0, x'} = \text{Spec } k[(x^2 \tau^{-1})_{\tilde{U} \neq 0}, (x^{-1}y)_{\tilde{U} \neq 0}, (x^{-1}z)_{\tilde{U} \neq 0}, (x^{-1} \tau^2)_{\tilde{U} \neq 0}, v_{\tilde{U} \neq 0}] / (((x^2 \tau^{-1})_{\tilde{U} \neq 0})^2 (x^{-1} \tau^2)_{\tilde{U} \neq 0} \cdot (1 + ((x^{-1}y)_{\tilde{U} \neq 0})^3 + \alpha ((x^{-1}z)_{\tilde{U} \neq 0})^3) + 1 + \alpha v_{\tilde{U} \neq 0}^3)$$

avec des formules de transition telles que

$$(v^{-1}w)_{Y \neq 0} = y_{X \neq 0} ((u^{-1}v)_{X \neq 0})^{-1} (u^{-1}w)_{X \neq 0} \quad \text{sur } \mathcal{Y}_{X \neq 0, a} \cap \mathcal{Y}_{Y \neq 0, b}$$

et la flèche  $t: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$

$$t = (u^3)_{X \neq 0} ((u^{-1}w)_{X \neq 0})^3 \quad \text{sur } \mathcal{Y}_{X \neq 0, a}$$

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Description de la fibre spéciale

La fibre spéciale  $\mathcal{Y}_0 = \{t = 0\} \subset \mathcal{Y}$  est un DCN avec quatre composantes :

- ▶ Avec multiplicité 1 : un fibré (non trivial) en  $\mathbb{P}^2$  sur  $E$ , que nous noterons  $\mathcal{Y}_H$ .
- ▶ Avec multiplicité 3 : une composante  $\mathcal{Y}_W$ , transformée propre de la fibre spéciale  $\mathcal{X}_0/\mu_3$  de  $\mathcal{X}/\mu_3$  (noter  $\mathcal{X}_0 = \{h = 0\}$ ). Cette composante est l'éclaté le long de  $E \times \Omega$  de  $\mathbb{P}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$  (où  $E: X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 = 0$  et  $\Omega: \tilde{U}^3 + \alpha \tilde{V}^3 = 0$ ).
- ▶ Avec multiplicité 1 : une composante  $\mathcal{Y}_1$  sur  $\Omega$ , qui est simplement un  $\mathbb{P}_\Omega^3$ .
- ▶ Avec multiplicité 2 : une composante  $\mathcal{Y}_\ell$  sur  $\Omega$ , qui est un fibré en  $\mathbb{P}^2$  sur  $\mathbb{P}_\Omega^1$ .

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

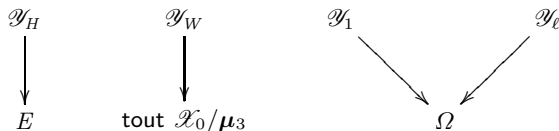
# Composantes la fibre spéciale

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

$$\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_H + 3\mathcal{Y}_W + \mathcal{Y}_1 + 2\mathcal{Y}_\ell$$

**Rappel :**  $\mathcal{Y}_H$  est un fibré en  $\mathbb{P}^2$  sur  $E$ ;  $\mathcal{Y}_W$  est l'éclaté de  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  le long de  $E \times \Omega$ ;  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_\ell$  vivent sur  $\Omega$ .



- L'intersection  $\mathcal{Y}_H \cap \mathcal{Y}_W$  est  $E \times \mathbb{P}_k^1$  (transformé propre de  $E \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  par l'éclatement de  $E \times \Omega$ ).
- Les intersections  $\mathcal{Y}_W \cap \mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_1 \cap \mathcal{Y}_\ell$  sont des  $\mathbb{P}_\Omega^2$ .
- Les autres intersections sont vides.

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de Brauer

Position du problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# La flèche considérée

**Rappel :**  $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_H + 3\mathcal{Y}_W + \mathcal{Y}_1 + 2\mathcal{Y}_\ell$  est la fibre spéciale du modèle  $\mathcal{Y}$ .

On considère la flèche

$$\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_H) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_1) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_\ell) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$$

obtenue en poussant un 1-cycle sur une composante de  $\mathcal{Y}_0$  à  $\mathcal{Y}$  tout entier puis en l'intersectant avec  $\mathcal{Y}_H$ .

On cherche à trouver un 0-cycle de degré 0 (et même de la forme  $[a] - [b]$  avec  $a, b$  deux points rationnels) sur la fibre générique  $\mathcal{Y}_{\mathrm{Spec} k((t))}$  qui, vu prolongé en un 1-cycle sur  $\mathcal{Y}_{\mathrm{Spec} k[[t]]}$ , ait une intersection avec  $\mathcal{Y}_H$  qui n'est pas dans l'image de la flèche ci-dessus.

Équivalence  
rationnelle sur une  
hypersurface  
cubique de  
mauvaise réduction

David Madore

Plan

Introduction

Notations

Résultats d'annulation

Zéro-cycles et groupe de  
Brauer

Position du  
problème

Désingularisation

Principe

Résolutions toriques

Description du modèle

Non nullité d'un  
groupe de Chow

Calculs d'intersection

Non surjectivité de la norme

# Diverses intersections

**Rappel :**  $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_H + 3\mathcal{Y}_W + \mathcal{Y}_1 + 2\mathcal{Y}_\ell$ .

- ▶ Les flèches  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_1) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  et  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_\ell) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  sont nulles car  $\mathcal{Y}_1$  et  $\mathcal{Y}_\ell$  ne rencontrent pas  $\mathcal{Y}_H$ .
- ▶ On a  $\mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H) = \mathrm{Pic}(E)$  puisque  $\mathcal{Y}_H$  est un fibré en  $\mathbb{P}^2$  sur  $E$ .
- ▶ La flèche (d'« auto-intersection »)  
 $i^* i_* : \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_H) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  a une image multiple de 3 car  $\mathcal{Y}_H + 3\mathcal{Y}_W + \mathcal{Y}_1 + 2\mathcal{Y}_\ell = \mathcal{Y}_0 \sim 0$  sur  $\mathcal{Y}$  donc  $N + 3(\mathcal{Y}_W \cap \mathcal{Y}_H) \sim 0$  sur  $\mathcal{Y}_H$  (où  $N = i^*(\mathcal{Y}_H)$  est un diviseur sur  $\mathcal{Y}_H$  représentant le fibré normal).

On est donc ramené à regarder l'image de la flèche  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \rightarrow \mathrm{Pic}(E)$ , modulo  $3\mathrm{Pic}(E)$ .

Par transversalité de  $\mathcal{Y}_W$  et  $\mathcal{Y}_H$ , c'est l'intersection  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H \cap \mathcal{Y}_W)$ .

# Diverses intersections (suite)

**Rappel :**  $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_H + 3\mathcal{Y}_W + \mathcal{Y}_1 + 2\mathcal{Y}_\ell$ .

Comme  $\mathcal{Y}_W$  est l'éclaté de  $E \times \Omega$  dans  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ , on a  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(E \times \Omega)$ , représentés respectivement par

- ▶ un  $\{p\} \times \mathbb{P}^1$  avec  $p$  un point rationnel de  $\mathbb{P}^2$  (non situé sur  $E$ ),
- ▶ un  $l \times \{p\}$  avec  $l$  une droite rationnelle de  $\mathbb{P}^2$  et  $p$  un point rationnel de  $\mathbb{P}^1$ ,
- ▶ un  $\pi^*D$  avec  $\pi: \text{exc} \rightarrow (E \times \Omega)$  la projection du lieu exceptionnel de l'éclatement, et  $D$  un diviseur sur  $E \times \Omega$ .

Les deux premiers ont une image nulle dans  $\text{Pic}(E)/3\text{Pic}(E)$ . La troisième donne la flèche de norme  $\text{Pic}(E \times \Omega) \rightarrow \text{Pic}(E)$ .



# Non surjectivité de la norme

Soit  $k = \mathbb{C}((\alpha))$  et  $k' = \mathbb{C}((\alpha^{1/3}))$ . Sur la courbe de genre 1,  $E: X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 = 0$  on choisit l'origine  $o = (1 : -1 : 0)$ , ce qui identifie  $\text{Pic}^0(E)$  avec  $E(k)$ . Tout est ramené à montrer que  $E(k')/3E(k') \rightarrow E(k)/3E(k)$  n'est pas surjective.

On introduit la fonction rationnelle  $f$  sur  $E$  définie par  $f = (X + \zeta^2 Y)/(X + \zeta Y)$  : son diviseur est un triple. Elle définit un morphisme (loi de réciprocité de Weil)  $E(k)/3E(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$ .

Mais sur  $k'$  la flèche  $E(k')/3E(k') \rightarrow k'^{\times}/k'^{\times 3}$  est nulle (petit argument sur les valuations pour la courbe  $X^3 + Y^3 + \hat{Z}^3 = 0$ ).

Donc  $E(k')/3E(k') \rightarrow k'^{\times}/k'^{\times 3} \rightarrow k^{\times}/k^{\times 3}$  est nulle donc  $E(k')/3E(k') \rightarrow E(k)/3E(k) \rightarrow k^{\times}/k^{\times 3}$  aussi.

## Suite et fin

Ainsi, si  $q \in E(k)$  a une image non nulle par  $E(k)/3E(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$ , il n'est pas dans l'image de  $E(k')/3E(k')$ .

Par exemple,  $q = (1 : -\zeta : 0)$ . Alors  $[q] - [o] \in \text{Pic}^0(E)$  (où  $o = (1 : -1 : 0)$ ) n'est pas dans l'image de  $\text{Pic}(E \times \Omega)$ .

Donc représente un élément de  $\text{CH}_0^0(\mathcal{Y}_H)$  non atteint par la flèche d'intersection de puis la fibre spéciale. Donc non nul sur la fibre générique.

Donc les points rationnels  $(1 : -1 : 0 : 0 : 0)$  et  $(1 : -\zeta : 0 : 0 : 0)$  de l'hypersurface cubique lisse

$$\{X^3 + Y^3 + \alpha Z^3 + tU^3 + \alpha tV^3 = 0\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}((\alpha))((t))}^4$$

ne sont pas rationnellement équivalents.