

# Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques de mauvaise réduction

David A. Madore

17 octobre 2006

CVS : \$Id: chwhole.tex,v 1.6 2006-10-17 16:17:51 david Exp \$

## Résumé

Cet article comporte deux parties indépendantes, mais complémentaires. La première prouve l'annulation du groupe de Chow des classes de zéro-cycles de degré zéro modulo équivalence rationnelle pour une hypersurface cubique de dimension  $\geq 10$  sur un corps  $p$ -adique ou sur un corps  $C_2$  (et, en fait, la  $R$ -trivialité d'une telle hypersurface). Ceci se fait sans hypothèse de bonne réduction (ni même de lissité) sur l'hypersurface. La seconde partie va dans la direction opposée et donne un exemple explicite d'hypersurface cubique lisse de dimension 3 (nécessairement de mauvaise réduction) sur un corps tel que  $\mathbb{C}((\nu, t))$  (ou  $\mathbb{C}((\nu))((t))$ ) dont le groupe de Chow des classes de zéro-cycles de degré zéro modulo équivalence rationnelle n'est pas nul.

## Abstract

This article consists of two independent, but related, parts. The first one proves the vanishing of the Chow group of classes of zero-cycles of degree zero modulo rational equivalence for a cubic hypersurface of dimension  $\geq 10$  on a  $p$ -adic or  $C_2$  field (and, in fact, the  $R$ -triviality of such a hypersurface). This is done without the assumption of good reduction (or even smoothness). The second part goes in the other direction and gives an explicit example of a smooth cubic hypersurface of dimension 3 (necessarily of bad reduction) on a field such as  $\mathbb{C}((\nu, t))$  (or  $\mathbb{C}((\nu))((t))$ ) whose Chow group of classes of zero-cycles of degree zero modulo rational equivalence does not vanish.

# Introduction

Le présent article se compose, outre cette introduction, de deux parties entièrement indépendantes, qui concernent tous les deux l'équivalence rationnelle sur des hypersurfaces cubiques dans des situations de « mauvaise réduction ».

Nous renvoyons à [14] pour les généralités sur les hypersurfaces cubiques, et au chapitre 1 de [6] (notamment §1.3 et §1.6) pour la définition et les propriétés standard de l'équivalence rationnelle ; on notera  $\mathrm{CH}_0(X)$  le groupe (de Chow) des zéro-cycles modulo équivalence rationnelle sur une variété  $X$ , et  $\mathrm{CH}_0^0(X)$  (lorsque  $X$  est propre) le sous-groupe formé des classes de zéro-cycles de degré zéro. On aura également besoin de la notion de R-équivalence (cf. [14], §14) : si  $X$  est une variété propre définie sur un corps  $k$ , on dit que deux points  $x, y \in X(k)$  sont *directement R-équivalents* lorsqu'il existe  $f: \mathbb{P}_k^1 \rightarrow X$  (soulignons : défini sur  $k$ ) tel que  $f(0) = x$  et  $f(\infty) = y$ . La clôture transitive de cette relation définit une relation d'équivalence sur  $X(k)$  appelée la R-équivalence : on note  $X(k)/R$  l'ensemble des classes d'équivalence, et on dit que deux points sont R-équivalents quand ils sont dans la même classe. Si  $X(k)/R$  est réduit à un singleton, on dit que  $X$  est R-triviale (sur  $k$ ). On aura besoin du fait évident que deux points  $k$ -rationnels qui sont R-équivalents sont rationnellement équivalents.

Rappelons à présent brièvement la situation en bonne réduction. Si  $X$  est une hypersurface cubique lisse ayant bonne réduction (c'est-à-dire ayant un modèle projectif dont la fibre spéciale  $Y$  est une hypersurface cubique lisse) sur un corps  $p$ -adique (avec  $p \geq 5$ ), la nullité de  $\mathrm{CH}_0^0(X)$  est prouvée (par déformation depuis la fibre spéciale) dans [12]. Kollár et Szabó ont obtenu dans [10] un résultat plus général : si  $X$  est une variété projective lisse sur  $K$  corps local de corps résiduel  $k$ , dont on suppose la réduction  $Y$  à  $k$  lisse (géométriquement) séparablement rationnellement connexe, on a  $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ , et, si  $\mathrm{card} k$  est assez grand (où « assez » ne dépend que de la dimension et du degré de  $X$ ),  $X$  est R-triviale.

Dans les cas de mauvaise réduction, sur un corps local, il est difficile d'utiliser des techniques de déformation depuis la fibre spéciale pour obtenir des résultats sur la fibre générique. Néanmoins, on peut penser que si le nombre de variables est suffisamment grand, les propriétés seront bonnes. Le résultat prouvé dans la première partie du présent article est<sup>1</sup> : si  $X$  est une

---

<sup>1</sup>La même démonstration donne d'ailleurs facilement la R-trivialité d'une hypersurface

hypersurface cubique lisse de dimension au moins 10 sur un corps  $p$ -adique (ou sur un corps  $C_2$ ), alors  $X$  est R-triviale, et  $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$ .

On ignore à partir de quelle dimension il est vrai que  $\mathrm{CH}_0^0(X) = 0$  pour toute hypersurface cubique lisse sur un corps  $p$ -adique  $k$ . En dimension 2 le problème est bien maîtrisé car alors (voir [2])  $\mathrm{CH}_0^0(X)$  se plonge dans  $H^1(k, S)$  où  $S$  est le tore dont le réseau des caractères (avec action de Galois) est  $S^* = \mathrm{Pic} \bar{X}$ . La dualité parfaite  $H^1(k, S) \times H^1(k, S^*) \rightarrow \mathrm{Br} k = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  (donnée par la théorie locale du corps de classes) correspond à l'évaluation (non dégénérée à gauche)  $\mathrm{CH}_0^0(X) \times \mathrm{Br} X \rightarrow \mathrm{Br} k$  (ici,  $\mathrm{Br} X = H^2(X, \mathbb{G}_m)$ ) désigne le groupe de Brauer cohomologique : voir [8] pour des généralités à ce sujet, et [1], appendice, pour la définition de cet accouplement). C'est-à-dire qu'en particulier l'évaluation des éléments du groupe de Brauer de  $X$  détecte exactement l'équivalence rationnelle. On peut mentionner l'exemple classique (cf. [3], exemple 2.8) de la surface cubique définie par l'équation  $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 + pT_3^3 = 0$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_p}^3$  avec  $p \equiv 2 \pmod{3}$  et  $p \geq 5$ , sur laquelle les deux points  $\mathbb{Q}_p$ -rationnels  $(1 : -1 : 0 : 0)$  et  $(\sqrt[3]{2} : -1 : -1 : 0)$  ne sont pas rationnellement équivalents (en fait,  $\mathrm{CH}_0^0(X) \cong E(\mathbb{F}_p)/3E(\mathbb{F}_p)$ , où  $E$  est la courbe elliptique  $T_0^3 + T_1^3 + T_2^3 = 0$ , la flèche étant donnée par la spécialisation). En dimension supérieure ou égale à 3, l'obstruction présentée par le groupe de Brauer tombe pour une hypersurface car alors  $\mathrm{Br} X = \mathrm{Br} k$  ([15], appendice A).

La deuxième partie de notre article montre que, bien que le groupe de Brauer ne donne dans ce cas pas d'obstruction (comme expliqué ci-dessus), on peut avoir  $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$  pour une hypersurface cubique lisse de dimension 3 sur un corps de dimension cohomologique 2 (en l'occurrence  $\mathbb{C}((u))((v))$ , l'hypersurface étant donnée par  $T_0^3 + T_1^3 + uT_2^3 + vT_3^3 + uvT_4^3 = 0$ ). Malheureusement, il n'a pas semblé possible (cf. remarques de la section 2.9) de construire un exemple analogue sur  $\mathbb{Q}_p$  (bien qu'il semble plausible qu'il existe effectivement des hypersurfaces cubiques lisses de dimension 3 sur  $\mathbb{Q}_p$  avec  $\mathrm{CH}_0^0(X) \neq 0$ ).

La méthode de calcul consiste à obtenir un modèle régulier explicite et à considérer la matrice d'intersection des 1-cycles de la fibre spéciale de celui-ci avec certaines composantes de la fibre spéciale (voir [4] et notamment [5] théorème 4 pour des énoncés, sur les surfaces, justifiant que ces méthodes de calculs permettent effectivement d'obtenir exactement le groupe de Chow

---

cubique lisse de dimension au moins 4 sur un corps  $C_1$  ; on peut se demander si ce fait est vrai en toute dimension  $\geq 2$ .

des zéro-cycles ; ici, on montre simplement qu'il est non nul). Le calcul du modèle régulier se fait par des résolutions toroïdales, comme il a été suggéré par P. Deligne.

**Remerciements :** L'auteur souhaite remercier vivement Jean-Louis Colliot-Thélène pour lui avoir suggéré ce problème et pour ses indications précieuses, ainsi que Brendan Hassett et Laurent Moret-Bailly, rapporteurs de [13], pour leur relecture attentive des calculs de la seconde partie et pour leur aide dans la rédaction, et enfin le rapporteur du présent article pour son interprétation éclairante de ces mêmes calculs.

## 1 Cas de la grande dimension

Le but de cette première partie est de prouver le point suivant :

**Proposition 1.1.** *Soit  $X$  une hypersurface cubique de dimension au moins 10 sur un corps  $p$ -adique  $K$ . Alors deux points quelconques de  $X(K)$  sont  $R$ -équivalents :  $X(K)/R = \{*\}$ .*

**Corollaire 1.2.** *Soit  $X$  une hypersurface cubique de dimension au moins 10 sur un corps  $p$ -adique  $K$ . Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur  $X$ , modulo équivalence rationnelle, est nul :  $\text{CH}_0^0(X) = 0$ .*

On utilisera pour la proposition 1.1 uniquement les deux propriétés suivantes du corps  $K$  :

- toute forme quadratique sur  $K$  en au moins 5 variables possède un zéro non trivial, et
- toute forme cubique sur  $K$  en au moins 10 variables possède un zéro non trivial (cf. [11]).

Le résultat sera donc valable sur tout corps  $K$  possédant ces deux propriétés (par exemple si  $K$  est un corps  $C_2$ ). Le corollaire 1.2 utilise, lui, le fait que ces propriétés sont encore satisfaites pour toute extension finie de  $K$ .

On commence par prouver le lemme suivant :

**Lemme 1.3.** *Soit  $d \geq 1$  un entier et soit  $K$  un corps tel que toute forme quadratique sur  $K$  en au moins  $d$  variables possède un zéro non trivial. Soit  $Y$  une hypersurface cubique de dimension au moins  $d - 1$  sur  $K$ , possédant un point singulier  $K$ -rationnel. Alors deux points quelconques de  $Y(K)$  sont  $R$ -équivalents :  $Y(K)/R = \{*\}$ .*

*Démonstration.* Appelons  $P \in Y(K)$  le point  $K$ -rationnel singulier dont l'existence est supposée. L'hypersurface  $Y$  est donnée dans  $\mathbb{P}_K^n$  (où  $n \geq d$ ), et on suppose pour fixer les idées que  $P$  a les coordonnées homogènes  $(U_0 : \cdots : U_n) = (1 : 0 : \cdots : 0)$ . Comme  $P$  est singulier, l'équation de  $Y$  s'écrit  $U_0 q(U_1, \dots, U_n) + c(U_1, \dots, U_n) = 0$ , où  $q$  et  $c$  sont des polynômes homogènes à coefficients dans  $K$  de degrés respectifs 2 et 3.

Soit  $Q \in Y(K)$  : on va montrer que  $P$  et  $Q$  sont R-équivalents.

Si  $Q = P$  ou si la droite reliant  $P$  à  $Q$  (dans  $\mathbb{P}^n$ ) est incluse dans  $X$  alors le résultat est immédiat. Supposons donc que ce n'est pas le cas.

Remarquons que pour  $(v_0 : \cdots : v_n)$  les coordonnées de  $Q$ , on a  $(v_1, \dots, v_n) \neq (0, \dots, 0)$  (puisque  $Q \neq P$ ) et  $q(v_1, \dots, v_n) \neq 0$  (puisque la droite reliant  $P$  à  $Q$  n'est pas incluse dans  $X$ , ce qui serait le cas si on avait  $q(v_1, \dots, v_n) = 0$  donc aussi  $c(v_1, \dots, v_n) = 0$ ).

On définit une application rationnelle  $\psi: \mathbb{P}^{n-1} \dashrightarrow Y$  par  $(U_1 : \cdots : U_n) \mapsto (-c(U_1, \dots, U_n) : U_1 q(U_1, \dots, U_n) : \cdots : U_n q(U_1, \dots, U_n))$ . D'après ce qui a été remarqué, cette application est au moins définie en  $(v_1 : \cdots : v_n)$ , qu'elle envoie sur  $Q$ .

Soit  $(w_1, \dots, w_n) \neq (0, \dots, 0) \in K^n$  tel que  $q(w_1, \dots, w_n) = 0$ , ce qui existe car  $n \geq d$  donc la forme quadratique  $q$  en  $n$  variables a sur  $K$  un zéro non trivial. Soit  $f: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  (par exemple — mais pas nécessairement — linéaire) telle que  $f(0) = (w_1 : \cdots : w_n)$  et  $f(\infty) = (v_1 : \cdots : v_n)$ . Posons  $h = \psi \circ f$ , qui se prolonge en un morphisme  $h: \mathbb{P}^1 \rightarrow Y$ . On a certainement  $h(\infty) = Q$ .

L'existence de  $h$  atteste que le point  $P_1 = h(0)$  est R-équivalent à  $Q$ . Si  $c(w_1, \dots, w_n) \neq 0$ , alors  $\psi$  est définie en  $(w_1 : \cdots : w_n)$  et y vaut  $P$ , de sorte que  $P_1 = h(0) = P$  donc  $P$  et  $Q$  sont R-équivalents, ce qu'on voulait démontrer. Si au contraire  $c(w_1, \dots, w_n) = 0$ , alors la droite  $\Delta$  reliant  $P = (1 : 0 : \cdots : 0)$  à  $(0 : w_1 : \cdots : w_n) \in \mathbb{P}^n$  est tout entière contenue dans  $Y$ . Or le point  $P_1$  est sur cette droite  $\Delta$  : en effet, si  $\delta: \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  est  $(U_0 : \cdots : U_n) \mapsto (U_1 : \cdots : U_n)$ , alors  $\delta$  est définie en au moins un point de l'image de  $h$  (à savoir  $h(\infty) = Q$ ) et  $\delta \circ \psi$  est l'identité, donc  $\delta \circ h = f$ , donc  $\delta(P_1) = f(0) = \delta(P)$ , ce qui signifie bien que  $P_1$  est sur  $\Delta$ .

On voit alors que  $Q$  et  $P_1$  sont R-équivalents (par  $h$ ) et que  $P$  et  $P_1$  sont R-équivalents (par  $\Delta$ ), ce qui prouve que  $P$  et  $Q$  sont R-équivalents.

Dans tous les cas, la conclusion souhaitée est atteinte.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition suivante, qui (eu égard aux faits sur les corps  $p$ -adiques énoncés précédemment) implique im-

médiatement la proposition 1.1.

**Proposition 1.4.** *Soit  $d \geq 1$  un entier et soit  $K$  un corps tel que toute forme quadratique ou cubique sur  $K$  en au moins  $d$  variables possède un zéro non trivial. Soit  $X$  une hypersurface cubique de dimension au moins  $d$  sur  $K$ . Alors deux points quelconques de  $X(K)$  sont  $R$ -équivalents :  $X(K)/R = \{*\}$ .*

*Démonstration.* L'hypersurface  $X$  est donnée dans  $\mathbb{P}_K^n$  où  $n \geq d + 1$ . Soient  $P$  et  $Q$  dans  $X(K)$ . On souhaite prouver que  $P$  et  $Q$  sont  $R$ -équivalents. Soient  $T(P)$  et  $T(Q)$  les hyperplans tangents respectifs à  $X$  en  $P$  et  $Q$  ; soit  $C(P)$  l'hypersurface cubique dans  $T(P) \cong \mathbb{P}^{n-1}$  intersection de ce dernier avec  $X$ , et soit  $C(Q)$  défini de façon analogue. Ainsi,  $C(P)$  et  $C(Q)$  sont des hypersurfaces cubiques ayant un point singulier  $K$ -rationnel ( $P$  ou  $Q$  respectivement). Si  $P \in T(Q)$  ou  $Q \in T(P)$ , le résultat est donné par le lemme 1.3. On peut donc supposer  $T(P)$  et  $T(Q)$  distincts. Alors leur intersection  $H$  est un sous-espace linéaire projectif de dimension  $n - 2$  de  $\mathbb{P}^n$ . Il existe un point  $M \in (X \cap H)(K)$  : en effet,  $X \cap H$  est défini par une forme cubique en  $n - 1 \geq d$  variables, qui possède un zéro non trivial sur  $K$ . Dans ces conditions, le lemme 1.3 assure successivement que  $P$  et  $M$  sont  $R$ -équivalents, puis que  $Q$  et  $M$  le sont : donc  $P$  et  $Q$  sont bien  $R$ -équivalents, comme souhaité.  $\square$

Enfin, expliquons comment on en déduit le corollaire 1.2 (l'argument qui suit est classique).

*Démonstration du corollaire 1.2.* Soit  $a \in X(K)$  (toute forme cubique sur  $K$  en au moins 10 variables possède un zéro non trivial) : il suffit pour conclure de montrer que pour tout point fermé  $x$  sur  $X$ , le zéro-cycle  $[x]$  qu'il définit est rationnellement équivalent à un multiple de  $[a]$ . Or si  $K'$  est le corps résiduel de  $x$ , disons de degré  $d = [K' : K]$ , alors, sur  $X_{K'}$ ,  $x$  est  $R$ -équivalent, donc rationnellement équivalent, à  $a \otimes_K K'$ , et en poussant par le morphisme  $p : X_{K'} \rightarrow X$  de degré  $d$ , on voit que  $[x] - d[a]$  est rationnellement équivalent à zéro, ce qui donne la conclusion souhaitée.  $\square$

Naturellement, le même raisonnement fournit des analogues du lemme 1.3 et de la proposition 1.4 :

**Corollaire 1.5.** *Soit  $d \geq 1$  un entier et soit  $K$  un corps tel que toute forme quadratique sur une extension finie  $K'$  de  $K$  en au moins  $d$  variables possède un zéro non trivial. Soit  $Y$  une hypersurface cubique de dimension au moins*

$d - 1$  sur  $K$ , possédant un point singulier  $K$ -rationnel. Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur  $Y$ , modulo équivalence rationnelle, est nul :  $\text{CH}_0^0(Y) = 0$ .

**Corollaire 1.6.** *Soit  $d \geq 1$  un entier et soit  $K$  un corps tel que toute forme quadratique ou cubique sur une extension finie  $K'$  de  $K$  en au moins  $d$  variables possède un zéro non trivial. Soit  $X$  une hypersurface cubique de dimension au moins  $d$  sur  $K$ . Alors le groupe de Chow des zéro-cycles de degré zéro sur  $X$ , modulo équivalence rationnelle, est nul :  $\text{CH}_0^0(X) = 0$ .*

**Remarque 1 :** Le lemme 1.3 permet de corriger une inexactitude dans [12], section 5.2 : l'affirmation « les classes de R-équivalence sont denses pour la topologie de Zariski » est erronée en général (sur un corps quelconque), elle ne vaut que pour les classes de R-équivalence contenant un point *lisse* (un contre-exemple est fourni par la surface cubique sur  $\mathbb{R}$  d'équation  $T(X^2 + Y^2 + Z^2) = X^3$  dans  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ , dont le  $\mathbb{R}$ -point isolé  $X=Y=Z=0$  est une classe de R-équivalence) ; de même, l'affirmation « une surface cubique  $k$ -rationnelle est R-triviale » est incorrecte sans hypothèse sur le corps  $k$  et sans hypothèse de lissité sur la surface (même contre-exemple). Néanmoins, avec les hypothèses faites sur le corps  $k$  (extension algébrique d'un corps fini, ce qui implique que  $k$  est  $C_1$  et notamment que toute forme quadratique en au moins trois variables possède un zéro non-trivial), on résout ainsi la difficulté : d'une part, si la surface a un point  $k$ -rationnel singulier, le lemme 1.3 ci-dessus permet de conclure qu'elle est R-triviale, et d'autre part, si à l'inverse tous les points  $k$ -rationnels sont lisses, le raisonnement tel qu'écrit est correct. La version de [12] contenue dans [13] corrige cette erreur.

**Remarque 2 :** On peut noter que les résultats de cette partie, combinés à ceux des parties 4.4 et 6.1 de [12], ou, de façon équivalente, à ceux de [9], donnent la R-trivialité, ainsi que la nullité du groupe de Chow des classes de zéro-cycles de degré 0, pour une hypersurface cubique de dimension au moins 4 ayant bonne réduction (par rapport à la variable  $y$ ) sur  $\mathbb{C}(x)((y))$  ou sur  $\mathbb{C}((x))((y))$  : en effet, nous venons de prouver la R-trivialité sur  $\mathbb{C}(x)$  ou  $\mathbb{C}((x))$ , et les résultats cités permettent — en situation de bonne réduction — de passer de la fibre spéciale à fibre générique. Ceci est à comparer au résultat de la partie suivante. (Sans l'hypothèse de bonne réduction, les résultats de cette partie donnent la même conclusion à partir de la dimension 10, puisque  $\mathbb{C}(x)((y))$  et  $\mathbb{C}((x))((y))$  sont  $C_2$ .)

## 2 Non nullité d'un groupe de Chow

Le but de cette partie est de prouver la non-nullité du groupe de Chow des classes de 0-cycles de degré 0 modulo équivalence rationnelle sur l'hypersurface cubique d'équation projective  $X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + tU^3 + t\nu V^3 = 0$  sur le corps  $\mathbb{C}((\nu, t))$  (ou  $\mathbb{C}((\nu))((t))$ ) ; on renvoie à l'introduction de cet article ainsi

qu'à la section finale 2.9 pour des remarques générales ainsi que la motivation de ce problème.

Le plan général est le suivant. Dans un premier temps, on détermine un modèle projectif et régulier  $\mathcal{Y}$  sur  $\mathbb{C}((\nu))[t]$  de l'hypersurface considérée, dont la fibre spéciale  $\mathcal{Y}_0$  a des composantes lisses (une fois réduites) s'intersectant transversalement. Ceci fait l'objet des sections 2.1 à 2.4 : dans la section 2.1, on construit un premier modèle, singulier, dont on résout ensuite localement les singularités dans les sections 2.2 et 2.3 (il y a deux lieux singuliers, étudiés de façon parallèle, à chaque fois en utilisant une résolution toroïdale), et, dans la section 2.4, on recolle les résolutions locales obtenues, ce qui fournit le modèle  $\mathcal{Y}$  ainsi qu'une description des quatre composantes irréductibles,  $\mathcal{Y}_H, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_\ell, \mathcal{Y}_W$  de sa fibre spéciale  $\mathcal{Y}_0$ . La section 2.5 se concentre sur la composante  $\mathcal{Y}_W$ , la seule dont la description n'est pas immédiate, et la présente comme un éclaté de  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ .

L'intérêt d'obtenir ce modèle est le suivant : on arrive à décrire précisément chacune des flèches  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_i) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_j)$  d'intersection d'un 1-cycle sur une des composantes  $\mathcal{Y}_i$  de la fibre spéciale avec une composante  $\mathcal{Y}_j$  (qui peut être  $\mathcal{Y}_i$  elle-même ; pour le cas qui nous concerne, on n'aura besoin que des intersections avec  $\mathcal{Y}_H$ ). Si on se donne un 1-cycle  $\alpha$  sur le modèle  $\mathcal{Y}$  tout entier, une façon de voir qu'il ne provient pas de la fibre spéciale  $\mathcal{Y}_0$  (donc qu'il est non nul sur la fibre générique  $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0$ ) est de prouver que son intersection avec un des  $\mathcal{Y}_j$  n'est pas dans le sous-groupe engendré par les images des  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_i) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_j)$ . Autrement dit, le conoyau de  $\bigoplus_i \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_i) \rightarrow \bigoplus_j \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_j)$  fournit un contrôle sur  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0)$  qu'on cherche à étudier. Cette méthode de calcul a été étudiée par C. S. Dalawat (voir [4] et notamment [5] théorème 4) qui montre que, pour une surface rationnelle sur un corps local déployée par une extension non ramifiée de celui-ci, on peut ainsi obtenir exactement le groupe de Chow ; ici, nous ne sommes pas dans ces hypothèses, mais on cherche simplement à prouver la non-nullité du groupe de Chow.

La section 2.6 explicite les flèches qui nous concernent entre les groupes de Chow des différentes composantes. L'une de ces flèches est une norme sur une courbe elliptique et on prouve dans la section 2.7 qu'elle n'est pas surjective (en donnant explicitement un point qui n'est pas une norme). Ceci permet, dans la section 2.8, de rassembler les morceaux et de construire deux points qui ne sont pas rationnellement équivalents.



## 2.1 Définitions et énoncé du problème

Sur le corps  $\mathbb{C}((\nu, t))$ , on considère l'hypersurface cubique (lisse) dans  $\mathbb{P}^4$  définie par

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + t(U^3 + \nu V^3) = 0 \quad (*)$$

dont on cherche à montrer que :

**Proposition 2.1.** *Le groupe de Chow  $\text{CH}_0^0$  des 0-cycles de degré 0 modulo équivalence rationnelle de l'hypersurface cubique définie dans  $\mathbb{P}^4$  sur  $\mathbb{C}((\nu, t))$  (ou dans  $\mathbb{C}((\nu))((t))$ ) n'est pas nul.*

Pour commencer, on cherche un modèle projectif régulier sur  $\mathbb{C}((\nu))[t]$  de l'équation (\*) ci-dessus.

Montons d'abord à  $\mathbb{C}((\nu, t^{1/3}))$ . Soit  $h = t^{1/3}$ . L'équation (\*) s'écrit

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + (hU)^3 + \nu(hV)^3 = 0$$

Posons  $\tilde{U} = hU$  et  $\tilde{V} = hV$ . On a le modèle évident  $\mathcal{X}$ , de même équation, dans  $\mathbb{P}_k^4 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{A}_k^1$  où  $k = \mathbb{C}((\nu))$ ,

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + \tilde{U}^3 + \nu \tilde{V}^3 = 0 \quad (**)$$

— c'est-à-dire le produit de l'hypersurface cubique diagonale (lisse) ayant cette équation (\*\*) par la droite affine  $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[h]$ .

Le groupe  $\mu_3$  agit (sur ce produit) : par  $((X : Y : Z : \tilde{U} : \tilde{V}), h) \mapsto ((X : Y : Z : \zeta \tilde{U} : \zeta \tilde{V}), \zeta h)$  (où  $\zeta$  racine cubique primitive de l'unité). Le lieu fixe de cette action consiste en les  $((X : Y : Z : 0 : 0), 0)$  avec  $X^3 + Y^3 + \nu Z^3 = 0$  (soit une courbe de genre 1 sur  $k$ , que nous noterons  $C$ ) et les  $((0 : 0 : 0 : \tilde{U} : \tilde{V}), 0)$  avec  $\tilde{U}^3 + \nu \tilde{V}^3 = 0$  (soit un point fermé de degré 3, que nous noterons  $\Omega$ ). On cherche à désingulariser le quotient par cette action,  $\mathcal{X}/\mu_3$  (ce qui donnera le modèle  $\mathcal{Y}$  recherché sur  $\mathbb{C}((\nu))[t]$ ). Pour cela, on va désingulariser séparément, et chacun par une technique « toroïdale », les deux lieux singuliers,  $C$  et  $\Omega$ .

## 2.2 Étude au voisinage de $C$

Plaçons-nous dans l'ouvert  $\mathcal{X}_{X \neq 0}$  de  $\mathcal{X}$  défini par  $X \neq 0$  : appelons  $y_{X \neq 0}, z_{X \neq 0}, u_{X \neq 0}, v_{X \neq 0}$  les coordonnées respectivement  $Y/X, Z/X, \tilde{U}/X, \tilde{V}/X$  sur cet ouvert, qui vérifient  $1 + y_{X \neq 0}^3 + \nu z_{X \neq 0}^3 + u_{X \neq 0}^3 + \nu v_{X \neq 0}^3 = 0$ . Enfin, considérons le morphisme  $\psi_{X \neq 0} : \mathcal{X}_{X \neq 0} \rightarrow \mathbb{A}_k^3$  défini par  $(y_{X \neq 0}, z_{X \neq 0}, u_{X \neq 0}, v_{X \neq 0})$ ,

$h) \mapsto (u_{X \neq 0}, v_{X \neq 0}, h)$ . On se permettra, dans la suite, d'omettre parfois l'indice «  $X \neq 0$  » lorsqu'il est clair d'après le contexte.

Le morphisme  $\psi$  est lisse lorsque  $Y \neq 0$  ou  $Z \neq 0$ . Par ailleurs, il est compatible à l'action de  $\mu_3$  lorsque  $\mu_3$  agit sur  $\mathcal{X}_{X \neq 0}$  comme expliqué précédemment (l'action sur  $\mathcal{X}$  préserve l'ouvert  $\mathcal{X}_{X \neq 0}$ ) et sur  $\mathbb{A}_k^3$  par  $(u, v, w) \mapsto (\zeta u, \zeta v, \zeta w)$ . Notons  $\check{\psi}$  le morphisme  $\mathcal{X}_{X \neq 0}/\mu_3 \rightarrow \mathbb{A}_k^3/\mu_3$  obtenu par passage au quotient. Ce morphisme  $\check{\psi}$  est encore lisse lorsque  $Y \neq 0$  ou  $Z \neq 0$  car il s'écrit :

$$\begin{aligned} \check{\psi}: \operatorname{Spec} R[y, z]/(f) &\rightarrow \operatorname{Spec} R \\ \text{où } R &= k[u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^2w, uvw, v^2w, uw^2, vw^2, w^3] \\ \text{et } f &= 1 + y^3 + \nu z^3 + (u^3) + \nu(v^3) \\ \text{vérifiant } \frac{\partial f}{\partial y} &\text{ inversible ou } \frac{\partial f}{\partial z} \text{ inversible} \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $\mathcal{U} = \mathbb{A}_k^3/\mu_3$  a exactement un point singulier  $O$ , correspondant au seul point fixe de l'action de  $\mu_3$  sur  $\mathbb{A}_k^3$ , à savoir  $(0, 0, 0)$ . L'image réciproque de  $O$  par  $\psi_{X \neq 0}$  est l'ouvert  $X \neq 0$  de  $C$ . On va décrire une flèche  $\varphi: \mathcal{U}_{\sharp} \rightarrow \mathcal{U}$  de désingularisation ( $\varphi$  morphisme propre birationnel et  $\mathcal{U}_{\sharp}$  régulier) qui sera un isomorphisme partout sauf au-dessus de ce point, et on appellera  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$  le produit fibré de  $\mathcal{X}_{X \neq 0}/\mu_3$  avec  $\mathcal{U}_{\sharp}$  au-dessus de  $\mathcal{U} = \mathbb{A}_k^3/\mu_3$  (par les morphismes  $\check{\psi}$  et  $\varphi$ ). Nous expliquerons plus loin comment on peut recoller la désingularisation  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$  avec ses analogues  $\mathcal{Y}_{Y \neq 0}$  et  $\mathcal{Y}_{Z \neq 0}$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_{X \neq 0} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{U}_{\sharp} \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathcal{X}_{X \neq 0}/\mu_3 & \xrightarrow{\check{\psi}} & \mathbb{A}_k^3/\mu_3 = \mathcal{U} \end{array} \quad \square$$

On passe à la description « torique » pour construire le morphisme  $\varphi$  (on renvoie à [7] pour les généralités sur les variétés toriques) :  $\mathbb{G}_{m,k}^3$  est le spectre de l'algèbre du réseau  $\mathbb{Z}^3$ . Le quotient par l'action (évidente) de  $\mu_3$  est le spectre de l'algèbre des monômes fixes, c'est-à-dire l'algèbre du réseau  $T^* = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : 3 \text{ divise } (a + b + c)\}$  (a pour base :  $(3, 0, 0)$ ,  $(1, 0, -1)$ ,  $(0, 1, -1)$ ). Le réseau dual est  $T_* = \mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  (a pour base :  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(0, -1, -1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ). Le quotient de  $\mathbb{A}_k^3$  par l'action de  $\mu_3$  est défini par le cône  $\sigma = \{(\alpha, \beta, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \geq 0\}$  (engendré en tant que cône réel

par  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ ). On voit que ce quotient n'est pas lisse, car  $\sigma \cap T_*$  contient quatre éléments minimaux,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  et  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , donc n'est pas libre en tant que monoïde commutatif. En revanche, on peut désingulariser en remplaçant  $\sigma$  par un éventail de trois cônes dont la réunion est  $\sigma$  et qui chacun sont engendrés par leurs éléments minimaux, à savoir :

- $\sigma_a$  engendré par  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ .
- $\sigma_b$  engendré par  $(1, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  et  $(0, 0, 1)$ .
- $\sigma_c$  engendré par  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ .

On appellera  $\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_b, \mathcal{U}_c$  les variétés toriques affines lisses correspondant à ces cônes (par exemple,  $\mathcal{U}_a = \text{Spec } k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_a)^\vee]$ ), et  $\mathcal{U}_\sharp$  leur recollement selon les variétés toriques affines définies par les intersections de ces cônes. On rappelle que  $\mathcal{U} = \mathbb{A}_k^3/\mu_3$  est la variété torique affine correspondant au cône  $\sigma$ , soit  $\mathcal{U} = \text{Spec } k[\chi^r : r \in T^* \cap \sigma^\vee]$ .

Si  $(a, b, c) \in T^*$  (trois entiers tels que 3 divise  $a + b + c$ , donc) alors on notera  $u^a v^b w^c$  l'élément de  $k[\chi^r : r \in T^*]$  égal à  $\chi^{(a,b,c)}$ . Ainsi, on peut écrire  $\mathcal{U} = \text{Spec } k[u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^2w, uvw, v^2w, uw^2, vw^2, w^3]$  et le morphisme  $\mathbb{A}_k^3 \rightarrow \mathbb{A}_k^3/\mu_3 = \mathcal{U}$  est donné par l'inclusion évidente d'anneaux si on écrit  $\mathbb{A}_k^3 = \text{Spec } k[u, v, w]$ . Avec ces notations (et quelques abus évidents), on peut écrire

- $\mathcal{U}_a = \text{Spec } k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_a)^\vee] = \text{Spec } k[u^3, u^{-1}v, u^{-1}w]$
- $\mathcal{U}_b = \text{Spec } k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_b)^\vee] = \text{Spec } k[uv^{-1}, v^3, v^{-1}w]$
- $\mathcal{U}_c = \text{Spec } k[\chi^r : r \in T^* \cap (\sigma_c)^\vee] = \text{Spec } k[uw^{-1}, vw^{-1}, w^3]$

(rappelons que toutes ces variétés sont, non canoniquement,  $k$ -isomorphes à  $\mathbb{A}_k^3$ ).

On appelle  $\varphi: \mathcal{U}_\sharp \rightarrow \mathcal{U} = \mathbb{A}_k^3/\mu_3$  le morphisme obtenu par recollement des morphismes  $\mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{U}_b \rightarrow \mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}_c \rightarrow \mathcal{U}$  correspondant aux inclusions de cônes. Par exemple  $\mathcal{U}_a \rightarrow \mathcal{U}$  est donné par les équations  $u^3 = (u^3)$ ;  $u^2v = (u^3) \cdot (u^{-1}v)$ ;  $u^2w = (u^3) \cdot (u^{-1}w)$ ;  $uv^2 = (u^3) \cdot (u^{-1}v)^2$ ;  $uvw = (u^3) \cdot (u^{-1}v) \cdot (u^{-1}w)$ ;  $uw^2 = (u^3) \cdot (u^{-1}w)^2$ ;  $v^3 = (u^3) \cdot (u^{-1}v)^3$ ;  $v^2w = (u^3) \cdot (u^{-1}v)^2 \cdot (u^{-1}w)$ ;  $vw^2 = (u^3) \cdot (u^{-1}v) \cdot (u^{-1}w)^2$ ;  $w^3 = (u^3) \cdot (u^{-1}w)^3$ . Puisque le support de l'éventail déterminé par  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  est  $\sigma$ , le morphisme  $\varphi$  est (birationnel) propre.

Montrons que  $\varphi$  est un isomorphisme en-dehors du seul point singulier  $O$  de  $\mathcal{U}$  ( $O$  est défini par l'idéal engendré par  $u^3, u^2v, uv^2, v^3, u^2w, uvw, v^2w, uw^2, vw^2, w^3$ ). Pour cela, il suffit de voir que  $\varphi$  est un isomorphisme au-dessus de chacun des ouverts  $u^3 \neq 0$ ,  $v^3 \neq 0$  et  $w^3 \neq 0$  de  $\mathcal{U}$ . Dans  $\mathcal{U}_a$ , l'image réciproque par  $\varphi$  de l'ouvert  $v^3 \neq 0$  s'écrit  $u^{-1}v \neq 0$  et  $v^3 \neq 0$  puisque

$v^3 = (u^3) \cdot (u^{-1}v)^3$ , donc cette image réciproque est contenue dans celle de l'ouvert  $u^3 \neq 0$ , et il en va de même de l'image réciproque de  $w^3 \neq 0$ ; or si  $u^3$  est inversible, on peut exprimer  $u^{-1}v = (u^3)^{-1} \cdot (u^2v)$  et  $u^{-1}w = (u^3)^{-1} \cdot (u^2w)$  ce qui détermine un morphisme, réciproque à  $\varphi$ , de l'ouvert  $u^3 \neq 0$  de  $\mathcal{U}$ , vers  $\mathcal{U}_a$ . De même, dans  $\mathcal{U}_b$  on voit que si l'un quelconque de  $u^3, v^3, w^3$  est inversible, alors  $v^3$  est inversible et les trois coordonnées  $uv^{-1}, v^3, v^{-1}w$  peuvent s'exprimer en utilisant l'inverse de  $v^3$ . Et de même dans  $\mathcal{U}_c$ . Ceci montre que  $\varphi$  est un isomorphisme au-dessus du complémentaire de  $O \in \mathcal{U}$ .

Pour mieux comprendre le morphisme  $\varphi$ , étudions à présent sa fibre  $\mathcal{H}$  au-dessus de  $O$ . Celle-ci est déterminée par les équations suivantes :

- Dans  $\mathcal{U}_a$ , par  $u^3 = 0$ .
- Dans  $\mathcal{U}_b$ , par  $v^3 = 0$ .
- Dans  $\mathcal{U}_c$ , par  $w^3 = 0$ .

Il est alors clair que  $\mathcal{H}$  est isomorphe au  $\mathbb{P}_k^2$  de coordonnées homogènes  $(U_H : V_H : W_H)$  en posant  $u^{-1}w = U_H^{-1}W_H$  et  $u^{-1}v = U_H^{-1}V_H$  dans  $\mathcal{U}_a$ ,  $uv^{-1} = U_HV_H^{-1}$  et  $v^{-1}w = V_H^{-1}W_H$  dans  $\mathcal{U}_b$  et enfin  $uw^{-1} = U_HW_H^{-1}$  et  $vw^{-1} = V_HW_H^{-1}$  dans  $\mathcal{U}_c$ .

En écrivant l'expression de  $w^3$  dans chacun des ouverts  $\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_b, \mathcal{U}_c$  de  $\mathcal{U}$ , on voit que l'image réciproque par  $\varphi$  du fermé  $w^3 = 0$  de  $\mathcal{U}$  est réunion de deux composantes irréductibles :  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}_\sharp$ , avec pour multiplicités respectives 1 et 3, où  $\mathcal{H} = \varphi^{-1}(O)$  a été décrite ci-dessus, et où  $\mathcal{W}_\sharp$  est définie par l'équation  $u^{-1}w = 0$  dans  $\mathcal{U}_a$  et  $v^{-1}w = 0$  dans  $\mathcal{U}_b$  (et elle ne rencontre pas  $\mathcal{U}_c$ ). L'intersection de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}_\sharp$  est le  $\mathbb{P}_k^1$  de coordonnées  $(U_H : V_H)$  défini par  $W_H = 0$  dans  $\mathcal{H}$ .

## 2.3 Étude au voisinage de $\Omega$

La description de la résolution de  $\mathcal{X}/\mu_3$  au voisinage de  $\Omega$  n'est pas strictement nécessaire puisque nous ne considérerons la théorie de l'intersection qu'autour de  $C$ . Néanmoins, comme les calculs sont parallèles à ceux de la section précédente et nous semblent permettre d'éclairer celle-ci, nous avons préféré exposer complètement la résolution effectuée ici.

Plaçons-nous dans l'ouvert  $\mathcal{X}_{\tilde{U} \neq 0}$  de  $\mathcal{X}$  défini par  $\tilde{U} \neq 0$  : appelons  $x_{\tilde{U} \neq 0}, y_{\tilde{U} \neq 0}, z_{\tilde{U} \neq 0}, v_{\tilde{U} \neq 0}$  les coordonnées respectivement  $X/\tilde{U}, Y/\tilde{U}, Z/\tilde{U}, \tilde{V}/\tilde{U}$  sur cet ouvert, qui vérifient  $x_{\tilde{U} \neq 0}^3 + y_{\tilde{U} \neq 0}^3 + \nu z_{\tilde{U} \neq 0}^3 + 1 + \nu v_{\tilde{U} \neq 0}^3 = 0$ . Enfin, considérons le morphisme  $\omega : \mathcal{X}_{\tilde{U} \neq 0} \rightarrow \mathbb{A}_k^4$  défini par  $(x_{\tilde{U} \neq 0}, y_{\tilde{U} \neq 0}, z_{\tilde{U} \neq 0}, v_{\tilde{U} \neq 0}, h) \mapsto (x_{\tilde{U} \neq 0}, y_{\tilde{U} \neq 0}, z_{\tilde{U} \neq 0}, h)$ . De même que précédemment, le morphisme  $\omega$  est étale lorsque  $\tilde{V} \neq 0$ , il passe au quotient par  $\mu_3$  lorsque  $\mu_3$  agit sur  $\mathbb{A}_k^4$  par

$(x, y, z, \tau) \mapsto (\zeta^2 x, \zeta^2 y, \zeta^2 z, \zeta \tau)$ , et le morphisme  $\tilde{\omega}: \mathcal{X}_{\tilde{U} \neq 0}/\mu_3 \rightarrow \mathbb{A}_k^4/\mu_3$  est encore étale pour  $\tilde{V} \neq 0$ .

La variété  $\mathcal{V} = \mathbb{A}_k^4/\mu_3$  a exactement un point singulier  $O$ , correspondant au seul point fixe de l'action de  $\mu_3$  sur  $\mathbb{A}_k^4$ , à savoir  $(0, 0, 0, 0)$ . L'image réciproque de  $O$  par  $\omega$  est  $\Omega$ . On va décrire une flèche  $\phi: \mathcal{V}_b \rightarrow \mathcal{V}$  de désingularisation ( $\phi$  morphisme propre birationnel et  $\mathcal{V}_b$  régulier) qui sera un isomorphisme partout sauf au-dessus de ce point, et on appellera  $\mathcal{Y}_{\tilde{U} \neq 0}$  le produit fibré de  $\mathcal{X}_{\tilde{U} \neq 0}/\mu_3$  avec  $\mathcal{V}_b$  au-dessus de  $\mathcal{V} = \mathbb{A}_k^4/\mu_3$  (par les morphismes  $\tilde{\omega}$  et  $\phi$ ).

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{Y}_{\tilde{U} \neq 0} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{V}_b \\
 \downarrow & & \downarrow \phi \\
 \mathcal{X}_{\tilde{U} \neq 0}/\mu_3 & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \mathbb{A}_k^4/\mu_3 \equiv \mathcal{V}
 \end{array}$$

□

On passe à la description « torique » :  $\mathbb{G}_{m,k}^4$  est le spectre de l'algèbre du réseau  $\mathbb{Z}^4$ . Le quotient par l'action (évidente) de  $\mu_3$  est le spectre de l'algèbre des monômes fixes, c'est-à-dire l'algèbre du réseau  $S^* = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 : 3 \text{ divise } (2a + 2b + 2c + d)\}$  (a pour base :  $(1, 0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0, 1)$ ,  $(0, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 0, 0, 3)$ ). Le réseau dual est  $S_* = \mathbb{Z}^4 + \mathbb{Z} \cdot (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  (a pour base :  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$ ,  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ). Le quotient de  $\mathbb{A}_k^4$  par l'action de  $\mu_3$  est défini par le cône  $\sigma = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) : \alpha, \beta, \gamma, \delta \geq 0\}$  (engendré en tant que cône réel par  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$ ). On voit que ce quotient n'est pas lisse, car  $\sigma \cap S_*$  contient six éléments minimaux,  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 0, 1)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  et  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ , donc n'est pas libre en tant que monoïde commutatif. En revanche, on peut désingulariser en remplaçant  $\sigma$  par un éventail des sept cônes dont la réunion est  $\sigma$  et qui chacun sont engendrés par leurs éléments minimaux, à savoir :

- $\sigma_0$  engendré par  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ .
- $\sigma'_x$  engendré par  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .
- $\sigma_x$  engendré par  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$ .
- $\sigma'_y$  engendré par  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .
- $\sigma_y$  engendré par  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$ .
- $\sigma'_z$  engendré par  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  et  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ .
- $\sigma_z$  engendré par  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  et  $(0, 0, 0, 1)$ .

On appellera  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}'_x, \mathcal{V}_x, \mathcal{V}'_y, \mathcal{V}_y, \mathcal{V}'_z, \mathcal{V}_z$  les variétés toriques affines lisses correspondant à ces cônes (par exemple,  $\mathcal{V}_0 = \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_0)^\vee]$ ), et  $\mathcal{V}_b$  leur recollement selon les variétés toriques affines définies par les intersections de ces cônes. On rappelle que  $\mathcal{V} = \mathbb{A}_k^4/\mu_3$  est la variété torique affine correspondant au cône  $\sigma$ , soit  $\mathcal{V} = \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap \sigma^\vee]$ .

Si  $(a, b, c, d) \in S^*$  (quatre entiers tels que 3 divise  $2a + 2b + 2c + d$ , donc) alors on notera  $x^a y^b z^c \tau^d$  l'élément de  $k[\chi^r : r \in S^*]$  égal à  $\chi^{(a,b,c,d)}$ . Ainsi, on peut écrire  $\mathcal{V} = \text{Spec } k[x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^2z, xyz, y^2z, xz^2, yz^2, z^3, x\tau, y\tau, z\tau, \tau^3]$  et le morphisme  $\mathbb{A}_k^4 \rightarrow \mathbb{A}_k^4/\mu_3 = \mathcal{V}$  est donné par l'inclusion évidente d'anneaux si on écrit  $\mathbb{A}_k^4 = \text{Spec } k[x, y, z, \tau]$ . Avec ces notations (et quelques abus évidents), on peut écrire

$$\begin{aligned} - \mathcal{V}_0 &= \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_0)^\vee] = \text{Spec } k[x\tau^{-2}, y\tau^{-2}, z\tau^{-2}, \tau^3] \\ - \mathcal{V}'_x &= \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma'_x)^\vee] = \text{Spec } k[x^2\tau^{-1}, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-1}\tau^2] \\ - \mathcal{V}_x &= \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_x)^\vee] = \text{Spec } k[x^3, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-2}\tau] \\ - \mathcal{V}'_y &= \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma'_y)^\vee] = \text{Spec } k[xy^{-1}, y^2\tau^{-1}, y^{-1}z, y^{-1}\tau^2] \\ - \mathcal{V}_y &= \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_y)^\vee] = \text{Spec } k[xy^{-1}, y^3, y^{-1}z, y^{-2}\tau] \\ - \mathcal{V}'_z &= \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma'_z)^\vee] = \text{Spec } k[xz^{-1}, yz^{-1}, z^2\tau^{-1}, z^{-1}\tau^2] \\ - \mathcal{V}_z &= \text{Spec } k[\chi^r : r \in S^* \cap (\sigma_z)^\vee] = \text{Spec } k[xz^{-1}, yz^{-1}, z^3, z^{-2}\tau] \end{aligned}$$

(rappelons que toutes ces variétés sont, non canoniquement,  $k$ -isomorphes à  $\mathbb{A}_k^4$ ).

On appelle  $\phi: \mathcal{V}_b \rightarrow \mathcal{V}$  le morphisme obtenu par recollement des morphismes  $\mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}$  et semblables correspondant aux inclusions de cônes. Par exemple  $\mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}$  est donné par les équations  $x^3 = (x\tau^{-2})^3 \cdot (\tau^3)^2$ ;  $x^2y = (x\tau^{-2})^2 \cdot (y\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$ ;  $xy^2 = (x\tau^{-2}) \cdot (y\tau^{-2})^2 \cdot (\tau^3)^2$ ;  $y^3 = (y\tau^{-2})^3 \cdot (\tau^3)^2$ ;  $x^2z = (x\tau^{-2})^2 \cdot (z\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$ ;  $xyz = (x\tau^{-2}) \cdot (y\tau^{-2}) \cdot (z\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$ ;  $y^2z = (y\tau^{-2})^2 \cdot (z\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)^2$ ;  $xz^2 = (x\tau^{-2}) \cdot (z\tau^{-2})^2 \cdot (\tau^3)^2$ ;  $yz^2 = (y\tau^{-2}) \cdot (z\tau^{-2})^2 \cdot (\tau^3)^2$ ;  $z^3 = (z\tau^{-2})^3 \cdot (\tau^3)^2$ ;  $x\tau = (x\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)$ ;  $y\tau = (y\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)$ ;  $z\tau = (z\tau^{-2}) \cdot (\tau^3)$ ;  $\tau^3 = (\tau^3)$ . Puisque le support de l'éventail déterminé par  $\sigma_0, \sigma'_x, \sigma_x, \sigma'_y, \sigma_y, \sigma'_z, \sigma_z$  est  $\sigma$ , le morphisme  $\phi$  est (birationnel) propre.

De même que précédemment,  $\phi$  est un isomorphisme en-dehors du seul point singulier  $O$  de  $\mathcal{V}$ .

Pour mieux comprendre le morphisme  $\phi$ , étudions à présent sa fibre  $\mathcal{H}$  au-dessus de  $O$ . Celle-ci est déterminée par les équations suivantes :

- Dans  $\mathcal{V}_0$ , par  $\tau^3 = 0$ .
- Dans  $\mathcal{V}'_x$ , par  $(x^{-1}\tau^2) \cdot (x^2\tau^{-1}) = 0$ .
- Dans  $\mathcal{V}_x$ , par  $x^3 = 0$ .
- Dans  $\mathcal{V}'_y$ , par  $(y^{-1}\tau^2) \cdot (y^2\tau^{-1}) = 0$ .
- Dans  $\mathcal{V}_y$ , par  $y^3 = 0$ .

- Dans  $\mathcal{V}'_z$ , par  $(z^{-1}\tau^2) \cdot (z^2\tau^{-1}) = 0$ .
- Dans  $\mathcal{V}_z$ , par  $z^3 = 0$ .

Il est alors aisé de voir que  $\mathcal{K}$  a exactement deux composantes irréductibles, que nous noterons  $\mathcal{K}_3$  et  $\mathcal{K}_\ell$  : précisément,

- $\mathcal{K}_3$  ne rencontre pas  $\mathcal{V}_x$  ni  $\mathcal{V}_y$  ni  $\mathcal{V}_z$  et a pour équation  $\tau^3 = 0$  dans  $\mathcal{V}_0$ ,  $x^2\tau^{-1} = 0$  dans  $\mathcal{V}'_x$ ,  $y^2\tau^{-1} = 0$  dans  $\mathcal{V}'_y$  et  $z^2\tau^{-1} = 0$  dans  $\mathcal{V}'_z$ .
- $\mathcal{K}_\ell$  ne rencontre pas  $\mathcal{V}_0$  et a pour équation  $x^{-1}\tau^2 = 0$  dans  $\mathcal{V}'_x$ ,  $x^3 = 0$  dans  $\mathcal{V}_x$ ,  $y^{-1}\tau^2 = 0$  dans  $\mathcal{V}'_y$ ,  $y^3 = 0$  dans  $\mathcal{V}_y$ ,  $z^{-1}\tau^2 = 0$  dans  $\mathcal{V}'_z$  et  $z^3 = 0$  dans  $\mathcal{V}_z$ .

Alors  $\mathcal{K}_3$  est isomorphe à  $\mathbb{P}_k^3$  de coordonnées homogènes  $(X_3 : Y_3 : Z_3 : T_3)$  en posant  $x\tau^{-2} = X_3T_3^{-1}$ ,  $y\tau^{-2} = Y_3T_3^{-1}$  et  $z\tau^{-2} = Z_3T_3^{-1}$  dans  $\mathcal{V}_0$ ,  $x^{-1}y = X_3^{-1}Y_3$ ,  $x^{-1}z = X_3^{-1}Z_3$  et  $x^{-1}\tau^2 = X_3^{-1}T_3$  dans  $\mathcal{V}'_x$ ,  $xy^{-1} = X_3Y_3^{-1}$ ,  $y^{-1}z = Y_3^{-1}Z_3$  et  $y^{-1}\tau^2 = Y_3^{-1}T_3$  dans  $\mathcal{V}'_y$ , et enfin  $xz^{-1} = X_3Z_3^{-1}$ ,  $yz^{-1} = Y_3Z_3^{-1}$  et  $z^{-1}\tau^2 = Z_3^{-1}T_3$  dans  $\mathcal{V}'_z$ . Quant à  $\mathcal{K}_\ell$ , il possède un morphisme  $\mathcal{K}_\ell \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  vers le  $\mathbb{P}_k^2$  de coordonnées homogènes  $(X_\ell : Y_\ell : Z_\ell)$ , défini en envoyant un point  $(x^2\tau^{-1}, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-1}\tau^2)$  de  $\mathcal{V}'_x$  ou bien  $(x^3, x^{-1}y, x^{-1}z, x^{-2}\tau)$  de  $\mathcal{V}_x$  vers  $(1 : x^{-1}y : x^{-1}z) \in \mathbb{P}_k^2$ , et de même dans  $\mathcal{V}'_y$  et  $\mathcal{V}_y$  (envoyer vers  $(xy^{-1} : 1 : y^{-1}z)$ ) et dans  $\mathcal{V}'_z$  et  $\mathcal{V}_z$  (envoyer vers  $(xz^{-1} : yz^{-1} : 1)$ ); la fibre de ce morphisme  $\mathcal{K}_\ell \rightarrow \mathbb{P}_k^2$  est un  $\mathbb{P}^1$ , donc  $\mathcal{K}_\ell$  est un fibré en  $\mathbb{P}^1$  sur  $\mathbb{P}_k^2$ . L'intersection de  $\mathcal{K}_3$  et  $\mathcal{K}_\ell$  est un  $\mathbb{P}_k^2$ , défini dans  $\mathcal{K}_3$  par  $T_3 = 0$  et section du morphisme  $\mathcal{K}_\ell \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ .

En écrivant l'expression de  $\tau^3$  dans chacun des ouverts  $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}'_x, \mathcal{V}_x, \mathcal{V}'_y, \mathcal{V}_y, \mathcal{V}'_z, \mathcal{V}_z$ , on voit que l'image réciproque par  $\phi$  du fermé  $\tau^3 = 0$  de  $\mathcal{V}$  est réunion de trois composantes irréductibles :  $\mathcal{K}_3$  avec multiplicité 1,  $\mathcal{K}_\ell$  avec multiplicité 2, et une troisième composante  $\mathcal{W}_b$  avec multiplicité 3, cette composante  $\mathcal{W}_b$  étant définie par l'équation  $x^{-2}\tau = 0$  dans  $\mathcal{V}_x$ ,  $y^{-2}\tau = 0$  dans  $\mathcal{V}_y$  et  $z^{-2}\tau = 0$  dans  $\mathcal{V}_z$ . L'intersection de  $\mathcal{K}_3$  avec  $\mathcal{W}_b$  est vide, tandis que celle de  $\mathcal{K}_\ell$  avec  $\mathcal{W}_b$  est un  $\mathbb{P}_k^2$  section du morphisme  $\mathcal{K}_\ell \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ , distincte de, et ne rencontrant pas, la section définie par l'intersection avec  $\mathcal{K}_3$ .

## 2.4 Recollement

À ce stade-là, nous avons défini des désingularisations de différents ouverts de  $\mathcal{X}/\mu_3$  : à savoir,  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$ , (et  $\mathcal{Y}_{Y \neq 0}$  et  $\mathcal{Y}_{Z \neq 0}$  définis de façon exactement analogue) ainsi que  $\mathcal{Y}_{\tilde{U} \neq 0}$  (on pourrait aussi définir  $\mathcal{Y}_{\tilde{V} \neq 0}$ , mais cela ne présente pas d'intérêt vu que le seul point singulier de  $\mathcal{X}/\mu_3$  vérifiant  $\tilde{V} \neq 0$ , à savoir  $\Omega$ , vérifie aussi  $\tilde{U} \neq 0$ ). Il va s'agir d'expliquer pourquoi ces différents

morceaux se recollent en un unique  $\Phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}/\mu_3$  (cette flèche étant alors propre et birationnelle, comme chacune des flèches qu'on a recollées). Mais dans l'immédiat, admettons ce point et expliquons pourquoi  $\mathcal{Y}$  est bien régulier. On a vu précédemment que la flèche  $\psi_{X \neq 0}: \mathcal{X}_{X \neq 0}/\mu_3 \rightarrow \mathbb{A}_k^3/\mu_3 = \mathcal{U}$  était lisse sur la réunion des ouverts  $Y \neq 0$  et  $Z \neq 0$ ; en tirant par  $\varphi: \mathcal{U}_\# \rightarrow \mathcal{U}$ , on en déduit que  $\mathcal{Y}_{X \neq 0} \rightarrow \mathcal{U}_\#$  est lisse sur cette même réunion, donc que  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$  l'est. Après recollement, on voit que  $\mathcal{Y}$  est lisse au moins sur la réunion des intersections deux à deux des ouverts  $X \neq 0$ ,  $Y \neq 0$  et  $Z \neq 0$ ; or comme cette réunion contient (l'image réciproque de) la courbe  $C$  (rappelons qu'elle est définie par  $X^3 + Y^3 + \nu Z^3 = 0$  avec  $\tilde{U} = \tilde{V} = 0$  et  $h = 0$ ),  $\mathcal{Y}$  est lisse au moins au-dessus de  $C$ . De même, grâce à  $\mathcal{Y}_{\tilde{U} \neq 0}$ , on peut dire que  $\mathcal{Y}$  est lisse au-dessus de  $\Omega$ . Comme  $C$  et  $\Omega$  sont les seuls lieux singuliers de  $\mathcal{X}/\mu_3$  et qu'ailleurs  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}/\mu_3$  est un isomorphisme, on a bien la lissité de  $\mathcal{Y}$  partout.

Pour recoller les différents  $\mathcal{Y}_\bullet$ , le plus simple est encore d'introduire des coordonnées. Commençons par  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$ ,  $\mathcal{Y}_{Y \neq 0}$  et  $\mathcal{Y}_{Z \neq 0}$ . D'après la description qu'on a faite de  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$ , il est réunion de trois ouverts,  $\mathcal{Y}_{X \neq 0, a}$ ,  $\mathcal{Y}_{X \neq 0, b}$ ,  $\mathcal{Y}_{X \neq 0, c}$ , décrits respectivement comme

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{X \neq 0, a} &= \text{Spec } k[y_{X \neq 0}, z_{X \neq 0}, (u^3)_{X \neq 0}, (u^{-1}v)_{X \neq 0}, (u^{-1}w)_{X \neq 0}] \\ &\quad / (1 + y_{X \neq 0}^3 + \nu z_{X \neq 0}^3 + (u^3)_{X \neq 0} + \nu(u^3)_{X \neq 0} (u^{-1}v)_{X \neq 0}^3) \\ \mathcal{Y}_{X \neq 0, b} &= \text{Spec } k[y_{X \neq 0}, z_{X \neq 0}, (uv^{-1})_{X \neq 0}, (v^3)_{X \neq 0}, (v^{-1}w)_{X \neq 0}] \\ &\quad / (1 + y_{X \neq 0}^3 + \nu z_{X \neq 0}^3 + (uv^{-1})_{X \neq 0}^3 (v^3)_{X \neq 0} + \nu(v^3)_{X \neq 0}) \\ \mathcal{Y}_{X \neq 0, c} &= \text{Spec } k[y_{X \neq 0}, z_{X \neq 0}, (uw^{-1})_{X \neq 0}, (vw^{-1})_{X \neq 0}, (w^3)_{X \neq 0}] \\ &\quad / (1 + y_{X \neq 0}^3 + \nu z_{X \neq 0}^3 + (uw^{-1})_{X \neq 0}^3 (w^3)_{X \neq 0} + \nu(vw^{-1})_{X \neq 0}^3 (w^3)_{X \neq 0}) \end{aligned}$$

et on a une description semblable de  $\mathcal{Y}_{Y \neq 0}$  et  $\mathcal{Y}_{Z \neq 0}$  comme réunion de trois ouverts. Ces descriptions sont fastidieuses à écrire, mais suggèrent immédiatement les formules de recollement : par exemple, sur l'intersection de  $\mathcal{Y}_{X \neq 0, a}$  et  $\mathcal{Y}_{Y \neq 0, a}$ , qui peut également se décrire comme l'ouvert  $y_{X \neq 0} \neq 0$  de  $\mathcal{Y}_{X \neq 0, a}$ , on a (en utilisant simplement les formules semblables pour la transition entre les ouverts  $X \neq 0$  et  $Y \neq 0$  de  $\mathcal{X}$ )

$$\begin{aligned} x_{Y \neq 0} &= y_{X \neq 0}^{-1} \\ z_{Y \neq 0} &= y_{X \neq 0}^{-1} z_{X \neq 0} \\ (u^3)_{Y \neq 0} &= y_{X \neq 0}^{-3} (u^3)_{X \neq 0} \\ (u^{-1}v)_{Y \neq 0} &= (u^{-1}v)_{X \neq 0} \\ (u^{-1}w)_{Y \neq 0} &= y_{X \neq 0} (u^{-1}w)_{X \neq 0} \end{aligned}$$



et, pour prendre un autre exemple, sur l'intersection de  $\mathcal{Y}_{X \neq 0, a}$  et  $\mathcal{Y}_{Z \neq 0, c}$ , où  $z_{X \neq 0}$  et  $(u^{-1}w)_{X \neq 0}$  sont inversibles, on a (en utilisant de plus les formules de transition données par la description torique)

$$\begin{aligned} x_{Z \neq 0} &= z_{X \neq 0}^{-1} \\ y_{Z \neq 0} &= z_{X \neq 0}^{-1} y_{X \neq 0} \\ (uw^{-1})_{Z \neq 0} &= z_{X \neq 0}^{-1} (u^{-1}w)_{X \neq 0}^{-1} \\ (vw^{-1})_{Z \neq 0} &= z_{X \neq 0}^{-1} (u^{-1}w)_{X \neq 0}^{-1} (u^{-1}v)_{X \neq 0} \\ (w^3)_{Z \neq 0} &= (u^{-1}w)_{X \neq 0}^3 (u^3)_{X \neq 0} \end{aligned}$$

Bref, il n'y a pas de difficulté à recoller  $\mathcal{Y}_{X \neq 0}$ ,  $\mathcal{Y}_{Y \neq 0}$  et  $\mathcal{Y}_{Z \neq 0}$  en écrivant chacun comme la réunion des trois ouverts fournis par la description torique. Ceci fournit la description de  $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}/\mu_3$  au voisinage de  $C$ . (Le lecteur qui ne voudrait pas vérifier la totalité des calculs peut observer qu'on est simplement en train de décrire un fibré en  $\mathbb{P}^2$  sur  $C$ , à savoir la fibre de  $\mathcal{Y}$  au-dessus de  $C$ .)

La description au-dessus de  $\Omega$  est plus facile, puisque  $\mathcal{Y}_{\tilde{U} \neq 0}$  y participe seul. Comme  $\Omega$  ne rencontre pas  $C$  et que nos résolutions sont des isomorphismes partout ailleurs qu'au-dessus de  $\Omega$  et  $C$ , il n'y a pas de problème à recoller la résolution au-dessus de  $C$  et celle au-dessus de  $\Omega$  et compléter pour recouvrir tout  $\mathcal{X}/\mu_3$ .

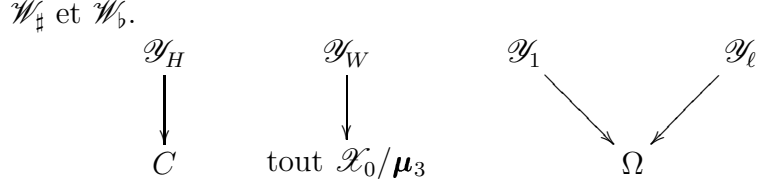
Finalement, on a obtenu une flèche  $\Phi: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}/\mu_3$ , propre et birationnelle avec  $\mathcal{Y}$  lisse. Ce  $\mathcal{Y}$  est le modèle recherché.

Le morphisme  $t = h^3: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$  a une fibre  $\mathcal{Y}_0$  ( $h^3 = 0$ ) formée de quatre composantes irréductibles (rappelons que  $h^3$  vaut  $w^3$  dans  $\mathcal{U}$  et  $\tau^3$  dans  $\mathcal{V}$ ) :

- Un fibré en  $\mathbb{P}^2$  sur  $C$ , que nous noterons  $\mathcal{Y}_H$ , avec multiplicité 1. Cette composante est située au-dessus de  $C$ . Il s'agit de la composante correspondant à  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{U}_4$ .
- Une composante  $\mathcal{Y}_1$  qui n'est autre que  $\mathbb{P}_\Omega^3$  (c'est-à-dire le produit fibré de  $\mathbb{P}_k^2$  avec  $\Omega = \text{Spec } k[\sqrt[3]{\nu}]$  au-dessus de  $\text{Spec } k$ ), avec multiplicité 1. Cette composante est située au-dessus de  $\Omega$ . Il s'agit de la composante correspondant à  $\mathcal{K}_3 \subseteq \mathcal{V}_6$ .
- Une composante  $\mathcal{Y}_l$  qui est un fibré en  $\mathbb{P}^1$  sur  $\mathbb{P}_\Omega^2$ , avec multiplicité 2. Cette composante est située au-dessus de  $\Omega$ . Il s'agit de la composante correspondant à  $\mathcal{K}_l \subseteq \mathcal{V}_6$ .
- Enfin, une composante « horizontale<sup>2</sup> »,  $\mathcal{Y}_W$  — qui sera décrite plus loin —, avec multiplicité 3. Il s'agit de la composante correspondant à

---

<sup>2</sup>Le mot « horizontal » s'entend ici par rapport à la désingularisation  $\Phi$  restreinte à la



Toutes ces composantes sont lisses (une fois réduites). L'intersection de  $\mathcal{Y}_H$  avec  $\mathcal{Y}_W$  est un fibré en  $\mathbb{P}^1$  sur  $C$  (on verra en fait qu'il est le fibré trivial  $C \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$ ), celle de  $\mathcal{Y}_1$  avec  $\mathcal{Y}_W$  est un  $\mathbb{P}_\Omega^2$ , ainsi que l'intersection de  $\mathcal{Y}_1$  avec  $\mathcal{Y}_\ell$ . Toutes les autres intersections sont vides.

**Remarque :** Comme nous l'a signalé le rapporteur, on peut interpréter de façon simple le fait que  $\mathcal{Y}_H$  est un fibré en  $\mathbb{P}^2$  sur  $C$ . En effet, si l'on éclate  $C$  dans  $\mathcal{X}$ , le diviseur exceptionnel  $E$  dans cet éclaté  $\tilde{\mathcal{X}}$  est laissé fixe par l'action de  $\mu_3$  : ainsi,  $\tilde{\mathcal{X}}/\mu_3$  est lisse au voisinage de l'image de  $E$ , qui s'identifie à  $\mathcal{Y}_H$ , donc ce dernier est un fibré en  $\mathbb{P}^2$ . Cette remarque permet également de relier le fibré normal de  $\mathcal{Y}_H$  dans  $\mathcal{Y}$  à celui de  $E$  dans  $\tilde{\mathcal{X}}$ , ce qui donne une démonstration différente du fait que la flèche  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_H) \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  qui sera définie dans la section 2.6 plus bas a une image dans  $3\text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$ .

## 2.5 Description de $\mathcal{Y}_W$

Considérons  $C$  plongée dans le  $\mathbb{P}_k^2$  de coordonnées homogènes  $(X_\dagger : Y_\dagger : Z_\dagger)$  par l'équation  $X_\dagger^3 + Y_\dagger^3 + \nu Z_\dagger^3 = 0$ , et  $\Omega$  plongé dans le  $\mathbb{P}_k^1$  de coordonnées homogènes  $(U_* : V_*)$  par l'équation  $U_*^3 + \nu V_*^3 = 0$ . On appelle  $\mathcal{E}$  l'éclaté du produit  $\mathbb{P}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$  le long de  $C \times \Omega$  ainsi plongé. Nous nous proposons de prouver que  $\mathcal{E}$  est isomorphe à  $\mathcal{Y}_W$ .

Pour voir cela, commençons par décrire précisément  $\mathcal{Y}_W$  comme la réunion de neuf ouverts : la première colonne du tableau suivant donne les noms de ces ouverts, la seconde colonne donne les coordonnées, et la troisième donne les équations satisfaites par ces coordonnées (pour des raisons de place, on a omis systématiquement les indices  $X \neq 0$ ,  $Y \neq 0$ ,  $Z \neq 0$  et  $\tilde{U} \neq 0$  à comprendre sous chacune des coordonnées à l'identique de ce qui est porté par le nom de l'ouvert) :

---

fibre spéciale, non pas par rapport au morphisme  $t = h^3$  car  $\mathcal{Y}_W$  est bien inclus dans la fibre  $\mathcal{Y}_0$  de  $t$ .

Ouvert	Coordonnées	Équation
$\mathcal{Y}_{W,X \neq 0,a}$	$y, z, (u^3), (u^{-1}v)$	$1 + y^3 + \nu z^3 + (u^3)(1 + \nu(u^{-1}v)^3) = 0$
$\mathcal{Y}_{W,X \neq 0,b}$	$y, z, (uv^{-1}), (v^3)$	$1 + y^3 + \nu z^3 + (v^3)((uv^{-1})^3 + \nu) = 0$
$\mathcal{Y}_{W,Y \neq 0,a}$	$x, z, (u^3), (u^{-1}v)$	$x^3 + 1 + \nu z^3 + (u^3)(1 + \nu(u^{-1}v)^3) = 0$
$\mathcal{Y}_{W,Y \neq 0,b}$	$x, z, (uv^{-1}), (v^3)$	$x^3 + 1 + \nu z^3 + (v^3)((uv^{-1})^3 + \nu) = 0$
$\mathcal{Y}_{W,Z \neq 0,a}$	$x, y, (u^3), (u^{-1}v)$	$x^3 + y^3 + \nu + (u^3)(1 + \nu(u^{-1}v)^3) = 0$
$\mathcal{Y}_{W,Z \neq 0,b}$	$x, y, (uv^{-1}), (v^3)$	$x^3 + y^3 + \nu + (v^3)((uv^{-1})^3 + \nu) = 0$
$\mathcal{Y}_{W,\tilde{U} \neq 0,x}$	$(x^3), (x^{-1}y), (x^{-1}z), v$	$(x^3)(1 + (x^{-1}y)^3 + \nu(x^{-1}z)^3) + 1 + \nu v^3 = 0$
$\mathcal{Y}_{W,\tilde{U} \neq 0,y}$	$(xy^{-1}), (y^3), (y^{-1}z), v$	$(y^3)((xy^{-1})^3 + 1 + \nu(y^{-1}z)^3) + 1 + \nu v^3 = 0$
$\mathcal{Y}_{W,\tilde{U} \neq 0,z}$	$(xz^{-1}), (yz^{-1}), (z^3), v$	$(z^3)((xz^{-1})^3 + (yz^{-1}) + \nu) + 1 + \nu v^3 = 0$

(Insistons sur le fait que les formules de passage de coordonnées d'un ouvert à un autre ont été données plus haut. Par exemple, rappelons que  $z_{Y \neq 0} = y_{X \neq 0}^{-1} z_{X \neq 0}$  — il ne faut pas se laisser induire en erreur par le fait que les indices  $X \neq 0$  et  $Y \neq 0$  ont été supprimés dans le tableau ci-dessus.)

On peut alors décrire des morphismes de chacun de ces ouverts vers  $\mathbb{P}_k^2$  d'une part, et vers  $\mathbb{P}_k^1$  de l'autre : la deuxième et la troisième colonne du tableau suivant donnent les coordonnées de ces morphismes :

Ouvert	$(X_{\dagger} : Y_{\dagger} : Z_{\dagger})$	$(U_* : V_*)$
$\mathcal{Y}_{W,X \neq 0,a}$	$(1 : y : z)$	$(1 : u^{-1}v)$
$\mathcal{Y}_{W,X \neq 0,b}$	$(1 : y : z)$	$(uv^{-1} : 1)$
$\mathcal{Y}_{W,Y \neq 0,a}$	$(x : 1 : z)$	$(1 : u^{-1}v)$
$\mathcal{Y}_{W,Y \neq 0,b}$	$(x : 1 : z)$	$(uv^{-1} : 1)$
$\mathcal{Y}_{W,Z \neq 0,a}$	$(x : y : 1)$	$(1 : u^{-1}v)$
$\mathcal{Y}_{W,Z \neq 0,b}$	$(x : y : 1)$	$(uv^{-1} : 1)$
$\mathcal{Y}_{W,\tilde{U} \neq 0,x}$	$(1 : x^{-1}y : x^{-1}z)$	$(1 : v)$
$\mathcal{Y}_{W,\tilde{U} \neq 0,y}$	$(xy^{-1} : 1 : y^{-1}z)$	$(1 : v)$
$\mathcal{Y}_{W,\tilde{U} \neq 0,z}$	$(xz^{-1} : yz^{-1} : 1)$	$(1 : v)$

Il est clair que ces morphismes se recollent bien et définissent donc une flèche  $\Gamma : \mathcal{Y}_W \rightarrow \mathbb{P}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$ . Cette flèche est surjective et de plus, en-dehors de  $C \times \Omega$ , c'est un isomorphisme, puisque dans ces conditions chacune des équations figurant dans la troisième colonne du premier tableau ci-dessus se résout de façon unique en la variable restante (respectivement  $(u^3)_{X \neq 0}$ ,  $(v^3)_{X \neq 0}$ ,  $(u^3)_{Y \neq 0}$ ,  $(v^3)_{Y \neq 0}$ ,  $(u^3)_{Z \neq 0}$ ,  $(v^3)_{Z \neq 0}$ ,  $(x^3)_{\tilde{U} \neq 0}$ ,  $(y^3)_{\tilde{U} \neq 0}$ ,  $(z^3)_{\tilde{U} \neq 0}$ ).

Reste enfin à voir que  $\Gamma$  se factorise (de façon automatiquement unique) par l'éclatement  $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{P}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$  et que la flèche  $\tilde{\Gamma}$  ainsi obtenue est un isomorphisme. Or cela peut se voir ouvert par ouvert. Sur l'ouvert  $\mathcal{Y}_{W,X \neq 0,a}$ , par exemple, l'équation  $1 + y_{X \neq 0}^3 + \nu z_{X \neq 0}^3 + (u^3)_{X \neq 0}(1 + \nu(u^{-1}v)_{X \neq 0}^3) = 0$  définit bien un ouvert de l'éclaté du lieu d'équations  $1 + y_{X \neq 0}^3 + \nu z_{X \neq 0}^3 = 0$  et

$1 + \nu(u^{-1}v)_{X \neq 0}^3$  dans  $\mathbb{A}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{A}_k^1$  (de coordonnées  $(y_{X \neq 0}, z_{X \neq 0})$  et  $((u^{-1}v)_{X \neq 0})$  respectivement). On vérifie aisément que tous ces ouverts recouvrent bien  $\mathcal{E}$ .

Finalement, on a bien trouvé un isomorphisme  $\tilde{\Gamma}: \mathcal{Y}_W \rightarrow \mathcal{E}$ .

**Remarque :** Comme nous l'a signalé le rapporteur, on peut retrouver de façon différente le fait que  $\mathcal{Y}_W$  est l'éclaté de  $C \times \Omega$  dans  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ . En effet, la décomposition en espaces propres de l'action de  $\mu_3$  sur  $\mathbb{P}^4$  définit une application birationnelle entre ce dernier et un fibré en  $\mathbb{P}^1$  sur  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ , l'action de  $\mu_3$  sur ce dernier préservant la projection vers  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  : quotienter ce fibré par  $\mu_3$  revient donc à élever au cube le torseur sous  $\mathbb{G}_m$  qui lui est associé. L'hypersurface cubique, tirée à ce torseur, y définit donc un diviseur de Cartier,  $\mathcal{Y}_W$ , qui est de degré relatif 1 sur  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  et plat sur lui hors de  $C \times \Omega$ . Ceci permet de voir que  $\mathcal{Y}_W$  est bien l'éclaté annoncé.

Au passage, on peut observer que, à l'intérieur de  $\mathcal{E}$ , l'intersection de  $\mathcal{Y}_H$  et  $\mathcal{Y}_W$  se voit comme le lieu d'équation  $X_{\dagger}^3 + Y_{\dagger}^3 + \nu Z_{\dagger}^3 = 0$ , c'est donc précisément  $C \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$  (vu comme le transformé propre de  $C \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$  dans  $\mathcal{E}$ ).

## 2.6 Considérations sur les groupes de Chow

On appelle  $\text{CH}_d$  le groupe de Chow des  $d$ -cycles modulo équivalence rationnelle. On s'intéresse à la flèche

$$\text{CH}_1(\mathcal{Y}_H) \oplus \text{CH}_1(\mathcal{Y}_1) \oplus \text{CH}_1(\mathcal{Y}_\ell) \oplus \text{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$$

ainsi obtenue : partant d'un 1-cycle dans une des composantes irréductibles de la fibre spéciale  $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_H + \mathcal{Y}_1 + 2\mathcal{Y}_\ell + 3\mathcal{Y}_W$  de  $\mathcal{Y}$  (pour le morphisme  $t = h^3: \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ ), on le pousse (cf. [6], §1.4) en un 1-cycle sur  $\mathcal{Y}$  tout entier, qu'on intersecte (cf. [6], §2.3 et §2.6) avec  $\mathcal{Y}_H$  pour obtenir un 0-cycle sur cette dernière. On cherche à montrer que l'image de la flèche ci-dessus n'attrape pas tous les 0-cycles de degré 0. Remarquons que  $\text{CH}_0(\mathcal{Y}_H) \cong \text{Pic}(C)$  avec le degré habituel (cf. [6], théorème 3.3).

Les flèches  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_1) \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  et  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_\ell) \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  sont nulles car  $\mathcal{Y}_H$  ne rencontre pas  $\mathcal{Y}_1$  ni  $\mathcal{Y}_\ell$ .

Pour ce qui est de la flèche  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$ , observons que  $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_H + \mathcal{Y}_1 + 2\mathcal{Y}_\ell + 3\mathcal{Y}_W \sim 0$ , donc (comme  $\mathcal{Y}_0$ , la fibre spéciale, est un diviseur principal, et en utilisant la formule d'auto-intersection, cf. [6], proposition 2.6(c)) après intersection avec  $\mathcal{Y}_H$ , l'image de  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  tombe dans  $3 \text{Pic}(C)$ .

D'après [6], théorème 6.2 ((a) et (c) ainsi que la remarque 6.2.1 qui suit), la flèche  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \rightarrow \text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  peut être décrite comme la flèche d'intersection

dans  $\mathcal{Y}_W$  avec  $\mathcal{Y}_H \cap \mathcal{Y}_W$  (qui tombe dans  $\text{CH}_0(\mathcal{Y}_H \cap \mathcal{Y}_W)$ , et poussée ensuite à  $\text{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$ ).

Or, d'après la description vue précédemment (et en utilisant [6], proposition 6.7 notamment (e)),  $\text{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \text{Pic}(C \times \Omega)$ , les trois facteurs étant représentés respectivement par : un  $\{p\} \times \mathbb{P}_k^1$  avec  $p$  un point  $k$ -rationnel de  $\mathbb{P}_k^2$  non situé sur  $C$ , un  $l \times \{p\}$  avec  $p$  un point  $k$ -rationnel de  $\mathbb{P}_k^1$  (donc différent de  $\Omega$ ) et  $l$  une droite  $k$ -rationnelle de  $\mathbb{P}_k^2$ , et enfin  $\pi^*D$  avec  $D$  diviseur sur  $C \times \Omega$  et  $\pi$  la projection sur  $C \times \Omega$  depuis le lieu exceptionnel de  $\mathcal{E}$ . Pour chacun de ces trois sortes de 1-cycle, la flèche correspondante vers  $\text{CH}_0(\mathcal{Y}_H) \cong \text{Pic}(C)$  se calcule aisément : dans le premier cas, l'image est nulle, dans le second cas, on obtient la classe d'une droite (qui est nulle dans  $\text{Pic}(C)/3\text{Pic}(C)$ ) ; dans le troisième, la flèche définie est la norme  $\text{Pic}(C \times \Omega) \rightarrow \text{Pic}(C)$  : expliquons brièvement pourquoi.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
& & C \times \Omega & & \\
& i_1 \swarrow & & \searrow h & \\
\text{exc} & \xrightarrow{i'} & \mathcal{E} & \xleftarrow{\tilde{i}_0} & C \times \mathbb{P}^1 \\
\pi \downarrow & \square & \downarrow & & \parallel \\
C \times \Omega & \xrightarrow{i} & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 & \xleftarrow{i_0} & C \times \mathbb{P}^1 \\
& & & & \downarrow q \\
& & & & C
\end{array}$$

(ici,  $\text{exc}$  désigne le diviseur exceptionnel de  $\mathcal{E}$  — ce dernier étant identifié à  $\mathcal{Y}_W$  —, et  $C \times \mathbb{P}^1$  est  $\mathcal{Y}_H \cap \mathcal{Y}_W$ , on a déjà expliqué que c'était le transformé propre de  $C \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}_k^2 \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^1$  dans  $\mathcal{E}$ ). Partant d'un 0-cycle  $D$  sur  $C \times \Omega$ , on construit  $q_* \tilde{i}_0^* i'_* \pi^* D$  : or, d'après les références déjà citées ([6], théorème 6.2), c'est  $q_* h_* i_1^* \pi^* D$ . Mais  $i_1 \pi = 1_{C \times \Omega}$ , donc c'est  $q_* h_* D$ , et comme  $qh: C \times \Omega \rightarrow C$  est la projection, ceci donne bien la flèche de norme attendue.

## 2.7 Non surjectivité de la norme

Rappelons que  $k = \mathbb{C}(\nu)$ . Notons  $K = k(\sqrt[3]{\nu})$ , de sorte que  $\Omega = \text{Spec } K$ .

On identifie  $\text{Pic}^0(C)$  à  $C(k)$  (où  $C \subset \mathbb{P}_k^2$  est la courbe définie par  $X^3 + Y^3 + \nu Z^3 = 0$ ) en choisissant  $o = (1 : -1 : 0)$  comme origine.

Considérons la fonction rationnelle  $f = (X + \zeta^2 Y)/(X + \zeta Y)$  sur  $C$  (on rappelle que  $\zeta$  est une racine primitive cubique de l'unité). Son diviseur  $\text{div}(f)$

est un triple puisque  $(X+Y)(X+\zeta Y)(X+\zeta^2 Y) = -\nu Z^3$  (et que deux d'entre  $X+Y$ ,  $X+\zeta Y$  et  $X+\zeta^2 Y$  ne s'annulent jamais simultanément sur  $C$ ). Plus précisément,  $\text{div}(f) = 3q - 3q'$  où  $q = (1 : -\zeta : 0)$  et  $q' = (1 : -\zeta^2 : 0)$  sont les deux points de 3-torsion de  $C(k)$ . Remarquons que  $f(o) = 1$ .

L'équation  $\lambda^3 = f$  (dans  $\mathbb{P}_C^1$ ) définit donc un revêtement non ramifié  $C' \rightarrow C$  de degré 3. Choissant arbitrairement une origine  $o'$  sur  $C'$  au-dessus de  $o$ , l'isogénie de courbes elliptiques  $C' \rightarrow C$  s'inscrit dans une suite exacte courte  $1 \rightarrow \mu_3 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow 1$ . La suite exacte longue associée donne alors un morphisme de groupes,  $C(k)/3C(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$ , associé à  $f$ . En déroulant les définitions, on voit que la flèche  $C(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$  est donnée (au moins en-dehors du support du diviseur de  $f$ ) de façon « élémentaire » par l'évaluation (ou sa classe dans  $k^\times/k^{\times 3}$ ) de la fonction  $f$  au point considéré. (Dans ces circonstances, on peut éventuellement voir le fait que cette flèche est un morphisme d'après la loi de réciprocité de Weil — cf. [16], exercices 2.10 et 2.11 —, si  $p_1 + p_2 = p_3$  sur  $C$ , on a  $f(p_3) = f(p_1) \cdot f(p_2)$  dans  $k^\times/k^{\times 3}$  car le diviseur  $[p_3] - [p_1] - [p_2] + [o]$  est principal, disons  $\text{div}(g)$ , et  $f(\text{div}(g)) = g(\text{div}(f))$  est un cube.) En  $q$  et  $q'$ , la flèche  $C(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$  vaut respectivement la classe de  $\nu$  et de  $\nu^2$  (cela peut se voir par exemple par continuité  $\nu$ -adique de cette flèche, en considérant un point tel que  $(1 + \frac{1}{3}\nu^{3N+1} : -\zeta : \nu^N + \dots)$  très proche de  $q$ ).

Passons maintenant à  $K = k(\sqrt[3]{\nu}) = \mathbb{C}(\sqrt[3]{\nu})$ . La flèche  $C(K)/3C(K) \rightarrow K^\times/K^{\times 3}$  définie comme ci-dessus (avec la même fonction  $f$ ) est nulle. Pour s'en convaincre, il suffit de prouver la même chose pour la courbe ( $K$ -isomorphe à  $C$ )  $X^3 + Y^3 + \hat{Z}^3 = 0$ . Considérons pour cela un  $K$ -point  $(X : Y : \hat{Z})$  quelconque sur cette courbe, normalisé pour que la valuation (relative à  $\sqrt[3]{\nu}$ ) de deux d'entre  $X, Y, \hat{Z}$  soit nulle. Il en va donc de même de la valuation de deux d'entre  $X+Y, X+\zeta Y, X+\zeta^2 Y$ ; comme  $(X+Y)(X+\zeta Y)(X+\zeta^2 Y) = -\hat{Z}^3$ , la valuation du troisième est un triple, ce qui montre que la valuation de  $f$  est bien un triple, ce qu'on voulait.

La flèche composée  $C(K)/3C(K) \rightarrow K^\times/K^{\times 3} \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$  (où la deuxième flèche provient de la norme  $K^\times \rightarrow k^\times$ ) est donc nulle. Il en va donc de même de la composée  $C(K)/3C(K) \rightarrow C(k)/3C(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$  (ces deux composées sont égales, ce qui se voit facilement si on utilise la description « élémentaire » des flèches, donnée plus haut; pour les points  $q$  et  $q'$  il n'y a pas de problème).

Or si on considère le point défini par  $X = -\zeta$ ,  $Y = 1 + \nu$  et  $Z = -\sqrt[3]{3}(1 + \frac{1}{3}\nu - \frac{1}{81}\nu^3 + O(\nu^4))$ , son image par la flèche  $C(k)/3C(k) \rightarrow k^\times/k^{\times 3}$  produite par  $f$  n'est manifestement pas nulle (la valuation de  $f$  en ce point n'est pas un triple) : donc ce point n'est pas dans l'image de la flèche de

norme  $C(K)/3C(K) \rightarrow C(k)/3C(k)$ .

## 2.8 Conclusion

Sur le corps  $\mathbb{C}((\nu, t))$  (ou n'importe quel corps entre lui et  $\mathbb{C}((\nu))((t))$ ), les deux points rationnels de l'hypersurface cubique d'équation

$$X^3 + Y^3 + \nu Z^3 + t(U^3 + \nu V^3) = 0 \quad (*)$$

donnés par

$$X = 1, \quad Y = -1, \quad Z = 0, \quad U = 0, \quad V = 0$$

et

$$X = -\zeta, \quad Y = 1 + \nu, \quad Z = -\sqrt[3]{3}(1 + \frac{1}{3}\nu - \frac{1}{81}\nu^3 + O(\nu^4)), \quad U = 0, \quad V = 0$$

ne sont pas rationnellement équivalents. En effet, leur différence définit un 0-cycle de degré 0, qui est un 1-cycle si on regarde la dimension absolue sur  $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0$ , qu'on étend en un 1-cycle  $\alpha$  sur  $\mathcal{Y}$  tout entier. L'image  $\alpha \cap \mathcal{Y}_H$  de  $\alpha$  par la flèche d'intersection  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$  est un 0-cycle de degré 0 sur  $\mathcal{Y}_H$  donné par la différence entre les points  $(y = -1, z = 0, uw^{-1} = 0, vw^{-1} = 0, w^3 = 0)$  et  $(y = -\zeta^2(1 + \nu), z = -\sqrt[3]{3}\zeta^2(1 + \frac{1}{3}\nu + O(\nu^3)), uw^{-1} = 0, vw^{-1} = 0, w^3 = 0)$ . D'après les parties précédentes, cet élément  $\alpha \cap \mathcal{Y}_H$  n'est pas dans l'image de la flèche  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_H) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_I) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_\ell) \oplus \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_W) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_H)$ , ou, si on veut,  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_0) \rightarrow \mathrm{CH}_0(\mathcal{Y}_0)$  (cf. [6], exemple 1.3.1). C'est donc que le cycle  $\alpha$  de départ n'était pas dans l'image de  $\mathrm{CH}_1(\mathcal{Y}_0) \rightarrow \mathrm{CH}_1(\mathcal{Y})$ , i.e., qu'il était non nul (non rationnellement équivalent à zéro) sur  $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{Y}_0$  ([6], proposition 1.8).

## 2.9 Remarques finales

Le résultat, présenté ci-dessus sur  $\mathbb{C}((\nu, t))$ , est également valable sur  $\mathbb{C}((\nu))((t))$  ou sur  $\mathbb{C}(\nu)(\sqrt[3]{1 + \nu + \frac{1}{3}\nu^2})(t)$  (corps de définition des points étudiés dans les deux dernières parties : notons qu'il s'agit là du corps des fonctions d'une surface) — ou sur tout corps intermédiaire entre eux. Il est à mettre en regard du fait (prouvé dans la première partie) que sur une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 10 sur un corps  $C_2$ , ou sur  $\mathbb{Q}_p$ , deux points rationnels quelconques sont R-équivalents et (donc) le groupe

des 0-cycles de degré 0 est nul. La non-nullité du groupe de Chow d'une *surface* cubique  $X$  sur  $\mathbb{Q}_p$  ou  $\mathbb{C}((\nu, t))$  peut s'obtenir en considérant le groupe de Brauer (notamment, si un élément du groupe de Brauer de  $X$  s'évalue différemment en deux points rationnels, ces points ne peuvent pas être rationnellement équivalents); mais pour  $X$  de dimension au moins 3 sur un corps  $k$ , on a  $\text{Br } X = \text{Br } k$ , ce qui met en échec cette approche ici.

L'espoir initial était d'arriver à un contre-exemple sur  $\mathbb{F}_p((t))$ , au moins pour  $p \gg 0$ , ce qui aurait permis de déduire la même chose sur  $\mathbb{Q}_p$  pour  $p \gg 0$ , ou bien de le démontrer directement sur  $\mathbb{Q}_p$ . Malheureusement, cette idée échoue car la dernière étape (celle de la non-surjectivité de la norme) ne peut pas s'appliquer : la flèche de norme est toujours surjective<sup>3</sup>.

## Références

- [1] S. Bloch, « On the Chow groups of certain rational surfaces », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **14** (1981) 41–59.
- [2] J.-L. Colliot-Thélène, « Hilbert's Theorem 90 for  $K_2$ , with application to the Chow groups of rational surfaces », *Invent. Math.* **71** (1983) 1–20.
- [3] J.-L. Colliot-Thélène & S. Saito, « Zéro-cycles sur les variétés  $p$ -adiques et groupe de Brauer », *Internat. Math. Res. Notices*, 1996, 151–160.
- [4] C. S. Dalawat, *Groupe des classes de 0-cycles sur les surfaces rationnelles définies sur un corps local*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud XI (1993).
- [5] C. S. Dalawat, *Le groupe de Chow d'une surface rationnelle sur un corps local*, disponible sur [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org) comme `math.AG/0302157` (extrait de [4]); à paraître dans *Compos. Math.*
- [6] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer (second edition 1998).
- [7] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Princeton University Press.
- [8] A. Grothendieck, « Le groupe de Brauer I–III », *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland (1968).

---

<sup>3</sup>Si  $K$  est une extension finie de  $k = \mathbb{F}_p$  et  $C$  une courbe elliptique sur  $k$ , le conoyau de la flèche de norme  $C(K) \rightarrow C(k)$  est contenu dans  $H^1(k, N)$  avec  $N$  la variété abélienne noyau de la norme  $\mathfrak{A}_{K/k}C \rightarrow C$ ; or le  $H^1$  d'un corps fini à valeurs dans une variété abélienne est nul.



- [9] J. Kollár, « Specialization of zero-cycles », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **40** (2004) 689–708.
- [10] J. Kollár & E. Szabó, « Rationally connected varieties over finite fields », *Duke Math. J.* **120** (2003) 251–267.
- [11] D. J. Lewis, « Cubic homogeneous polynomials over  $p$ -adic fields », *Ann. of Math* (2) **56** (1952), 473–478.
- [12] D. A. Madore, « Équivalence rationnelle sur les hypersurfaces cubiques sur les corps  $p$ -adiques », *manuscripta mathematica* **110** (2003), 171–185.
- [13] D. A. Madore, *Hypersurfaces cubiques : équivalence rationnelle, R-équivalence et approximation faible*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud XI (2005), <http://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/98/87/>
- [14] Yu. I. Manin, *Cubic Forms : Algebra, Geometry, Arithmetic*, North-Holland (1974, second enlarged edition 1986).
- [15] B. Poonen & J. F. Voloch, « Random diophantine equations », avec appendices par J.-L. Colliot-Thélène et N. M. Katz, *in : Arithmetic of Higher-Dimensional Algebraic Varieties*, B. Poonen & Yu. Tschinkel (éd.), Birkäuser, Progress in Mathematics **226**, p. 175–184.
- [16] J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer, Graduate Texts in Mathematics 106.