# MASTER PARISIEN DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE
## COURS 2-16 "MODÉLISATION PAR AUTOMATES FINIS"

*11 Mars 2011 — Examen*

*Livres et notes imprimées interdits — Notes personnelles autorisées*

La longueur de l'énoncé et le nombre d'exercices proposés ne doivent pas vous effrayer ni être interprétés comme participant à la difficulté de l'épreuve, mais comme la possibilité offerte à un étudiant qui "sécherait" sur une question de chercher à en résoudre une autre. Par ailleurs, nous attacherons la plus grande importance à la qualité, à la clarté et à la précision de la rédaction.

**Réduction et séquentialisation des automates à multiplicité**

### I. $\mathbb{Q}$-automates

Soit $\mathcal{A}_1$ le $\mathbb{Q}$-automate sur $\{a\}^*$ représenté à la figure 1 (l'unique lettre $a$ de l'alphabet n'est pas portée sur les transitions de la figure) et $s_1$ la série qu'il réalise.

1 .— Donner une représentation réduite de $s_1$.

2 .— Calculer $\langle s_1, a^5 \rangle$ , $\langle s_1, a^6 \rangle$ .

3 .— La série $s_1$ est-elle séquentielle? (c'est-à-dire admet-elle une représentation monomiale en ligne?)

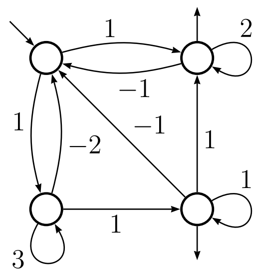


Figure 1: Le $\mathbb{Q}$-automate $\mathcal{A}_1$

### II. $\mathcal{M}$-automates

Soient $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ les automates sur $\{a\}^*$ représentés à la figure 2 (a) quand les multiplicités sont considérées dans $\langle \mathbb{N}, \mathsf{min}, + \rangle$ et $\langle \mathbb{N}, \mathsf{max}, + \rangle$ respectivement et $t_1$ et $t_2$ les séries qu'ils réalisent. Parallèlement, soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les automates sur $\{a\}^*$ représentés à la figure 2 (b) quand les multiplicités sont considérées dans $\langle \mathbb{N}, \mathsf{min}, + \rangle$ et $\langle \mathbb{N}, \mathsf{max}, + \rangle$ respectivement et $u_1$ et $u_2$ les séries qu'ils réalisent.

4 .— Donner une formule pour $\langle t_1, a^n \rangle$ et $\langle t_2, a^n \rangle$ . Ces séries sont-elles séquentielles?

5 .— Mêmes questions pour $u_1$ et $u_2$.

6 .— Appliquer la procédure de séquentialisation à ces quatre automates. Commenter.


(a) Les automates $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ (b) The automata $\mathcal{F}_1$ and $\mathcal{F}_2$

Figure 2: Quatre automates tropicaux

### Automates d'ambiguité bornée et revêtement de Schützenberger

On rappelle que le revêtement de Schützenberger $\mathcal{S}$ d'un automate $\mathcal{A}$ est la partie accessible du produit de $\mathcal{A}$ par son déterminisé $\widehat{\mathcal{A}}$. La projection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{A}$ est un revêtement, celle sur $\widehat{\mathcal{A}}$ est un morphisme localement co-surjectif.

Définition 1 *Soit $\mathcal{S}$ le revêtement de Schützenberger d'un automate $\mathcal{A}$.*
*On appelle* ensemble de concurrence *de $\mathcal{S}$ un ensemble de transitions qui*
(a) *ont même destination (extrémité finale),*
(b) *se projettent sur une même transition de $\widehat{\mathcal{A}}$.*
*Deux transitions de $\mathcal{S}$ sont dites* concurrentes *si elles appartiennent au même ensemble de concurrence. Un état de $\mathcal{S}$ est dit* critique *s'il est la destination de deux ou plus transitions concurrentes.*

Dans la suite, $\mathcal{A}$ est un automate, $\widehat{\mathcal{A}}$ son déterminisé, et $\mathcal{S}$ son revêtement de Schützenberger. Par ailleurs, on pose la définition suivante:

Définition 2 *Un automate $\mathcal{A}$ sur $A^*$ est d'*ambiguité bornée *s'il existe un entier $k$ tel que tout mot $w$ dans $|\mathcal{A}|$ est l'étiquette d'au plus $k$ calculs distincts.*

7 .— Construire le revêtement de Schützenberger de l'automate $\mathcal{B}_1$ de la figure 3 (*On doit trouver 8 états*).

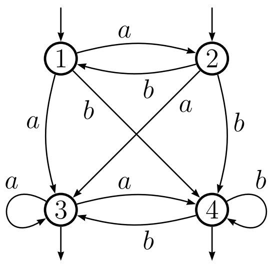


Figure 3: L'automate $\mathcal{B}_1$

8 .— Que peut-on dire d'un automate dont le revêtement de Schützenberger ne contient aucune transition concurrente?

9 .— Montrer qu'il existe un calcul de $\mathcal{S}$ qui contient deux transitions concurrentes (entre elles) si, et seulement si une transition concurrente appartient à un circuit.

10 .— Soient $p \xrightarrow{a} s$ et $q \xrightarrow{a} s$ deux transitions concurrentes de $\mathcal{S}$ et

$$c \ := \ \xrightarrow[\mathcal{S}]{} i \xrightarrow[\mathcal{S}]{x} p \xrightarrow[\mathcal{S}]{a} s \xrightarrow[\mathcal{S}]{y} q \xrightarrow[\mathcal{S}]{a} s \xrightarrow[\mathcal{S}]{z} t \xrightarrow[\mathcal{S}]{}$$

un calcul de $\mathcal{S}$ où $i$ est un état initial et $t$ un état final. Montrer que $w = x\,a\,y\,a\,z$ est l'étiquette d'au moins deux calculs de $\mathcal{A}$.

11 .— Montrer qu'un automate $\mathcal{A}$ est d'ambiguité bornée si, et seulement si, aucune transition concurrente de son revêtement de Schützenberger n'appartient à un circuit.

12 .— Vérifier que $\mathcal{B}_1$ est d'ambiguité bornée.

13 .— Donner une borne sur le degré d'ambiguité d'un automate en fonction du cardinal des ensembles de concurrence de son revêtement de Schützenberger.

Donner cette borne dans le cas de $\mathcal{B}_1$.

14 .— En déduire la complexité d'un algorithme qui décide de l'ambiguité bornée d'un automate.