Leçon 3

Morphismes et revêtements

Étant donné un automate, on voudrait trouver un automate équivalent mais de dimension plus petite, et avec la contrainte de conserver la *structure des calculs*, c'est-à-dire qu'à chaque calcul de l'automate original, on sait faire correspondre un calcul de l'automate réduit.

Le problème que l'on se pose en fait est de décrire les conditions sous lesquelles cette réduction est « conforme », c'est-à-dire que les calculs du réduit sont tous des images de calcul de l'automate original. On montrera qu'on peut le faire de telle sorte qu'il existe un *automate réduit minimal*, au prix d'une rupture de la symétrie entre origine et destination des transitions.

On s'intéressera ensuite au cas où, dans ce contexte, il y a *bijection* entre les calculs de l'automate de départ et l'automate réduit. On verra par la suite que cette construction est intéressante « dans les deux sens », dans le sens de la réduction, biensûr, mais aussi dans le sens de l'expansion, qui revient à désintriquer les calculs de l'automate original.

Contents

En fait, dans cette leçon, la « nature » des étiquettes des transitions, c'est-à-dire le monoïde dans lequel elles sont prises, n'entre pas en jeu et on pourra considérer, sans perdre de généralité, qu'elles sont les lettres d'un alphabet et que les automates sont des automates sur un monoïde libre.

On commence en tous cas par le cas classique de la construction de l'automate minimal d'un langage.

3.1 L'automate minimal d'un langage

Nous commençons par rappeler la construction de l'automate minimal d'un langage, construction classique décrite dans tout cours élémentaire de théorie des automates et que nous allons généraliser dans la suite.

Automate des quotients A est un alphabet.

Définition 1. *Soient $L \subseteq A^*$ et u dans A^*. Le* quotient (à gauche) *de L par u est le langage noté $u^{-1}L$ et défini par :*

$$u^{-1}L = \{v \in A^* \mid uv \in L\} \quad .$$

En particulier,

$$\forall u \in A^* \qquad u \in L \Longleftrightarrow 1_{A^*} \in u^{-1}L \quad . \tag{3.1}$$

L'associativité du produit implique

$$\forall u, v \in A^* \qquad (uv)^{-1}L = v^{-1}\left(u^{-1}L\right) \quad , \tag{3.2}$$

c'est-à-dire que le quotient (à gauche) est une *action (à droite)* de A^* sur $\mathfrak{P}(A^*)$. On en déduit la définition d'un automate déterministe de la façon suivante.

On note $Q_L = \{u^{-1}L \mid u \in A^*\}$ l'ensemble des quotients de L et $\mathcal{A}_L$ l'automate :

$$\mathcal{A}_L = \langle\, A, Q_L, \{L\}, \chi, T_L \,\rangle$$

où χ est l'action « quotient » : $\chi(K, a) = a^{-1}K$, pour tous a dans A et K dans Q_L, et $T_L = \{S \in Q_L \mid 1_{A^*} \in S\}$. De (3.1) et (3.1), on déduit $L(\mathcal{A}_L) = L$ et donc :

Proposition 2. $\qquad Q_L$ *fini* $\quad \Longrightarrow \quad L$ *rationnel* .

Equivalence de Nerode Soient $\mathcal{A} = \langle\, A, Q, i, \delta, T \,\rangle$ un automate *déterministe complet (accessible)* et $L = L(\mathcal{A})$. Pour tous p dans Q et w dans A^*, on note :

$$p \cdot w = \delta(p, w) \qquad \text{et} \qquad L_p = \{w \mid p \cdot w \in T\} = L(\langle\, A, Q, p, \delta, T \,\rangle) \quad .$$

En particulier, $L_i = L(\mathcal{A})$. Parce que $\mathcal{A}$ est *déterministe*, il vient :

$$\forall p, q \in Q \,,\ \forall u \in A^* \qquad p \cdot u = q \quad \Longrightarrow \quad u^{-1}L_p = L_q \quad . \tag{3.3}$$

D'où l'on déduit une application

$$\nu \colon Q \to Q_L \qquad \text{définie par} \qquad \nu(p) = u^{-1}L \quad \text{avec} \quad i \xrightarrow[\mathcal{A}]{u} p \quad ,$$

et, puisque tout langage rationnel est accepté par un automate déterministe *fini* :

Proposition 3. *L rationnel $\implies$ Q_L fini .*

Définition 4. *On appelle* équivalence de Nerode *(sur Q_L) l'équivalence d'application de ν :* $p \equiv q \mod \nu \iff L_p = L_q$ *que l'on note aussi $p \sim q$.*

L'ensemble des classes Q/ν est en bijection avec Q_L. De (3.1), on déduit que T est saturé par ν et que T/ν est en bijection avec T_L. De (3.3), on déduit qu'on peut définir une action de A^* sur Q/ν puisque $p \sim q \implies p \cdot a \sim q \cdot a$ et que cette action coïncide avec l'action χ sur Q_L. Pour résumer, on a :

Propriétés 5. (i) $\nu(i) = L$; (ii) $\nu(T) = T_L$;
(ii) $\nu(\delta(p,a)) = \chi(\nu(p), a)$ *c'est-à-dire* $p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q \implies \nu(p) \xrightarrow[\mathcal{A}_L]{a} \nu(q)$.

Ce qui implique à la fois que l'on peut définir un *automate quotient*

$$\mathcal{A}/\nu = \langle A, Q/\nu, [i]_\nu, \delta/\nu, T/\nu \rangle$$

et que cet automate quotient est isomorphe à $\mathcal{A}_L$, quel que soit l'automate $\mathcal{A}$ (qui reconnaît L) de départ.

Il s'ensuit que $\mathcal{A}_L$ est le « quotient » de tout automate déterministe complet qui accepte L. C'est donc celui qui a un nombre minimal d'états. On l'appelle l'*automate minimal* de L (déterministe complet reste sous-entendu).

Exemple 6. La figure 1 montre un automate déterministe complet et l'automate minimal correspondant, avec l'application qui fusionne les états.

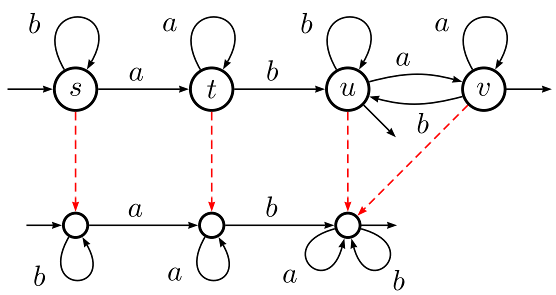


FIG. 1 – Un automate déterministe et son quotient par l'équivalence de Nerode

Algorithme de Moore Il n'est pas suffisant de savoir que l'automate minimal existe, il faut savoir le calculer, au moins dans le cas d'un langage rationnel décrit par un automate déterministe.

Proposition 7. *L'équivalence de Nerode d'un automate déterministe fini est effectivement calculable, par un algorithme de raffinement de partitions.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = \langle A, Q, i, \delta, T \rangle$ un automate *déterministe complet.* On définit une suite $\{\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots\}$ de *partitions emboîtées* de Q de la manière suivante :

- $\mathcal{P}_0 = \{Q \setminus T, T\}$;
- pour tout k, $\mathcal{P}_{k+1}$ est *le* raffinement de $\mathcal{P}_k$ défini par

$$p \equiv q \quad [\mathcal{P}_k] \quad \text{et} \quad p \not\equiv q \quad [\mathcal{P}_{k+1}] \quad \Longleftrightarrow \quad \exists a \in A \quad p \cdot a \not\equiv q \cdot a \quad [\mathcal{P}_k] \ .$$

Si Q est fini, cette suite est stationnaire à partir d'un certain k : $[\mathcal{P}_k] = [\mathcal{P}_{k+1}]$, c'est-à-dire qu'aucune classe de $\mathcal{P}_k$ n'est cassée par l'action de A. Montrons que pour ce k,

$$[\mathcal{P}_k] = [\nu] \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad p \equiv q \quad [\mathcal{P}_k] \quad \Longrightarrow \quad L_p = L_q \ . \tag{3.4}$$

Si (3.4) n'est pas satisfaite, il existe une paire (p, q) telle que $p \equiv q \quad [\mathcal{P}_k]$ et que

$$D_{p,q} = [L_p \setminus L_q] \cup [L_q \setminus L_p]$$

est non vide. Choisissons (p, q) telle que $D_{p,q}$ contient un mot u de *longueur minimale* par rapport à tous les $D_{r,s}$ non vides. On a $u \neq 1_{A^*}$ puisque $\mathcal{P}_k$ est un raffinement de $\mathcal{P}_0$ qui sépare les états p pour lesquels $1_{A^*} \in L_p$ de ceux pour lesquels $1_{A^*} \notin L_p$.

Ainsi $u = a\,v$ avec a dans A ; on a $p \cdot a \equiv q \cdot a \mod \mathcal{P}_k$ par définition du k choisi et v appartient à $D_{r,s}$, avec $r = p \cdot a$ et $s = q \cdot a$. Le mot v est plus court que u, contradiction avec le choix de p et q. ■

Exemple 8. On reprend l'automate de la figure 1. On a : $\mathcal{P}_0 = \{\{s, t\}, \{u, v\}\}$ et on calcule alors :

$$\begin{aligned} s \cdot a = t \ &\equiv \ t \cdot a = t \quad [\mathcal{P}_0] \, , \qquad & s \cdot b = s \ &\not\equiv \ t \cdot b = u \quad [\mathcal{P}_0] \\ u \cdot a = v \ &\equiv \ v \cdot a = v \quad [\mathcal{P}_0] \, , \qquad & u \cdot b = u \ &\equiv \ v \cdot b = u \quad [\mathcal{P}_0] \end{aligned} \tag{3.5}$$

d'où $\mathcal{P}_1 = \{\{s\}, \{t\}, \{u, v\}\}$. De plus, les équations (3.5) montrent déjà que $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$.

3.2 Morphismes d'automates

La définition des morphismes d'automates suit naturellement celle que nous venons de voir pour les automates déterministes. Pour conduire à une notion de quotient minimal même dans le cas général, cette définition doit être plus contrainte et « latéralisée » (ces contraintes étant naturellement satisfaites dans le cas des automates déterministes complets).

Même si, pour des raisons de lisibilité, les exemples sont construits avec des automates sur un monoïde libre, nous donnons les définitions pour des automates sur un monoïde M quelconque, ce qui n'entraîne aucune difficulté supplémentaire.

Dans la suite de toute cette leçon, M est un monoïde et $\mathcal{A} = \langle Q, I, E, T \rangle$ et $\mathcal{B} = \langle R, J, F, U \rangle$ sont deux automates sur M.

Définition 9. *Une application* $\varphi\colon Q \to R$ *est un* morphisme (d'automates) *si :*

(i) $\varphi(I) \subseteq J$,

(ii) $\varphi(T) \subseteq U$, *et*

(iii) $(p, m, q) \in E \implies (\varphi(p), m, \varphi(q)) \in F$.

Si φ *est un tel morphisme, on écrit* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.

La figure 2 montre un exemple de morphisme d'automates (qu'on appelle désormais simplement *morphisme*).

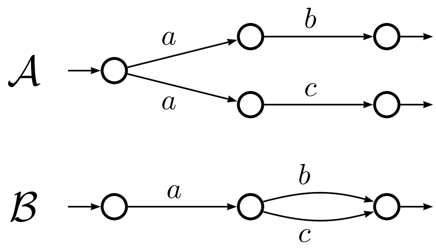


FIG. 2 – Un morphisme (l'application φ est la projection verticale)

La condition (iii) de la définition 9 implique que l'image par φ d'un calcul de $\mathcal{A}$ est un calcul de $\mathcal{B}$, de même étiquette ; (i) et (ii) impliquent que l'image d'un calcul réussi de $\mathcal{A}$ est un calcul réussi de $\mathcal{B}$. Il en résulte :

Proposition 10. *Si* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un morphisme, alors* $|\mathcal{A}| \subseteq |\mathcal{B}|$. ■

Dans l'exemple de la figure 2, on a $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$ mais ce n'est pas le cas général. L'inclusion de la proposition 10 peut être *stricte* car il peut exister des calculs (réussis) dans $\mathcal{B}$ qui ne sont pas image d'un calcul (réussi) de $\mathcal{A}$, et cela même si l'application $\varphi\colon Q \to R$ est surjective, et que $\varphi(I) = J$ et $\varphi(T) = U$. La figure 3 montre un exemple d'un tel morphisme.

Définition 11. *Un morphisme* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est* conforme *si tout calcul (resp. calcul réussi) de* $\mathcal{B}$ *est l'image d'au moins un calcul (resp. calcul réussi) de* $\mathcal{A}$.

Le morphisme de la figure 2 est conforme.

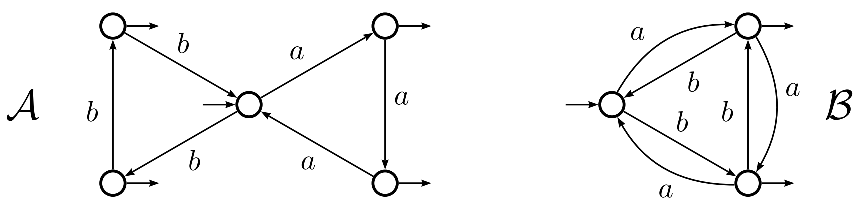


FIG. 3 – Un morphisme non conforme (le morphisme est la projection horizontale)

Un autre exemple de morphismes, en général non conformes, est donné par la construction du *produit d'automates*. Si $\mathcal{A} = \langle Q, I, E, T \rangle$ et $\mathcal{B} = \langle R, J, F, U \rangle$ sont deux automates sur M, le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est défini par :

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \langle\, Q \times R, I \times J, G, T \times U \,\rangle$$
$$\text{avec} \qquad G = \{((p,r),m,(q,s)) \mid (p,m,q) \in E\,,\ (r,m,s) \in F\} \quad .$$

Si M est un monoide libre A^* *et si* les transitions de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ sont étiquetées par des lettres de A, alors $|\mathcal{A} \times \mathcal{B}| = |\mathcal{A}| \cap |\mathcal{B}|$, mais cette égalité n'est pas vraie dans le cas général. La définition du produit et la définition 9 impliquent directement :

Propriété 12.
Les projections $\pi_{\mathcal{A}} \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ *et* $\pi_{\mathcal{B}} \colon \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ *sont des morphismes.*

La définition 9 implique également que les morphismes se *composent.*

Proposition 13. *Si* $\varphi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *et* $\psi \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *sont deux morphismes, alors* $\psi \circ \varphi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *est un morphisme.* ■

Le *transposé* d'un automate $\mathcal{A} = \langle\, Q, I, E, T \,\rangle$ sur M est l'automate :

$$^{\mathsf{t}}\!\mathcal{A} = \langle\, Q, T, {}^{\mathsf{t}}\!E\,, I \,\rangle \qquad \text{avec} \qquad {}^{\mathsf{t}}\!E = \{(q,m,p) \mid (p,m,q) \in E\} \quad .$$

Si M est un monoide libre A^* *et si* les transitions de $\mathcal{A}$ sont étiquetées par des lettres de A, alors $L({}^{\mathsf{t}}\!\mathcal{A}) = {}^{\mathsf{t}}\!L(\mathcal{A})$, mais cette égalité n'est pas vraie dans le cas général. En revanche, on a toujours :

Proposition 14.
Si $\varphi \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un morphisme, alors* $\varphi \colon {}^{\mathsf{t}}\!\mathcal{A} \to {}^{\mathsf{t}}\!\mathcal{B}$ *est un morphisme.* ■

3.3 Propriétés locales des morphismes

La définition des morphismes d'automates consiste en *trois* conditions. Et les spécialisations à venir se distribuent sur chacune. Au prix d'une convention très naturelle sur les automates et les morphismes, on peut réunir les trois conditions en une seule.

Etats subliminaux À chaque automate $\mathcal{A} = \langle\, Q, I, E, T \,\rangle$, on associe, par une sorte de normalisation, un automate $\mathcal{A}_{\mathsf{n}}$ en ajoutant deux états — $i_{\mathcal{A}}$, un état initial, et $t_{\mathcal{A}}$, un état final — et les transitions, *étiquetées par* 1_M, qui vont de $i_{\mathcal{A}}$ à chaque état initial de $\mathcal{A}$ et de chaque état final de $\mathcal{A}$ à $t_{\mathcal{A}}$:

$$\mathcal{A}_{\mathsf{n}} = \langle\, Q_{\mathsf{n}}, i_{\mathcal{A}}, E_{\mathsf{n}}, t_{\mathcal{A}} \,\rangle \qquad \text{avec}$$
$$Q_{\mathsf{n}} = Q \cup \{i_{\mathcal{A}}, t_{\mathcal{A}}\} \quad \text{et} \quad E_{\mathsf{n}} = E \,\cup\, \{(i_{\mathcal{A}}, 1_{A^*}, i) \mid \forall i \in I\} \,\cup\, \{(t, 1_{A^*}, t_{\mathcal{A}}) \mid \forall t \in T\}\ .$$

Ces deux nouveaux états, $i_{\mathcal{A}}$ and $t_{\mathcal{A}}$, sont appelés les *états subliminaux* (initial et final) de $\mathcal{A}$. Il doit être évident que non seulement $\mathcal{A}_{\mathsf{n}}$ est équivalent à $\mathcal{A}$: $|\mathcal{A}_{\mathsf{n}}| = |\mathcal{A}|$, mais qu'il y a bijection entre les calculs (réussis) de $\mathcal{A}_{\mathsf{n}}$ et ceux de $\mathcal{A}$.

Corrélativement, une application $\varphi\colon Q \to R$ est étendue en une application $\varphi_{\mathsf{n}}\colon Q_{\mathsf{n}} \to R_{\mathsf{n}}$ en posant $\varphi_{\mathsf{n}}(i_{\mathcal{A}}) = i_{\mathcal{B}}$ et $\varphi_{\mathsf{n}}(t_{\mathcal{A}}) = t_{\mathcal{B}}$. On vérifie que φ est un morphisme d'automates $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ si, et seulement si, φ_{n} satisfait la condition (iii) de la définition 9, c'est-à-dire :

$$\forall p, q \in Q_{\mathsf{n}}\,,\ \forall m \in M \qquad (p, m, q) \in E_{\mathsf{n}} \quad \Longrightarrow \quad (\varphi_{\mathsf{n}}(p), m, \varphi_{\mathsf{n}}(q)) \in F_{\mathsf{n}} \ . \tag{3.6}$$

En effet, si $p = i_{\mathcal{A}}$, il existe une transition (p, m, q) si, et seulement si, q est dans I et (3.6) implique que $\varphi_{\mathsf{n}}(q) = \varphi(q)$ est dans J. Symétriquement, si $q = t_{\mathcal{A}}$, il existe une transition (p, m, q) si, et seulement si, p est dans T et (3.6) implique que $\varphi_{\mathsf{n}}(p) = \varphi(p)$ est dans U.

Bouquets entrants et sortants Pour chaque état p de $\mathcal{A} = \langle Q, I, E, T \rangle$, on note $\mathsf{Out}_{\mathcal{A}}(p)$ l'ensemble des transitions de $\mathcal{A}$ qui *sortent* de p et $\mathsf{In}_{\mathcal{A}}(p)$ l'ensemble des transitions qui *arrivent* en p :

$$\mathsf{Out}_{\mathcal{A}}(p) = \{e \in E \mid e = (p, a, q)\} \qquad\qquad \mathsf{In}_{\mathcal{A}}(p) = \{e \in E \mid e = (q, a, p)\} \ .$$

Si $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme, alors, par définition, et pour tout p dans Q, φ envoie $\mathsf{Out}_{\mathcal{A}}(p)$ dans $\mathsf{Out}_{\mathcal{B}}(\varphi(p))$ et $\mathsf{In}_{\mathcal{A}}(p)$ dans $\mathsf{In}_{\mathcal{B}}(\varphi(p))$.

Les deux notions $\mathsf{Out}_{\mathcal{A}}$ et $\mathsf{In}_{\mathcal{A}}$ se correspondent dans le passage d'un automate à son transposé : $\mathsf{In}_{\mathcal{A}} = \mathsf{Out}_{{}^{t}\mathcal{A}}$.

Propriétés locales

Définition 15. *Un morphisme* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est* localement surjectif *(resp.* localement injectif*,* localement bijectif*) si, pour chaque état p de $\mathcal{A}_{\mathsf{n}}$, la restriction de φ_{n} à $\mathsf{Out}_{\mathcal{A}}(p)$ est une application surjective (resp. injective, bijective) dans $\mathsf{Out}_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathsf{n}}(p))$.*

Un morphisme $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est* localement co-surjectif *(resp.* localement co-injectif*,* localement co-bijectif*) si, pour chaque état p de $\mathcal{A}_{\mathsf{n}}$, la restriction de φ_{n} à $\mathsf{In}_{\mathcal{A}}(p)$ est une application surjective (resp. injective, bijective) dans $\mathsf{In}_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathsf{n}}(p))$.*[1]

Pour alléger l'expression, nous nous autorisons une construction linguistique anglaise et nous dirons qu'un morphisme *localement surjectif* est un *Out-morphisme*, et qu'un morphisme *localement co-surjectif* est un *In-morphisme*.

Toujours pour alléger l'expression mais sans utiliser d'anglicisme, nous dirons qu'un morphisme *localement bijectif* est un *revêtement* et qu'un morphisme *localement injectif* est une *immersion*. De façon duale, nous dirons qu'un morphisme *localement co-bijectif* est un *co-revêtement* et qu'un morphisme *localement co-injectif* est une *co-immersion*. Et nous ne distinguerons plus entre $\mathcal{A}_{\mathsf{n}}$ et $\mathcal{A}$, entre φ_{n} et φ.

L'inclusion des états subliminaux dans les propriétés locales implique :

[1] En anglais, *Out-surjective*, *Out-injective*, *Out-bijective*, *In-surjective*, *etc.* morphisms.

Propriété 16. *Soit* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *un Out-morphisme. Alors :*

(i) $\varphi(I) = J$ *c'est-à-dire* $\forall j \in J \quad \exists i \in I \quad \varphi(i) = j$;

(ii) $T = \varphi^{-1}(U)$ *c'est-à-dire* $\forall q \in Q \quad \varphi(q) \in U \Rightarrow q \in T$.

Propriété 17. *Soit* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *une immersion.*
Alors, pour tout j *dans* J*, il existe au plus un* i *dans* I *tel que* $\varphi(i) = j$.

Et, de façon duale :

Propriété 18. *Soit* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *un In-morphisme. Alors :*
(i) $I = \varphi^{-1}(J)$; (ii) $\varphi(T) = U$.

Propriété 19. *Soit* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *une co-immersion.*
Alors, pour tout u *dans* U*, il existe au plus un* t *dans* T *tel que* $\varphi(t) = u$.

Les propriétes locales se composent, et s'échangent par dualité :

Proposition 20. *Si* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *et* $\psi\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *sont deux Out-morphismes (resp. In-morphismes, revêtements, co-revêtements, immersions, co-immersions), alors* $\psi \circ \varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *est un Out-morphisme (resp. In-morphisme, revêtement, co-revêtement, immersion, co-immersion).*

Proposition 21. *Si* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un Out-morphisme (resp. un revêtement, une immersion), alors* $\varphi\colon {}^{\mathsf{t}}\mathcal{A} \to {}^{\mathsf{t}}\mathcal{B}$ *est un In-morphisme (resp. un co-revêtement, une co-immersion).*

Si $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un In-morphisme (resp. un co-revêtement, une co-immersion), alors* $\varphi\colon {}^{\mathsf{t}}\mathcal{A} \to {}^{\mathsf{t}}\mathcal{B}$ *est un Out-morphisme (resp. un revêtement, une immersion).*

3.4 Out-morphismes et quotients

Les morphismes localement surjectifs, ou *Out-morphismes*, vont jouer le rôle central dans notre théorie, et permettre la définition des quotients. La définition même implique que si $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un Out-morphisme, alors *pour chaque transition* (r, a, s) *dans* F *et chaque* p *dans* $\varphi^{-1}(r)$*, il existe un* q *dans* $\varphi^{-1}(s)$ *tel que* (p, a, q) *est une transition dans* E. Cette propriété, appliquée itérativement, entraîne qu'on peut relever chaque calcul (réussi) de $\mathcal{B}$ en un calcul (réussi) de $\mathcal{A}$. Plus précisément :

Proposition 22. *Soit* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *un Out-morphisme. Pour chaque calcul* d *dans* $\mathcal{B}$ *dont l'origine* s *est dans l'image de* φ *et pour chaque* p *tel que* $\varphi(p) = s$*, il existe au moins un calcul* c *dans* $\mathcal{A}$ *dont l'origine est* p *et tel que* $\varphi(c) = d$. ■

Corollaire 23. *Si* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un Out-morphisme, alors* $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.

Une autre conséquence de la proposition 22 est que :

Proposition 24. *Si* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un Out-morphisme, alors :*

(i) φ *est* conforme *si, et seulement si, l'application* $\varphi\colon Q \to R$ *est* surjective *;*

(ii) *si* $\mathcal{B}$ *est* accessible*, alors* φ *est* conforme*.*

Dans la suite, on supposera, sans que cela fasse donc réellement perdre en généralité, que φ est *surjective*, c'est-à-dire $\varphi(Q) = R$. L'exemple de la figure 2 montre que φ peut être conforme sans que φ soit un Out-morphisme.

Définition 25.

Si $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un Out-morphisme, nous dirons que* $\mathcal{B}$ *est un* quotient *de* $\mathcal{A}$*.*

Remarque 26*.* Dans certains domaines proches de la théorie des automates mais qui utilisent une terminologie différente (systèmes de transitions, co-algèbre, *etc.*), on dit que $\mathcal{A}$ est une *simulation* de $\mathcal{B}$ quand $\mathcal{B}$ est un quotient de $\mathcal{A}$: la proposition 22 établit l'équivalence des deux notions.

La notion de quotient permet de généraliser celle d'*automate minimal*.

Proposition 27. *Tout automate* $\mathcal{A}$ *a un* quotient minimal $\mathcal{C}$*, qui est unique à un isomorphisme près, et qui est le quotient de tout quotient* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{A}$*.*

Remarque 28*.* Le quotient minimal d'un automate *n'est pas canoniquement attaché à la partie acceptée par l'automate* mais dépend de l'automate à partir duquel il est calculé.

Puisque la définition de quotient est latéralisée, on peut aussi considérer la *définition duale*. L'automate $\mathcal{B}$ est un *co-quotient* de $\mathcal{A}$ si ${}^{\mathsf{t}}\mathcal{B}$ est un quotient de ${}^{\mathsf{t}}\mathcal{A}$.

Proposition 29. *Tout automate* $\mathcal{A}$ *a un* co-quotient minimal $\mathcal{D}$*, qui est unique à un isomorphisme près, et qui est le co-quotient de tout co-quotient* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{A}$*.*

Le quotient ou co-quotient minimal d'un automate peut être calculé par un algorithme « à la Moore » qui consiste en une suite de raffinements de partitions sur l'ensemble des états.

La notion de quotient minimal permet également de donner une définition simple de la *bisimulation*.

Proposition 30. *Deux automates* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *sont bisimilaires si, et seulement si, ils ont le même quotient minimal.*

3.5 Le revêtement de Schützenberger

Les revêtements sont des Out-morphismes plus contraints. La preuve de la proposition 22 donne la propriété essentielle qui fait des revêtements la base de nombreuses constructions :

Corollaire 31. *Si* $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *est un revêtement, alors* φ *est une* bijection *entre les calculs réussis de* $\mathcal{A}$ *et ceux de* $\mathcal{B}$*.*

Le résultat suivant présente une de ces constructions, qui sera utilisée dans l'étude des relations rationnelles.

Théorème 32. *Soit* $\mathcal{A}$ *un automate accessible sur* A^* *et* $\widehat{\mathcal{A}}$ *son déterminisé. Le* revêtement de Schützenberger*, ou* S-revêtement*, de* $\mathcal{A}$ *est la partie accessible* $\mathcal{S}$ *de* $\mathcal{A}\times\widehat{\mathcal{A}}$*. L'automate* $\mathcal{S}$ *satisfait les deux propriétés :*

(i) $\pi_{\mathcal{A}}$ *est un revêtement de* $\mathcal{S}$ *sur* $\mathcal{A}$ *;*

(ii) $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}$ *est un In-morphisme de* $\mathcal{S}$ *sur* $\widehat{\mathcal{A}}$*.*

Exemple 33. La figure 4 montre le S-revêtement de $\mathcal{A}_1$.

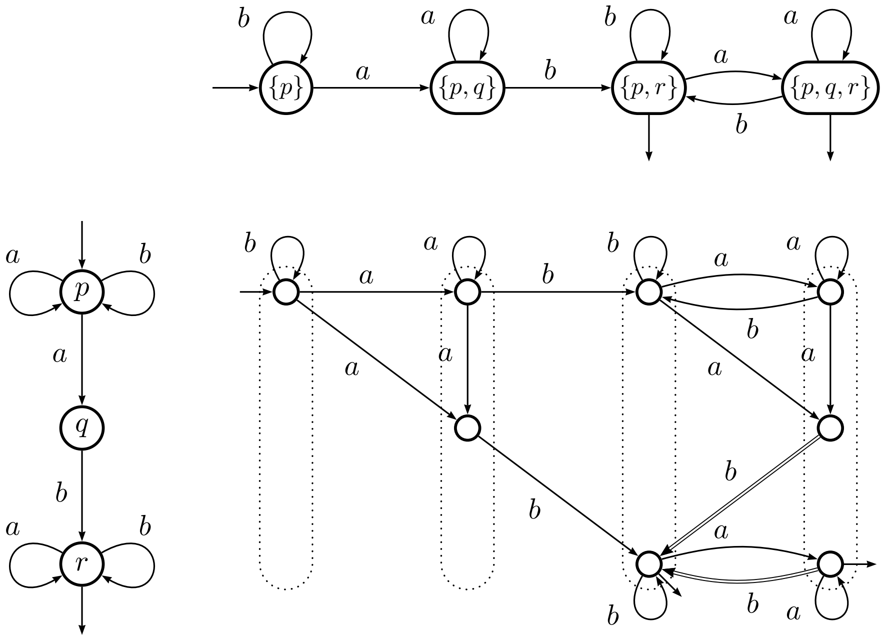


FIG. 4 – Le S-revêtement de $\mathcal{A}_1$

On établit d'abord une proposition qui montre la propriété (i) du Théorème 32 comme un cas particulier.

Proposition 34. *Soient* $\mathcal{A}$ *un automate accessible,* $\mathcal{B}$ *un automate déterministe complet équivalent à* $\mathcal{A}$*, et* $\mathcal{E}$ *la partie accessible de* $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$*. Alors* $\pi_{\mathcal{A}}$*, la projection de* $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ *sur* $\mathcal{A}$*, est un revêtement de* $\mathcal{E}$ *sur* $\mathcal{A}$*.* ■

Démonstration du Théorème 32. Il reste à établir la propriété (ii) du théorème. De la définition des transitions dans $\widehat{\mathcal{A}} = \langle \mathfrak{P}(Q), \{I\}, F, U \rangle$, c'est-à-dire :

$$P \xrightarrow[\widehat{\mathcal{A}}]{a} S \quad\Longleftrightarrow\quad S = \left\{ q \;\middle|\; \exists p \in P \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q \right\}, \tag{3.7}$$

on déduit d'abord :

Propriété 35.

Les états de $\mathcal{S}$ sont les paires (p, P) où P est un état de $\widehat{\mathcal{A}}$ et p est dans P.

Démonstration. Soit P un état de $\widehat{\mathcal{A}}$: il existe w dans A^* tel que

$$P = \left\{ p \,\middle|\, \exists i \in I \quad i \xrightarrow[\mathcal{A}]{w} p \right\} \quad .$$

Donc (p, P) est un état de $\mathcal{S}$; c'est-à-dire il est accessible dans $\mathcal{A} \times \widehat{\mathcal{A}}$ pour tout p dans P. Réciproquement, si (q, P) est un état de $\mathcal{S}$, il existe w dans A^* et i dans I tel que à la fois $\{I\} \xrightarrow[\widehat{\mathcal{A}}]{w} P$ et $i \xrightarrow[\mathcal{A}]{w} q$, et donc q est dans P. ∎

On déduit ensuite de (3.7) que :

$$\begin{aligned} \forall P, S \subseteq Q\,,\ \forall q \in S\,,\ \forall a \in A \qquad P \xrightarrow[\widehat{\mathcal{A}}]{a} S \quad &\Longrightarrow \quad \exists p \in P \quad p \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q \\ &\Longrightarrow \quad \exists p \in P \quad (p, P) \xrightarrow[\mathcal{A}\times\widehat{\mathcal{A}}]{a} (q, S) \quad , \end{aligned}$$

ce qui exprime que la restriction de $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}$ au bouquet entrant de (q, S) est surjectif sur le bouquet entrant de l'état S de $\widehat{\mathcal{A}}$.

Si $P \subseteq Q$ est final dans $\widehat{\mathcal{A}}$, il existe au moins un t dans P qui est final dans $\mathcal{A}$, donc un état (t, P) qui est final dans $\mathcal{S}$. D'autre part, I est l'unique état initial de $\widehat{\mathcal{A}}$, chaque i dans I est initial dans $\mathcal{A}$, donc chaque état (i, I) est initial dans $\mathcal{S}$. Au total, $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}$ est un In-morphisme. ∎

Corollaire 36. *Soit $\mathcal{A}$ un automate sur A^*. Il existe un automate $\mathcal{T}$ tel que :*

(i) *$\mathcal{T}$ est équivalent à $\mathcal{A}$;*

(ii) *$\mathcal{T}$ est non ambigu ;*

(iii) *il existe un morphisme $\varphi \colon \mathcal{T} \to \mathcal{A}$.*

Ce n'est pas un résultat nouveau que, étant donné un automate $\mathcal{A}$ sur A^*, il est possible de trouver un automate $\mathcal{T}$ non ambigu équivalent à $\mathcal{A}$: le déterminisé de $\mathcal{A}$ par exemple répond à la question. Mais que $\mathcal{T}$ puisse être choisi de telle sorte qu'il existe un morphisme de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{A}$, c'est-à-dire qu'on puisse voir dans $\mathcal{A}$ l'image des calculs de $\mathcal{T}$, est une propriété nouvelle, et riche de conséquences.

Démonstration. On construit le revêtement de Schützenberger $\mathcal{S}$ de $\mathcal{A}$. Puisque $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}} \colon \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{A}}$ est un In-morphisme, c'est-à-dire un morphisme localement co-surjectif, on peut, en supprimant *arbitrairement* certaines transitions entrantes dans les états de $\mathcal{S}$ où $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}$ n'est pas localement co-bijectif, construire un sous-automate $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ pour lequel la trace de $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}$ est précisément un co-revêtement.

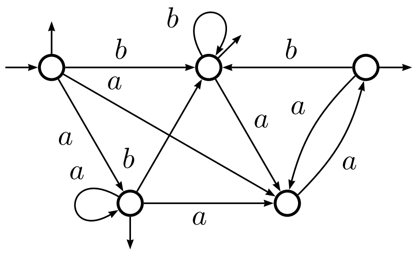
Cette opération de suppression de transitions s'applique aux transitions entrantes dans l'état final subliminal de $\mathcal{S}$ de telle sorte que dans l'image inversse de chaque état final de $\widehat{\mathcal{A}}$ il y a un seul état final de $\mathcal{T}$.

Cet automate $\mathcal{T}$ répond à la question : puisque $\pi_{\widehat{\mathcal{A}}}\colon \mathcal{T} \to \widehat{\mathcal{A}}$ est un co-revêtement, il y a *bijection* entre les calculs réussis de $\mathcal{T}$ et de $\widehat{\mathcal{A}}$, $\mathcal{T}$ est à la fois *équivalent* à $\widehat{\mathcal{A}}$ et donc à $\mathcal{A}$ et *non ambigu* puisque $\widehat{\mathcal{A}}$ l'est. Enfin, la restriction de $\pi_{\mathcal{A}}$ à $\mathcal{T}$ est un morphisme (localement injectif) sur $\mathcal{A}$. ■

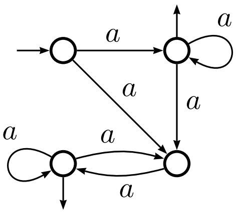
Exemple 37. À partir du revêtement de $\mathcal{A}_1$ représenté à la figure 4, le morphisme $\pi_{\widehat{\mathcal{A}_1}}$ est localement *stictement* co-surjectif — c'est-à-dire non localement co-bijectif — sur le bouquet entrant du seul état $(r, \{p, r\})$: les deux transitions entrantes qui sont envoyées sur la même transition de $\widehat{\mathcal{A}_1}$ sont tracées avec une ligne double. En supprimant l'une ou l'autre de ces deux transitions, on obtient un automate non ambigu qui accepte les mots qui contiennent un facteur $a\,b$ et qui s'envoie par morphisme sur $\mathcal{A}_1$.

3.6 Exercices

1..— Calculer le quotient minimal de l'automate suivant :

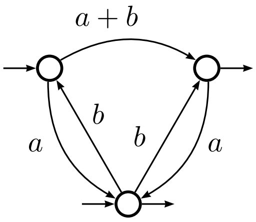


2..— Soit $\mathcal{D}_1$ l'automate représenté ci-dessous. Calculer le quotient (minimal) de $\mathcal{D}_1$, le co-quotient de $\mathcal{D}_1$, le co-quotient du quotient de $\mathcal{D}_1$, *etc.*



3..— **Lemme des transitions colorées.** Montrer la proposition suivante :
Soit $\mathcal{A}$ un automate sur un monoïde M et dont les transitions sont colorées en rouge et en bleu. L'ensemble des étiquettes des calculs de $\mathcal{A}$ qui contiennent au moins une transition rouge est rationnel (dans M).

4..— Construire le revêtement de Schützenberger de l'automate $\mathcal{A}$ ci-dessous.



Combien y a-t-il de S-immersions distinctes dans ce revêtement (c'est-à-dire, de sous-automates $\mathcal{T}$ de $\mathcal{S}$ distincts qui sont à la fois non-ambigus et équivalents à $\mathcal{A}$) ?

5..— Construire le revêtement de Schützenberger de l'automate $\mathcal{B}_1$ de la figure 5.

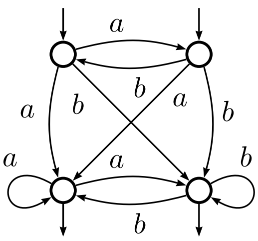


Fig. 5 – L'automate $\mathcal{B}_1$