Markov Random Fields and graphcut optimization

Florence Tupin

Introduction

◦ **Historique**

- Physique statistique (organisation des cristaux)
- Article de Geman et Geman (84)
- Regain d'intérêt avec les graph-cuts (99)

◦ **Idée fondamentale des champs de Markov**

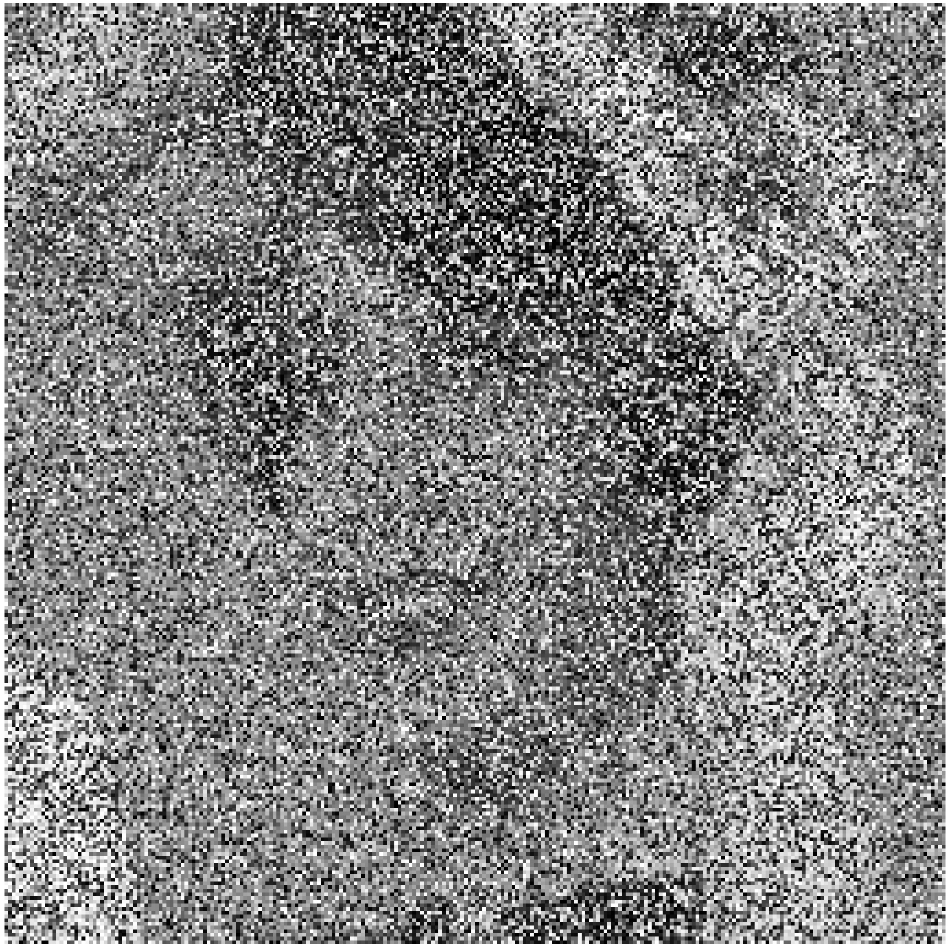
introduire des relations contextuelles en traitement d'images

un voisinage local suffit pour des images naturelles

A priori dans les images naturelles : le contexte spatial

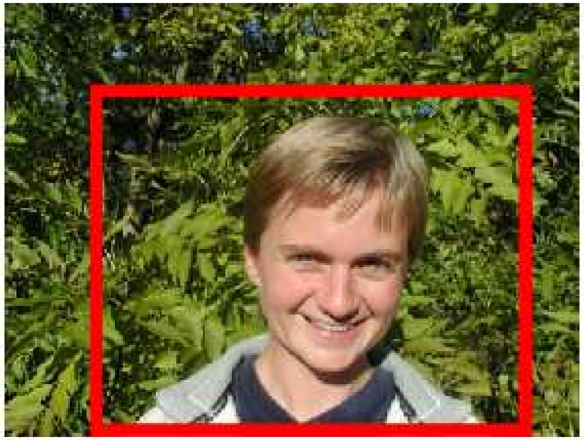
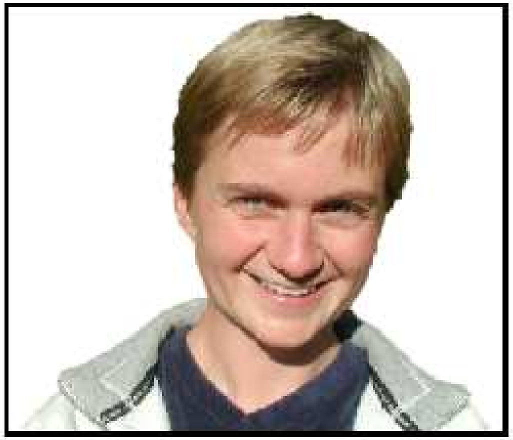
Illustrations - filtrage (Darbon, Sigelle)

bruit impulsif + TV

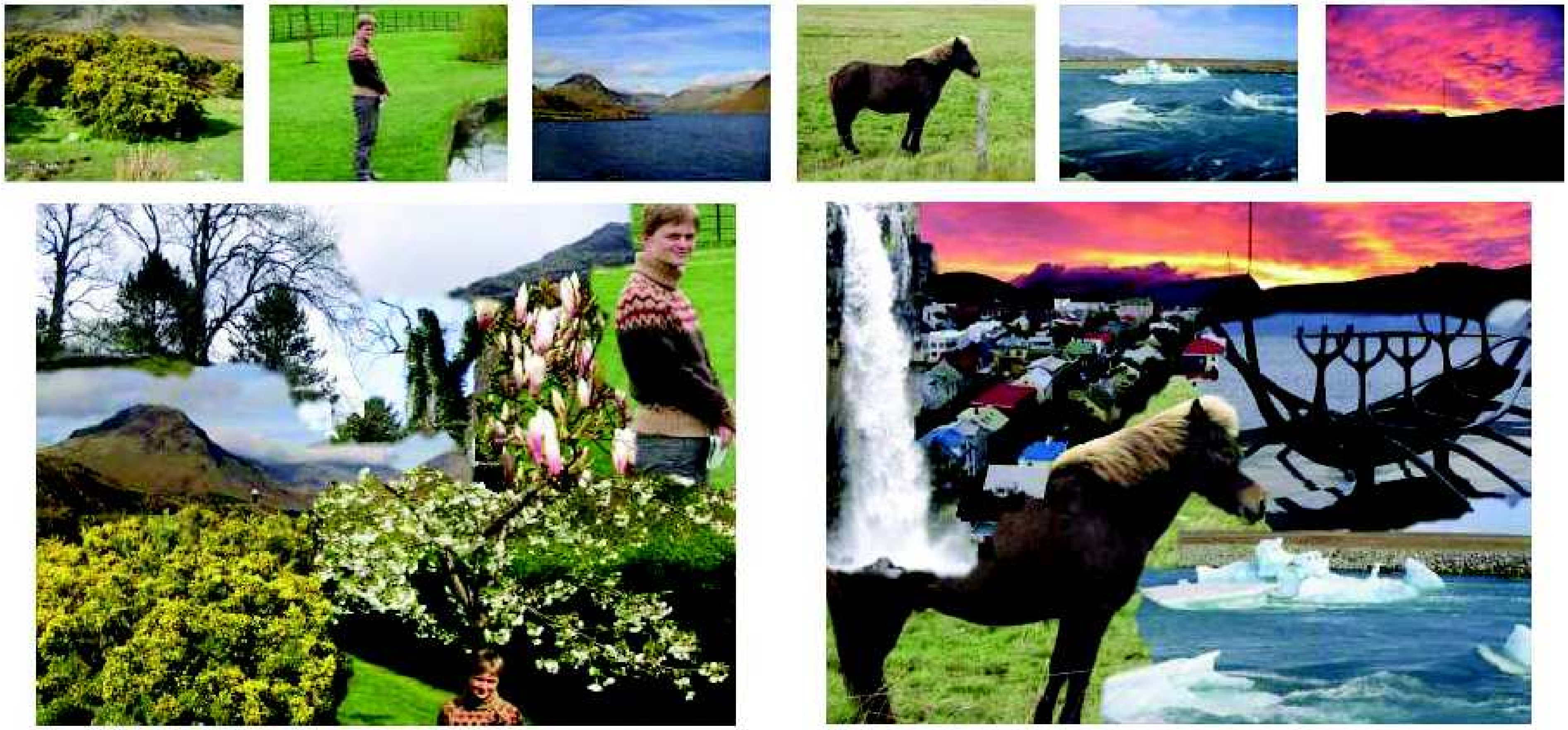


Illustrations - détourage (Rother, Kolmogorov et Blake)



Illustrations - digital tapestry (Rother et al.)



Illustrations - inpainting (Allène, Paragios)

Champs de Markov et optimisation par coupes minimales (graphcuts)

- **Analyse bayésienne et modèles markoviens**
- **Optimisation**

Notations

◦ **modèle probabiliste de l'image**

$S = \{s\} \subset \mathbf{Z}^d$ ensemble de sites (fini)

$x_s \in E$ espace des niveaux de gris

$(E = \{0..255\}$ $\{0..q-1\}$ (système de labels) $\mathbf{R})$

X_s variable aléatoire associée à s

$X = \{X_s\}_{s \in S}$ champ aléatoire

$x = \{x_s\}_{s \in S} = \{x_s\} \cup x^s$ configuration (image)

$\Omega = E^{|S|}$espace des configurations

◦ **probabilités :**

$P(X_s = x_s)$ probabilité locale

$P(X = x) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots X_s = x_s \ldots)$ loi globale (jointe)

$P(X_s = x_s | X_t = x_t, t \neq s)$probabilité conditionnelle (locale)

Analyse Bayesienne en Traitement des Images
Loi du processus de formation des observations

$x \quad \rightarrow$	$\boxed{\text{Dégradation Détection Mesure}}$	$\rightarrow \quad y$	
scène originale		observation	

◦ **Critère MAP (Maximum A Posteriori)**

$$P(X|Y) \propto P(Y|X)P(X)$$

— $P(Y|X)$: terme de vraisemblance ("attache aux données")

— $P(X)$: terme a priori, choix d'un modèle pour la solution

Expression énergétique

◦ **Loi du processus de formation des observations**

$$P(Y = y|X = x) \quad = \quad \prod_{s \in S} P(Y_s = y_s|x) \quad = \quad \prod_{s \in S} P(Y_s = y_s|X_s = x_s)$$

◦ **Modèle a priori : propriétés désirées sur l'image réelle** $\Rightarrow$ interaction entre un site et ses voisins (régularité des régions, ...) $\Rightarrow$ X est un champ de Markov Théorème de Hammersley-Clifford

$P(X = x) = \dfrac{\exp - U(x)}{Z}$	distribution de Gibbs
$U(x) = \sum_{c \in \mathcal{C}} U_c(x)$	énergie globale
$U_c(x) = U_c(x_s,\ s \in c)$	potentiel de cliques

Distribution a posteriori

◦ **nouvelle distribution de Gibbs**

$$P(X = x|Y = y) = \frac{\exp -\mathcal{U}(x|y)}{Z'}$$

$$\mathcal{U}(x|y) = \sum_{s \in S} - \ln(P(Y_s = y_s|X_s)) + U(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{U}(x|y) = \sum_{s \in S} V_c(y_s|x_s) + \sum_{\{s,t\}} V_c(x_s, x_t) \\ \\ \max_{x \in \Omega} \Pr(X = x|Y = y) \;\Leftrightarrow\; \min_{x \in \Omega} \mathcal{U}(x|y) \end{array}}$$

Exemples de modèles markoviens

◦ **Segmentation**

Modèle d'Ising : champ binaire ($E = \{0, 1\}$)

Modèle de Potts : champ avec plusieurs classes ($E = \{0, ..., K\}$)

$$V_c(x_s, x_t) = \beta\delta(x_s \neq x_t)$$

◦ **Restauration** $\quad V_c(x_s, x_t) = \phi(x_s - x_t)$

— modèle gaussien (quadratique) $\quad \phi(u) = u^2$

— Geman et Mac Clure 85 $\quad \phi(u) = \dfrac{u^2}{1 + u^2}$

— Hebert et Leahy 89 $\quad \phi(u) = \log(1 + u^2)$

— Charbonnier 94 $\quad \phi(u) = 2\sqrt{1 + u^2} - 2$

— modèle TV (Variation Totale) $\quad \phi(u) = |u|$

Champs de Markov et optimisation par coupes minimales (graphcuts)

- **Analyse bayésienne et modèles markoviens**
- **Optimisation**

Méthodes d'optimisation

◦ **Difficultés**

Espace Ω des configurations énorme : $Card(\Lambda)^{(np \times nl)}$!

◦ **Méthodes**

— Recuit simulé (Geman et Geman 84) : algorithme stochastique itératif, solution minimum global, mais lenteur

— ICM (Iterated Conditional Modes) : minimum local, très rapide

— Recherche de la coupe de capacité minimale : rapide et minimum global ! mais pour certaines énergies ...

Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- **Introduction - rappels sur les graphes**
- **Cas binaire**
- **Algorithmes approchés**
- **Algorithmes exacts**

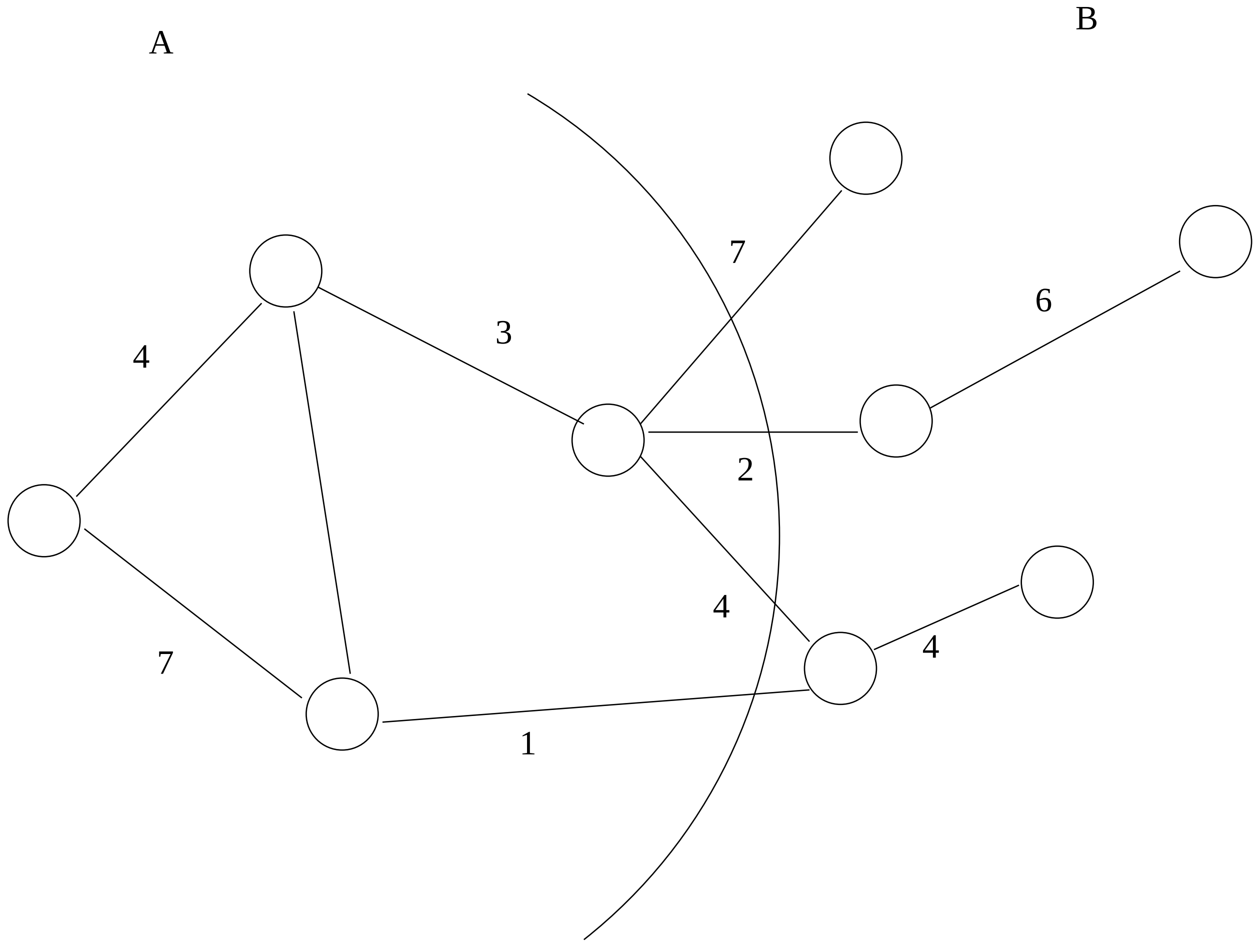
Théorie des graphes et coupes

◦ Coupe d'un graphe

— graphe $G = (X, E)$

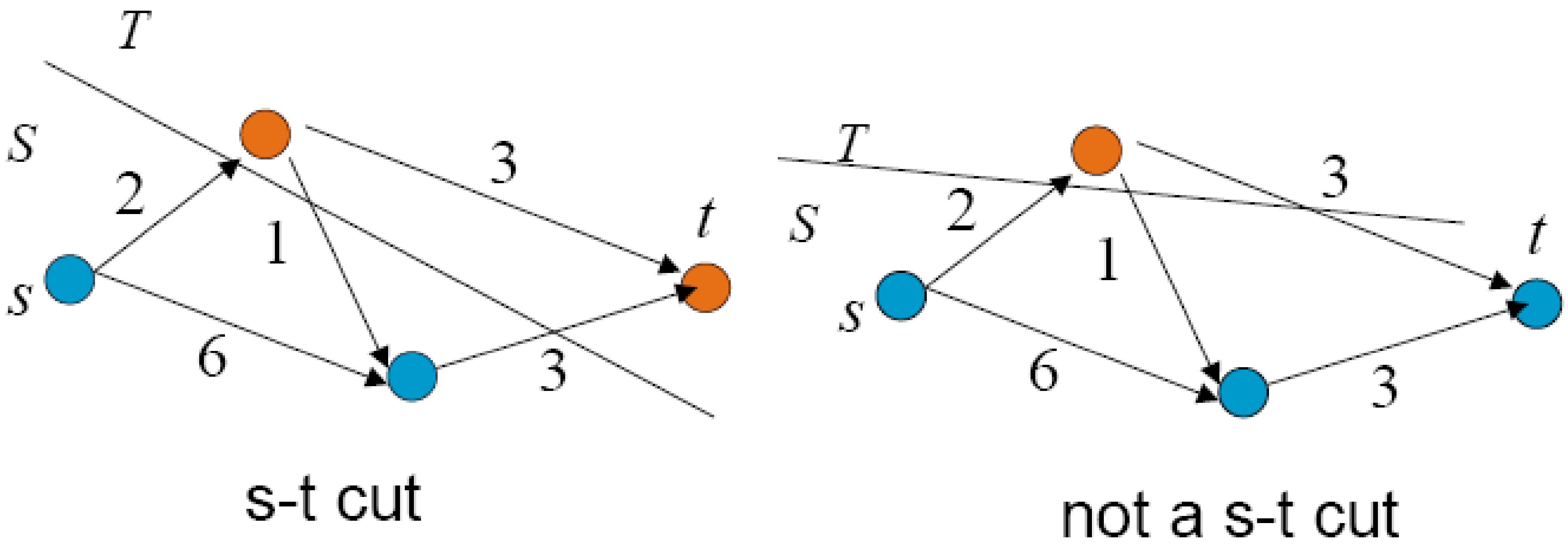
— partition en 2 parties A et B ($A \cup B = X$, $A \cap B = \emptyset$)

— $cut(A, B) = \sum_{x \in A, y \in B} w(x, y)$



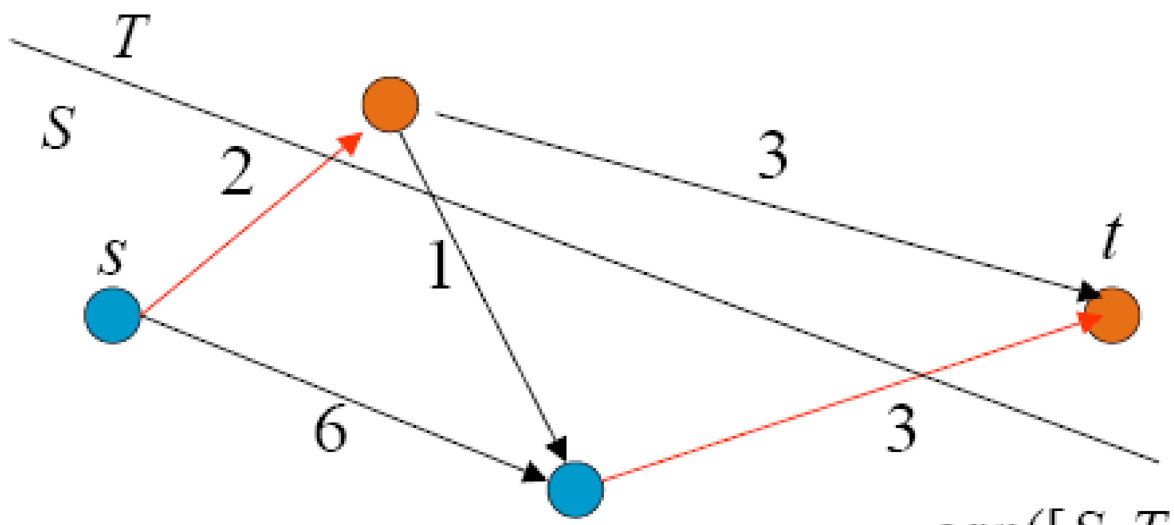
Théorie des graphes et coupes

- **Coupe d'un graphe avec nœuds terminaux**
  - — ajout de deux nœuds : source s, puits t
  - — partition en 2 parties S et T, l'une contenant la source et l'autre le puits : st-coupe
  - — $cut(S,T) = \sum_{x \in S, y \in T} w(x,y)$



Théorie des graphes et coupes ◦ Coupe de capacité minimale

Parmi toutes les coupes séparant les nœuds terminaux celle de coût minimal



$cap([S,T]) = 2 + 3 = 5$

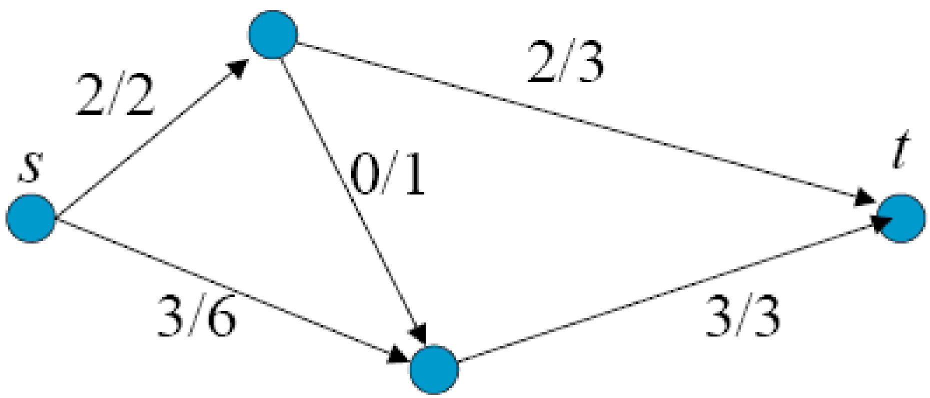
Théorie des graphes et coupes

◦ **Flot**

— flot(p,q) $\leq$ w(p,q)

— en un nœud : flot entrant = flot sortant

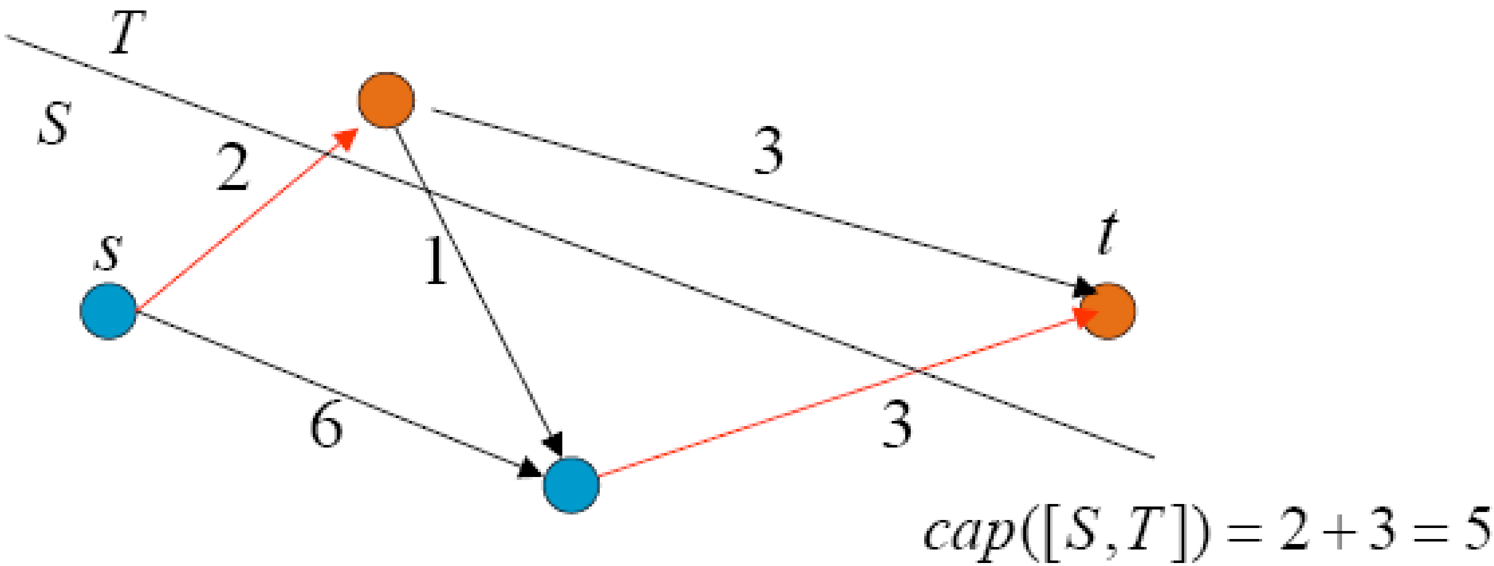
— recherche du flot max entre s et t pour des capa données



An example of flow

Théorie des graphes et coupes ∘ MinCut = MaxFlow

- flot maximum = coupe de capacité minimale
- valeur du flot = coût de la coupe



Théorie des graphes et coupes

◦ **Algorithme de Ford et Fulkerson (62)**

notion de graphe résiduel et recherche de plus court chemin

algorithme en $O(nmc_{max})$ (n nombre de sommets, m nombre d'arcs et c_{max} capacité maximale des arcs)

◦ **Algorithme "Push - relabel" (Goldberg et Trajan)**

ne respecte plus flot entrant = flot sortant

algorithme en $O(n^3)$ ou $O(n^2\sqrt{m})$

Théorie des graphes et coupes

- **Algorithme spécifique TdI (Boykov et Kolmogorov)**
  - — construction de deux arbres, l'un partant de chaque nœud terminal
  - — rencontre des arbres : existence d'une chaîne augmentante
  - — mise à jour du graphe résiduel et itération

en pratique : beaucoup plus adapté aux graphes creux du traitement d'images !

`http://www.adastral.ucl.ac.uk/~vladkolm/software.html`

Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- Introduction - rappels sur les graphes
- <u>Cas binaire</u>
- Algorithmes approchés
- Algorithmes exacts

Cas binaire - modèle d'Ising (Greig et al. 89)

◦ **Modèle d'Ising**

deux étiquettes 0 (noir) et 1 (blanc)

énergie :

$$U(x|y) = \sum_s \mathcal{D}(x_s, y_s) + \sum_{(s,t)} \beta\delta(x_s \neq x_t)$$

◦ **Création du graphe**

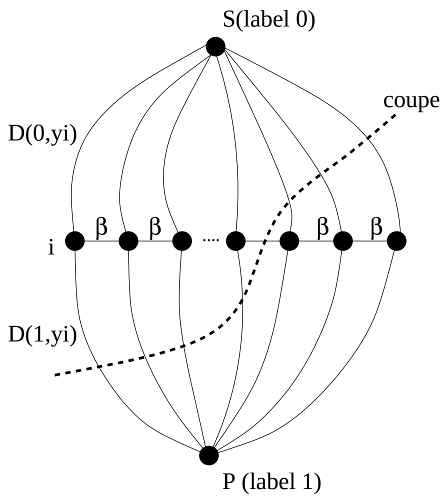
— nœuds = tous les pixels p de l'image

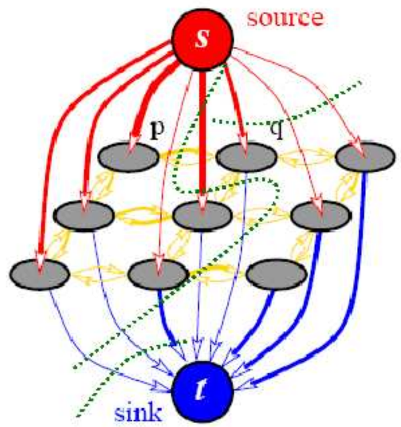
— ajout de deux nœuds terminaux (source : label 0, puits : label 1)

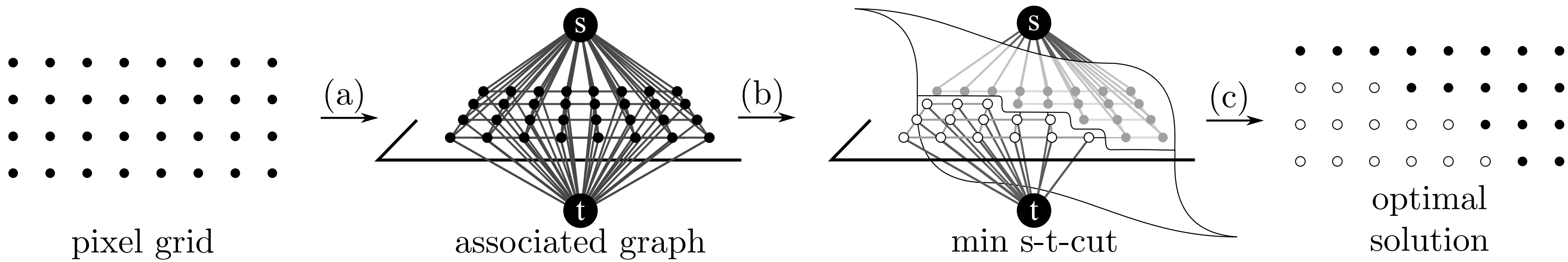
— arcs :

1. lien avec la source de poids : $w(p, s) = \mathcal{D}(0, y_p)$
2. lien avec le puits de poids : $w(p, t) = \mathcal{D}(1, y_p)$
3. si deux pixels p et q sont voisins en 4 connexité : arc de poids $w(p, q) = \beta$

Cas binaire 1D et 2D (Greig et al. 89)







Cas binaire - modèle d'Ising (Greig et al. 89)

◦ **Calcul du coût d'une coupe**

S l'ensemble des pixels liés à la source

T ensemble des pixels liés au puits

capacité de la coupe :

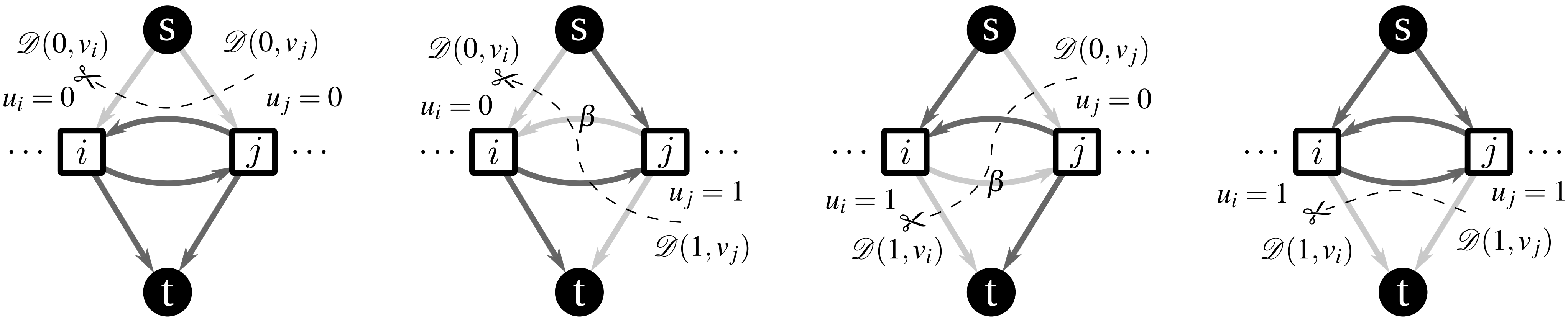
$$C(S,T) = \sum_{p \in S} \mathcal{D}(1, y_p) + \sum_{p \in T} \mathcal{D}(0, y_p) + \sum_{(s \in S, t \in T)} \beta$$

$\Rightarrow C(S,T) = U(x|y)$ pour un étiquetage x défini par

— si $p \in S : x_p = 1$

— si $p \in T : x_p = 0$

Cas binaire 1D et 2D (Greig et al. 89)



$$\cdots + \mathscr{D}(0,v_i) + \mathscr{D}(0,v_j) + 0 + \cdots$$

$$\cdots + \mathscr{D}(0,v_i) + \mathscr{D}(1,v_j) + \beta + \cdots$$

$$\cdots + \mathscr{D}(1,v_i) + \mathscr{D}(0,v_j) + \beta + \cdots$$

$$\cdots + \mathscr{D}(1,v_i) + \mathscr{D}(1,v_j) + 0 + \cdots$$

Cas binaire : généralisation (Kolmogorov et Zabih, 2004)

- **Formulation de l'énergie**

$$U(x|y) = \sum_s \mathcal{D}(x_s, y_s) + \sum_{(s,t)} V_c(x_s, x_t)$$

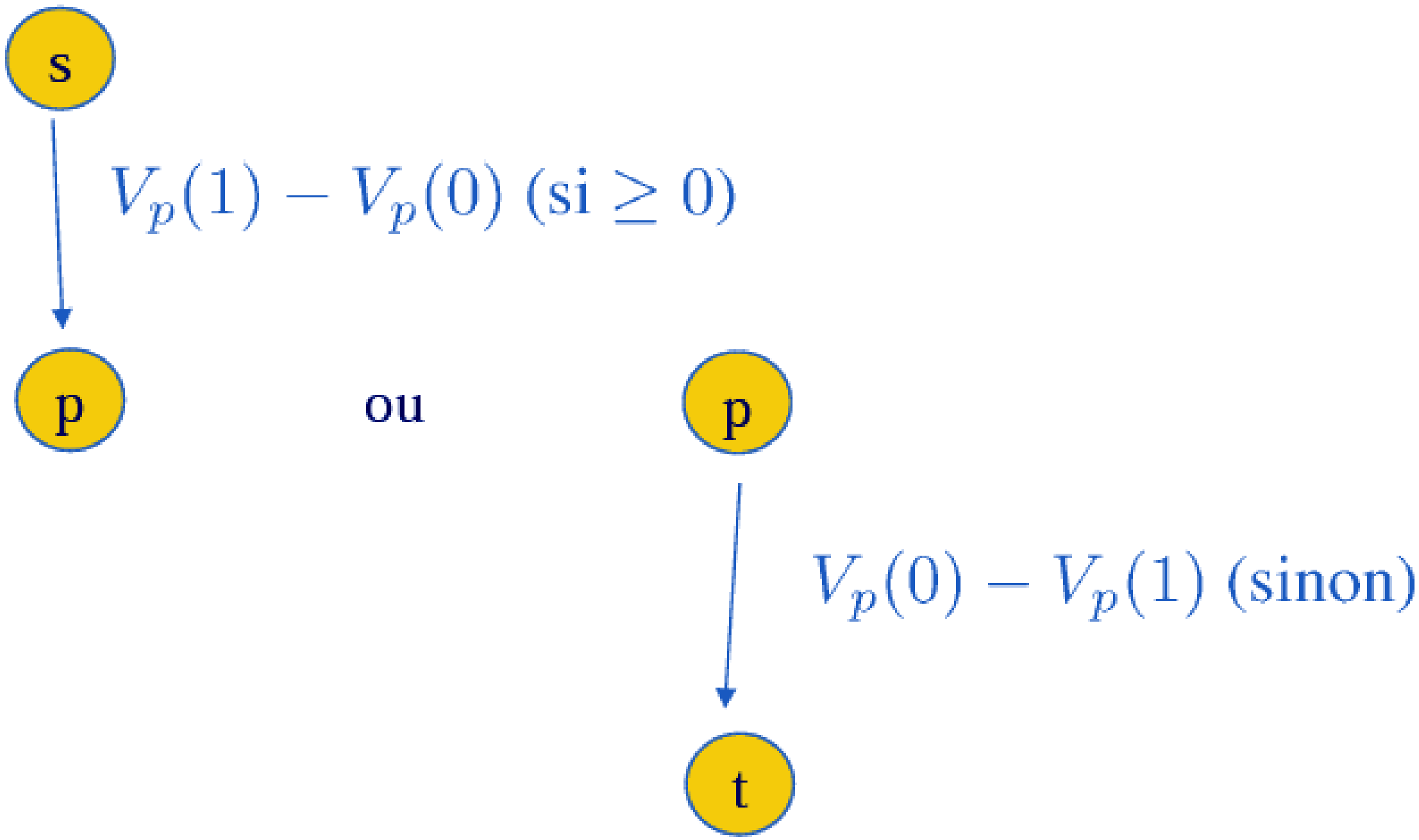
- **Condition pour que l'énergie soit graphe-représentable**

$$V_c(0,0) + V_c(1,1) \leq V_c(0,1) + V_c(1,0)$$

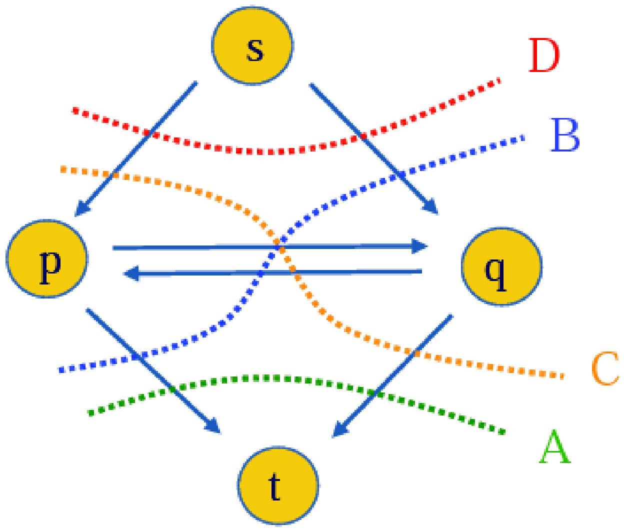
V_c fonctions “sous-modulaires”

Construction du graphe (Kolmogorov et Zabih)

(si $p \in S$ $x_p = 0$)



Construction du graphe (Kolmogorov et Zabih)

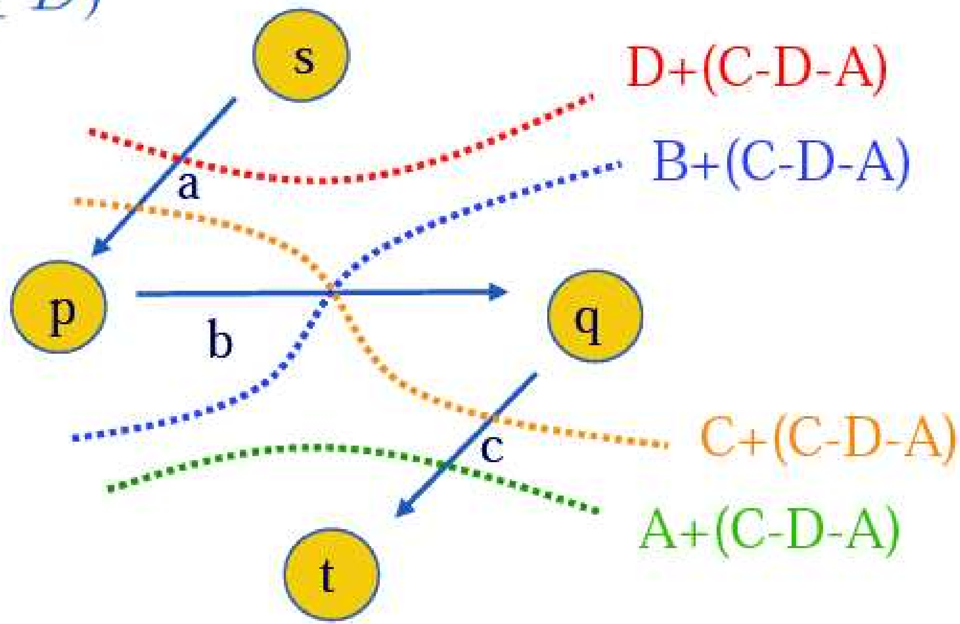


$$A = V(0,0), B = V(0,1), C = V(1,0), D = V(1,1)$$

$\Rightarrow$ Arcs ?

Construction du graphe (Kolmogorov et Zabih)

(Cas $C \geq A$ et $C \geq D$)



$$a = C - A, b = B + C - D - A, c = C - D$$

On a bien $b \geq 0$ car

$$V(0,0) + V(1,1) \leq V(0,1) + V(1,0)$$

soit

$$A + D \leq B + C$$

Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- Introduction - rappels sur les graphes
- Cas binaire
- Algorithmes approchés
- Algorithmes exacts

Extension au cas de la classification (Boykov et al)

$$U(x|y) = \sum_p \mathcal{D}(x_p, y_p) + \sum_{(p,q)} V_c(x_p, x_q)$$

$x_p \in E$ ensemble monodimensionnel fini

- **Idée :** se ramener au cas ... binaire !

- **Contraintes sur la fonction de régularisation**

V_c est une métrique ou une semi-métrique

Semi-métrique $\forall \alpha, \beta \in E^2$:

— $V_c(\alpha, \beta) = V_c(\beta, \alpha) \geq 0$

— $V_c(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Métrique si en plus $V_c(\alpha, \beta) \leq V_c(\alpha, \gamma) + V_c(\gamma, \beta)$

Exemples : quadratique tronquée (semi-), modèle de Potts, norme tronquée

- **Limites**

solution approchée (minimum local)

Extension au cas de la classification : $\alpha - \beta$ swap

◦ Définition de l'$\alpha - \beta$ swap

• étiquetage = partition de l'image $\mathbf{P} = \{P_l | l \in E\}$ avec $P_l = \{p \in I | x_p = l\}$

• $\alpha - \beta$ swap : mouvement d'une partition $\mathbf{P}$ à une partition $\mathbf{P'}$ telle que $P_l = P'_l \ \forall l \neq \alpha, \beta$ (certains pixels étiquetés α sont étiquetés β et vice-versa)

◦ Optimisation de l'$\alpha - \beta$ swap par coupe minimale

— construction d'un graphe à partir des seuls pixels étiquetés α ou β ($S_{\alpha\beta}$)

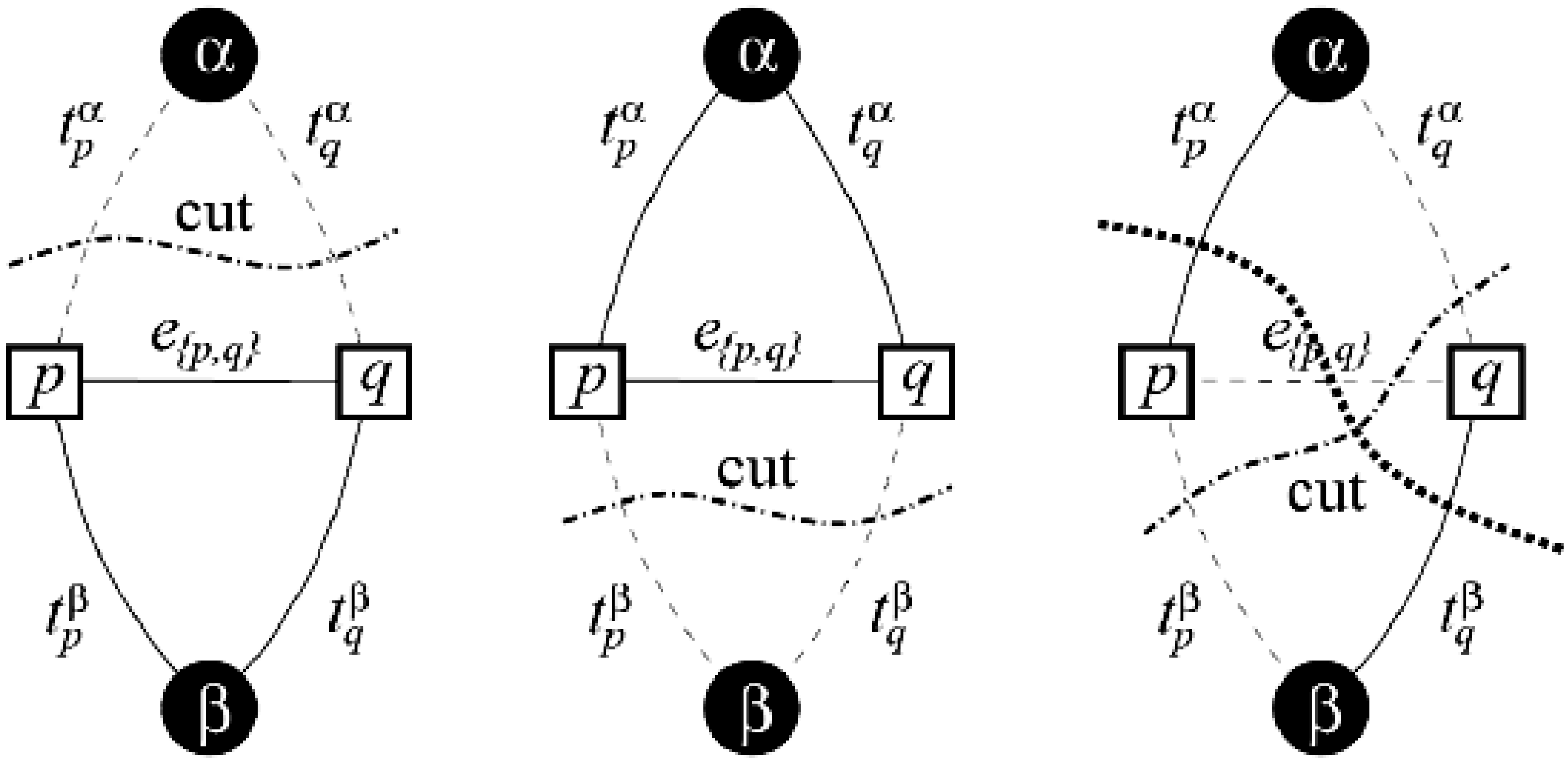
— ajout de deux nœuds terminaux l'un pour α, l'autre pour β

— arcs :

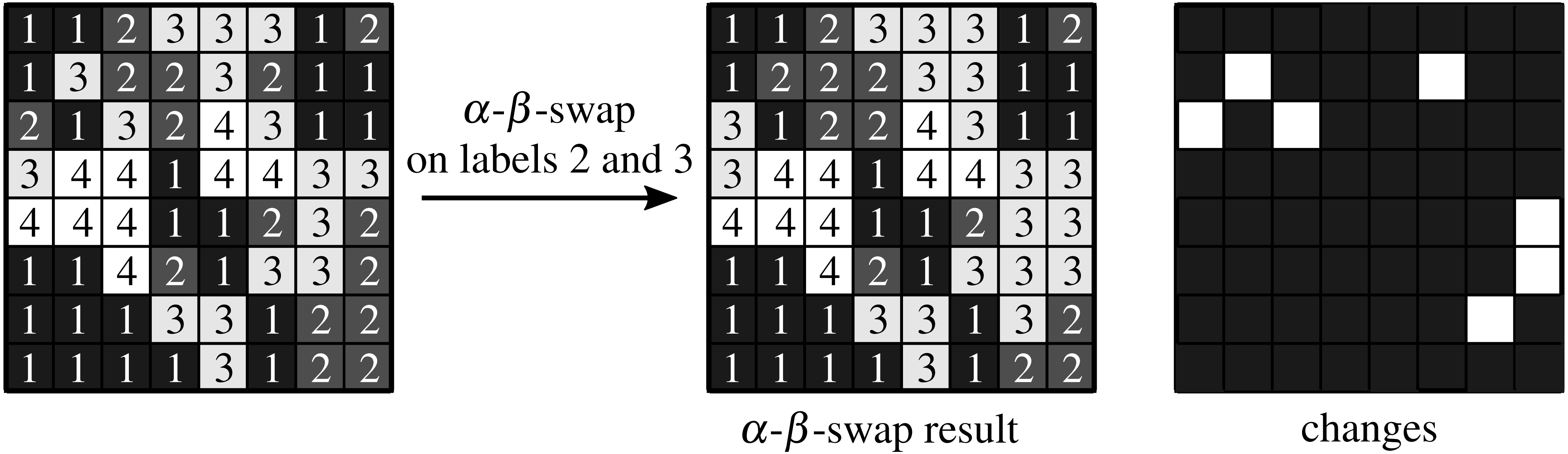
1. lien avec le nœud α de poids :
   $w(p, \alpha) = \mathcal{D}(\alpha, y_p) + \sum_{q | q \in N_p, \ \ q \notin S_{\alpha\beta}} V_c(\alpha, x_q)$
2. lien avec le nœud β de poids :
   $w(p, \beta) = \mathcal{D}(\beta, y_p) + \sum_{q | q \in N_p, \ \ q \notin S_{\alpha\beta}} V_c(\beta, x_q)$
3. si deux pixels p et q sont voisins en 4 connexité et dans $S_{\alpha\beta}$: arc de poids $w(p, q) = V_c(\alpha, \beta)$

— l'étiquette finale d'un pixel correspond au lien coupé

Extension au cas de la classification : $\alpha - \beta$-swap



Extension au cas de la classification : $\alpha - \beta$-swap



Extension au cas de la classification : α-expansion

◦ **Définition de l'α expansion**

• α-extension : mouvement d'une partition $\mathbf{P}$ à une partition $\mathbf{P}'$ telle que les pixels étiquetés à α le restent et d'autres peuvent prendre l'étiquette α

◦ **Optimisation de l'α-expansion par coupe minimale** (V_c doit être une métrique)

— construction d'un graphe à partir de tous les pixels

— ajout de deux nœuds terminaux l'un pour α, l'autre pour $\overline{\alpha}$

— l'étiquette finale d'un pixel correspond au lien coupé

Extension au cas de la classification : α-expansion

◦ **Optimisable par graph-cut**

α label 0

$\overline{\alpha}$ label 1 (pixel p garde le label $x_p = \overline{\alpha}(p)$, pixel q garde le label $x_q = \overline{\alpha}(q)$)

Condition de sous modularité :

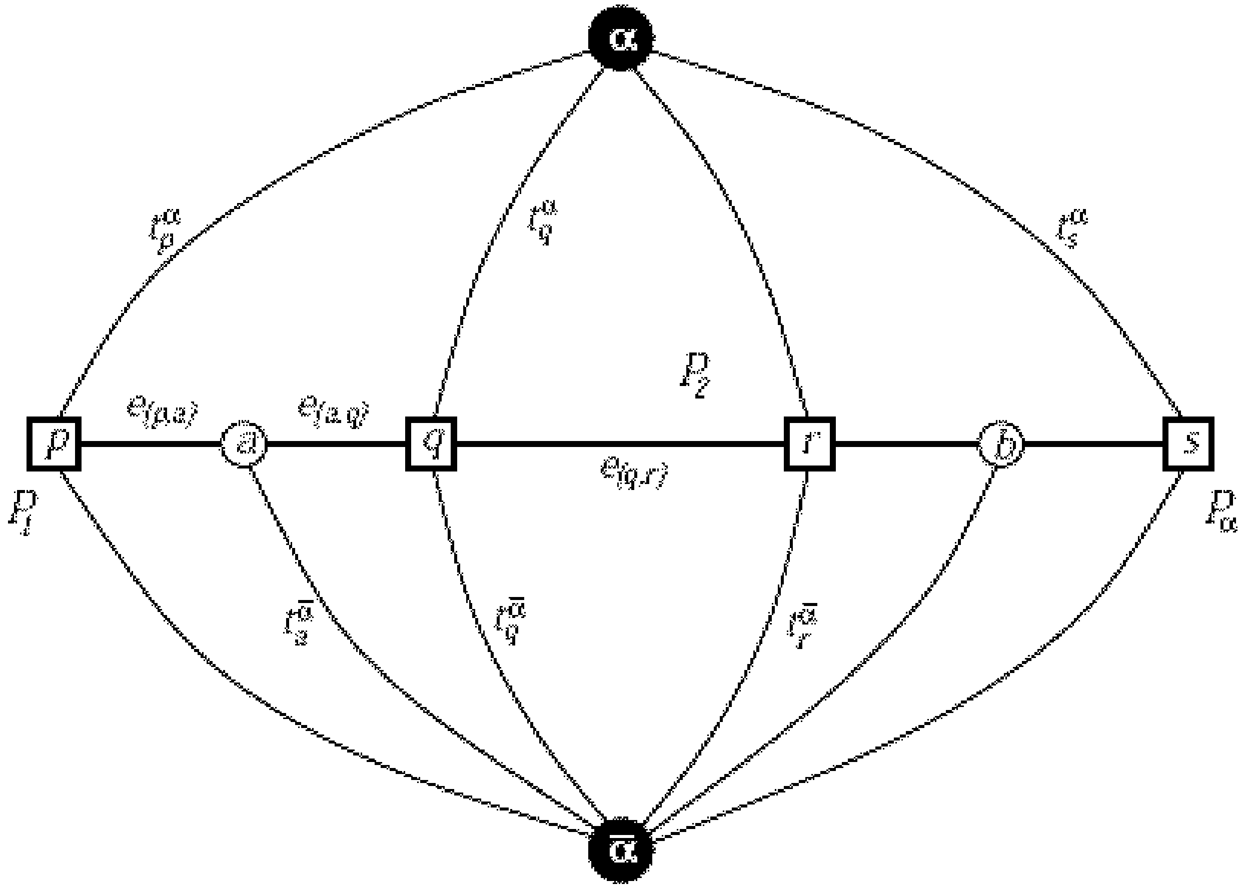
$V_c(0,0) + V_c(1,1) \leq V_c(0,1) + V_c(1,0)$

$\Rightarrow V_c(\alpha,\alpha) + V_c(\overline{\alpha}(p),\overline{\alpha}(q)) \leq V_c(\alpha,\overline{\alpha}(p)) + V_c(\overline{\alpha}(q),\alpha)$

$\Rightarrow 0 + V_c(x_p,x_q) \leq V_c(\alpha,x_p) + V_c(x_q,\alpha)$

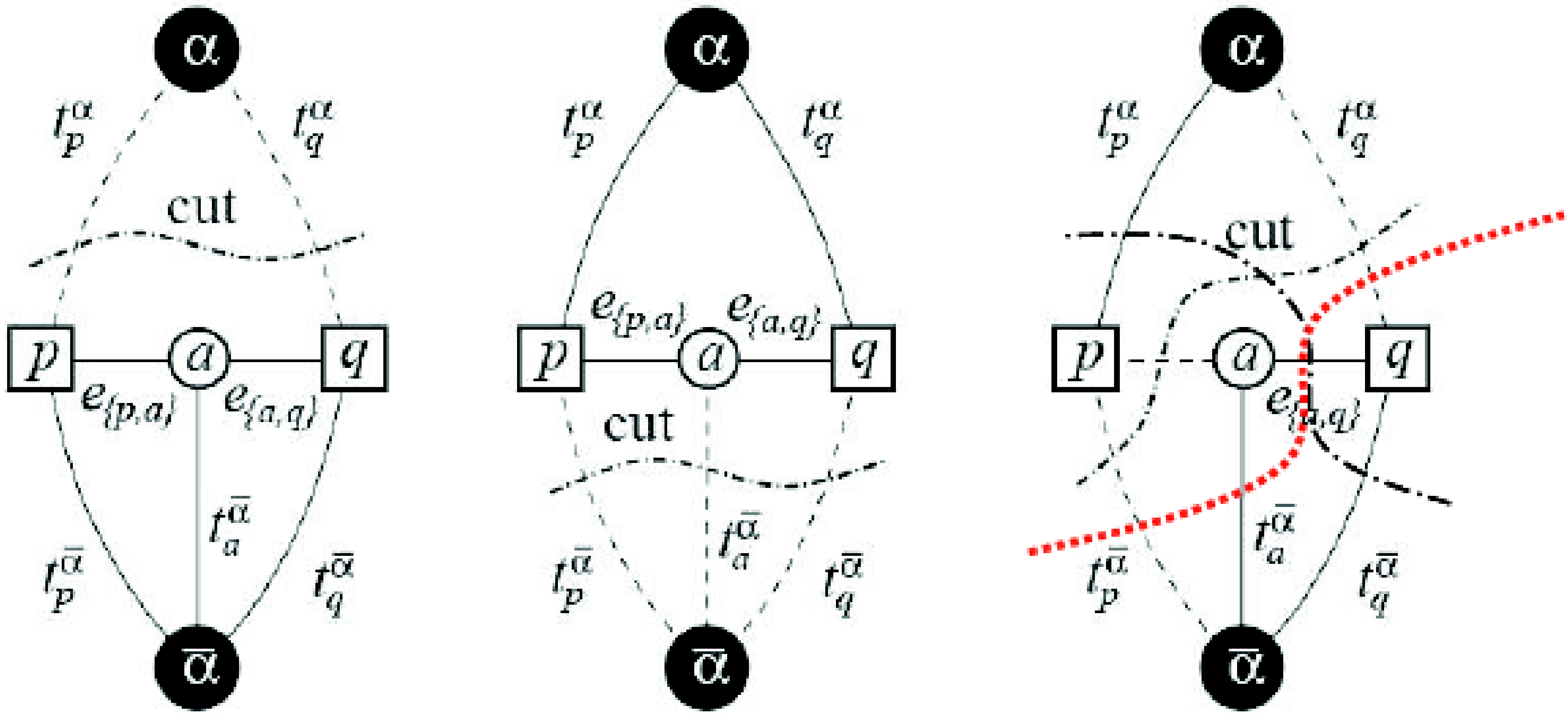
vérifié car V_c est une métrique !

Mouvement α-extension



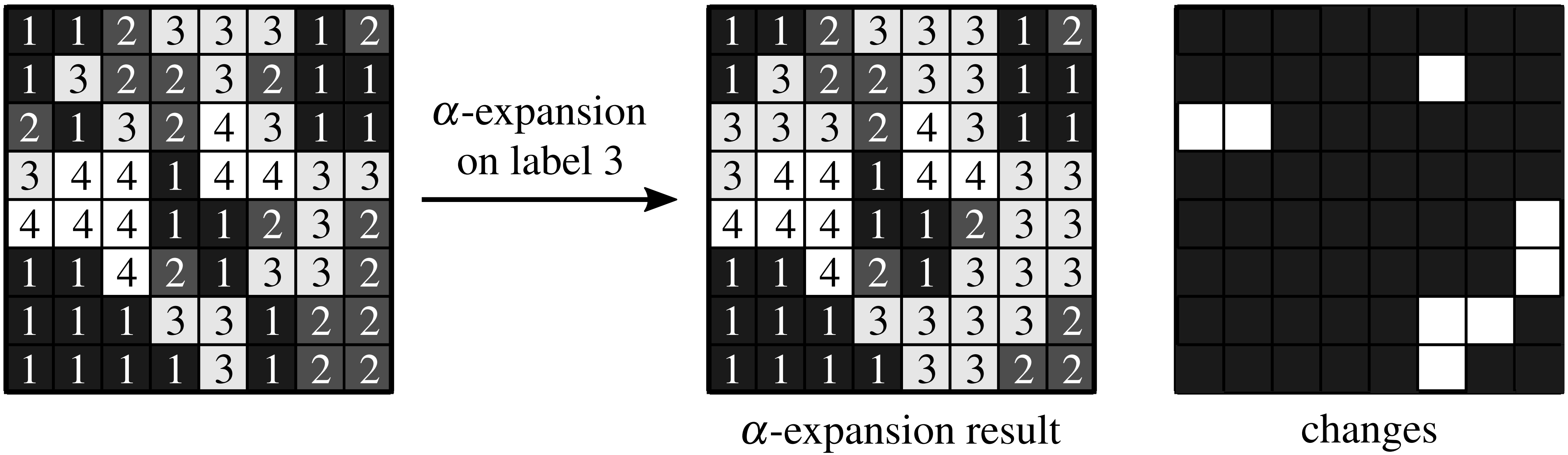
Mouvement α-extension

$e(p,a) = V(l_p, \alpha)$, $e(a,q) = V(\alpha, l_q)$, $t_a^{\overline{\alpha}} = V(l_p, l_q)$

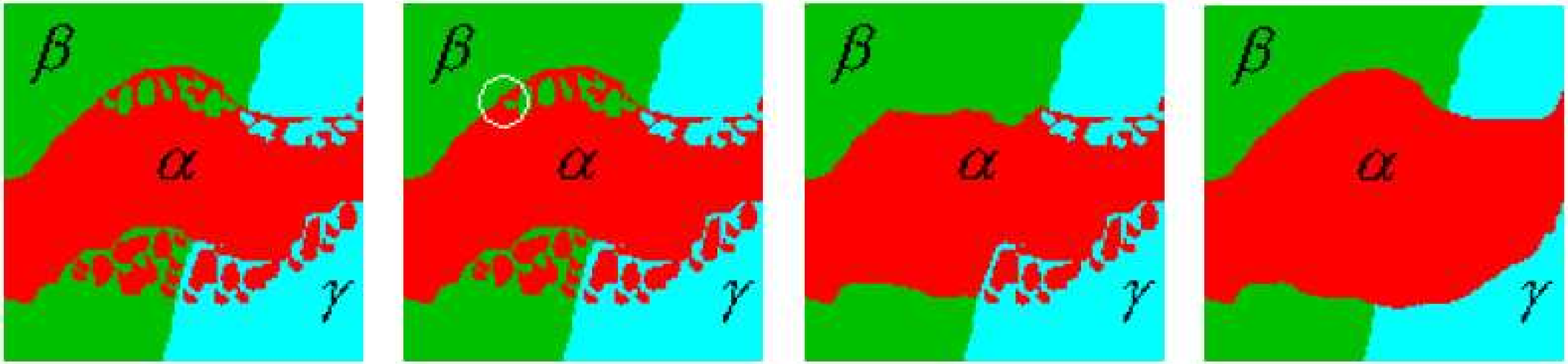


coupe rouge impossible car V métrique $(V(l_p, \alpha) \leq V(l_p, l_q) + V(l_q, \alpha))$

Mouvement α-extension



Illustrations (Boykov et al.)



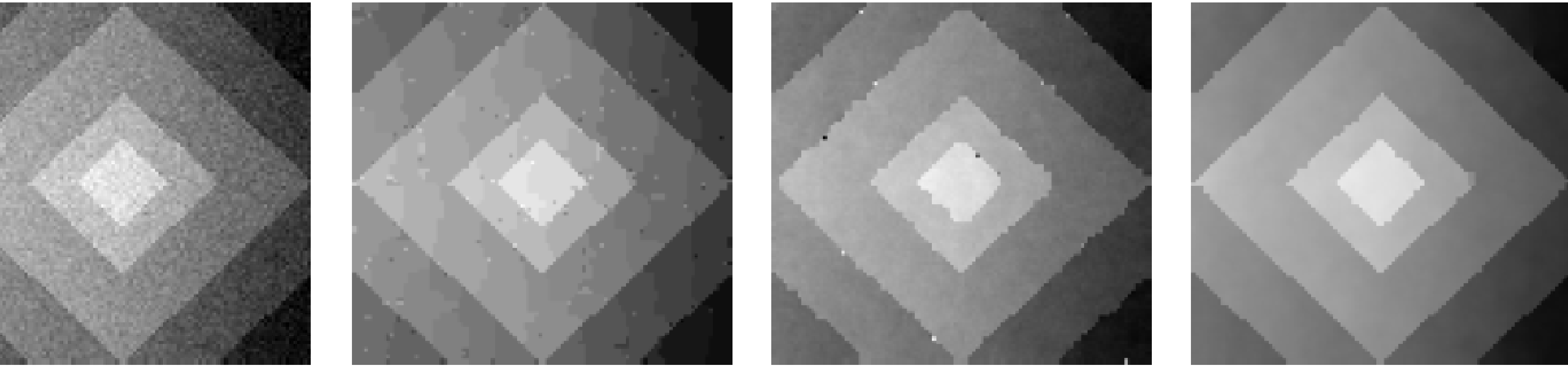
(a) initial labeling (b) standard move (c) α-β-swap (d) α-expansion

Résultats

- **Algorithmes**
  - $\alpha - \beta$ swap : énergie semi-métrique
  - α-extension : énergie métrique
- **Performances**
  - converge vers un minimum local (plusieurs itérations)
  - beaucoup plus rapide qu'un recuit simulé
  - permet des mouvements beaucoup plus importants dans le paysage énergétiques
  - résultats théoriques sur la distance au minimum global

Illustrations (Boykov et al.)

(E_2 Potts, E_1 quadratique tronquée)



mond image (input) | Our method (E_2) | Annealing (E_1) | Our method (E_1)

Cas de la segmentation interactive : contraintes “hard”

◦ **Principe**

L’utilisateur définit manuellement ce qui appartient à l’objet et au fond

$\Rightarrow$ minimisation de l’énergie d’une classification binaire avec contraintes “hard” (= pixels qui ne peuvent changer de classe)

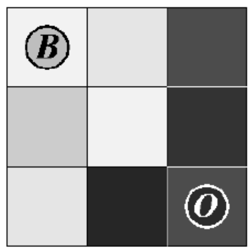
◦ **Méthode**

Recherche de la coupe de capacité minimale avec des poids très élevés sur certains liens pour garantir qu’ils n’appartiendront pas à la coupe

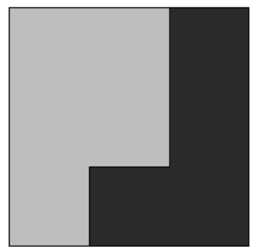
◦ **Avantages**

— permettent de bien gérer des contraintes difficiles à introduire dans un recuit simulé
— les zones définies permettent de faire l’apprentissage de l’attache aux données également
— algorithme très rapide si de nouvelles marques sont introduites

Construction du graphe (Boykov et Jolly)

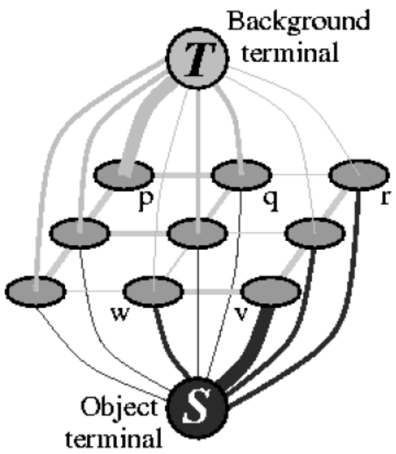


(a) Image with seeds.

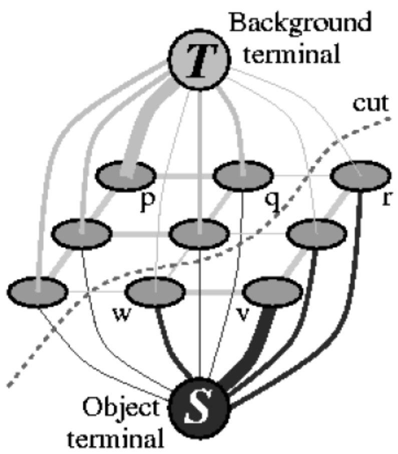


(d) Segmentation results.

⇓ ⇑



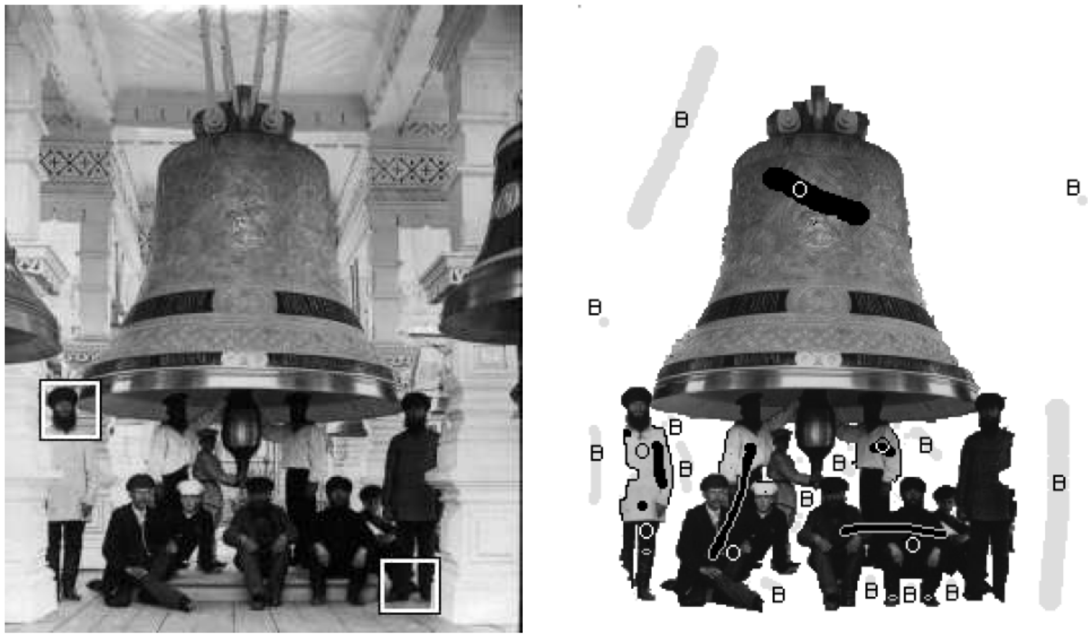
⇒



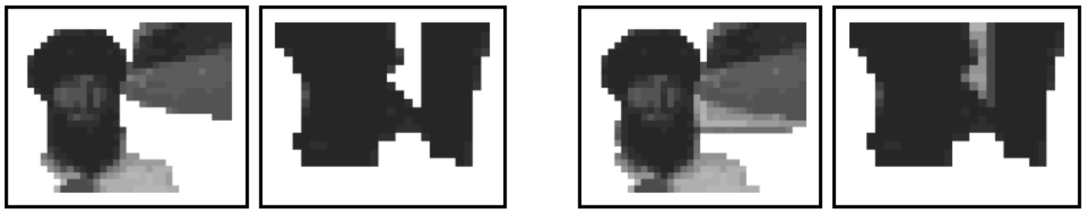
Poids du graphe (Boykov et Jolly)

edge	weight (cost)	for
$\{p, q\}$	$B_{\{p,q\}}$	$\{p, q\} \in \mathcal{N}$
$\{p, S\}$	$\lambda \cdot R_p(\text{“bkg”})$	$p \in \mathcal{P},\ p \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{B}$
	K	$p \in \mathcal{O}$
	0	$p \in \mathcal{B}$
$\{p, T\}$	$\lambda \cdot R_p(\text{“obj”})$	$p \in \mathcal{P},\ p \notin \mathcal{O} \cup \mathcal{B}$
	0	$p \in \mathcal{O}$
	K	$p \in \mathcal{B}$

Illustrations (Boykov et Jolly)



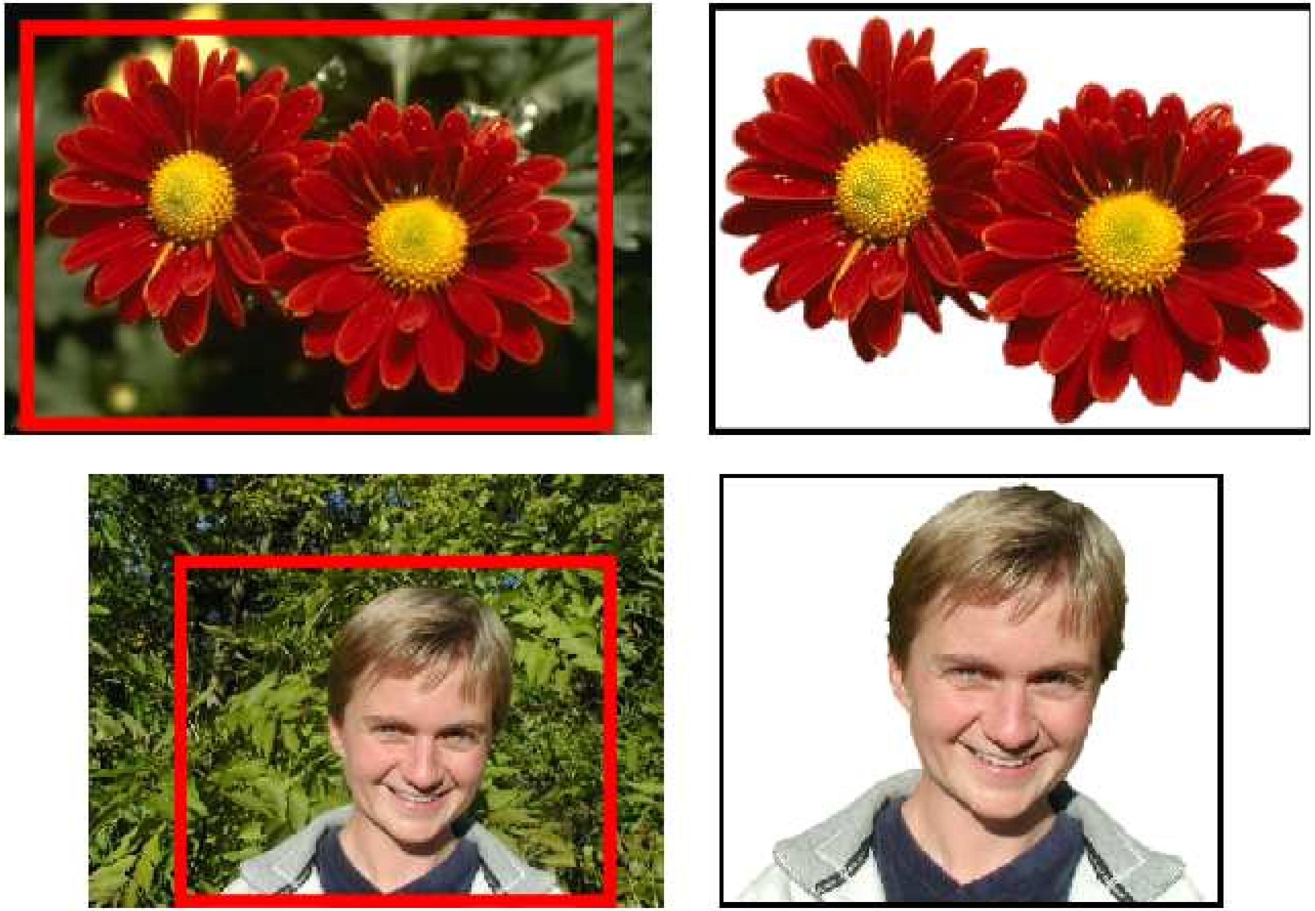
(a) Original B&W photo (b) Segmentation results



Méthodes interactives par coupes minimales

- **Grab-cut (Rother et al.)**
  - — prise en compte de la couleur
  - — deux classes pour l'objet et le fond mais avec des mélanges de gaussiennes (plusieurs composantes du fond et de l'objet)
  - — terme de régularisation pondéré par le gradient entre pixels voisins
  - — apprentissage des paramètres des distributions de façon semi-supervisée : initialisation par l'utilisateur (définition du fond), puis itérativement après chaque optimisation par graph-cut

Illustrations -GrabCut- (Rother, Kolmogorov et Blake)



Méthodes d'optimisation par coupures minimales

- ◦ Introduction
- ◦ Cas binaire
- ◦ Algorithmes approchés
- ◦ Algorithmes exacts

Cas de la restauration

◦ **Formulation énergétique**

$$U(x|y) = \sum_p \mathcal{D}(u_p, v_p) + \sum_{(p,q)} g(u_p - u_q)$$

attache aux données + régularisation

◦ **Choix de la fonction de régularisation**

— quadratique $(u_p - u_q)^2$
— quadratique tronquée $min((u_p - u_q)^2, k)$
— Phi-fonction (conditions sur les dérivées)
— variation totale (domaine continu $\int_\Omega |\nabla u|$)

Cas de la restauration

$$U(u|v) = \sum_p \mathcal{D}(u_p, v_p) + \sum_{(p,q)} g(u_p - u_q)$$

attache aux données + régularisation

∘ **Minimisation de la variation totale** $\int_\Omega |\nabla u|$

Modèle anisotrope :

$$||\nabla u|| = \sqrt{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2}$$

$$||\nabla u|| \approx |\frac{\partial u}{\partial x}| + |\frac{\partial u}{\partial y}|$$

$$||\nabla u|| \approx |u(i+1,j) - u(i,j)| + |u(i,j+1) - u(i,j)|$$

correspond à $g(u_p - u_q) = |u_p - u_q|$

correspond à une norme L_1 sur le gradient

Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa)

V ensemble des pixels, L ensemble des étiquettes

◦ Hypothèses sur g

g est une fonction convexe (sur les entiers)

◦ Méthode

- Construction du graphe
  - nœuds : $X = V \times L \cup \{s, t\}$ (n_{pi} nœud du pixel p pour le label i) ;
  - arcs : de s à tous les nœuds pixels-premier label, puis de tous les pixels-label i aux pixels-label i+1, etc.
  - poids des arcs "en colonnes" : $c(s, n_{p(L-1)}) = \mathcal{D}(L, y_p)+$, $c(n_{p(i+1)}, n_{pi}) = \mathcal{D}(i, y_p)$, $c(n_{p1}, t) = \mathcal{D}(1, y_p)$ ($c(n_{pi}, n_{p(i+1)}) = +\infty$ pour empêcher les boucles)

Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa)

Terme de régularisation : arcs de pénalité

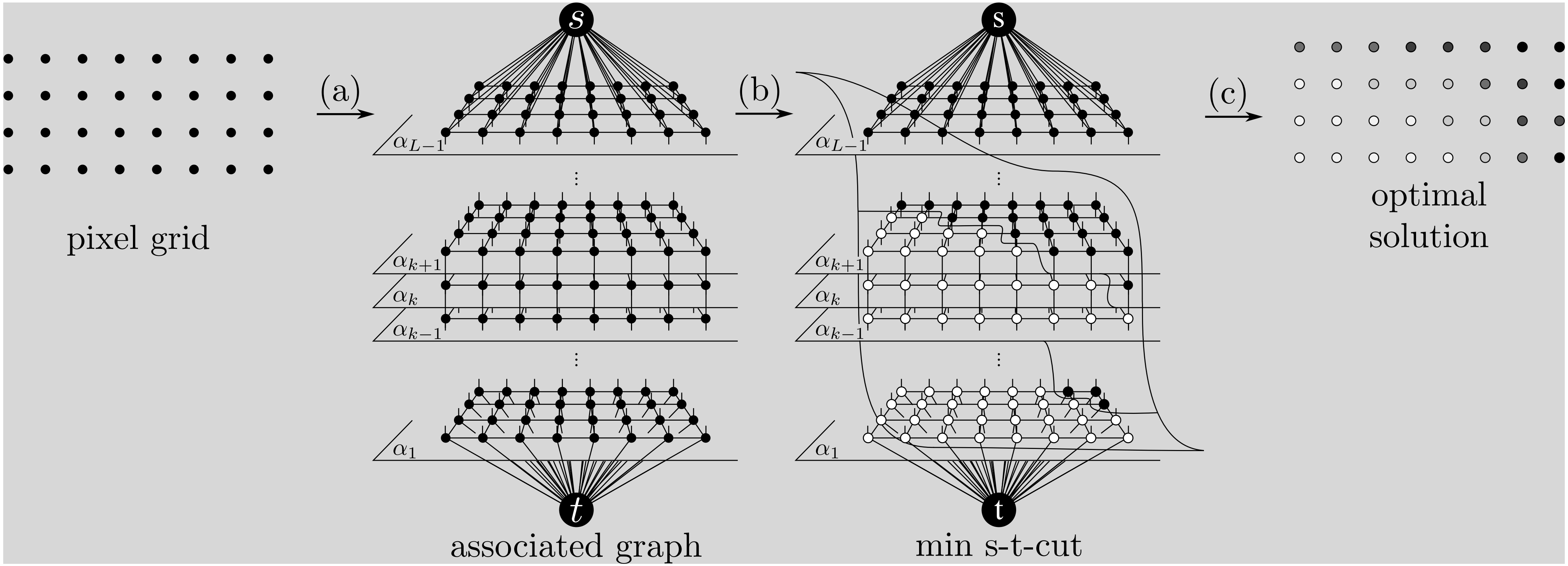
• Cas simplifié pour le modèle TV :

arcs de coût 0 sauf arcs “horizontaux” de coût 1 $\Rightarrow g(x_p - x_q) = |x_p - x_q|$

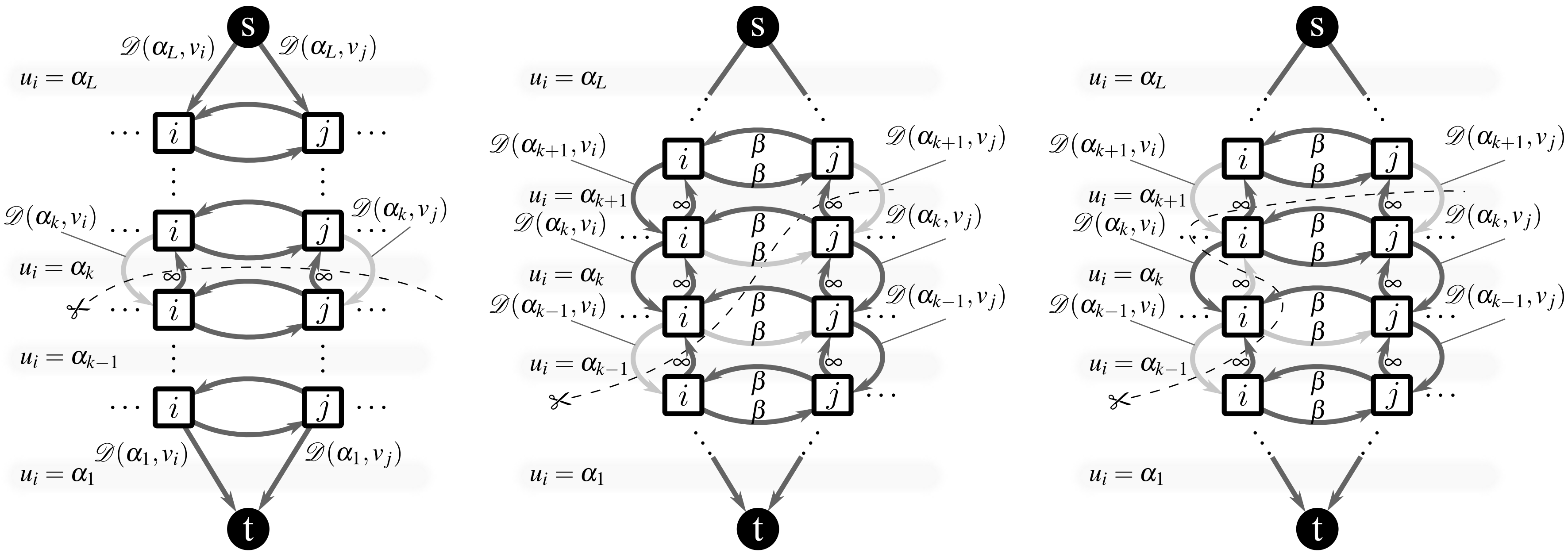
• Cas général :

ensemble d’arcs liant les nœuds pixels -labels coupés par la coupe

Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa)



Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa)



$\cdots + \mathscr{D}(\alpha_k, v_i) + \mathscr{D}(\alpha_k, v_j) + 0 + \cdots$

(d)

$\cdots + \mathscr{D}(\alpha_{k-1}, v_i) + \beta + \beta + \mathscr{D}(\alpha_{k+1}, v_j) + \cdots$

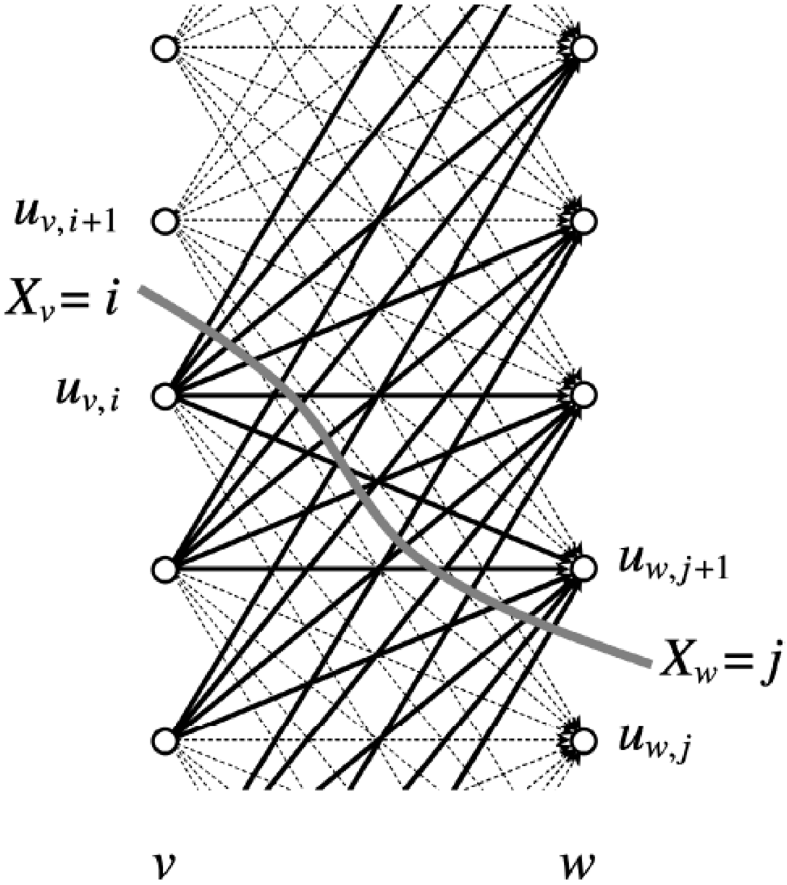
(e)

$\cdots + \mathscr{D}(\alpha_{k-1}, v_i) + \mathscr{D}(\alpha_{k+1}, v_i) + \beta + \infty + \mathscr{D}(\alpha_{k+1}, v_j) + \cdots$

(f)

Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa)

◦ **Cas général**



Cas de la restauration - solution exacte (Ishikawa)

◦ **Terme de pénalité intervenant dans la coupe** :

$$g(i,j) = \sum_{a=1}^{i} \sum_{b=j+1}^{k} c(n_{va}, n_{wb}) + \sum_{a=i+1}^{k} \sum_{b=1}^{j} c(n_{wb}, n_{va})$$

◦ **Proposition** : si $g(i,j)$ définie comme la somme des capacités des pixels adjacents ne dépend que de $i-j$, $g(i,j) = \tilde{g}(i-j)$ alors $\tilde{g}$ est nécessairement convexe.

Réciproquement si g est convexe alors on peut définir les capacités des arcs de pénalités par :

$$c(n_{vi}, n_{wj}) = \frac{\tilde{g}(i-j+1) - 2\tilde{g}(i-j) + \tilde{g}(i-j-1)}{2}$$

la capacité devient nulle pour des différences de labels suffisamment grandes

NB : pas de contrainte sur le terme d'attache aux données

Cas de la restauration - solution exacte (Darbon, Sigelle 2006)

$$U(x|y) = \sum_{p} \mathcal{D}(x_p, y_p) + \sum_{(p,q)} w_{pq}|x_p - x_q|$$

◦ **Principe**

Décomposition de x sur ses ensembles de niveaux (versions seuillées de x)

$\Rightarrow$ reformulation sous forme de champs de Markov binaires

$\Rightarrow$ formule de reconstruction sous certaines hypothèses

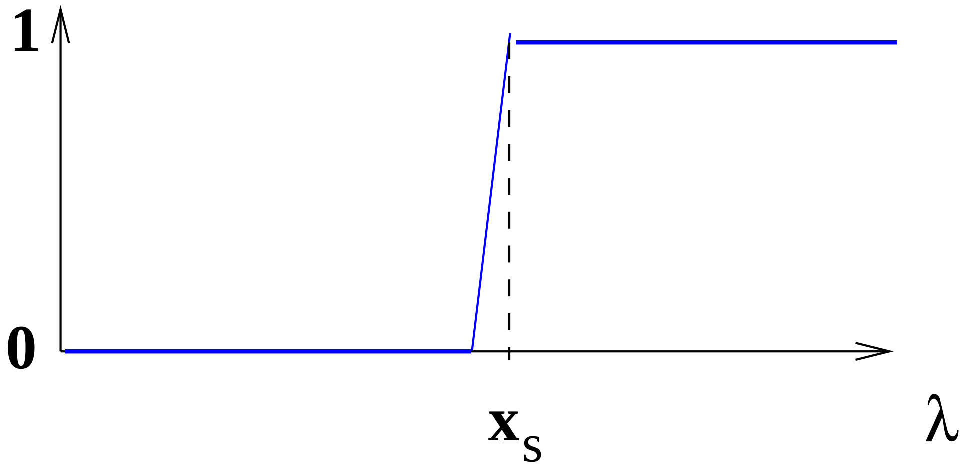
Décomposition en ensembles de niveaux

◦ **Définitions**

$x_s^\lambda = \mathbb{1}_{x_s \leq \lambda}$

$x_s = \min\{\lambda / x_s^\lambda = 1\}$

$x^\lambda = \{x_s^\lambda\}$ coupe de niveau λ



Décomposition en ensembles de niveaux

◦ Reformulation de l'énergie en fonction des coupes

- Terme de régularisation :

$$TV(x) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} \sum_{(s,t)} w_{st} \, |x_s^\lambda - x_t^\lambda|$$

$$TV(x) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} \sum_{(s,t)} w_{st} \left[(1 - 2x_t^\lambda) \, x_s^\lambda \; + \; x_t^\lambda \right]$$

- Terme d'attache aux données :

$$f(y_s|x_s) = g_s(x_s) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} \left(g_s(\lambda+1) - g_s(\lambda) \right) \; \underbrace{\mathbb{1}_{\lambda < x_s}}_{(1 - x_s^\lambda)} \; + \; g_s(0)$$

Décomposition en ensembles de niveaux

- **Reformulation de l'énergie en fonction des coupes**

$$U(x|y) = \sum_{\lambda=0}^{L-2} E^{\lambda}(x^{\lambda})$$

$$\begin{aligned} E^{\lambda}(x^{\lambda}) = \quad & \sum_{(s,t)} w_{st} \left[(1 - 2x_t^{\lambda})x_s^{\lambda} + x_t^{\lambda}\right] + \\ & \sum_{s} \left(g_s(\lambda+1) - g_s(\lambda)\right)(1 - x_s^{\lambda}) + g_s(0) \end{aligned}$$

Optimisation par ensembles de niveaux

$E^\lambda(x^\lambda)$: champ binaire avec modèle d'Ising (ferro-magnétisme)

Soit $\hat{x}^\lambda$ le minimiseur global de $E^\lambda(x^\lambda)$ à λ fixé

Pour que $\{\hat{x}^\lambda\}_{0\leq\lambda\leq L-1}$ donne le minimum global de $U(x|y)$ il faut que :

$$\hat{x}^\lambda \leq \hat{x}^\mu \quad \forall\lambda < \mu$$

La solution optimale est alors donnée par :

$$\forall s \qquad \hat{x}_s = \min\{\lambda / \hat{x}_s^\lambda = 1\}$$

Conditions sur les énergies et graphes associés

- **Condition de convexité sur les énergies conditionnelles locales**
  - — propriété de reconstruction assurée par des optimisations séparées sur les ensembles de niveaux
  - — algorithme très rapide par dichotomie sur l'ensemble des niveaux de gris
- **Attache aux données quelconque et régularisation nivelable**
  - — propriété de reconstruction assurée par l'ajout d'un terme de couplage entre les niveaux de gris $\sum_s \alpha H(x_s^\lambda - x_s^{\lambda+1})$
  - — graphe différent de celui d'Ishikawa mais de taille similaire

Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit gaussien (L2+TV)

Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit gaussien (L2+TV)

Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

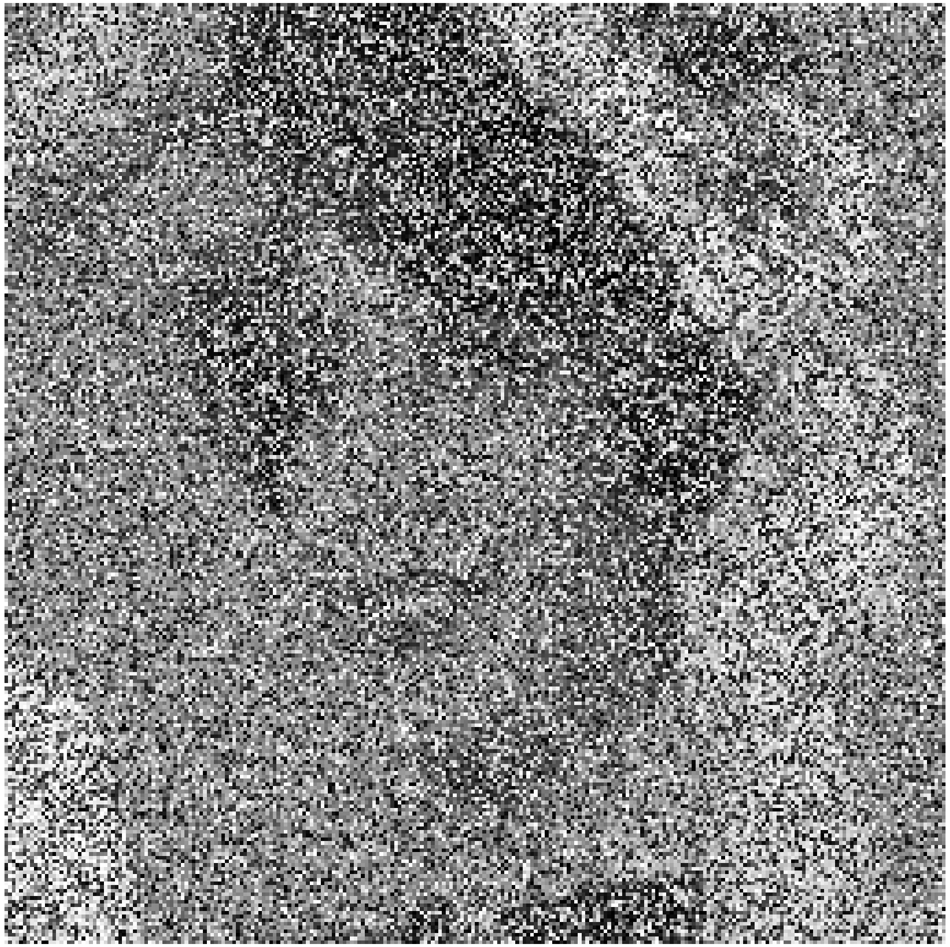
bruit impulsif + TV

Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

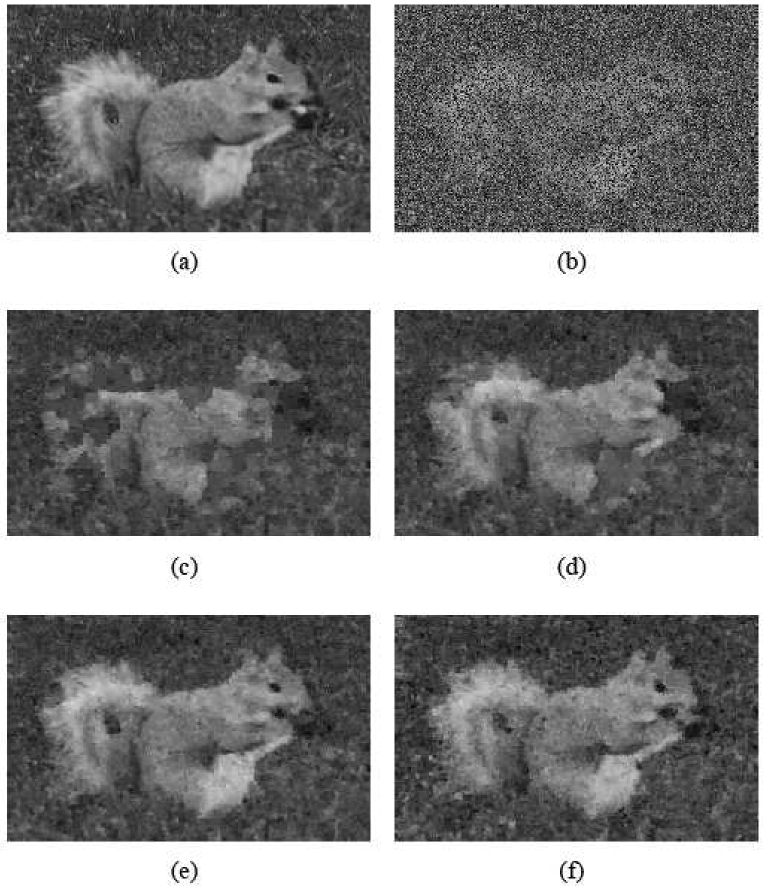
bruit impulsif + TV

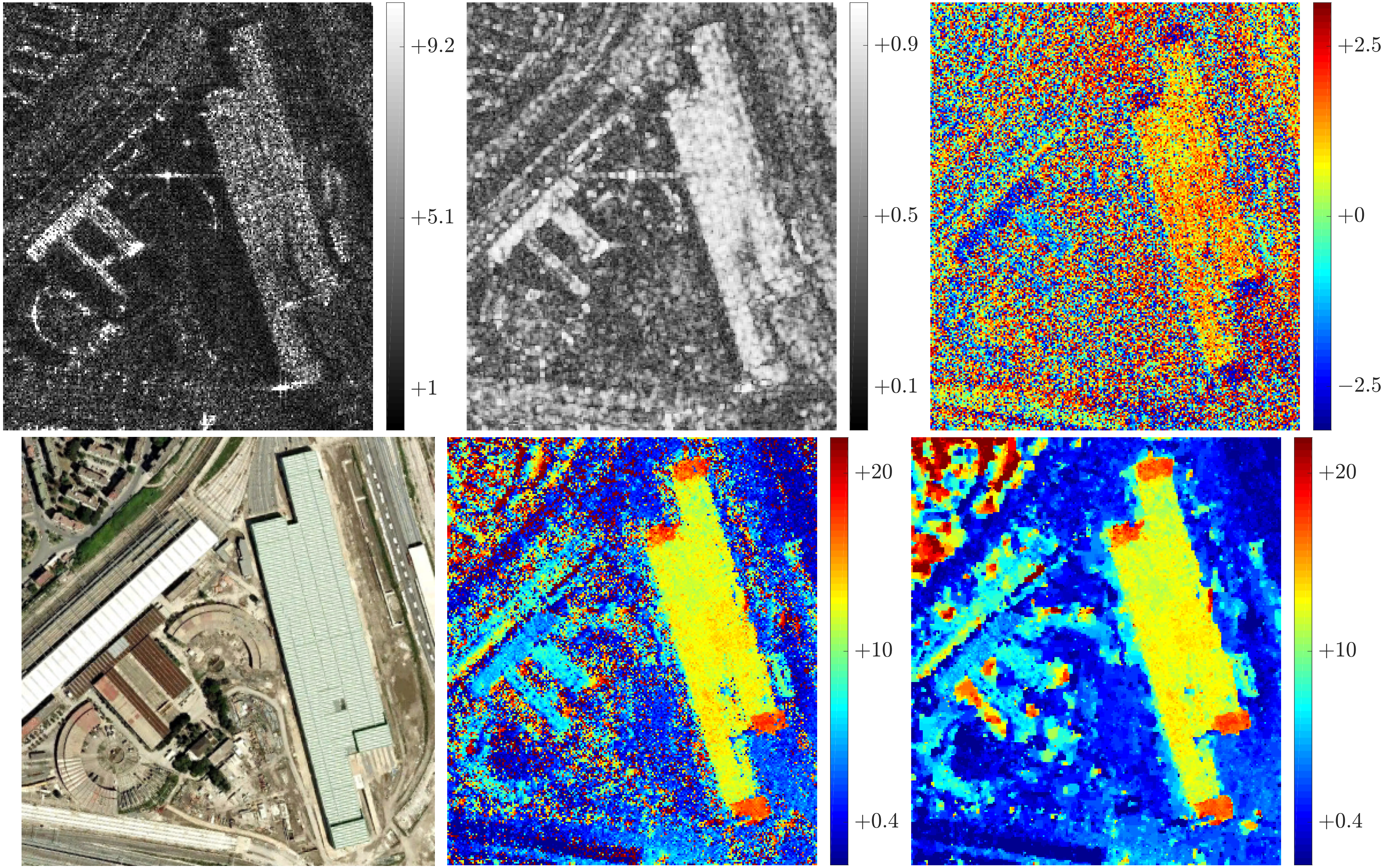
Exemples de résultats (Darbon, Sigelle)

bruit impulsif + TV



Examples - multi-labeling optimization




+9.2
+5.1
+1
+0.9
+0.5
+0.1
+2.5
+0
−2.5
+20
+10
+0.4
+20
+10
+0.4

Récapitulatif

Auteurs	Espace	Régul.	Graphe	Optimum
Greig et al.	binaire	Ising	pixels + s,t	global
Kolmog. Zabih	binaire	sous-modulaires	pixels + s,t	global
Freedman	binaire	ordre 3		
Boykov et al.	ng	semi métrique	ss-ensbl +s,t	local*
		métrique	pixels +s,t	local*
Ishikawa	ng	convexe de $\|x_s - x_t\|$	S*ng+s,t	global
Darbon et al.	ng	en.loc. convexe	dichotomie	global
		nivelable	S*ng+s,t	global

Bibliographies et figures

- **Références**

— *Exact Maximum A Posteriori Estimation for Binary Images*, D. Greig, B. Porteous, H. Seheult, J. R. Statist. Soc. B, 1989

— *Fast Approximate Energy Minimization via Graph Cuts*, Y. Boykov, O. Veksler, R. Zabih, PAMI 2001

— *Grab-cut - Interactive Foreground Extraction using Iterated Graph Cut*, C. Rother, V. Kolmogorov, A. Blake, conf. SIGGRAPH 2004

— *What energy functions can be minimized via graph cuts ?*, V. Kolmogorov, R. Zabih, PAMI 2004

— *Exact Optimization for Markov Random Fields with Convex Priors*, Ishikawa, PAMI 2003

— *VHR and interferometric SAR : Markovian and patch-based non-local mathematical models*, C. Deledalle et al., in book Mathematical Models for Remote sensing Image Processing, 2018.

— PARISAR, G. Ferraioi et al., IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing 2018