

Optimisation de modèles markoviens par coupure minimale

1 Exercice

On considère l'image suivante constituée par une seule ligne de 5 pixels dont les niveaux de gris sont indiqués sur l'image 1.

102	106	102	114	109
-----	-----	-----	-----	-----

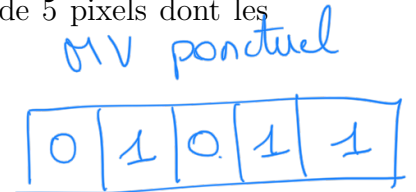


FIGURE 1 – Image-ligne de 5 pixels avec leurs niveaux de gris.

On veut faire une classification en deux classes de cette image. La classe 0 est définie par le paramètre $\mu_0 = 100$ et la classe 1 par le paramètre $\mu_1 = 110$. La probabilité d'un niveau de gris conditionnellement à une classe est donnée par

$$-\ln P(y_s|x_s) = |y_s - \mu_{x_s}|$$

$$P(y_s|x_s) \propto \exp(-|y_s - \mu_{x_s}|)$$

$$(y_s - \mu_{x_s})^2$$

en chaque pixel

1. Classifier cette image-ligne avec une classification bayésienne ponctuelle au sens du maximum de vraisemblance.
2. On veut utiliser un modèle d'Ising (avec la convention, potentiel de valeur 0 quand les deux sites voisins sont de même classe et β quand les deux sites voisins sont dans des classes différentes) pour régulariser la solution. Ecrire l'énergie a posteriori globale.
3. Dessiner le graphe à construire (en précisant les nœuds et les poids des arcs) pour trouver la solution par coupure minimale.
4. Calculer le coût de la coupe quand tous les pixels sont dans la classe 0.
5. Donner la coupe minimale en fonction de β et commenter.

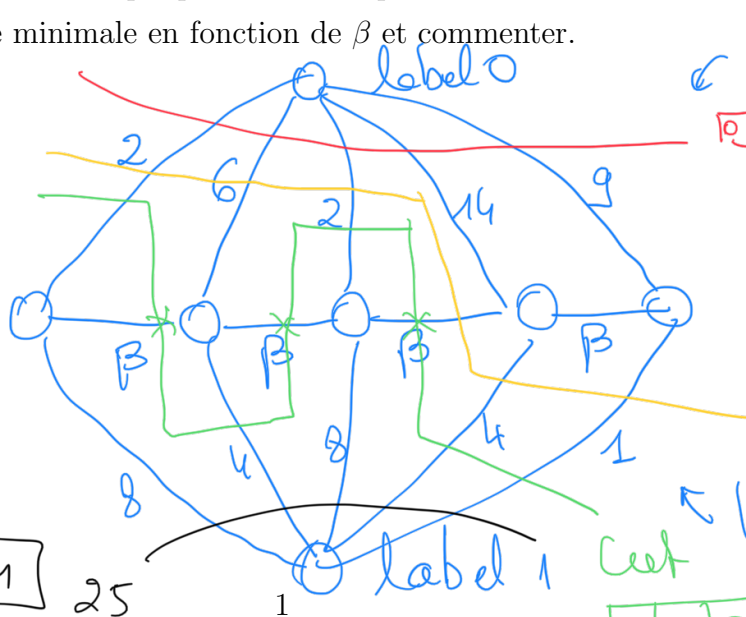
$$\mathcal{U}(x|y) = \sum_s |y_s - \mu_{x_s}| + \beta \sum_{(s,t) \in \Delta} \Delta(x_s, x_t)$$



$$\text{Cut} = 15 + \beta$$

$$15 + \beta < 25$$

$$\beta < 10$$



$$|y_s - 100|$$

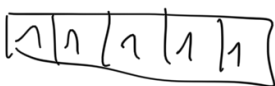
$$\text{Cut} = 33$$

$$|y_s - 110|$$

$$\text{Cut} = 13 + 3\beta$$

$$13 + 3\beta < 15 + \beta$$

$$2\beta < 2$$



$$25$$

$$1$$

