



Données et signal : une introduction au traitement du signal

SI101 Groupe 6 / IDS (V2018.1)

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Notations

$*$	conjugaison d'un vecteur	équation 2.16, page 17
t	transposition d'un vecteur	équation 2.15, page 16
H	adjointe d'une matrice	équation 2.18, page 18
$\wedge$	coefficient dans l'espace de Fourier (TFD et TF)	
$\times$	produit matriciel : matrice par scalaire	équation 2.9, page 14
$\times$	produit matriciel : matrice par vecteur	équation 2.10, page 14
$\times$	produit matriciel : matrice par matrice	équation 2.14, page 16
$.\times$	produit de vecteurs point à point ($.*$ de Matlab)	équation 2.6, page 12
$./$	division de vecteurs point à point ($./$ de Matlab)	équation 2.7, page 12
$\odot$	produit scalaire entre deux vecteurs réels	équation 2.3, page 11
$\odot_H$	produit hermitien entre deux vecteurs complexes	équation 2.17, page 17
$\star$	convolution discrète entre deux vecteurs	équation 6.31, page 88
$\star$	convolution continue	équation 8.9, page 136
$\otimes$	corrélation discrète entre deux vecteurs	équation 6.30, page 87
δ_{nj}	symbole de Kronecker	équation 2.2, page 10
$\delta(t)$	Distribution de Dirac	équation 8.6, page 134
$\vec{K}_{n,N}$	vecteur Kronecker de dimension N et d'indice n	équation 2.1, page 10
$\mathcal{OF}_f(t)$	Onde de Fourier (continue) de fréquence f	équation 5.1, page 61
$\overline{\mathcal{OFD}}_{k,N}$	Onde de Fourier Discrète de dimension N et d'indice k	équation 5.5, page 66
DSP	Densité Spectrale de Puissance	équation 9.11, page 156
AD_N	Matrice de retournement des indices, de dimension $N \times N$	équation 2.19, page 18
$D_{1,N}$	Matrice de décalage de dimension $N \times N$ et d'indice 1	équation 2.22, page 19
$D_{p,N}$	Matrice de décalage de dimension $N \times N$ et d'indice p	équation 2.24, page 20
I_N	Matrice identité de dimension $N \times N$	équation 2.8, page 13
$M_{\Sigma\Delta,p}$	Matrice de Haar (ou matrice $\Sigma\Delta$) de dimension $2^q \times 2^q$	équation 3.6, page 36
$M_{H,p}$	Matrice de Hadamard de dimension $2^q \times 2^q$	équation 3.7, page 41
$M_{F,q}$	Matrice de Fourier de dimension $2^q \times 2^q$	équation 6.1, page 76
$M_{F\text{inverse},q}$	Matrice de Fourier Inverse de dimension $2^q \times 2^q$	équation 6.2, page 77
TFD	Transformée de Fourier Discrète	équation 6.7, page 78
TFID	Transformée de Fourier Inverse Discrète	équation 6.10, page 78
TFtD	Transformée de Fourier à temps Discret	équation 8.13, page 139
TF	Transformée de Fourier	équation 8.4, page 134
TFI	Transformée de Fourier Inverse	équation 8.5, page 134
TZ	Transformée en Z	équation 7.14, page 111



L'objectif de ce document est de placer le décor en traitement du signal tel que l'on peut le pratiquer de nos jours. En effet, le point de vue du siècle dernier était de partir du signal analogique (le plus souvent électrique) et de voir comment on pouvait le modifier en lui laissant son caractère analogique : cette modification opérant soit dans l'univers analogique, soit dans l'univers numérique moyennant une première étape de conversion (analogique-numérique) et, après traitement numérique une seconde étape de conversion (numérique-analogique). De nos jours, l'utilisateur dispose avant tout de paquets d'octets, la numérisation étant dans les gènes de nos appareils modernes.

La présentation de ce décor mène à un certain nombre de redites mathématiques. Cependant, dans le cadre de ce cours de traitement du signal spécifique au "Groupe 6", nous pensons que tous les concepts de ce document doivent être considérés à terme comme des acquis : à chacun, selon ses connaissances initiales et sa sensibilité, de faire siennes et acquises toutes les notions proposées dans ce texte.

Le signal étant donc analysé du point de vue du paquets d'octets, l'algèbre linéaire est alors à la base des traitements classiques. Plutôt que de supposer acquis un bagage socle en algèbre, ce document va en utiliser au fil de l'eau les concepts et (re)donnera les définitions de base (vecteurs, matrices, ...) : l'objectif est de montrer que l'on peut alors mieux comprendre le nom et les principes de certaines procédures Matlab (que quiconque peut toujours utiliser en aveugle, avec les risques que cela comporte) et de voir ce qu'un approfondissement en algèbre peut apporter.

Un des éléments essentiels du traitement du signal est de déboucher sur une autre représentation des données. En effet, appelons Θ l'espace physique initial des données. Un des objectifs du traitement est de changer de manière biunivoque cet espace de représentation en un autre espace de représentation, noté par exemple Φ , conservant la totalité de l'information (de la même manière qu'un morceau de musique peut être écouté ou lu sur une partition : la partition lue avec les yeux est une autre représentation des sons que l'on écoute). Nous allons donc d'abord construire plusieurs espaces "possibles" pour nous concentrer sur la représentation la plus fructueuse : l'espace de Fourier. Cet espace possède toutes les qualités souhaitables en traitement de signal pour être unanimement utilisé à l'heure actuelle et donc être le passage obligé dans un enseignement de traitement de signal et d'images.

Avertissement : un très petit nombre de relations sont encadrées. On pourra considérer ces relations comme fondamentales : elles doivent être parfaitement connues.

Autre avertissement : ce document n'a pas (encore) sa forme finalisée et comporte encore des imperfections diverses que le lecteur saura corriger de lui même.

Chapitre 1

Des données au signal

1.1 Un peu d’histoire : du signal continu aux paquets d’octets

Depuis l’avènement du tout numérique dans la vie quotidienne, bien des objets de la vie courante ont profondément changé.

- Interpréter les performances d’un appareil photo au XX^{ème} siècle passait par la compréhension du système optique (lentilles, ouverture) ainsi que de la surface sensible (grains de l’émulsion photosensible). De nos jours, les appareils photos numériques proposent comme premier critère de qualité la capacité de stockage en octets pour chaque cliché.
- Le tourne disque et le microsillon se voulaient porteurs de qualité HiFi (Haute Fidélité) par le biais de leurs performances mécaniques (comme la vitesse de rotation de 33 tours/minute, qui était un bon compromis) et de la qualité de la tête de lecture (saphir ou diamant pour suivre les pistes du vinyl, cellule piézoélectrique ou bobine électromagnétique, le tout transformant le mouvement vibratoire mécanique de la tête de lecture en signal électrique). Actuellement, on parle des performances de la compression (système MP3) ou de la fréquence d’échantillonnage (normative comme le 44.1 KHz, ou doublée, 88.2 KHz).
- la télévision analogique qui utilisait un signal analogique particulier (mélangeant signal et commande) agissant sur un flux d’électrons en en contrôlant la direction, donc la position sur un écran dont la surface convertissait les électrons en photons. De nos jours, la télévision est numérique, ce qui permet de diffuser un nombre beaucoup plus important de chaînes et de proposer des services à la carte.
- les appareils professionnels (comme en imagerie médicale)
- les systèmes météorologiques. Par exemple, la mesure des précipitations requiert des pluviomètres disposés sur une zone géographique donnée en des lieux donnés (échantillonnage spatial) et relevés à des instants précis (échantillonnage temporel).

La force des acquisitions numériques est la simplicité des traitements ultérieurs que l’on veut appliquer sur les données en comparaison avec les traitements analogiques requis par les “anciens” systèmes.

L’objectif de ce cours est d’aborder le traitement de signal selon une démarche opposée à celle traditionnellement adoptée : nous prendrons comme données de base les grandeurs numériques sous forme de **paquets d’octets** et nous verrons quels traitements numériques nous pouvons leur appliquer. Certains de ces traitements (comme la transformée de Fourier discrète) auront des liens forts avec des traitements spécifiques au signal continu (ici la transformée de Fourier). D’autres seront plus spécifiques aux données purement numériques.

Ce cours fait donc l’hypothèse que nous avons des données numériques accessibles : cela signifie bien évidemment qu’une opération initiale de conversion entre signal analogique et données numériques a déjà été effectuée. En première hypothèse, nous supposons que cette transformation a été faite dans des conditions “idéales” par des experts du domaine, maîtrisant les fondements du traitement du signal continu, c’est-à-dire le traitement du signal au sens traditionnel du terme.

1.2 Quantification des données

Le codage informatique s'effectue "bit à bit", le bit étant le plus petit quantum d'information possible et ne prenant que deux états (0 et 1). On peut noter que très rapidement l'informatique ne pouvait se contenter d'une simple numération binaire : ainsi a été défini l'octet, qui constitue un regroupement de 8 bits.

Le monde numérique emploie donc systématiquement l'octet pour le stockage des données numériques : les capacités des moyens de stockage (disque dur, clé USB, ...) sont données en octets, tout comme les appareils photo numériques qui utilisent le pixel, *picture element*, généralement codé sur un octet, ou sur deux octets pour les appareils les plus performants.

Un ordinateur archive ainsi les textes en codant chaque lettre de l'alphabet comme un octet particulier : ce codage est normalisé et on parle de code ASCII. En première analyse, on peut dire que chaque touche du clavier "produit" une valeur numérique sur 1 octet qui sera interprétée comme un caractère de l'alphabet, ou comme un séparateur (espace, caractères de ponctuation, ...). Certaines touches du clavier ne produisent pas de caractères de l'alphabet comme la touche majuscule (*shift*) : on parle alors de méta-caractère.

Pour une grandeur numérique, un octet, par défaut, représente des valeurs entières comprises entre 0 et 255 (on parle alors d'une description en "caractère non signé", ou *unsigned char*). Mais, si cela est précisé, cela peut aussi être une autre grandeur numérique, comme le "caractère signé", ou *signed char* : dans ce cas, la valeur est entière et comprise entre -128 et 127, le premier bit étant un bit de signe, les 7 autres correspondant à la valeur absolue.

On voit que si l'on ne dispose que d'un unique octet, on ne peut quantifier que 256 valeurs numériques : c'est la première différence fondamentale entre mode analogique et monde numérique. Dans le monde analogique, on peut envisager des grandeurs dont la valeur est continue (par exemple, un variateur de tension utilisant un potentiomètre à piste de carbone : toutes les valeurs de résistance sont donc accessibles, et donc en conséquence toutes les valeurs de tension). Au contraire, dans le monde numérique, tout est quantifié : les valeurs appartiennent à un ensemble discret. Notons toutefois que le monde analogique peut parfois être quantifié (cas d'un potentiomètre à spires : si celui-ci a par exemple 500 spires, il n'y aura que 500 valeurs de résistance accessibles).

Si l'on souhaite une quantification des nombres plus exhaustive et plus précise, il faudra alors utiliser plusieurs octets pour archiver les données (par exemple 2 octets pour archiver des valeurs entières entre 0 et 65535 et on parle alors d'*unsigned short*, 4 octets pour archiver des réels, appelés *float*, dont la quantification et la plage d'utilisation est généralement suffisante dans un grand nombre d'applications, 8 octets pour les réels double précision, appelés *double*, quand le simple "float" ne suffit pas).

Cet aspect de quantification est d'une très grande importance, mais ce n'est pas l'étape fondamentale du traitement de signal et des données : en effet, une donnée isolée n'a qu'une importance tout compte fait très relative (rien ne sert de savoir que la température extérieure est de 20 degrés si l'on a pas d'autres mesures de température permettant de conclure si cette valeur est extraordinaire ou sans importance).

1.3 Paquets d'octets et information

Disposer de données numériques (les paquets d'octets) suppose que ces données ont un sens pour l'utilisateur : il est d'usage de dire que ces octets véhiculent de l'information.

La notion d'information est un concept indissociable de notre société du numérique : elle donne lieu à diverses définitions, comme celles de Shannon et de Kolmogorov définies en annexe A.

Avant toute chose, il est important de prendre conscience que, sous le vocable d'information, on associe à la sortie de nos capteurs numériques (et des paquets d'octets associés) une connaissance la plus complète possible (et la moins fautive possible) d'un phénomène observé dans le monde physique. Ceci conduit à plusieurs réflexions :

- Le concept d'information sous-entend que, pour l'analyse d'un phénomène physique, nous disposons de plusieurs observations, décrites par des paquets d'octets, et que nous souhaitons comparer.
- A partir de deux observations d'un phénomène donné, on dira que les deux observations sont corrélées¹ si elles sont décrites par des paquets d'octets dont l'information est similaire.

1. Ici le mot "corrélé" ne sous entend aucune définition mathématique. Nous réserverons le mot spécifique de **corrélation** à l'opérateur mathématique qui sera défini au paragraphe 6.3.3.

- A partir de deux observations d'un phénomène donné, on dira que les deux observations sont décorréées si ces deux événements ne présentent aucun point commun. On dira alors qu'il n'y a aucune information partagée entre ces deux événements.
- Une transformation sur des paquets d'octets peut conduire à une dégradation de l'information contenue dans ces données : il y a alors perte d'information.

Un autre point important de la théorie de l'information réside dans la redondance de l'information. En effet, un même phénomène physique peut être décrit numériquement avec le même degré d'exactitude sans pour autant utiliser le même nombre d'octets : on dira alors qu'une des deux descriptions est redondante. Pour transmettre ou archiver de l'information, il est beaucoup plus efficace de réduire le nombre d'octets descripteurs. Le revers de la médaille est que ce type d'information est alors très sensible au bruit ou à la perte d'un des octets. C'est l'objectif des théories de la communication que de proposer des cadres conceptuels pour minimiser les données à transmettre tout en garantissant une bonne qualité des données reçues.

1.4 Acquisitions et échantillonnage

Disposer d'un certain nombre d'octets pour décrire un phénomène fait souvent intervenir une dimension spécifique au phénomène physique observé. Par exemple :

- un texte est une succession de lettres (alphabet) dont l'agencement successif définit des mots. Pour la majorité des langues écrites, l'alphabet comprend aussi un caractère particulier, l'espace, qui joue le rôle de séparateur de mots (ce n'est pas le cas du copte par exemple). Le sens d'un texte repose dans l'ordre des lettres et des mots : c'est ainsi que se construit le mécanisme de compréhension du texte.
- analyser un phénomène physique variant dans le temps requiert de disposer d'un certain nombre d'observations sur une durée donnée. Par exemple, la météorologie requiert l'archivage des températures tout au long d'une journée et utilise ensuite des notions de températures moyenne, maximale et minimale pour décrire succinctement le temps qu'il a fait. Les octets sont donc archivés selon une référence temporelle (à l'échelle de la journée, du mois, de l'année, ...).
- une image numérique (telle qu'elle s'affiche sur un écran numérique d'ordinateur) est une disposition particulière d'octets dans le plan tel que l'œil est capable de distinguer une ressemblance avec quelque chose de déjà vu, et donc de voir une représentation compréhensible. Cette disposition spatiale dans un plan est donc liée à une spatialisation des données selon deux dimensions. Chaque octet s'appelle alors pixel (Picture Element) (notons que sur les appareils photos numériques les plus performants, chaque pixel peut occuper deux octets).
- l'imagerie volumique (qu'effectuent par exemple certains systèmes imageurs médicaux) fait donc correspondre une grandeur à un petit élément de volume appelé voxel (Volume Element). L'objet à analyser est ainsi constitué d'un ensemble de voxels.

Le traitement des données numériques doit privilégier cet ordonnancement des acquisitions : de même qu'un traducteur automatique garde l'ordre des phrases, un analyseur de données météorologique conserve le sens de la datation et l'image médicale obtenue sur un organe permet au médecin de voir à travers l'image affichée sur son écran une représentation à l'échelle de l'organe qu'il analyse par un autre moyen (palpation, chirurgie interventionnelle). On voit donc l'importance de ce paramètre d'acquisition qui est l'espacement existant entre les octets : on parle d'échantillonnage.

- Pour des acquisitions monodimensionnelles, le cas le plus fréquent est celui où les données sont acquises à des instants différents : on parle d'échantillonnage temporel.
- pour des images ou des volumes, la représentation des données se fait dans l'espace : on parle d'échantillonnage spatial.

Le cas le plus simple à traiter et interpréter est celui où l'échantillonnage est régulier. Par exemple :

- un fichier sonore (.wav) est une liste de valeurs dont l'espacement temporel est constant et correspond à un intervalle temporel de $22,6 \mu\text{s}$ (du moins en règle générale).
- une image satellitaire obtenue par un capteur de "nouvelle génération" (comme Pléiade) est fournie avec des pixels correspondant à des points espacés sur le sol terrestre d'une distance de 70 cm (tant en ligne qu'en colonne)

Cependant l'échantillonnage peut ne pas être régulier. Par exemple :

- la disposition de pluviomètres sur un territoire ne s'effectue pas de manière régulière : la disposition est beaucoup plus opportuniste (villes, villages, habitations isolées, ...) et ne représente en aucun cas un maillage régulier.
- les sismomètres donnent des informations lacunaires sur les mouvements de la croûte terrestre. Cependant, on peut en tirer toute l'information possible d'un séisme à condition qu'il n'y ait qu'un seul séisme à la fois (hypothèse assez crédible).
- La musique s'écrit avec des notes de durée a priori bien déterminée (une ronde dure deux fois plus qu'une blanche, ...). Cependant il existe dans la littérature musicale des œuvres écrites uniquement en ronde et sans barre de mesure (les préludes non mesurés de Louis Couperin par exemple)
- Toujours en musique, la hauteur des sons (une octave est découpée en 12 demi-tons dans notre système actuel occidental) n'est pas régulière si on l'analyse comme un signal mathématique. Ce dernier s'appuie sur la notion de fréquence (le *la* du diapason correspond à une valeur de 440 Hz, le Hertz étant l'unité utilisée pour décrire les fréquences –voir le paragraphe 4.2). Or un demi-ton correspondra à un nombre différent de Hertz si on joue dans les graves ou si on joue dans les aigües.

1.5 Premier exemple : l'analyse de données textuelles

Considérons le cas où les données étudiées sont les caractères d'un texte dactylographié : ces caractères peuvent alors se grouper en mots. Dans la vie de tous les jours, chaque mot peut se reconnaître grâce à un dictionnaire (qui est en fait une liste de mots autorisés par la langue et la grammaire) et un mécanisme de sélection qui est l'ordre lexicographique.

La reconnaissance de mots est un processus assez bien maîtrisé en informatique : ce que l'homme accomplit en effectuant une recherche d'un mot dans un dictionnaire peut tout à fait s'écrire sous forme d'un processus informatique. On peut rationaliser le processus en adjoignant à chaque mot un caractère de fin de mot (par exemple un espace). Deux mots sont identiques si chaque caractère du premier mot est identique au caractère de même position dans le second mot, y compris le caractère de fin de mot.

1.5.1 Exemple de “distances” entre mots

Comparer deux mots d'une langue est un mécanisme facile à mettre en place. Une manière assez paresseuse est tout d'abord de constater que le mot le plus long de la langue française :

anticonstitutionnellement

est composé de 25 lettres. Il est aisé de compléter tous les mots par le nombre d'espaces requis pour qu'ils s'écrivent tous sur 25 caractères : on a ainsi 25 octets pour décrire n'importe quel mot.

Un mot se décrit comme la concaténation de lettres : l'opérateur concaténation n'a pas d'équivalent typographique et consiste simplement à placer les lettres à la suite les unes des autres (sans espace entre les lettres). Par exemple, si le mot B contient N lettres : $b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, b_N$, avec b_n désignant la n ème lettre, ce mot s'écrit :

$$B = b_1 b_2 \dots b_{N-1} b_N$$

Il est facile alors d'introduire des “distances” entre mots ayant la bonne propriété d'être nulles pour deux mots identiques (décrits sur 25 caractères, éventuellement complétés par des espaces), et non nulles si les deux mots diffèrent.

Une première manière de comparer deux mots sera alors de compter le nombre de fois que ces caractères diffèrent. Entre deux mots B et C , on obtient la valeur $d(B, C)$ définie par :

$$d(B, C) = \sum_{n=1}^{N=25} \text{Diff}(b_n, c_n)$$

avec la fonction Diff telle que

$$\begin{aligned} \text{Diff}(b_n, c_n) &= 0 & \text{si } b_n &\equiv c_n \\ \text{Diff}(b_n, c_n) &= 1 & \text{sinon} \end{aligned}$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Cette valeur, bien connue en codage algébrique, s'appelle distance de Hamming.

On peut envisager d'utiliser directement la valeur du code informatique de chaque caractère et de comparer les deux valeurs. Or un octet peut être vu comme un nombre compris entre 0 et 255 : un mot est donc une liste de 25 nombres $b_1 \dots b_{25}$. Si on le compare avec un autre mot, décrit par ses 25 nombres $c_1 \dots c_{25}$, on peut comparer les mots en calculant tout simplement l'erreur quadratique entre les nombres :

$$d_{L^2}(B, C) = \sum_{n=1}^{N=25} (b_n - c_n)^2$$

cette erreur n'est effectivement nulle que si et seulement si $b_n - c_n = 0 \ \forall n \in [1, 25]$. L'erreur quadratique est en fait une norme appelée norme L^2 .

On peut prendre d'autres critères de comparaison, comme la valeur absolue. La mesure de comparaison s'écrit alors :

$$d_{L^1}(B, C) = \sum_{n=1}^{N=25} |b_n - c_n|$$

et on parle alors de norme L^1 .

Il est possible de restreindre le domaine de valeurs en cherchant la valeur maximale des différences :

$$d_{L^\infty}(B, C) = \max_{n=1}^{N=25} |b_n - c_n|$$

et on parle alors de norme L^∞ .

On voit qu'il est possible de comparer deux mots en analysant lettre à lettre s'ils sont semblables. Si le critère de type "erreur" est nul, les deux lettres sont semblables. Dans le cas contraire ils se ressemblent d'autant plus que le critère de type "erreur" est petit.

1.5.2 Et pour aller plus loin

L'approche proposée ici pour comparer les mots d'une langue est très académique et n'a que peu de liens avec la réalité : celle par exemple des correcteurs orthographiques. Deux points essentiels sont à prendre en compte :

- une faute d'orthographe peut avoir plusieurs origines : méconnaissance de l'orthographe (sifon au lieu de siphon : le nombre de lettres varie), faute typographique (cela dépendra du clavier : par exemple, avec un clavier azerty, "sifon" au lieu de "sinon", et le nombre de lettres restera constant)
- le contexte est aussi requis pour une bonne suggestion de correction ("sinon" est un adverbe, "siphon" est un nom).

Sur les aspects typographiques, on voit que la longueur des mots candidats peut varier : "sifon" n'est pas dans le dictionnaire de la langue française, mais il ne faut pas proposer de le remplacer directement par "sinon" (qui n'est pas un mot, mais un adverbe : nous introduisons ici une remarque qui se place à un niveau de description supérieur).

A partir de ces constatations, on définit alors des distances dites d'édition qui peuvent prendre en compte :

- la substitution d'un caractère par un autre caractère (par exemple, en prenant en compte la localisation des touches sur un clavier azerty)
- l'insertion d'un caractère
- la suppression d'un caractère

Tout cela permet d'avoir alors une distance plus crédible que celle décrite précédemment dans ce texte.

1.6 Les objectifs du traitement du signal

Les traiteurs de signaux visent à améliorer la qualité de l'information disponible dans un signal physique continu. L'origine de ce signal peut être extrêmement varié : phénomène acoustique (on mesure alors un déplacement), phénomène électrique, phénomène électromagnétique (on mesure alors une tension au bord d'une antenne), ...

Ce signal initial doit alors subir des étapes de prétraitement pour pouvoir être analysé et modifié par des techniques numériques : ces étapes sont reprises dans la figure 1.1. On doit en effet :

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

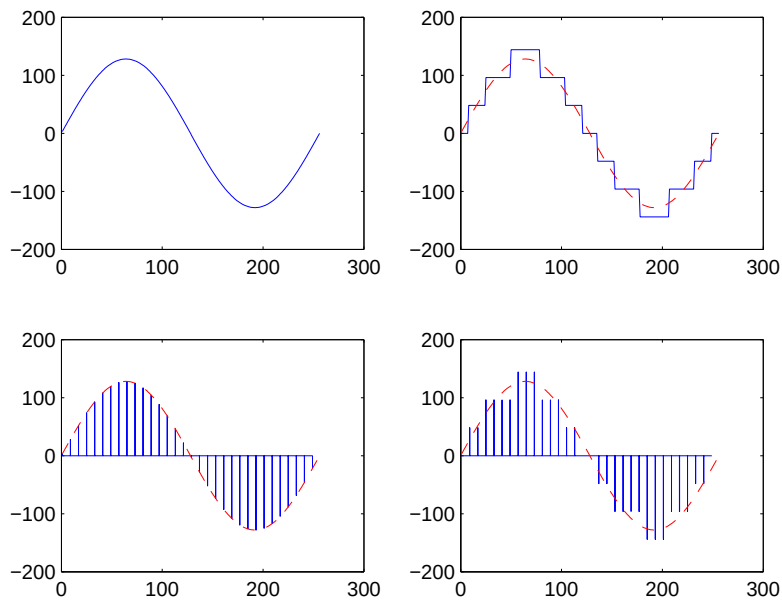


FIGURE 1.1 – En haut à gauche : signal initial continu. En bas à gauche : résultat de l'étape d'échantillonnage appliqué à ce signal. En haut à droite : résultat de l'étape de quantification appliqué à ce signal. En bas à droite : le signal initial a subi à la fois quantification et échantillonnage.

- transformer une fonction continue en une fonction en escalier, le pas des marches de cette fonction en escalier étant quantifiée (c'est l'étape que nous avons vue au paragraphe 1.2). C'est l'étape que l'on voit figure 1.1 en haut à droite. Le point essentiel de cette étape est que les valeurs que peut prendre cette fonction en escalier ne sont pas continues, mais appartiennent à un ensemble discret de valeurs (par exemple, une image est le plus souvent donnée par des valeurs entre 0 et 255 par pas de 1). On appelle cette étape **quantification**.
- Attribuer une valeur à chaque instant. Le temps² est alors échantillonné avec un pas δt donné (dans ce document, nous nous placerons toujours dans le cadre d'un échantillonnage régulier). Pour la fonction continue initiale, cette étape est illustrée sur la figure 1.1 en bas à gauche et, dans ce cas, la fonction discrète prend la valeur exacte (non quantifiée) de la fonction initiale à des instants précis. C'est l'étape d'**échantillonnage**.

Le résultat final de l'échantillonnage d'un signal physique continu est illustré figure 1.1 en bas à droite : le signal initial a subi à la fois quantification et échantillonnage.

C'est l'aspect échantillonnage qui sera primordial dans ce document. En effet, c'est celui qui peut mener à des traitements et des transformations du signal initial les plus utiles en pratique. C'est aussi l'étape qui peut conduire à des effets non désirés (le plus célèbre étant l'**aliasing** : un exemple étant celui des roues des chariots de western qui tournent à l'envers). C'est pour cela que la plus grande partie des enseignements de traitement du signal y consacre le plus de temps.

2. pour un signal temporel : le lecteur généralisera à tout type de signaux (spatiaux, ...).

Chapitre 2

Le traitement de signal : vecteurs et matrices au service du traitement du signal

Ce chapitre met en place la formulation algébrique du signal telle qu'elle sera utilisée dans ce document. Il va donner quelques rappels et compléments d'algèbre linéaire.

Les points essentiels seront :

- la définition des **matrices de décalages** $D_{p,N}$ au paragraphe 2.5.3 qui, associée au principe de circularité, permettra de transcrire efficacement retard temporel et avance temporelle dans le monde discret ;
- la définition de la **matrice de retournement des indices** au paragraphe 2.5.2 qui permettra le retournement du temps dans le monde discret ;
- la représentation circulaire des signaux discrets au paragraphe 2.7 qui aura un rôle essentiel pour la compréhension d'outils comme la convolution discrète.

2.1 Des mots aux vecteurs

Nous avons donc vu comment une approche de type lexicographique permet de comparer deux mots. On pourrait penser que cette approche est généralisable à tout type de données : c'est fondamentalement vrai, à ceci près que, pour des données autres que des mots, cette approche est peu efficace. En effet, l'ordonnement des mots est spécifique à un texte pour lequel il existe d'autres types de relations entre mots (grammaticale, contextuelle,...) non abordées ici et qui sont l'essence même d'une langue.

Dans des applications scientifiques, les données (octets) dont nous disposons ont elles aussi une essence propre, liée à leur agencement. L'ordre des données est intangible (comme les mots d'un texte) : cet ordre sera l'axe des temps (si nous analysons par exemple un fichier de musique) ou un axe spatial (si nous analysons par exemple la vitesse d'un véhicule en fonction de la distance parcourue). Selon cet axe certaines propriétés peuvent exister : c'est la force du traitement du signal que d'aborder l'analyse des données en privilégiant cette dimension. C'est cette relation spécifique avec le temps qui nous permet de parler de "signal" en lieu et place de "données".

Considérons dorénavant des exemples où la dimension est le temps. On a donc une liste de données acquises à différents instants selon un échantillonnage temporel donné (qui sera supposé, dans tout ce document, régulier) : nous avons donc un signal. Plusieurs types d'observations peuvent alors s'effectuer en prenant en compte l'axe temporel :

- le signal semblent se répéter régulièrement dans le temps : il y a donc des **séquences** qu'il faut chercher à reconnaître pour caractériser le signal.
- le signal se ressemble dans le temps : on parle alors de signal stationnaire.
- le signal semble n'avoir pas ou peu de ressemblance au cours de son déroulement temporel : on parle alors de signal instationnaire.

Pour aller plus loin, il faut doter les données d'une structure spécifique : une liste finie de N échantillons représentant le signal peut alors s'écrire sous la forme d'un objet mathématique spécifique dans un espace de dimension N . C'est l'algèbre linéaire qui offre le cadre conceptuel de cette représentation. On identifie alors le signal comme un **vecteur de données**, ou un **vecteur d'échantillons**.

Dans la suite de ce document, nous allons donc considérer des données acquises selon un pas d'échantillonnage temporel donné et constant : δt (au lecteur de généraliser à tout autre type d'espace : spatial $-\delta x-$, ...). On dit alors que l'échantillonnage est **régulier**. Un signal est alors constitué d'une part d'un vecteur de données et d'autre part de la valeur δt (unique) qui est le pas d'échantillonnage temporel des données.

2.2 Rappels de notation sur les vecteurs réels

Nous verrons qu'un signal discret se représente très simplement grâce à l'algèbre linéaire : il s'exprime comme un vecteur de dimension N et la catégorie des traitements dits linéaires¹ se modélise en considérant l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Tout traitement linéaire sur ce signal se représente comme une matrice opérant sur ce vecteur.

C'est ce qui fait la force d'un outil comme Matlab (*Matrix Laboratory*) : conçu pour traiter la notation matricielle, il a connu un essor inattendu dans le domaine du traitement du signal. Le choix délibéré de ce document est d'indiquer les sommes et les composants à partir de l'indice 1, ceci pour permettre une transcription plus facile en Matlab.

2.2.1 Notation : les vecteurs

Un signal composé de N valeurs : $\{b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, b_N\}$, b_n désignant la n ème valeur, s'écrit sous la forme d'une colonne :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix}$$

qui sera appelé **vecteur colonne**.

On peut l'exprimer sous forme de **vecteur ligne** grâce à l'opération de transposition, notée t :

$$\vec{B}^t = (b_1 b_2 \dots b_{N-1} b_N)$$

et on parle de "vecteur ligne".

On notera $\vec{0}$ le vecteur dont toutes les composantes sont nulles :

$$\vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow \forall n \in [1, N] \ b_n = 0$$

On peut construire des vecteurs spéciaux de dimension N , appelés ici **vecteurs Kronecker**² : toutes leurs valeurs sont nulles exceptées une seule égale à 1. On note (en dimension N) $\vec{K}_{n,N}$ ce type de vecteur :

$$\vec{K}_{n,N} = (K_{n,N}(j)) \text{ avec } K_{n,N}(j) = \delta_{nj} \quad \forall j \in [1, N] \quad (2.1)$$

δ_{nj} s'appelle le symbole de Kronecker et vérifie :

$$\delta_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq j \\ 1 & \text{si } n = j \end{cases} \quad (2.2)$$

1. les seuls traités dans ce document

2. Ils auraient pu aussi être appelés "Diracs discrets".

$\vec{K}_{n,N}$ est donc un vecteur avec une seule valeur non nulle, à la ligne n :

$$\text{ligne } n \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En dimension N , il y a donc N vecteurs Kronecker différents.

On définit le produit d'un vecteur $\vec{B}$ (ligne ou colonne) par un scalaire λ comme l'opération $[\lambda \times]$ définie par la relation :

$$\vec{B}' = [\lambda \times] \vec{B} = \lambda \vec{B} \Leftrightarrow b'_n = \lambda b_n \quad \forall n \in [1, N]$$

2.2.2 Notation : produit scalaire

Le produit scalaire $\odot$ permet d'associer un scalaire à 2 vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de même taille par l'opération :

$$\vec{B} \odot \vec{C} = \sum_{n=1}^N b_n c_n \quad (2.3)$$

Une manière de considérer le produit scalaire est de le “poser” : on place sur la gauche le vecteur $\vec{B}$ sous forme de vecteur ligne et sur la droite le vecteur $\vec{C}$ sous forme de vecteur colonne (voir figure 2.1).

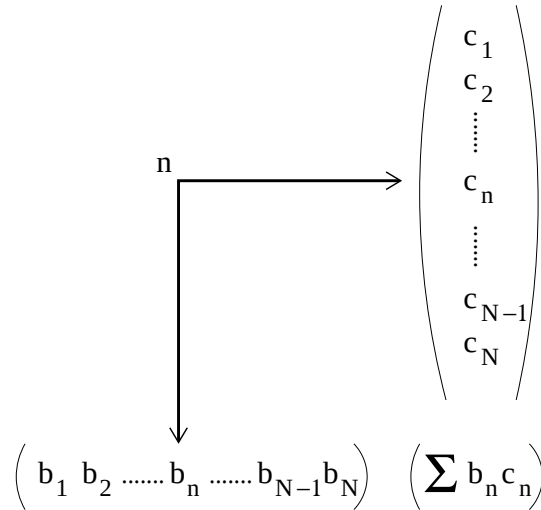


FIGURE 2.1 – Produit scalaire du vecteur $\vec{B}$ (construit ici comme un vecteur ligne) avec le vecteur $\vec{C}$ (construit ici comme un vecteur colonne). A un indice ligne n du vecteur $\vec{C}$ correspond le même indice colonne du vecteur $\vec{B}$: on effectue pour cet indice n le produit $b_n c_n$. On somme ensuite sur tous les indices $n \in [1, N]$.

Si l'on applique le produit scalaire d'un vecteur avec lui même, on obtient le carré de la norme du vecteur

$$\vec{B} \odot \vec{B} = \sum_{n=1}^N b_n b_n$$

la norme d'un vecteur pouvant s'écrire :

$$|\vec{B}| = \sqrt{\sum_{n=1}^N b_n b_n}$$

2.2.3 Propriétés du produit scalaire

Une propriété essentielle du produit scalaire de deux vecteurs non nuls est celui où le résultat est nul : on dit alors que les deux vecteurs sont **orthogonaux** :

$$\vec{B} \odot \vec{C} = 0 \Leftrightarrow \vec{B} \perp \vec{C}$$

Deux vecteurs orthogonaux ont pour ainsi dire aucun point de ressemblance. Par analogie avec le paragraphe 1.3, on peut envisager l'orthogonalité de deux vecteurs comme une absence de corrélation de leur contenu informatif (on parle alors de **décorrélation**). Deux vecteurs orthogonaux n'auront pas d'information en commun ; deux vecteurs non orthogonaux "partagent" tout ou partie de leur information.

Une seconde propriété triviale qui s'avèrera importante dans la suite de ce document est que toute paire de vecteurs Kronecker différents $\vec{K}_{i,N}$ et $\vec{K}_{j,N}$ (c'est à dire $i \neq j$) sont orthogonaux entre eux :

$$\vec{K}_{i,N} \odot \vec{K}_{j,N} = \delta_{ij}$$

2.2.4 Notation : projecteur

Le vecteur Kronecker $\vec{K}_{n,N}$ peut jouer un rôle particulier appelé **projecteur** : en effet, appliqué au vecteur $\vec{B}$ tel que $\vec{B}^t = (b_1 b_2 \dots b_{N-1} b_N)$, on a :

$$\vec{K}_{n,N} \odot \vec{B} = b_n \quad \forall n \in [1, N] \quad (2.4)$$

$\vec{K}_{n,N}$ permet donc d'extraire par un simple produit scalaire la n -ème composante d'un vecteur de dimension N . On a alors la décomposition canonique :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \sum_{n=1}^N \vec{K}_{n,N} \odot \vec{B} \\ &= \sum_{n=1}^N b_n \vec{K}_{n,N} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.5 Notation : produit et division point à point d'un vecteur par un autre vecteur (opération “.” et “/” de Matlab)

On trouve sous Matlab une opération a priori non canonique entre deux vecteurs de même taille : c'est le produit "point à point", noté “[.]”. Il associe à deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de même taille N un vecteur $\vec{R}$ de dimension N tel que :

$$\vec{R} = \vec{B} [.] \vec{C} \Leftrightarrow \forall n \in [1, N] \quad r_n = b_n c_n \quad (2.6)$$

C'est l'opération .* de Matlab.

Notons que ce produit est associatif :

$$\vec{B} [.] (\vec{C} [.] \vec{D}) = (\vec{B} [.] \vec{C}) [.] \vec{D}$$

De la même manière on définit la division "point à point", noté “./”, qui associe à deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de même taille N un vecteur $\vec{R}$ de dimension N tel que :

$$\vec{R} = \vec{B} [./] \vec{C} \Leftrightarrow \forall n \in [1, N] \quad r_n = \frac{b_n}{c_n} \quad (2.7)$$

à condition bien entendu que $\forall n \quad c_n \neq 0$.

C'est l'opération ./ de Matlab.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



2.3 Rappels de notations sur les matrices réelles

Nous allons maintenant résumer quelques opérations et notations applicables aux matrices .

2.3.1 Notation : les matrices

Une matrice M peut se définir comme un tableau bidimensionnel de valeurs, avec P lignes et N colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{iN} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{P1} & \dots & m_{Pj} & \dots & m_{PN} \end{pmatrix}$$

On peut la considérer comme une concaténation de P vecteurs lignes, ou comme une liste de N vecteur colonnes. On peut aussi noter la matrice M sous une forme plus concise :

$$M = (m_{ij}) \quad \text{avec } i \in [1, P] \quad j \in [1, N]$$

Là aussi le choix des indices a été fait pour ressembler aux notations Matlab (en particulier, le premier indice représente la ligne et le second la colonne).

Une **matrice carrée** est de dimension $N \times N$, donc a le même nombre de lignes (N) que de colonnes (N).

2.3.2 Notation : matrices particulières (matrice identité, matrice diagonale)

On note I_N la matrice identité définie par :

$$I_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

c'est à dire :

$$(I_N)_{ij} = \delta_{ij}$$

Seule les valeurs des coefficients diagonaux sont égaux à 1, les autres sont nulles.

On appelle **matrice diagonale** une matrice M dont tous les éléments sont nuls, hormis sur la diagonale :

$$MD = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_{nn} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & m_{N-1 \ N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & m_{NN} \end{pmatrix}$$

La matrice identité est un cas particulier de matrice diagonale.

Nous avons vu au paragraphe 2.2.5 l'opérateur $\times$ qui associe à deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ de même taille N un vecteur $\vec{R}$ de dimension N tel que (relation 2.6) :

$$\vec{R} = \vec{B} [\times] \vec{C} \Leftrightarrow \forall n \in [1, N] \quad r_n = b_n c_n$$

Cette opération est non canonique, mais peut se mettre sous forme canonique. En effet, considérons une matrice diagonale $MD = (md_{ij})$ (tel que toutes ses valeurs soient nulles, exceptées celles de la diagonale

principale) de dimension N . Si on attribue à chaque valeur de la diagonale md_{nn} la valeur c_i , on obtient alors : la matrice diagonale MD :

$$MD = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & c_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_N \end{pmatrix}$$

et on a alors :

$$\vec{R} = MD \times \vec{B}$$

2.3.3 Notation : produit d'une matrice par un scalaire

On définit le produit d'une matrice M par un scalaire λ comme l'opération $[\lambda \times]$ définie par la relation :

$$M' = [\lambda \times](M) = \lambda M \Leftrightarrow m'_{ij} = \lambda m_{ij} \quad \forall (i, j) \in [1, N] \times [1, N] \quad (2.9)$$

2.3.4 Notation : matrice opérant sur un vecteur (produit d'un vecteur par une matrice)

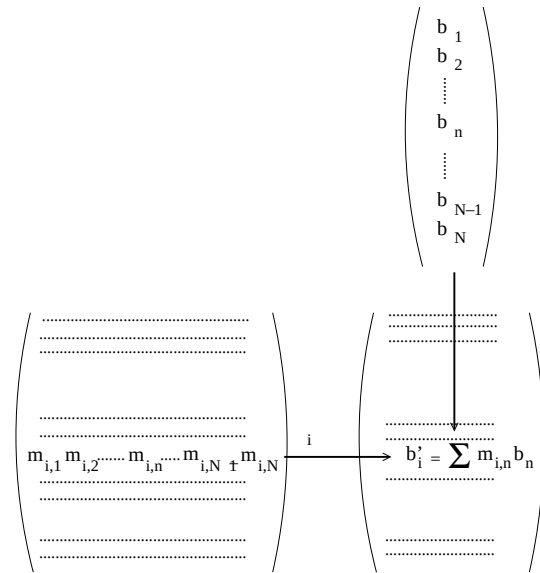


FIGURE 2.2 – Produit scalaire du vecteur $\vec{B}$ (ici en vecteur colonne) par la matrice M . A un indice ligne n du vecteur $\vec{B}$ correspond le même indice colonne n sur la ligne i de la matrice M . On obtient ainsi la valeur b'_i du vecteur $\vec{B}'$ (relation 2.11).

A partir d'une matrice carrée de dimension $N \times N$, on définit un opérateur $[M \times]$ applicable sur un vecteur $\vec{B}$ de dimension N et transformant ce vecteur en un vecteur transformé $\vec{B}'$ (lui aussi de dimension N) défini par l'expression :

$$\vec{B}' = [M \times](\vec{B}) = M \times \vec{B} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_{N-1} \\ b'_N \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

selon la règle

$$b'_i = \sum_{n=1}^N m_{in} b_n \quad (2.11)$$

C'est cette relation qui définit le produit $\times$ d'une matrice sur un vecteur.

L'opération $[M \times]$ peut se voir comme un **opérateur linéaire** sur des vecteurs puisque cette opération vérifie de manière triviale le principe de linéarité (appelé aussi principe de superposition) :

$$[M \times] (\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}) = \lambda [M \times] (\vec{B}) + \mu [M \times] (\vec{C}) \quad (2.12)$$

Appliquer sur un vecteur la matrice identité ne modifie pas ce vecteur³.

2.3.5 Notation : matrice opérant sur une matrice

Soit un vecteur $\vec{B}$ de dimension N .

Considérons maintenant deux matrice carrées $M = (m_{ij})$ et $R = (r_{ij})$ quelconques, de dimension $N \times N$, et analysons les deux vecteurs $\vec{B}'$ et $\vec{B}''$ tels que :

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= [M \times] (\vec{B}) = M \times \vec{B} \\ \vec{B}'' &= [R \times] (\vec{B}') \\ &= R \times (M \times \vec{B}) \end{aligned}$$

Détaillons les calculs : nous avons pour la matrice M appliqué au vecteur $\vec{B}$

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= M \times \vec{B} \\ b'_k &= \sum_{j=1}^N m_{kj} b_j \end{aligned}$$

et pour la matrice R appliqué au vecteur $\vec{B}'$

$$\begin{aligned} \vec{B}'' &= R \times \vec{B}' \\ b''_i &= \sum_{k=1}^N r_{ik} b'_k \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} b''_i &= \sum_{k=1}^N r_{ik} b'_k \\ b''_i &= \sum_{k=1}^N r_{ik} \left(\sum_{j=1}^N m_{kj} b_j \right) \\ b''_i &= \sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^N r_{ik} m_{kj} \right) b_j \end{aligned}$$

Tout se passe comme si on utilisait un nouvel opérateur $[P \times]$ sur le vecteur $\vec{B}$, la matrice $P = (p_{ij})$ étant définie par

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^N r_{ik} m_{kj} \quad (2.13)$$

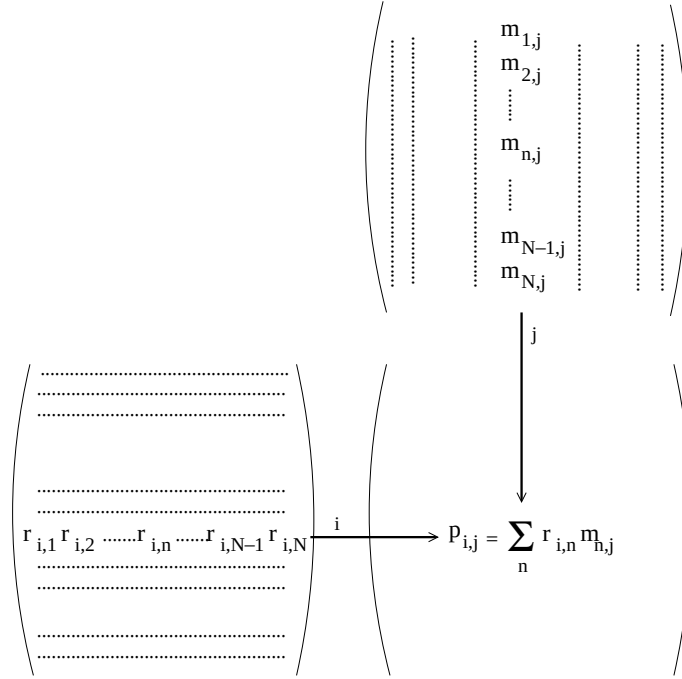


FIGURE 2.3 – Produit $R \times M$ entre deux matrices carrées de dimension $N \times N$. Tout revient à considérer individuellement une ligne de R et une colonne de M et à effectuer un produit scalaire.

On a donc ainsi défini le produit⁴ $\times$ de deux matrices carrées M et R de dimension $N \times N$ par la relation :

$$P = R \times M \Leftrightarrow p_{ij} = \sum_{k=1}^N r_{ik} m_{kj} \quad (2.14)$$

Le produit de deux matrices possède les propriétés suivantes :

— existence d'un élément neutre : la matrice identité⁵ :

$$\forall M \quad I \times M = M \times I = I$$

— associativité :

$$(R \times Q) \times M = R \times (Q \times M)$$

— attention : le produit de deux matrices n'est pas commutatif :

$$(Q \times M) \neq (M \times Q)$$

sauf cas d'exceptions.

2.3.6 Notation : matrice transposée, matrice symétrique, matrice inverse

Pour une matrice carrée $M = (m_{ij})$ à coefficients réels, on définit sa transposée M^t par la relation⁶ :

$$\forall i, j \quad m_{ij}^t = m_{ji} \quad (2.15)$$

3. d'où son nom puisque l'opération $[I_N \times]$ est l'identité.

4. Il n'y a aucun problème à utiliser cette notation déjà utilisée pour le produit (à gauche) d'un vecteur par une matrice.

5. qui devrait être noté I_N : pour alléger le formalisme, elle est simplement notée ici I .

6. Pour les matrices complexes, la matrice adjointe sera définie au paragraphe 2.4.

Une matrice est dite symétrique si :

$$\forall i, j \quad m_{ij} = m_{ji}$$

Elle est donc égale à sa transposée.

Dans certains cas, une matrice carrée $M = (m_{ij})$ possède un inverse M_{inv} tel que

$$[M_{inv} \times] M = I_N$$

2.3.7 Propriété des matrices inverses

Si la matrice carrée M possède un inverse M_{inv} , on peut alors aisément en déduire la propriété suivante (un des très rares cas où l'opération $\times$ est commutative) :

$$[M_{inv} \times] M = [M \times] M_{inv} = I_N$$

2.4 Grandeurs complexes : rappels et notations

Enfin, pour traiter le sujet de manière plus complète, il est important de remarquer que ces opérations vectorielles et matricielles peuvent aussi s'étendre aux vecteurs et aux matrices dont les termes sont des valeurs complexes, chaque terme s'exprimant avec une partie réelle et une partie imaginaire. On a alors, pour tout nombre complexe z l'écriture :

$$z = z_R + iz_I$$

z_R est la partie réelle, z_I est la partie imaginaire et i est l'imaginaire tel que $i^2 = -1$. Par définition, on associe à tout complexe $z = z_R + iz_I$ son **conjugué** z^* :

$$z^* = z_R - iz_I$$

Par définition d'un complexe on a la relation suivante :

$$z = z^* \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

2.4.1 Vecteurs complexes

Les composantes des vecteurs peuvent aussi être des valeurs complexes (ce qui définit les vecteurs complexes). Quelques extensions aux définitions précédentes doivent alors être introduites :

— la notion de **vecteur conjugué**. Soit un vecteur $\vec{B}$:

$$\vec{B} = (b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, b_N)^t$$

alors son conjugué, noté $\vec{B}^*$, est défini par :

$$\vec{B}^* = (b_1^*, b_2^*, \dots, b_{N-1}^*, b_N^*)^t \quad (2.16)$$

— la notion de **produit hermitien** entre deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ qui est le produit scalaire du vecteur $\vec{B}$ avec le conjugué de $\vec{C}$:

$$\vec{C} \odot_H \vec{B} = \vec{C}^* \odot \vec{B} \quad (2.17)$$

— la notion de **norme**, qui est la racine carrée du produit hermitien d'un vecteur avec lui-même⁷ :

$$|\vec{B}| = \sqrt{\vec{B} \odot_H \vec{B}} = \sqrt{\vec{B}^* \odot \vec{B}}$$

cette relation a toujours un sens car, pour tout nombre complexe z , $z^*z \in \mathbb{R}^+$.

— deux vecteurs sont dits **orthogonaux** si leur produit hermitien est nul.

7. Vérifiez que ce scalaire est toujours positif ou nul, ce qui justifie la racine carrée.

2.4.2 Matrices complexes

Une matrice complexe est une matrice dont les composants sont des nombres complexes. Quelques notions spécifiques à ces matrices complexes doivent alors être introduites :

- la notion de matrice conjuguée : pour une matrice $M = (m_{ij})$ (les m_{ij} étant des valeurs complexes), on associe $M^* = (m_{ij}^*)$
- la notion de matrice adjointe M^H d'une matrice carrée $M = (m_{ij})$ (notion qui étend la définition de la matrice transposée vue au paragraphe 2.3.6)

$$\forall i, j \quad m_{ij}^H = m_{ji}^* \quad (2.18)$$

l'opération $*$ représentant l'opération "conjugué".

- on introduit alors la notion de matrice hermitienne, qui généralise la notion de matrice symétrique et qui vérifie :

$$M^t = M^*$$

2.5 Les décalages

2.5.1 Matrices de permutation

Ce sont ces matrices qui, sous certaines hypothèses, permettent de permuter les composantes d'un vecteur $\vec{B}$ de dimension N . Pour cela, elles doivent vérifier les règles suivantes :

- une seule valeur 1 par ligne, les autres étant à 0 ;
- une seule valeur 1 par colonne les autres étant à 0.

Il est facile de montrer que les N vecteurs lignes de cette matrice sont orthogonaux entre eux, et que les N vecteurs colonnes de cette matrice sont orthogonaux entre eux.

Le résultat de l'opération d'une matrice de permutation M sur un vecteur $\vec{B}$ revient à "brasser" ses coefficients : leurs valeurs demeurent inchangées, mais ils n'apparaissent pas dans le bon ordre.

Voici par exemple un cas pour $N = 5$ qui permute simplement la seconde composante et la cinquième composante du vecteur $\vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_5 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Les composantes 1,3 et 4 restent inchangées (valeur 1 sur la diagonale).

Comme le produit de deux matrices de permutation est aussi une matrice de permutation : on a donc affaire à un groupe, appelé **groupe de permutation** ou **groupe symétrique d'indice N** . En particulier, puisque l'on a affaire à un groupe fini, en appliquant un certain nombre de fois⁸ une matrice de permutation, on arrive toujours à retrouver le vecteur initial.

Nous allons maintenant nous intéresser à deux cas particulier : la matrice de retournement des indices et les matrices de décalages des indices.

2.5.2 Matrice de retournement des indices AD_N

Un cas particulier qui nous sera utile par la suite (quand nous traiterons des propriétés de la transformation de Fourier discrète, chapitre 6) est celui de la matrice antidiagonale, notée AD_N , que nous appellerons matrice de retournement des indices, définie par :

$$(AD_N)(i, j) = \delta_{i, N+1-j} \quad (2.19)$$

8. Au plus N fois.

Ses valeurs sont non nulles sur l'antidiagonale et nulles ailleurs. Il est facile de montrer que⁹ :

$$AD_N \times AD_N = I_N \quad (2.20)$$

Comme exemple de matrice AD , prenons le cas $N = 5$. On a :

$$AD_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Appliquée à un vecteur $\vec{B}$, elle donne :

$$AD_5 \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_5 \\ b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Les matrices AD ne changent pas les valeurs, mais “retournent” l'ordre des indices. Pour un vecteur décrivant un signal temporel, cette matrice permettra de retourner le temps.

2.5.3 Matrices de décalage $D_{p,N}$

Un cas particulier de matrice de permutation qui sera largement utilisé dans ce document est celui des **matrices de décalage**. Nous allons d'abord voir le cas particulier du décalage d'un indice (matrice $D_{1,N}$), puis le cas général (matrices $D_{p,N}$, $p \in [1, N]$).

Matrices de décalage $D_{1,N}$

La matrice de décalage élémentaire $D_{1,N}$ opère sur un vecteur $\vec{B}$ de dimension N , de sorte que l'on décale “vers le bas” toutes les composantes de ce vecteur, avec une propriété essentielle de circularité qui consiste à mettre la composante d'indice N en indice 1.

Par exemple, pour $N = 5$, on a pour un vecteur $\vec{B} = (b_n)$ l'opération :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b_5 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Le vecteur $\vec{B}$ est transformé en $\vec{B}' = D_{1,N} \times \vec{B}$, avec

$$\begin{aligned} b'_n &= b_{n-1} \quad \text{si } n > 1 \\ b'_1 &= b_N \end{aligned}$$

ce qui revient à définir la matrice $D_{1,N}$ par les relations

$$\begin{aligned} D_{1,N}(i, j) &= \delta_{i,j+1} \quad \text{si } j < N \\ D_{1,N}(i, N) &= \delta_{i,1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

expression où l'on décale les colonnes de la matrice unité d'un pas vers la gauche, avec la règle de circularité appliquée pour la première colonne qui devient alors la dernière colonne.

9. Faites le!!

On aurait tout aussi bien pu définir la matrice $D_{1,N}$ par les relations

$$\begin{aligned} D_{1,Nij} &= \delta_{i-1,j} \quad \text{si } i > 1 \\ D_{1,N1j} &= \delta_{N,j} \end{aligned}$$

expression où l'on décale les lignes de la matrice unité d'un pas vers le bas, avec la règle de circularité appliquée pour les coefficients de la dernière ligne (la dernière ligne de la matrice unité passe en première ligne).

Par exemple, pour $N = 5$, on définit la matrice $D_{1,5}$ telle que

$$D_{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$D_{1,5} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_5 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Il est facile de montrer que si on applique 5 fois cette opération sur un vecteur (de dimension 5) on retrouve le vecteur à l'identique. On a donc la propriété :

$$D_{1,5} \times D_{1,5} \times D_{1,5} \times D_{1,5} \times D_{1,5} = I_5$$

Pour alléger les notations, on définit l'opération "élévation à la puissance m " : M^m l'opération qui consiste à appliquer m fois l'opération $M \times$. Appliqué à la matrice $D_{1,5}$, on a :

$$D_{1,5}^5 = I_5$$

et de manière plus générale, pour $D_{1,N}$:

$$D_{1,N}^N = I_N$$

Matrices de décalage $D_{p,N}$

On appellera donc dans ce document **matrice de décalage d'ordre p** : $D_{p,N}$, la matrice :

$$D_{p,N} = (D_{1,N})^p \quad (2.24)$$

Une des propriétés fondamentales de la famille des matrices de décalage $D_{p,Np} \in [1, N]$ est le fait que décaler N fois un vecteur avec l'hypothèse de circularité laisse inchangé le vecteur initial. On a en effet :

$$D_{(N,N)} = D_{1,N}^N = I_N$$

L'hypothèse de circularité permet aussi d'écrire la relation pour tout $p \in [1, N]$ et tout $q \in [1, N]$ ¹⁰ :

$$D_{p,N} \times D_{(q,N)} = \begin{cases} D_{(p+q,N)} & \text{si } p+q \leq N \\ D_{(p+q-N,N)} & \text{si } p+q > N \end{cases}$$

Cette même hypothèse de circularité permet d'écrire la propriété importante, que nous utiliserons ultérieurement, que vérifie toute matrice $D_{p,N} = (d_{i,j})$:

$$d_{i+m,j+m} = d_{i,j} \quad \forall m \in \mathbb{Z} \text{ tel que } j+m \in [1, N] \text{ et } i+m \in [1, N] \quad (2.25)$$

Elle permet d'écrire directement :

$$D_{p,N} \times D_{(N-p),N} = I_N$$

ce qui donne un inverse à toute matrice de décalage.

Appliquées à une matrice, les matrices de décalage ont les propriétés suivantes :

¹⁰. Démontrez la !!

— Pour toute matrice $M = (m_{i,j})$, on a :

$$D_{p,N} \times M = (m_{i+p,j}) \quad (2.26)$$

avec comme convention pour un indice $i + p > N$ de prendre $i + p - N$. On voit que l'on décale les lignes de p lignes vers le bas.

— Pour toute matrice $M = (m_{i,j})$, on a :

$$M \times D_{p,N} = (m_{i,j-p}) \quad (2.27)$$

avec comme convention pour un indice $j - p < 1$ de prendre $j - p + N$. On voit que l'on décale les colonnes de p colonnes vers la gauche.

2.6 Matrices et transformations

2.6.1 Transformation : matrice opérant sur un vecteur

Nous avons donc vu que par définition, une matrice M permet de définir un opérateur $[M \times]$ qui, à un vecteur $\vec{B}$, associe un vecteur appelé vecteur transformé $\vec{B}'$ selon la règle (relation 2.10)

$$\vec{B}' = [M \times] (\vec{B}) = M \times \vec{B} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_{N-1} \\ b'_N \end{pmatrix}$$

avec (relation 2.11)

$$b'_i = \sum_{n=1}^N m_{in} b_n$$

ce qui peut être représenté par un diagramme (figure 2.4).

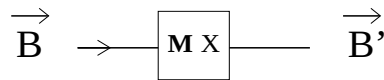


FIGURE 2.4 – Opérateur bloc sur un vecteur $\vec{B}$: l'opérateur est ici la multiplication (à gauche) par une matrice M .

2.6.2 Propriétés

Plusieurs transformations peuvent s'enchaîner. Etudions le cas de deux transformations (la généralisation est triviale), $[R \times]$ et $[M \times]$, décrites par leur matrice R et M .

On a la transformation du vecteur $\vec{B}$ en un nouveau vecteur $\vec{B}'$ par la transformation $[M \times]$:

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= [M \times] \vec{B} \\ &= M \times \vec{B} \end{aligned}$$

et on peut transformer ce vecteur $\vec{B}'$ en un vecteur $\vec{B}''$ par la transformation $[R \times]$:

$$\begin{aligned} \vec{B}'' &= [R \times] \vec{B}' \\ &= R \times \vec{B}' \\ &= R \times M \times \vec{B} \\ &= [(R \times M) \times] \vec{B} \end{aligned}$$

ce qui définit une nouvelle transformation P :

$$P = R \times M$$

et on a (relation 2.13) :

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^N r_{ik} m_{kj}$$

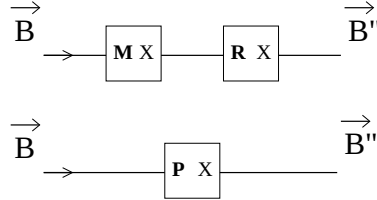


FIGURE 2.5 – Opérateur bloc sur un vecteur $\vec{B}$: l'opérateur est ici la multiplication (à gauche) par une matrice M suivie par une multiplication (à gauche) par une matrice R . Tout se passe comme si on opérait une seule matrice P

Une transformation peut aussi s'appliquer sur la somme de deux vecteurs et on a :

$$M \times (\vec{B} + \vec{C}) = M \times \vec{B} + M \times \vec{C}$$

Une transformation peut aussi s'appliquer sur le vecteur $\lambda \vec{B}$ défini par

$$\lambda \vec{B} = \begin{pmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \dots \\ \lambda b_{N-1} \\ \lambda b_N \end{pmatrix}$$

On a au final :

$$M \times (\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}) = \lambda (M \times \vec{B}) + \mu (M \times \vec{C})$$

Cette dernière relation est celle des transformations dites linéaires. Si $\mathcal{T}$ est une transformation linéaire, alors on a par définition :

$$\boxed{\mathcal{T}(\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}) = \lambda \mathcal{T}(\vec{B}) + \mu \mathcal{T}(\vec{C})} \quad (2.28)$$

Nous avons déjà montré (paragraphe 2.3.4, relation 2.12) que les transformations fondées sur les matrices sont des exemples de transformations linéaires.

2.6.3 Transformation “réversible”

Soit une matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $N \times N$ possédant un inverse M_{inv} .

Appliqué sur un vecteur $\vec{B}$ de dimension N , la transformation $[M \times]$ donne un nouveau vecteur $\vec{B}'$ tel que :

$$\vec{B}' = M \times \vec{B}$$

Puisque la matrice M possède un inverse M_{inv} , on peut écrire :

$$\begin{aligned} M_{inv} \times \vec{B}' &= M_{inv} \times (M \times \vec{B}) \\ &= (M_{inv} \times M) \times \vec{B} \\ &= \vec{B} \end{aligned}$$

On voit donc qu'à une transformation $[M \times]$ décrite par une matrice M inversible, on peut appliquer une nouvelle transformation $[M_{inv} \times]$ décrite par la matrice M_{inv} de sorte que l'enchaînement de ces deux transformations soit l'identité. Toute l'information contenue dans le vecteur initial $\vec{B}$ est alors retranscrite dans le vecteur transformé $\vec{B}'$: ceci se déduit *a contrario* puisque si cette transformation "gomme" une partie de l'information de $\vec{B}$, il ne saurait être question de la recréer à partir de $\vec{B}'$ qui justement ne contient pas cette partie de l'information.

2.6.4 Changement de représentation : notion d'espace dual

Une transformation peut changer l'espace dans lequel l'information est décrite : on passe de l'espace initial Θ à un autre espace, l'espace transformé, qui peut contenir tout ou partie de l'information initiale.

Considérons le cas où la transformation $[M \times]$ est décrite par une matrice M inversible : celle-ci conserve la totalité de l'information de départ et on dit que cette transformation est inversible (les physiciens parlent plutôt de réversibilité). Dans ce cas on qualifie souvent l'espace transformé d'**espace dual**.

Pour donner un exemple ultra simple d'espace dual, considérons un trajet en voiture tel que la vitesse, de valeur c , soit constante. Si l'on connaît la durée (exprimée en seconde dans le domaine temporel), on connaît la distance (exprimée en mètre dans le domaine spatial). Et vice-versa. C'est le paramètre c qui permet le passage du temps à la distance, et $1/c$ qui permet le passage de la distance au temps.

L'espace dual étant lui même transformable, on remarque que le dual du dual peut représenter l'espace initial.

2.6.5 Propriétés des transformations

A partir de ces définitions et des propriétés qui en découlent, il est facile de montrer que le produit scalaire d'un vecteur réel et d'un autre vecteur réel obtenu par transformation matricielle (matrice réelle) peut s'écrire de deux manières équivalentes. Soient deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$, et une matrice M définissant un opérateur $[M \times]$. On a :

$$\begin{aligned} \vec{C} \odot [M \times] (\vec{B}) &= \vec{C} \odot (M \times \vec{B}) \\ &= \sum_{k=1}^N c_k \left(\sum_{l=1}^N m_{kl} b_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N m_{kl} c_k b_l \\ &= \sum_{l=1}^N b_l \left(\sum_{k=1}^N m_{kl} c_k \right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^N m_{kl} c_k \right) \odot \vec{B} \\ &= (M^t \times \vec{C}) \odot \vec{B} \\ &= [M^t \times] \vec{C} \odot \vec{B} \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat important suivant ¹¹ :

$$\vec{C} \odot [M \times] (\vec{B}) = [M^t] \vec{C} \odot \vec{B} \quad (2.29)$$

On a bien évidemment sur des matrices complexes un résultat comparable à la relation 2.29 : le produit hermitien d'un vecteur et d'un autre vecteur obtenu par transformation matricielle (matrice complexe) peut

11. qui justifie largement l'introduction de la transposition au paragraphe 2.3.6

s'écrire de deux manières équivalentes. Soient deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$, et une matrice M définissant un opérateur $[M \times]$. On a :

$$\begin{aligned}
 \vec{C} \odot_H [M \times] (\vec{B}) &= \vec{C} \odot_H (M \times \vec{B}) \\
 &= \sum_{k=1}^N c_k^* \left(\sum_{l=1}^N m_{kl} b_l \right) \\
 &= \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N m_{kl} c_k^* b_l \\
 &= \sum_{l=1}^N b_l \left(\sum_{k=1}^N m_{kl} c_k^* \right) \\
 &= \left(\sum_{l=1}^N m_{kl} c_k^* \right) \odot \vec{B} \\
 &= (M^{t*} \times \vec{C}) \odot_H \vec{B} \\
 &= [M^{t*} \times] \vec{C} \odot_H \vec{B}
 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat important suivant¹² :

$$\vec{C} \odot_H [M \times] (\vec{B}) = [M^H \times] \vec{C} \odot_H \vec{B} \quad (2.30)$$

2.7 Représentation circulaire des signaux

2.7.1 Signaux sur $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$

Nous avons défini au début de ce chapitre (paragraphe 2.2.1) un signal de N valeurs par sa description sous forme d'un vecteur :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \\ \dots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix}$$

b_n désigne la n -ème valeur et $n \in [1, N]$.

L'utilisation des matrices de décalage $D_{p,N}$ (voir paragraphe 2.5.3) nous a permis de modifier le signal initial par un décalage des indices. Mais dès le cas de la matrice de décalage élémentaire $D_{1,N}$, il a fallu ajouter la convention de circularité, qui consiste à placer en premier indice la valeur correspondant au dernier indice du vecteur initial, ce qui donne pour $N = 5$ l'expression (relation 2.23) :

$$D_{1,5} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_5 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

Le cas $D_{1,N}$ (N quelconque) vérifie donc la règle de récupération des indices "ligne" :

$$\begin{aligned}
 i &\rightarrow i+1 & \text{si } i < N \\
 i &\rightarrow 1 & \text{si } i = N
 \end{aligned} \quad (2.31)$$

¹². qui justifie largement l'introduction du produit hermitien au paragraphe 2.4.2

Pour un décalage p quelconque, la règle s'écrit pour les indices "ligne" :

$$\begin{aligned} i &\rightarrow i + p && \text{si } i < N + 1 - p \\ i &\rightarrow i + p - N && \text{si } i > N - p \end{aligned} \quad (2.32)$$

En pratique, cette règle n'est rien que la règle d'addition modulo N et l'ensemble des indices est isomorphe à un groupe cyclique $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, +)$ qui contient N éléments.

2.7.2 Exemple

La figure 2.6 montre un signal modèle de $N = 32$ valeurs (qui s'avère être un *chirp* amorti, objet dont on reparlera) : à gauche, la visualisation habituelle, à droite, une visualisation sur un cercle. La visualisation sur le cercle peut apparaître gênante car elle exhibe une discontinuité entre l'indice 32 et l'indice 1.

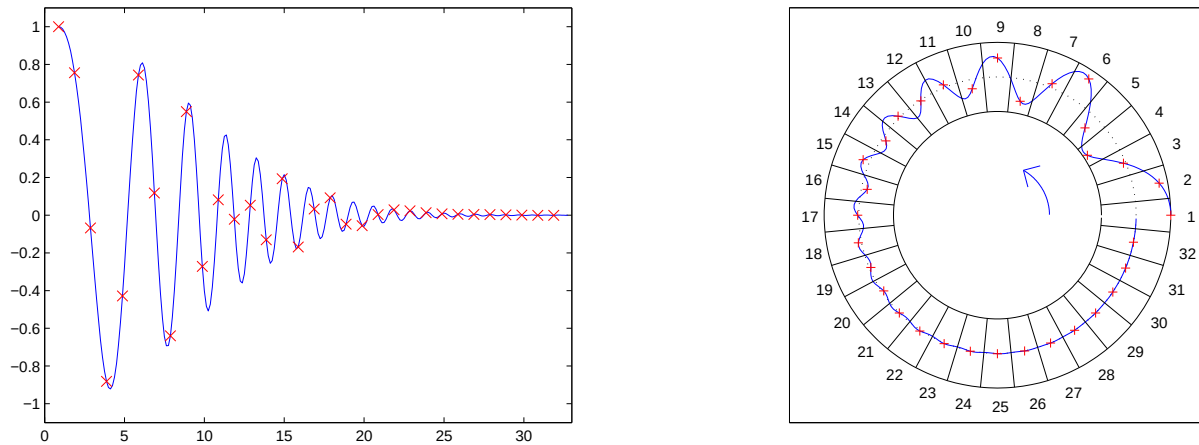


FIGURE 2.6 – Exemple de signal. A gauche : signal discret ($N = 32$) et signal continu correspondant. A droite : représentation circulaire du même signal.

Sur ce signal test on peut opérer un retard : sur la figure 2.7 (partie supérieure), le signal est retardé de 9 pas. Dans ce cas les deux représentations sont facilement interprétables. On peut de même opérer une avance (phénomène peu compatible avec le temps réel) : sur la figure 2.7 (partie inférieure), le signal est avancé de 2 pas. Dans ce cas la représentation "classique" est difficile à comprendre puisque le signal comporte deux morceaux, et que la fin du signal est en réalité le début du signal original. En revanche, la représentation circulaire donne toujours la même interprétation.

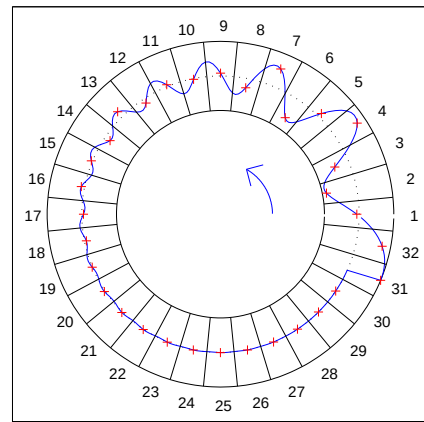
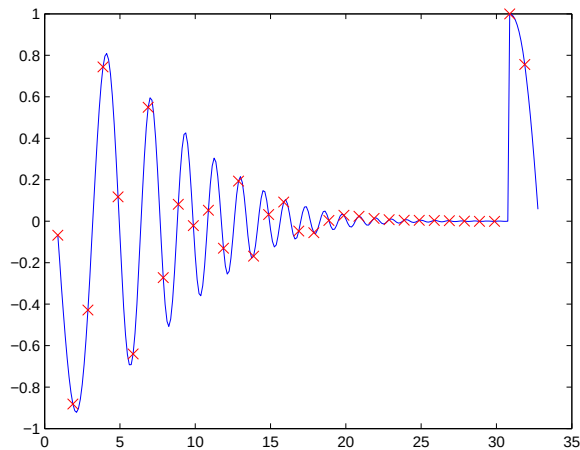
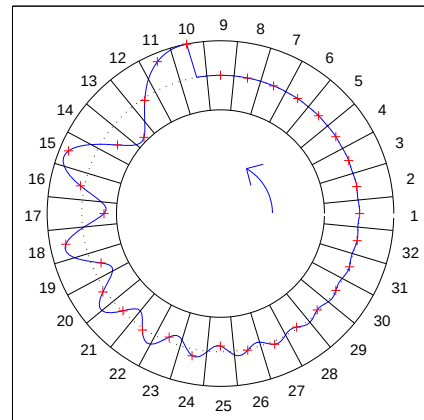
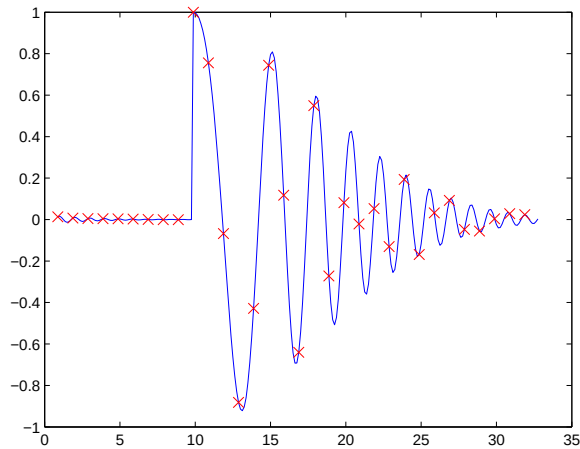


FIGURE 2.7 – En haut : signal de la figure 2.6 retardé de 9 pas. En haut à gauche : signal discret ($N = 32$) et signal continu correspondant. En haut à droite : représentation circulaire du même signal. En bas : signal de la figure 2.6 avancé de 2 pas. En bas à gauche : signal discret ($N = 32$) et signal continu correspondant. En bas à droite : représentation circulaire du même signal.

Chapitre 3

Signaux binaires : le créneau dans tous ses états

3.1 Signaux binaires

L'histoire du traitement du signal est probablement née autour des signaux binaires. Par exemple le langage morse est construit autour d'une simple analyse de l'état du système, décrit par seulement deux états¹ : signal et signal, à laquelle on ajoute la notion de durée du signal².

Un signal numérique binaire est alors une succession de 0 et de 1 (ces deux valeurs sont arbitraires : on peut tout à fait prendre comme valeurs +1 et -1) : l'alphabet est réduit à deux lettres. Ces valeurs ont été acquises selon un pas d'échantillonnage temporel donné et constant : δt . Puisque le signal ne peut prendre que deux valeurs, on peut le coder sur 1 bit.

Des données codées sur seulement 1 bit pourraient sembler peu utiles : elles véhiculent cependant suffisamment d'information pour permettre des applications concrètes. Signalons deux exemples instructifs :

- les sondes Venera-15 et 16, en orbite autour de Venus, ont acquis, entre 1983 et 1985, des données d'imagerie Radar (Radar à Synthèse d'Ouverture) en ne transmettant que le signe du signal (qui était un complexe : un bit pour la partie réelle, un bit pour la partie imaginaire, ce bit unique pour une valeur ne donnant de facto que le signe). Les images ainsi construites (par un algorithme appelé "synthèse RSO") donnent une représentation tout à fait réalistes du sol de Vénus (qui, rappelons le, n'est pas observable par des moyens optiques à cause de la forte couverture nuageuse de cette planète).
- Philips a utilisé un corrélateur 1 bit pour ses systèmes d'imagerie de flux sanguin par échographie. L'information ainsi obtenue était plus fiable que les algorithmes concurrents fondés sur l'effet Doppler.

3.2 Exemple des codes-barres

3.2.1 Description

Une application des plus courantes des signaux binaires est celle des codes barres. En effet, un lecteur de codes-barres va interpréter le signal reçu comme une succession de valeurs -1 (les zones noires) et de 1 (les zones blanches)³.

Il y a de nombreuses manières de coder des chiffres en codes barre. La description choisie dans ce document s'inspire de la norme EAN, plus précisément le jeu de codage "A" (celui qui correspond à la partie gauche des codes usuels). L'objectif des codes barre est de donner une représentation binaire des chiffres décimaux,

1. Le surlignement signifie ici la négation.

2. Dans ce document, nous parlerons le plus souvent de signaux temporels : bien évidemment, tout vecteur de données acquis de manière régulière –espace, ...– peut être analysé de manière similaire.

3. Contrairement à la définition classique, nous choisissons de représenter le code binaire par le couple (-1,1) plutôt que par le couple (0,1). En effet, pour des signaux codés aléatoirement sur les valeurs 0 et 1, la valeur moyenne du signal est proche de 0,5 alors que pour des signaux codés aléatoirement sur les valeurs -1 et 1, la valeur moyenne du signal est proche de 0. Et il est souvent préférable d'avoir des signaux à moyenne nulle.

au nombre de dix. Il y a donc dix codes élémentaires correspondant aux chiffres de 1 à 9 et la valeur 0 : le dictionnaire comporte donc dix éléments, ces dix codes élémentaires étant illustrés figure 3.1. Ces dix codes élémentaires utilisent 7 bits pour les décrire. Ils peuvent aussi se représenter sous la forme d'une matrice (7×10), chaque colonne de cette matrice étant le vecteur correspondant à un chiffre donnée :

$$W = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Pour $i < 10$, la colonne i représente le code barre élémentaire du chiffre i et si $i = 10$, le code barre élémentaire du chiffre 0⁴.



FIGURE 3.1 – Codes barres élémentaires représentant les chiffres de 1 à 9 ainsi que le 0 (d'après la norme EAN). Ils correspondent aux 10 colonnes de la matrice 3.1. Sous cette forme (7 bits par code élémentaire), chaque code élémentaire commence par une barre noire et s'achève par une barre claire.

3.2.2 Comparaison de deux codes élémentaires

Considérons deux codes : B et C , correspondant chacun à deux chiffres entre 0 et 9. Chacun est représenté par un vecteur de 7 valeurs binaires :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)^t \\ \vec{C} &= (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7)^t \end{aligned}$$

Pour comparer ces deux codes, on peut prendre l'erreur quadratique $d_{L^2}(\vec{B}, \vec{C})$ vue au chapitre précédent :

$$d_{L^2}(\vec{B}, \vec{C}) = \sum_{n=1}^7 (b_n - c_n)^2$$

Remarquons que cette erreur est nulle si et seulement si $\vec{C} \equiv \vec{B}$. En effet, cherchons c_n minimisant cette erreur. Il suffit d'annuler la dérivée partielle de l'erreur quadratique pour la variable c_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{L^2}(\vec{B}, \vec{C})}{\partial c_n} &= \frac{\partial \sum_{n=1}^7 (b_n - c_n)^2}{\partial c_n} \\ &= -2(b_n - c_n) \\ &= 0 \quad \forall n \in [1, 7] \end{aligned}$$

ce qui revient à écrire :

$$c_n = b_n \quad \forall n \in [1, 7]$$

Une autre manière de voir ce problème est de remarquer que $\sum_{n=1}^7 b_n^2$ est une constante du problème. Si l'on impose une valeur à $\sum_{n=1}^7 c_n^2$ (normalisation par exemple), en développant l'erreur quadratique, on a :

$$d_{L^2}(\vec{B}, \vec{C}) = \sum_{n=1}^7 b_n^2 + \sum_{n=1}^7 c_n^2 - 2 \sum_{n=1}^7 b_n c_n$$

4. Ce choix arbitraire a été pris pour mieux se plier aux contraintes Matlab qui indice ses tableaux à partir de l'indice 1.

Dans ce contexte, minimiser l'erreur quadratique moyenne revient à rechercher le maximum de la grandeur :

$$\sum_{n=1}^7 b_n c_n$$

qui n'est rien d'autre que le produit scalaire de $\vec{B}$ avec $\vec{C}$ puisque :

$$\vec{B} \odot \vec{C} = \sum_{n=1}^7 b_n c_n$$

Cette première analyse nous montre donc que, pour rechercher la meilleure ressemblance possible entre deux codes barre, on peut aussi bien rechercher le minimum de l'erreur quadratique que rechercher le maximum du produit scalaire.

3.2.3 Représentation circulaire des codes élémentaires

La représentation circulaire appliquée aux codes barres élémentaires (figure 3.2) donne une autre optique de la comparaison de deux chiffres exprimés sous forme de code barre. En effet, comparer deux chiffres revient à comparer des formes, comme lorsque l'on compare deux trous de serrure. Cependant, un point essentiel à ce stade est de remarquer qu'il est interdit de "tourner" la clé pour essayer de la faire entrer dans le trou de serrure : les codes barre sont ainsi fait que, si l'on s'autorise une rotation, le code élémentaire du 1 et celui du 2 correspondent, ce qui n'est pas compatible avec l'idée que l'on se fait d'un codage puisque l'on confond deux codes élémentaires.

On voit donc ici l'importance du choix de l'origine : c'est pour cela qu'un code barre réel (norme EAN) démarre et s'achève par des valeurs spécifiques permettant d'identifier le début et la fin du code.

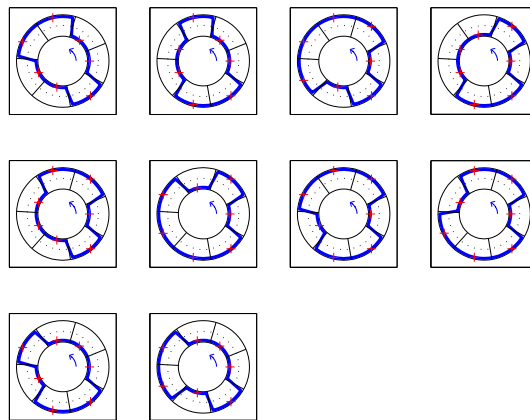


FIGURE 3.2 – Les 10 codes barre élémentaires représentant sous forme circulaire les chiffres de 1 à 9, et en dernier le chiffre 0 (d'après la norme EAN). Les codes barre sont exprimés sur 7 bits (le premier a toujours la valeur -1 et le dernier, la valeur +1).

3.2.4 Recherche du chiffre correspondant à un code élémentaire

Supposons donc que nous avons un code (correspondant donc à un chiffre entre 0 et 9), représenté par une succession de $P = 7$ valeurs $(+1, -1)$. Cherchons une opération élémentaire pour savoir à quel code élémentaire ce code correspond. L'opération la plus évidente consiste à calculer les 10 produits scalaires entre le code et les 10 codes élémentaires correspondant aux chiffres de 1 à 9 et au chiffre 0, et de retenir le code élémentaire correspondant au produit scalaire le plus élevé.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



On peut écrire cette opération sous forme matricielle. En effet, connaissant la matrice W donnant les codes élémentaires (équation 3.1), on peut définir la transformation $[W^t \times]$ qui, à tout vecteur $\vec{B}$ de dimension $N = 7$, $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)^t$, fait correspondre un vecteur $\vec{C}$ par la relation :

$$\vec{C} = W^t \vec{B} \quad (3.2)$$

c'est à dire

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \\ c_8 \\ c_9 \\ c_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de trouver la valeur de n tel que $c_n \geq c_p, p \in [1, 10]$ (et on espère aussi qu'il n'y ait qu'une seule valeur de n vérifiant cette inégalité). Au passage, on voit que les codes ne sont pas orthogonaux entre eux.

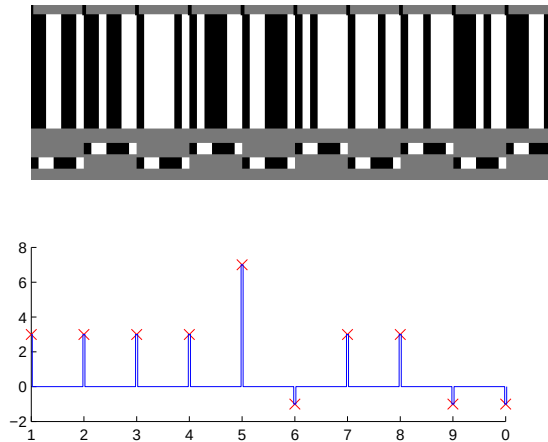


FIGURE 3.3 – Partie supérieure : Code barre composé des 10 chiffres de 1 à 9, suivi de 0 (d'après la norme EAN, voir figure 3.1). Au dessous, pour chaque chiffre, le code $\vec{B}_5 = (-1, 1, 1, -1, -1, -1, 1)$ qui correspond au chiffre 5. Partie inférieure : résultat de la corrélation de chaque chiffre du code barre élémentaire correspondant au chiffre 5. Comme chaque code élémentaire commence par une valeur sombre et finit par une valeur claire, il y a toujours au moins 2 bits identiques sur les 7 et il existe toujours une certaine ressemblance entre deux codes barre élémentaires.

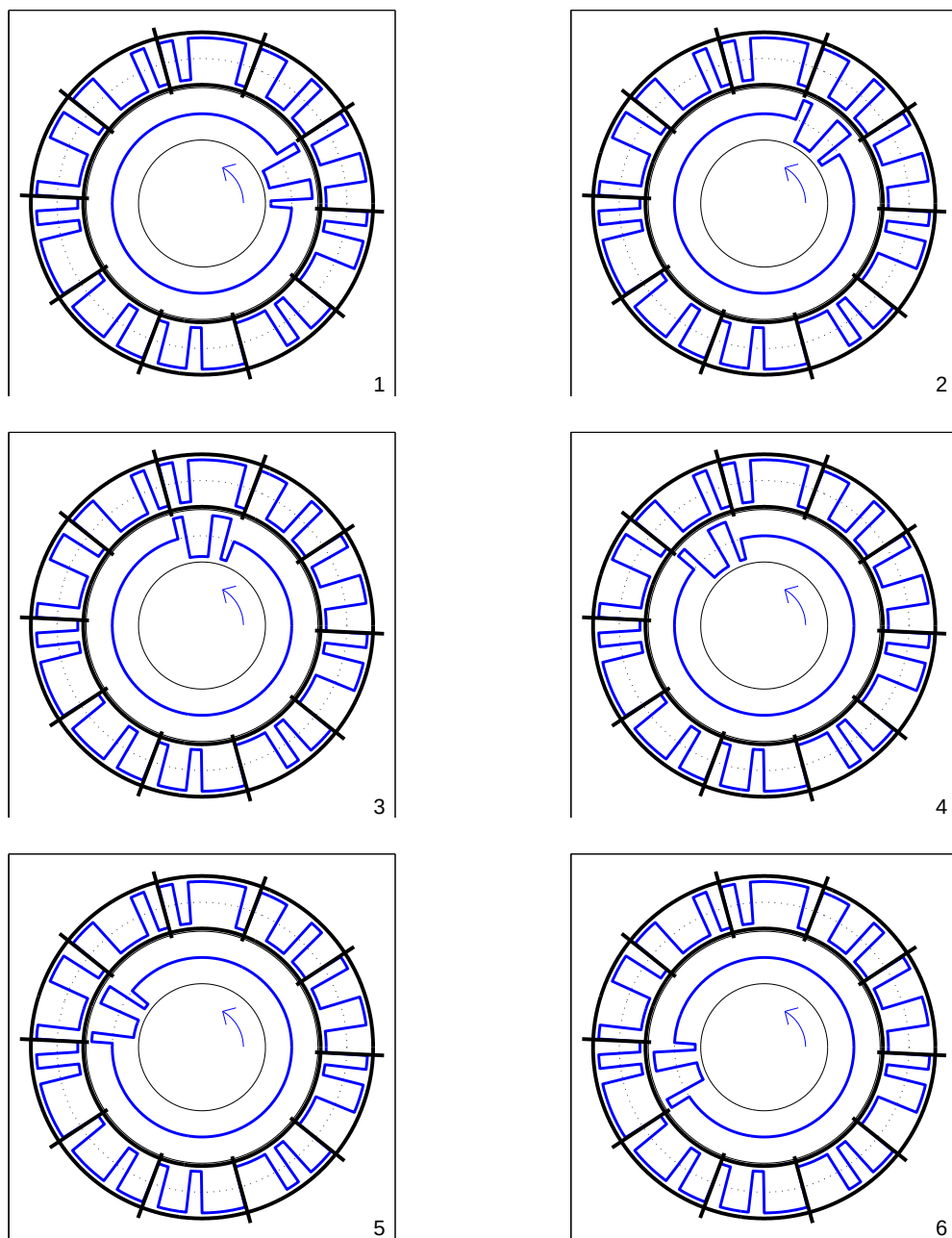


FIGURE 3.4 – Représentation circulaire de la recherche dans un code barre composé de 10 chiffres du code barre élémentaire correspondant au chiffre 5 (voir figure 3.3), représenté en zone intérieure. On ne représente que les 6 premières étapes, chaque étape constituant à analyser la ressemblance entre le code recherché et une zone décalée du code barre initial. La ressemblance maximale est atteinte pour l'étape 5, qui correspond, en zone extérieure, au code du chiffre 5.

3.2.5 Recherche d'un code élémentaire dans un code barre

Un code barre est donc composé d'un certain nombre de codes élémentaires concaténés selon certaines règles normatives bien précises (la norme EAN introduit par exemple, outre les drapeaux de début et de fin de code, un drapeau au milieu du code). Dans ce document, nous allons considérer un code barre constitué simplement de M codes élémentaires concaténés, chaque code élémentaire étant représentée sur P valeurs (c'est à dire P zones élémentaires blanches ou noires).

Soit un code barre composé de M codes élémentaires : il représente donc M chiffres. Par exemple, sur la figure 3.3, le code analysé est composé de 10 codes élémentaires correspondant aux 10 chiffres (de 1 à 9, et en dernier le chiffre 0) : il est donc représenté sur $M \times P = 70$ valeurs binaires.

La recherche d'un code élémentaire donné sur ce code barre doit donc vérifier des règles bien précises :

- une valeur donnée, donc un code élémentaire donné, est une succession de $P = 7$ bits, que l'on peut interpréter comme des $(+1, -1)$ (zones élémentaires sombres ou claires) ;
- sur le code barre à analyser, donc composé d'un certain nombre de codes barre élémentaires, à un code élémentaire donnée peut correspondre un code élémentaire précédent ou un code élémentaire suivant : il suffit de se déplacer de P valeurs (bits) dans un sens ou dans un autre pour le trouver.
- à chaque étape, on calcule le produit scalaire et on ne garde au final que le code élémentaire donnant le produit scalaire maximal.

3.2.6 Ressemblance, produit scalaire et corrélation

Codes binaires

Reprenons l'exemple de la recherche d'un code élémentaire dans un code barre. Il y a donc deux étapes à effectuer :

- “aligner” un code barre élémentaire sur le code barre à analyser, c'est à dire effectuer un choix dans l'origine du traitement.
- effectuer le produit scalaire sur P valeurs binaires.

On identifie donc la portion du code à analyser avec un code barre élémentaire pour le code élémentaire qui maximise le produit scalaire

Si l'on se place en représentation circulaire, “aligner” le code élémentaire revient à le faire tourner d'un pas donné pour trouver éventuellement une position telle que les deux codes se superposent.

Calculer ainsi un produit scalaire est l'opération connue sous le nom de **corrélation** : on recherche donc un pic de corrélation qui donne le maximum de ressemblance entre deux codes.

Cependant, il faut bien insister sur le fait que nous traitons de signaux très particuliers, composées de $+1$ et de -1 , et que de plus les codes élémentaires ont été choisis pour avoir une valeur moyenne la plus proche possible de 0.

Signaux discrets quelconques

L'objectif du traitement de signal est de pouvoir analyser et modifier éventuellement des données issues de capteurs spécifiques et variés : par exemple une tension en sortie d'un microphone (en mV) ou une tension en sortie d'un capteur piézoélectrique (en μV). Aussi, si l'on recherche des techniques génériques, celles ci devraient ne pas avoir à tenir compte d'un possible gain appliqué en sortie de capteur.

Dans l'exemple des codes barre, le signal avait été normalisé : les seules valeurs utilisées étaient les valeurs $+1$ et -1 . Si on se place dans le cas le plus général possible, et si l'on veut comparer deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ composés de N valeurs quelconques, il faut trouver un paramètre λ tel que l'erreur quadratique

$$d_{L^2}(\vec{B}, \lambda \vec{C}) = \sum_{n=1}^N (b_n - \lambda c_n)^2$$

soit la plus petite possible. L'erreur minimale sera atteinte pour la valeur de λ annulant la dérivée de cette erreur par rapport à λ :

$$\frac{\partial d_{L^2}(\vec{B}, \vec{C})}{\partial \lambda} = \frac{\partial \sum_{n=1}^N (b_n - \lambda c_n)^2}{\partial \lambda}$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

$$\begin{aligned} &= -\lambda \sum_{n=1}^N c_n (b_n - \lambda c_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{n=1}^N b_n c_n}{\sum_{n=1}^N c_n^2} = \frac{\vec{B} \odot \vec{C}}{|\vec{C}|^2}$$

Ce paramètre $\hat{\lambda}$ nous permet donc de comparer deux signaux indépendamment du gain appliqué lors de l'acquisition ou du traitement.

Pour calculer la ressemblance entre deux signaux, il faut donc utiliser ce paramètre et calculer l'erreur suivante :

$$\hat{d}_{L^2}(\vec{B}, \lambda \vec{C}) = \sum_{n=1}^N (b_n - \lambda c_n)^2 = |\vec{B} - \lambda \vec{C}|^2$$

que l'on appellera ici "erreur quadratique normalisée". On a :

$$\begin{aligned} \hat{d}_{L^2}(\vec{B}, \lambda \vec{C}) &= |\vec{B} - \lambda \vec{C}|^2 \\ &= \vec{B} \odot \vec{B} + \lambda^2 \vec{C} \odot \vec{C} - 2\lambda \vec{B} \odot \vec{C} \\ &= |\vec{B}|^2 + \left| \frac{\vec{B} \odot \vec{C}}{|\vec{C}|^2} \right|^2 |\vec{C}|^2 - 2\lambda \frac{\vec{B} \odot \vec{C}}{|\vec{C}|^2} \vec{B} \odot \vec{C} \\ &= |\vec{B}|^2 - \frac{|\vec{B} \odot \vec{C}|^2}{|\vec{C}|^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Cette dernière relation nous permet de dire que la ressemblance sera minimale si $\vec{B}$ et $\vec{C}$ ont un produit scalaire nul, c'est à dire si $\vec{B}$ et $\vec{C}$ sont orthogonaux. On dira aussi que la dissemblance entre deux vecteurs est maximale si ces deux vecteurs sont orthogonaux.

On en déduit un résultat important lorsque l'on veut retrouver un signal dans une famille de p signaux $[\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_p]$. Si cette famille de signaux est une famille orthonormale, c'est à dire :

— tout signal de cette famille est orthogonal avec tout autre signal différent de cette famille

$$\vec{S}_i \odot \vec{S}_j = 0, (i, j) \in ([1, p] \times [1, p]), i \neq j$$

— tout signal de cette famille a une norme unité : $|\vec{S}_i| = 1, i \in [1, p]$,

alors, pour tout signal $\vec{R}$ multiple d'un des $\vec{S}_i$, on peut retrouver quel est le vecteur de la famille dont il est le multiple en effectuant tout simplement les produits scalaires $\vec{R} \odot \vec{S}_i, i \in [1, p]$ et en choisissant l'indice qui maximise la valeur absolue du produit scalaire.

Tout revient à calculer les $d_{L^2}(\vec{S}_i, \vec{R}) = d_{L^2}(\vec{S}_i, \lambda \vec{S}_j)$ et à trouver, une fois recalibré le signal (c'est à dire en utilisant l'existence du paramètre de calibration λ) l'indice i qui minimise l'erreur quadratique normalisée $\hat{d}$, c'est à dire $i = j$, indice pour lequel l'erreur quadratique normalisée est alors nulle.

Corrélation entre un signal et une famille de signaux

Après cette analyse rapide, on peut maintenant justifier la notion de corrélation entre un signal à analyser $\vec{R}$ et un ensemble de p signaux de référence $\vec{S}_i = 1, i \in [1, p]$, qui se définit en deux étapes :

— effectuer le produit scalaire du signal à analyser avec chaque signal de la famille de référence :

$$a_i = \vec{R} \odot \vec{S}_i \quad i \in [1, p]$$

On sait maintenant que le coefficient a_i ainsi obtenu est d'autant plus petit que les deux signaux $\vec{R}$ et $\vec{S}_i$ sont différents.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

- rechercher l'indice j tel que $|a_j|$ la plus grande des valeurs $|a_i|$: on dira alors que $\vec{S}_j$ et $\vec{R}$ présentent une forte corrélation.

C'est d'ailleurs la démarche suivie au paragraphe 3.2.4 dans lequel nous avons testé tous les codes élémentaires pour ne conserver que celui qui donne le produit scalaire maximal (voir figure 3.3).

Ce calcul est donc justifié aussi bien pour $\vec{R}$ que pour $\lambda\vec{R} \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$

Corrélation “optimale” : choix de la famille de signaux d'analyse

Nous avons constaté que les 10 signaux de référence des codes barre (chacun codés sur 5 bits indépendants : on omet ici le premier et le dernier bit) n'étaient pas orthogonaux : c'est pour cela que la corrélation d'un de ces signaux avec ces 10 signaux de référence n'a pas donné une valeur maximale (cas où le signal est justement un des codes barre de référence) et 0 pour les autres cas (voir la figure 3.3). Pour des codes barres, dont les valeurs ont été fixées par la norme EAN, cette absence d'orthogonalité n'a pas de grandes conséquences. Mais pour des signaux de valeurs quelconques, il est facile de trouver des exemples pour lesquels l'orthogonalité est essentielle.

Aussi voyons quelle serait la dimension de l'espace (c'est à dire le nombre de valeurs des vecteurs de référence) qui serait requise pour que 10 signaux de référence soient orthogonaux les uns avec les autres.

Soient une famille de p signaux de référence, décrits par leurs vecteurs $\vec{S}_i, i \in [1, p]$. Ces vecteurs sont de dimension d . Ils ont la propriétés suivante :

$$\vec{S}_i \odot \vec{S}_j = 0, (i, j) \in ([1, p] \times [1, p]), i \neq j$$

Voyons s'ils sont linéairement indépendants. Pour cela cherchons des scalaires $\lambda_i, i \in [1, p]$ tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{S}_i = \vec{0} \quad (3.4)$$

Nous obtenons d équations à p inconnues : on n'a de solutions dans le cas général seulement si $d = p$.

Dans le cas $d = p$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{S}_i \right|^2 &= \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{S}_i \right) \odot \left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{S}_i \right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^p \lambda_i^2 \left| \vec{S}_i \right|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique, pour vérifier 3.4, que $\lambda_i = 0 \forall i \in [1, p]$: le système est linéairement indépendant.

Notons que, puisque $d = p$, la matrice W construite par concaténation des vecteurs $\vec{S}_i$ (voir la formule 3.2) et qui permet une interprétation du code en entrée est une matrice carrée : il est facile de montrer que son déterminant est non nul et qu'elle est donc inversible.

Famille orthogonale

A travers l'exemple des codes barre, il apparaît qu'il peut s'avérer utile de projeter le signal dans une autre représentation permettant une lecture directe d'une propriété du signal initial.

Par exemple, considérons une autre famille de codes barre (donc fondamentalement différente de celle définie par la norme EAN) telle que chaque chiffre soit codé par un vecteur de dimension 10. Si ces nouveaux codes barre élémentaires étaient orthogonaux deux à deux (ce qui signifie qu'ils ne partagent aucune information), on pourrait trouver une matrice M telle que, pour tout code élémentaire représenté par le vecteur $\vec{R}$, on ait :

$$\exists n \in [1, 10] \text{ tel que } M \times \vec{R} = \vec{K}_{(n)}$$

et la position de la valeur 1 sur le vecteur résultat (ici la ligne n , seule ligne non nulle de $\vec{K}_{(n)}$) donne directement la valeur du chiffre codé.

On introduit à ce stade la notion de **famille orthogonale** : ensemble de vecteurs tous non nuls et tels que le produit scalaire deux à deux soit nul. Une telle famille permet de projeter sans ambiguïté l'information de l'espace de départ dans le dual⁵.

Transformer ainsi le signal permet sa représentation dans un espace dans lequel on peut donner une interprétation plus facile de l'information : on passe ainsi de l'espace "signal" à un autre espace. La matrice M étant inversible, on peut appliquer une transformation permettant de revenir dans l'espace "signal". On retrouve la notion d'"espace dual".

3.3 Matrices $\Sigma\Delta$

Nous avons donc analysé les propriétés de certaines matrices binaires qui, appliquées à certains types de signaux (codes barre binaires), permettent d'extraire une information donnée (le chiffre codé).

Pour des signaux quelconques, on peut aussi utiliser des matrices binaires, ne comportant que des valeurs +1 ou des valeurs -1 (alphabet réduit à 2 lettres, voire éventuellement 3 si l'on rajoute la valeur 0), et telles que d'une part les vecteurs lignes soient orthogonaux entre eux, et d'autre part les vecteurs colonnes soient eux aussi orthogonaux entre eux⁶. Pour simplifier la présentation et l'analyse, on se restreint dans ce document à des espaces dont la dimension $N \times N$ est tel que N soit une puissance de 2 : $N = 2^q$.

3.3.1 Système de Haar, $N = 2$

Le premier exemple de ce type de matrices est l'ensemble des matrices que nous appellerons "matrices $\Sigma\Delta$ ". Pour commencer, prenons $N = 2$. La matrice $\Sigma\Delta$ est définie par :

$$M = M_{\Sigma\Delta} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

C'est la seule matrice "intéressante" de cette famille de matrices (constituées uniquement par des valeurs prises dans un alphabet réduit : +1 ou -1) puisque c'est la seule à vérifier l'orthogonalité des deux vecteurs lignes aussi bien que celle des deux vecteurs colonnes. Notons qu'elle est symétrique et inversible.

Puisque l'on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

il est facile de montrer que M est sa propre inverse à un facteur multiplicatif près puisque l'on a :

$$M_{inv} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le dictionnaire de Haar (pour $N = 2$) est alors composé de deux vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$:

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Détaillons maintenant la transformation du vecteur $\vec{A}$ par cette matrice M . En posant

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

on a alors $\vec{B} = M\vec{A}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 \\ b_2 &= a_1 - a_2 \end{aligned}$$

5. alors que dans le cas des codes barre EAN, il fallait rechercher le max des produits scalaires pour trouver le "bon" chiffre, voir figure 3.3.

6. Cela permet d'en déduire que ces matrices sont inversibles.

et on observe donc que b_1 est la somme des deux valeurs du vecteur $\vec{A}$, et que b_2 est la différence des deux valeurs du vecteur $\vec{A}$.

Somme et différence “contiennent” la totalité de l’information initiale puisque l’on peut retrouver de manière triviale les valeurs initiales a_1 et a_2 à partir de b_1 (la somme) et b_2 (la différence)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(b_1 + b_2) &= a_1 \\ \frac{1}{2}(b_1 - b_2) &= a_2\end{aligned}$$

ce qui correspond d’ailleurs à l’expression de la matrice inverse M_{inv} appliquée au vecteur $\vec{B}$.

Cette association de somme et différence est bien connue dans certains traitements, tant numériques qu’analogiques, et porte le nom d’opérateur $\Sigma\Delta$ (“Sigma-Delta”, Σ pour somme, Δ pour différence). Par exemple :

- en analyse de signaux radar, les diagrammes d’antenne présentent très souvent le résultat a_1 comme la “voie somme” et le résultat a_2 comme la “voie différence”.
- En analogique, il est très facile d’effectuer une somme de deux signaux (chaque signal étant donnée par deux fils) et une différence de deux signaux : il suffit d’agencer les 4 fils disponibles spécifiquement. Par exemple, tout le monde –ou presque– sait comment agencer deux piles 1,5V pour avoir du 3V.

3.3.2 Système de Haar, $N = 2^p$

Ce concept de somme et différence peut s’étendre aux cas où N est plus grand que 2 de manière itérative. Tout d’abord, notons $M_{\Sigma\Delta,1}$ la matrice $M_{\Sigma\Delta}$ de l’équation 3.5 (qui correspond au cas $N = 2$, c’est à dire $p = 1$) :

$$M_{\Sigma\Delta,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Définissons la matrice Z_p comme la matrice nulle de dimension $N = 2^p$. Par exemple, pour $p = 1$ (c’est à dire $N = 2$), on a :

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose alors le principe de construction de la matrice $M_{\Sigma\Delta,2}$, pour $N = 2^2 = 4$, par :

$$M_{\Sigma\Delta,2} = \begin{pmatrix} M_{\Sigma\Delta,1} & Z_1 \\ Z_1 & M_{\Sigma\Delta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit une méthode itérative de construction des matrices $M_{\Sigma\Delta,p}$. Pour toute valeur $p > 1$ pour laquelle on connaît $M_{\Sigma\Delta,p}$, on en déduit $M_{\Sigma\Delta,p+1}$ par la construction suivante :

$$M_{\Sigma\Delta,p+1} = \begin{pmatrix} M_{\Sigma\Delta,p} & Z_p \\ Z_p & M_{\Sigma\Delta,p} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

On a par exemple, pour le cas $p = 3$ (donc $N = 8$) :

$$M_{\Sigma\Delta,3} = \begin{pmatrix} M_{\Sigma\Delta,2} & Z_2 \\ Z_2 & M_{\Sigma\Delta,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est illustré figure 3.5 : sur cette figure on introduit les fonctions continues $\Sigma\Delta$ constantes sur les intervalles $]n - 0.5, n + 0.5[$ et permettant d'interpréter dans le monde continu les valeurs des échantillons.

Il est facile de montrer⁷ que toute matrice $M_{\Sigma\Delta,p}$ est sa propre matrice inverse à un facteur multiplicatif près (1/2).

$$M_{\Sigma\Delta inv,p} = \frac{1}{2} M_{\Sigma\Delta,p}$$

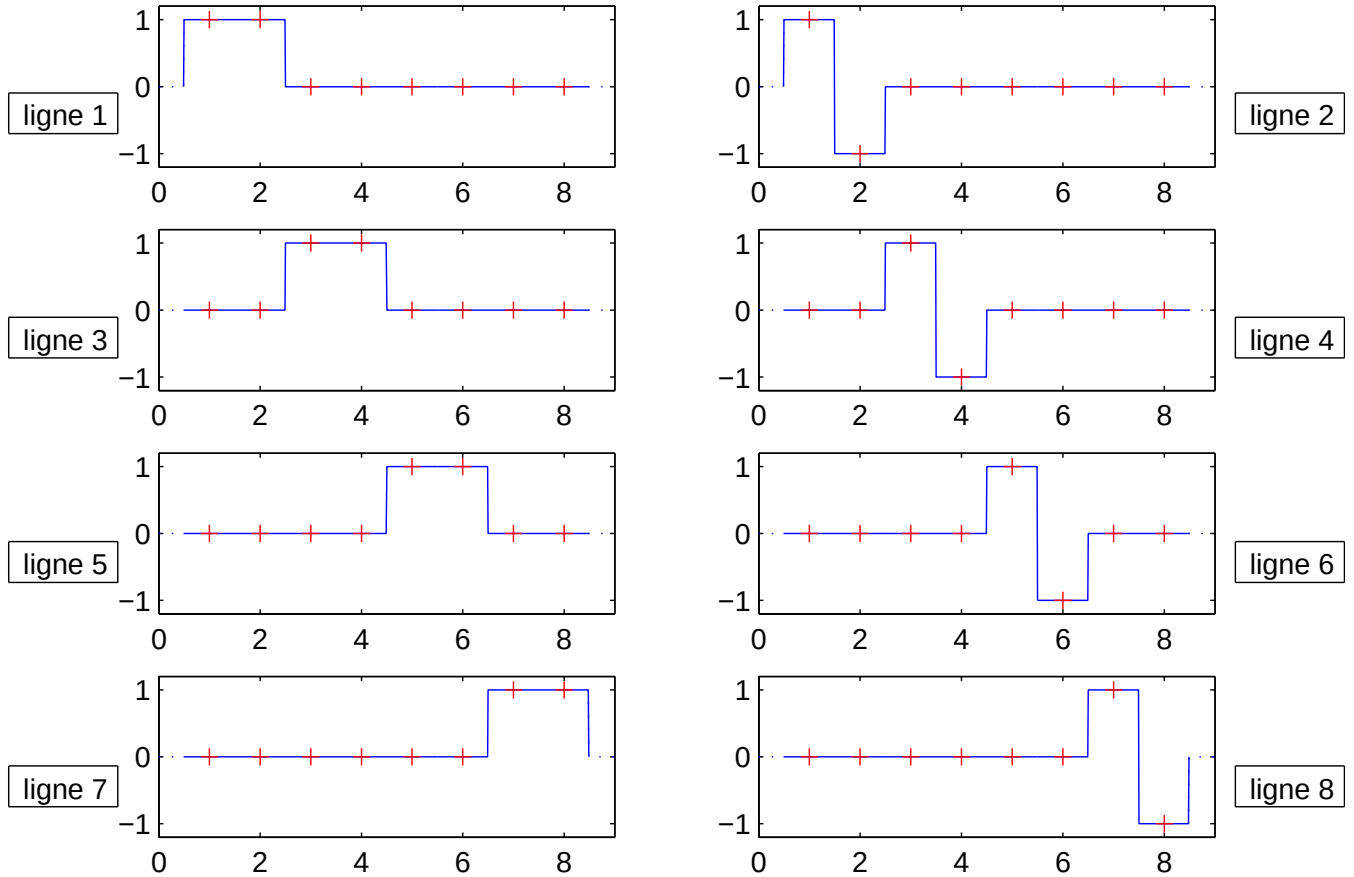


FIGURE 3.5 – Cas $N = 8$: fonction continue $\Sigma\Delta$ (en bleu) et valeurs des lignes de la matrice $\Sigma\Delta$ Le dictionnaire de la transformation $\Sigma\Delta$ pour $N = 8$ contient 8 vecteurs. (signe + rouge)

Analysons maintenant, pour un signal de longueur N (avec $N = 2^p$), décrit par $\vec{A}$, à quoi correspond le signal de longueur N décrit par $\vec{B}$ tel que :

$$\vec{B} = M_{\Sigma\Delta,p} \vec{A}$$

Le signal initial est donc décrit par son vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{A} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{N-1}, a_N)^t$$

7. Faites le!!

Le signal de sortie est donc décrit par son vecteur $\vec{B}$:

$$\vec{B} = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_{N-1}, b_N)^t$$

Nous allons l'analyser en modifiant l'ordre des indices, c'est à dire en considérant d'abord seulement les valeurs correspondant à des indices impairs de $\vec{B}$ et ensuite seulement les valeurs correspondant à des indices pairs de $\vec{B}$:

- considérons les indices impairs de $\vec{B}$, c'est à dire les indices $j = 2k - 1$ avec $k \in [1, N/2]$. Il est facile de voir que

$$b_{2k-1} = a_{2k-1} + a_{2k}$$

Si l'on construit un nouveau signal constitué uniquement des valeurs d'indices impairs de $\vec{B}$: $(b_1, b_3, b_5, \dots, b_{N-1})$, on a un signal décrit par un vecteur de longueur $N/2$ dont les valeurs correspondent à une moyenne point à point du signal initial $\vec{A}$:

$$\vec{B}_\Sigma = (a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \dots, a_{N-1} + a_N)^t$$

- considérons les indices pairs de $\vec{B}$, c'est à dire les indices $j = 2k$ avec $k \in [1, N/2]$. Il est facile de voir que

$$b_{2k} = a_{2k-1} - a_{2k}$$

Si l'on construit un nouveau signal constitué uniquement des valeurs d'indices pairs de $\vec{B}$: $(b_2, b_4, b_6, \dots, b_N)$, on a un signal décrit par un vecteur de longueur $N/2$ dont les valeurs correspondent à une différence point à point du signal initial $\vec{A}$:

$$\vec{B}_\Delta = (a_1 - a_2, a_3 - a_4, a_5 - a_6, \dots, a_{N-1} - a_N)^t$$

La transformation $\Sigma\Delta$ permet de changer la représentation d'un signal donné, de longueur N , puisque l'on dispose, après transformation, de deux signaux :

- un premier signal de $N/2$ valeurs, que l'on peut appeler "signal moyenne"
- un second signal de $N/2$ valeurs, que l'on peut appeler "signal différence"

qui donnent au total $N/2 + N/2 = N$ valeurs, c'est à dire le même nombre de valeurs que le signal initial. On comprend pourquoi la transformation est réversible (autant de "quantum d'informations" dans le signal initial que dans les deux signaux en sortie : il n'y a eu ni perte, ni redondance d'information à la suite de cette transformation).

3.3.3 Système de Haar : cas d'échantillons temporels

Considérons maintenant une suite d'échantillons, acquis à des instants t_k , $k \in [1, N]$ régulièrement espacés dans le temps tels que $t_k = (k - 1) \delta t$.

On voit qu'avec cet ensemble de matrices $M_{\Sigma\Delta, p}$ on dispose d'un outil permettant de changer l'espace de représentation. A partir de la liste de $N = 2^p$ valeurs initiales (échantillonnées avec le pas δt) relatives à un espace de représentation (univers "physique") donné Θ , on dispose maintenant de deux vecteurs de $N/2$ valeurs (échantillonnées avec le pas $2\delta t$) relatives à un autre espace de représentation, que nous appellerons ici l'univers $\Sigma\Delta$. En effet, on dispose, après transformation, de deux signaux :

- un premier signal de $N/2$ valeurs, le "signal moyenne", de durée T , échantillonné avec le pas $2\delta t$
- un second signal de $N/2$ valeurs, le "signal différence", de durée T , échantillonné avec le pas $2\delta t$

On a donc les processus de transformations suivantes :

- $M_{\Sigma\Delta, q}$ permet de passer de la représentation de valeurs de Θ , l'univers initial, à une représentation parfaitement équivalente dans l'univers $\Sigma\Delta$.
- $M_{\Sigma\Delta inv, p}$ permet de passer de la représentation de valeurs de l'univers $\Sigma\Delta$ à une représentation parfaitement équivalente dans l'univers Θ (en fait, on retourne dans l'univers initial).

On dispose ainsi de deux univers équivalents de représentation des données (il y a autant d'information dans le premier que dans le second). On peut alors qualifier l'univers $\Sigma\Delta$ de dual⁸ de l'univers Θ .

Notons que l'univers Θ peut être vu aussi comme le dual de l'univers $\Sigma\Delta$.

8. voir le paragraphe 2.6.4

En résumé, on a donc traité dans ce paragraphe d'un opérateur transformant de manière parfaitement réversible l'information d'un univers donné Θ , dans lequel les valeurs sont échantillonnées avec un pas δt . Dans l'espace transformé (dual), les valeurs (en fait les paires de valeurs) sont échantillonnées avec un pas $2\delta t$: on a ainsi un exemple d'une transformation réversible modifiant le pas d'échantillonnage (sans changer le nombre de valeurs disponibles).

3.4 Matrices de Hadamard

3.4.1 Définition : cas $N = 2$ et $N = 4$

Cherchons quelles seraient les matrices composées uniquement de valeurs 1 et de valeurs -1 (l'alphabet est réduit à ces deux valeurs) dont les propriétés sembleraient prometteuses. Un cas particulièrement intéressant est celui de la construction de matrices de Hadamard. Pour cela, définissons la matrice symétrique $M_{H,1}$ comme étant la matrice $M_{\Sigma\Delta,1}$ (cas $q = 1$, c'est à dire $N = 2^q = 2$) :

$$M_{H,1} = M_{\Sigma\Delta,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et construisons formellement la matrice de matrice par la relation (formellement symétrique) :

$$M_{H,2} = \begin{pmatrix} M_{H,1} & M_{H,1} \\ M_{H,1} & -M_{H,1} \end{pmatrix}$$

ce qui nous donne le cas $q = 2$, c'est à dire $N = 2^q = 4$. On a alors

$$M_{H,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est aussi une matrice symétrique. On peut tout de suite remarquer que les vecteurs lignes comme les vecteurs colonnes sont orthogonaux. On peut aussi remarquer que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$M_{H,2}$ est donc, à un facteur multiplicatif près, sa propre matrice inverse. On peut aussi considérer ce résultat en disant que le vecteur colonne i de la matrice $M_{H,2}$ est orthogonal au vecteur ligne j de cette matrice $M_{H,2}$ (avec $i \neq j$).

Nous disposons donc d'un opérateur $[M_{H,2} \times]$ faisant passer 4 valeurs (a_1, a_2, a_3, a_4) de l'univers initial Θ à 4 valeurs (b_1, b_2, b_3, b_4) d'un nouvel espace (plus compliqué en apparence que l'univers $\Sigma\Delta$) que nous appellerons Φ_H . Comme, à partir de l'espace Φ_H on peut reconstruire de manière exacte les valeurs de l'espace Θ , on peut donc dire que Φ_H est le dual de Θ . Cet espace Φ_H a des propriétés plus riches que le simple espace $\Sigma\Delta$, et nous allons essayer de les mettre en évidence.

Soit le vecteur $\vec{B}$ résultat de l'application de l'opérateur $[M_{H,2} \times]$ sur le vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{B} = M_{H,2} \times \vec{A}$$

— La première composante b_1 s'écrit :

$$b_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

C'est le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ avec le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ et c'est tout simplement la somme sur les 4 points d'échantillonnage. On peut aussi l'écrire :

$$b_1 = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4)$$

On peut interpréter cette somme comme la somme des coefficients du "signal moyenne" obtenu par une transformation $\Sigma\Delta$.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

- La seconde composante b_2 s'écrit :

$$b_2 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

C'est le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ avec le vecteur $(1, -1, 1, -1)$. On peut aussi l'écrire :

$$b_2 = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4)$$

On peut interpréter cette expression comme la somme des coefficients du "signal différence" obtenu par une transformation $\Sigma\Delta$.

- La composante b_3 s'écrit :

$$b_3 = a_1 + a_2 - a_3 - a_4$$

C'est le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ avec le vecteur $(1, 1, -1, -1)$, que l'on peut aussi écrire

$$b_3 = (a_1 + a_2) - (a_3 + a_4)$$

sous cette forme, on voit que l'on effectue une différence des coefficients du "signal moyenne" obtenu par une transformation $\Sigma\Delta$.

- Enfin, la composante b_4 s'écrit :

$$b_4 = a_1 - a_2 - a_3 + a_4$$

C'est le produit scalaire du vecteur $\vec{A}$ avec le vecteur $(1, -1, -1, 1)$, que l'on peut aussi écrire

$$b_4 = (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4)$$

On peut interpréter cette expression comme la différence des coefficients du "signal différence" obtenu par une transformation $\Sigma\Delta$.

Pour tenter une explication plus terre à terre, on obtient ainsi à partir de 4 valeurs de l'espace initial Θ les 4 valeurs de l'espace dual que l'on peut interpréter comme suit :

- b_1 la somme des sommes
- b_2 la somme des différences
- b_3 la différence des sommes
- b_4 la différence des différences

Remarquons que b_2 , la somme des différences, n'est pas égal à b_3 , la différence des sommes⁹. L'opération "somme" et l'opération "différence" ne sont pas commutatives¹⁰.

L'opération $[M_{H,2} \times]$, produit scalaire des vecteurs lignes de la matrice $M_{H,2}$ avec le vecteur de valeurs à traiter, peut avoir une autre interprétation. En effet, ces vecteurs lignes sont orthogonaux entre eux : pour ainsi dire, ils ne partagent aucune information commune (leur dissemblance est maximale). D'autre part, on peut les considérer comme les 4 "mots" d'un dictionnaire particulier : le dictionnaire de Hadamard (l'alphabet est réduit ici à deux lettres : "1" et "-1")¹¹. Calculer les produits scalaires revient à chercher si le jeu de valeur (a_1, a_2, a_3, a_4) a un degré de ressemblance avec les 4 mots du dictionnaire de Hadamard. Aussi, regardons d'un autre œil ce dictionnaire.

Les 4 vecteurs sont donc des suites de valeurs "1" et "-1". On peut se cantonner à analyser simplement le signe de ces vecteurs. On a alors les séquences de signes suivantes :

+ + + + (qui donnera la somme des sommes)
+ - + - (qui donnera la somme des différences)
+ + - - (qui donnera la différence des sommes)
+ - - + (qui donnera la différence des différences)

analogue à un tableau de variation de fonction, qui permet d'identifier les passages à 0 de la fonction.

Pour trouver une interprétation à ces séries de signes, considérons les fonctions de Hadamard, définies comme les fonctions $\Sigma\Delta$ à partir des valeurs $a_n, n \in [1, N]$: elles sont constantes sur les intervalles $]n - 0.5, n + 0.5]$, leur valeur sur cet intervalle étant égale à a_n . Comptons sur ces fonctions de Hadamard les passages à zéro : cela revient à compter sur la séquence de signes le nombre de fois que l'on passe du signe + au signe -, ou du signe- au signe + (en rebouclant au premier échantillon lorsque l'on arrive au dernier) :

9. Pour s'en convaincre, remarquons que les 4 valeurs (b_1, b_2, b_3, b_4) permettent de retrouver les 4 valeurs (a_1, a_2, a_3, a_4) : donc, deux valeurs b_i et b_j ne peuvent contenir exactement la même information

10. Cette propriété de non commutativité peut se déduire de la non commutativité de la multiplication matricielle.

11. Notons que le dictionnaire de Haar, outre les "1" et "-1", mettait aussi en jeu la valeur "0".

$\begin{matrix} + & + & + & + \\ + & - & + & - \\ + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{matrix}$: pas de passage à zéro
 $\begin{matrix} + & - & + & - \\ + & + & - & - \end{matrix}$: 4 passages à zéro
 $\begin{matrix} + & + & - & - \\ + & - & - & + \end{matrix}$: 2 passages à zéro
 $\begin{matrix} + & - & - & + \end{matrix}$: 2 passages à zéro

Pour ainsi dire, la famille de Hadamard propose des vecteurs orthogonaux donnant toutes les possibilités de passage par zéro (pour $N = 4$, on ne peut avoir que 0, 2 et 4 passages par zéro).

3.4.2 Construction itérative du système de Hadamard pour $N = 2^p$

Généraliser les matrices de Hadamard s'obtient en appliquant un mécanisme itératif. Pour cela, on pose la définition de la matrice de Hadamard pour $N = 2^1$:

$$M_{H,1} = M_{\Sigma\Delta,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La construction de toutes les matrices de Hadamard s'effectue par la règle itérative :

$$M_{H,p+1} = \begin{pmatrix} M_{H,p} & M_{H,p} \\ M_{H,p} & -M_{H,p} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Prenons le cas $N = 4 = 2^2$. On retrouve :

$$M_{H,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Chaque vecteur ligne est bien entendu orthogonal aux autres vecteurs ligne (et chaque vecteur colonne est lui aussi orthogonal aux autres vecteurs colonne). Une représentation graphique est donnée figure 3.6

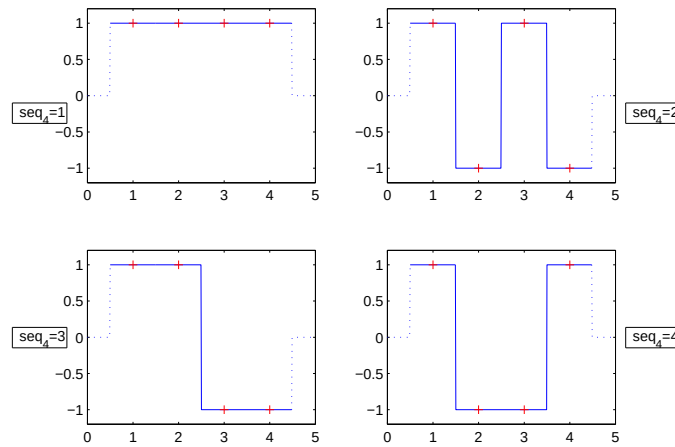


FIGURE 3.6 – Cas $N = 4$ (matrice $M_{H,2}$) : les 4 fonctions continues de Hadamard sont tracées en bleu et les valeurs des lignes de la matrice de Hadamard sont marquées par un signe + rouge.

Prenons le cas $N = 8$. On a

$$M_{H,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

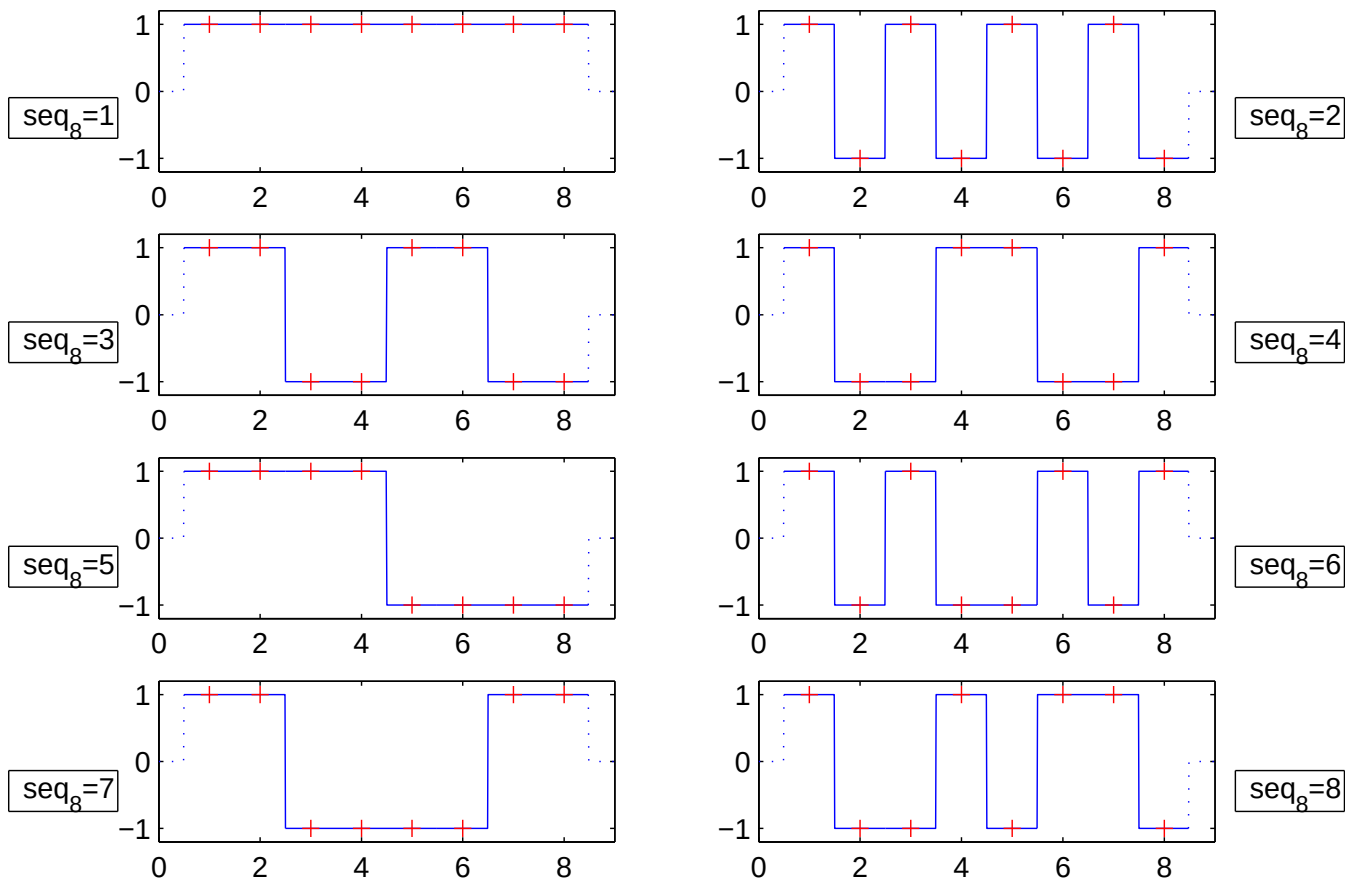


FIGURE 3.7 – Cas $N = 8$ (matrice $M_{H,3}$) : les 8 fonctions continues de Hadamard sont tracées en bleu et les valeurs des lignes de la matrice de Hadamard sont marquées par un signe + rouge.

Chaque vecteur ligne est bien entendu orthogonal aux autres vecteurs ligne (et chaque vecteur colonne est lui aussi orthogonal aux autres vecteurs colonne). Analysons les vecteurs lignes selon le critère de passage à zéro. On a alors

- pas de passage à zéro :
ligne 1 + + + + + + + +
- 2 passages à zéro
ligne 5 + + + + - - - -
ligne 7 + + - - - - + +

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

- 4 passages à zéro
 ligne 3 + + - - + + - -
 ligne 4 + - - + + - - +
- 6 passages à zéro
 ligne 6 + - + - - + - +
 ligne 8 + - - + - + + -
- 8 passages à zéro (ligne 2)
 ligne 2 + - + - + - + -

On a donc un dictionnaire particulier permettant d'analyser des passages à zéros (ou d'analyser le signe du signal, ce qui revient presque à la même chose). Ce dictionnaire est appelé dictionnaire des séquences de Hadamard et n'importe quelle suite de + et de - de longueur 8 peut se décomposer sur ces séquences. Par exemple, la séquence

+ - - - - - - -

qui correspond au vecteur

$$(1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1 \ -1)^t$$

et qui “ressemble” beaucoup au vecteur Kronecker $\vec{K}_{(1)}$, s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left(-3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Remarquons que exactement tous les vecteurs de Hadamard sont requis pour construire cette séquence.

Nous avons vu que le produit scalaire reflète un critère de similarité entre deux vecteurs. L'analyse à l'aide des séquences de Hadamard recherche donc des similarités sur les passages à 0, et comme la famille est orthogonale, n'importe quel signal peut se décomposer sur ces séquences.

3.4.3 Représentation circulaire des fonctions de Hadamard

Pour mieux comprendre certaines subtilités des fonctions de Hadamard, traçons les en représentation circulaire (figure 3.9). On observe alors plus facilement les évidences suivantes :

- **Sequence₃** et **Sequence₄** sont identiques, à un décalage de 1 pas temporel près.
- **Sequence₅** et **Sequence₇** sont identiques, à un décalage de 2 pas temporel près.
- **Sequence₆** et **Sequence₈** sont identiques, à un décalage de 2 pas temporel près.

On en déduit que l'analyse d'un signal donné et celle du même signal décalé d'un pas donné¹² donnerons des décompositions très différentes, ce qui peut s'avérer très pénalisant si on cherche à les comparer à partir de leur décomposition dans l'espace d'Hadamard.

Pas exemple, si on fait subir à un signal de longueur $N = 2^3$ un décalage de 2 pas (c'est à dire on applique la transformation $D_{(2,8)}$ au vecteur décrivant le signal), les coefficients **Sequence₅** et **Sequence₇** seront permutés, ainsi que les coefficients **Sequence₆** et **Sequence₈**. La transformation n'est donc pas invariante dans le temps puisque la décomposition change par translation circulaire du signal initial.

Plus généralement, on peut montrer que si on applique une matrice de décalage sur une matrice de Hadamard, on retrouvera bien ligne à ligne des vecteurs “à la Hadamard” mais avec deux changements : le signe et l'ordre des lignes.

On peut en conclure que ce type d'analyse est très sensible à tout décalage temporel, ce qui est a priori pénalisant.

12. toujours avec l'hypothèse de circularité, indispensable pour ce type d'analyse.

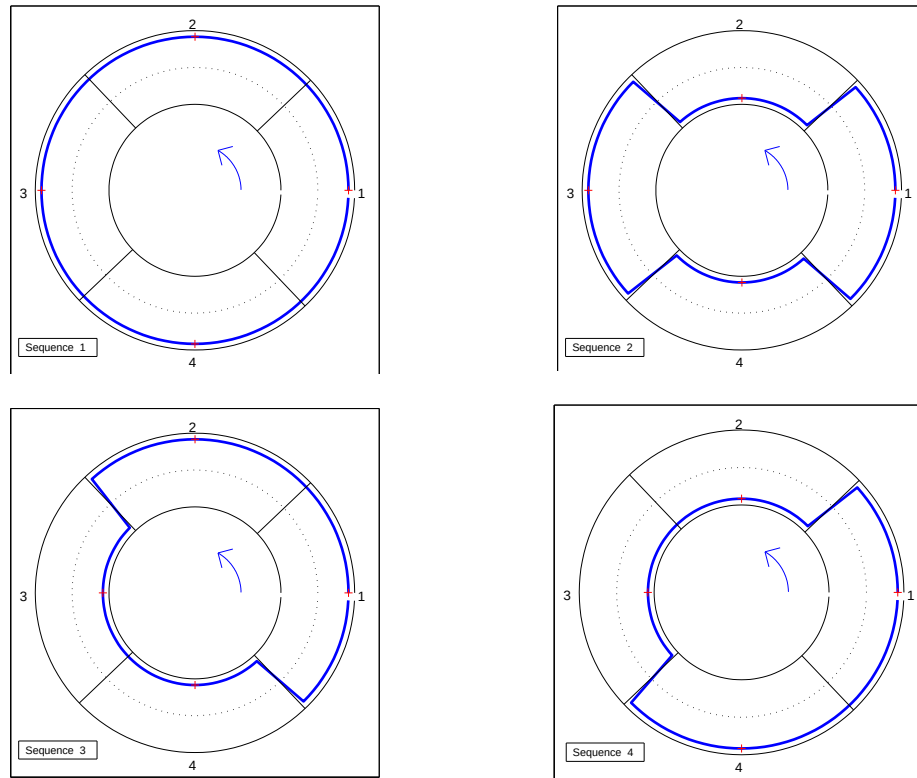


FIGURE 3.8 – Représentation circulaire des 4 fonctions de Hadamard (cas $N = 4$), représentées de manière traditionnelle figure 3.6.

3.4.4 Un premier bilan de la décomposition sur séquences

La décomposition sur séquence présente certains points positifs, dont celui d'avoir un alphabet réduit, que l'on peut tout à fait transcrire en un système analogique (voire en un relai tiré d'un catalogue d'électrotechnique!!) :

- “1” : le courant passe
- “-1” : le courant est inversé

Cependant, ce type de décomposition sur séquences binaires n'est guère pratiqué en traitement des données, en traitement du signal et en traitement des images, car nous verrons ultérieurement que certains effets négatifs apparaissent alors dans la nature du signal transformé (la nature n'aime pas les transitions brusques). Cependant, n'oublions pas les deux applications “phares” déjà présentées (sondes Venera-15 et 16, corrélateur 1 bit) et notons aussi qu'un constructeur d'échographe (SuperSonic Imagine) a expérimenté les séquences de Hadamard pour construire l'image de ses échographes (étape de formation de voies).

En résumé, l'espace dual construit par la matrice de Hadamard et lié aux séquences semble être un prolongement plus général de l'espace $\Sigma\Delta$ (les mots du dictionnaire Hadamard ont effectivement 2^p bits, et n'utilise pas le 0). Si cet espace n'est que très rarement employé, c'est pour deux raisons essentielles :

- les valeurs sont assimilables à des techniques dichotomiques (deux valeurs seulement, décrites par le signe). Or la physique qui nous environne n'aime pas du tout ces descriptions dichotomiques (en tout ou rien) : c'est ce que nous avons évoqué dans le paragraphe sur la quantification des données (paragraphe 1.2).
- tout décalage du signal à traiter donnera des décompositions qui peuvent fortement différer. On dit que le traitement n'est pas invariant par translation : or l'invariance par translation est très souvent requises en traitement du signal.

Aussi nous verrons au chapitre 4 une autre approche fondée sur les fonctions circulaires à valeurs réelles qui sont bien adaptées à l'analyse de grandeurs physiques mais qui sont toujours pénalisées par la non invariance en translation. Finalement, c'est au chapitre 5 que nous verrons la mise en œuvre des fonctions circulaires à

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel

valeurs complexes qui prendra en compte toutes ces contraintes : c'est l'approche de Fourier.

3.5 Et pour aller plus loin : Les transformations multirésolution

Nous avons vu que la transformation $\Sigma\Delta$ était intuitive et facile à mettre en œuvre sur un signal de longueur N . De plus, rien n'empêche de la réitérer sur un signal de longueur quelconque (à condition que ce soit un multiple de 2).

Considérons un jeu de $N = 2^p$ valeurs acquises à des instants t_k , $k \in [1, N]$ régulièrement espacés dans le temps et telles que $t_k = (k-1)\delta t$. Ces valeurs correspondent à un signal de durée $T = N\delta t$. On obtient ainsi :

- un signal $(\Sigma, 1)$ avec $N/2$ valeurs, échantillonné à $2\delta t$ et de durée T
- un signal $(\Delta, 1)$ avec $N/2$ valeurs, échantillonné à $2\delta t$ et de durée T

Rien n'empêche d'appliquer une transformation $\Sigma\Delta$ sur le nouveau signal $(\Sigma, 1)$ (si $p > 1$). On obtient alors :

- un signal $(\Sigma, 2)$ avec $N/4$ valeurs, échantillonné à $4\delta t$ et de durée T
- un signal $(\Delta, 2)$ avec $N/4$ valeurs, échantillonné à $4\delta t$ et de durée T

Il faut bien remarquer qu'à ce stade de transformation on a 3 jeux de valeurs :

- un signal $(\Delta, 1)$ avec $N/2$ valeurs, échantillonné à $2\delta t$ et de durée T
- un signal $(\Delta, 2)$ avec $N/4$ valeurs, échantillonné à $4\delta t$ et de durée T
- un signal $(\Sigma, 2)$ avec $N/4$ valeurs, échantillonné à $4\delta t$ et de durée T

et on vérifie que

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{4} = N$$

On a bien la même quantité d'information que dans le signal initial, chaque nouveau signal ayant la même durée T .

On peut ainsi continuer de manière itérative (jusqu'à avoir un signal avec une seule valeur) en appliquant la transformation $\Sigma\Delta$ sur le signal (Σ, p) . On aura au final :

- un signal $(\Delta, 1)$ avec $N/2$ valeurs, échantillonné à $2\delta t$ et de durée T
- un signal $(\Delta, 2)$ avec $N/4$ valeurs, échantillonné à $4\delta t$ et de durée T
- un signal $(\Delta, 3)$ avec $N/8$ valeurs, échantillonné à $8\delta t$ et de durée T
- ...
- un signal (Δ, p) avec 1 valeur, échantillonné à $2^p\delta t = T$ et de durée T
- un signal (Σ, p) avec 1 valeur, échantillonné à $2^p\delta t = T$ et de durée T

et on vérifie que

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{8} + \frac{N}{16} + \dots + \frac{N}{2^p} + \frac{N}{2^p} = N$$

On a bien exactement la même quantité d'information que dans le signal initial. On peut appeler cet univers dual l'univers $(\Sigma_p \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_p)$. Remarquons que Σ_p et Δ_p sont représentés par une valeur unique (on ne peut décomposer au delà).

Ce type de transformation porte le nom de transformation multirésolution.

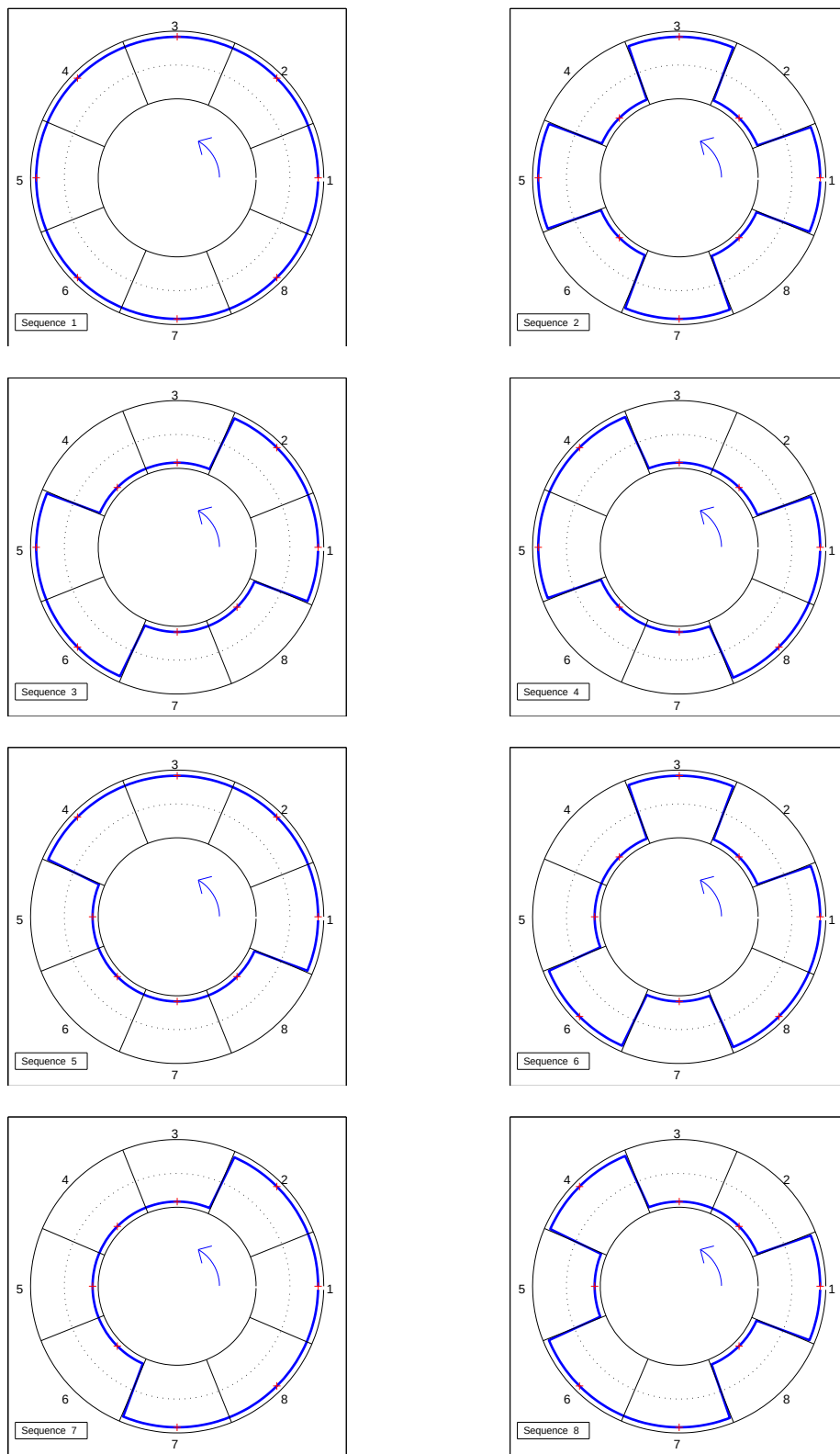


FIGURE 3.9 – Représentation circulaire des 8 fonctions de Hadamard (cas $N = 8$), représentées de manière traditionnelle figure 3.7.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Chapitre 4

Le Traitement du signal : le sinus dans tous ses états

4.1 Echantillonnage temporel et fréquence d'échantillonnage

Les précédents chapitres traitaient de “paquets d’octets” indépendamment de tout contexte. Or un signal reflète un phénomène et décrit ses variations selon une dimension : temporelle, spatiale, ... Dans ce chapitre et les suivants, nous allons prendre en compte cet aspect dans un cadre spécifique (mais néanmoins facilement généralisable) :

- celui des signaux temporels (la dimension est alors le temps)
- dans un cas particulier : celui pour lequel le pas temporel entre données, δt , est constant : on parle d’échantillonnage régulier (déjà évoqué dans le paragraphe 1.6).

Si l’on dispose de N échantillons et que l’on connaît le pas temporel, on connaît alors la durée du signal :

$$T = N \delta t$$

et à chaque échantillon indicé par n ($n \in [1, N]$), on attribue un instant t_n :

$$t_n = (n - 1) \delta t$$

Si l’on connaît la durée T d’un signal composé de N échantillons, le pas temporel se déduit de manière évidente :

$$\delta t = \frac{T}{N}$$

et on en déduit une grandeur indispensable dans l’univers du traitement du signal : la fréquence d’échantillonnage F_e , définie par

$$F_e = \frac{1}{\delta t} \quad (4.1)$$

C’est donc par définition le nombre d’échantillons par tranche d’une seconde de signal.

De manière plus générale, on peut associer à tout temps t une fréquence f telle que :

$$f = \frac{1}{t}$$

On obtient ainsi une variable dont la dimension est l’inverse d’un temps et qui se mesure en Hertz, noté Hz. On peut aussi remarquer que la grandeur ft est sans dimension.

4.2 Fonctions circulaires et fréquences

Si la notion de séquence peut avoir des applications assez isolées, un grand nombre de phénomènes physiques de la vie courante (acoustique, ondes radiofréquences, ...) requièrent la notion de fréquence.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



En effet, la séquence est liée à des suites de +1 et de -1, valeurs échantillonnées avec un pas d'échantillonnage constant δt . La fonction continue que l'on pourrait tracer à partir de ces échantillons serait une fonction en marches (on parle de fonctions en escalier), ne prenant que les valeurs +1 et -1 (et les puristes pourraient à juste titre poser la question sur ce qui se passe pour "joindre" ces marches). Or ce type de fonction, constante par morceau et avec de fortes discontinuités, n'est pas usuelle dans notre monde physique : les transitions brusques sont difficilement modélisables et seuls les phénomènes continus sont traités en pratique.

Il semble donc nécessaire de changer de fonction de représentation. Or, en physique, une famille de fonctions continues a un rôle essentiel : c'est la famille des fonctions circulaires (sinus et cosinus). En effet, ce type de fonction est la solution de systèmes aux dérivées partielles que l'on rencontre couramment comme le cas du ressort. En effet, pour un ressort de raideur K (un réel positif) auquel est suspendu une masse m (un réel positif) dont on observe la position y , l'équation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -K y$$

et il est bien connu que ce système a pour solution réelle une fonction s'écrivant

$$y(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

ω désigne la **pulsation** et ne dépend que des deux paramètres du système (la raideur K et la masse m). Cette solution est donc une somme de fonctions circulaires.

Une fonction circulaire $f(t)$ a une propriété essentielle : elle est périodique de période T . Cela signifie que :

$$\forall t \quad f(t+T) = f(t)$$

En fait, pour une fonction circulaire, la période T désigne en règle générale la plus petite valeur T vérifiant cette expression. La période caractérise une fonction circulaire. L'usage (tant celui de la vie courante que l'usage mathématique) veut que, pour caractériser la périodicité d'une fonction circulaire de période T , on utilise aussi sa fréquence f définie par :

$$f = \frac{1}{T}$$

Toute fonction circulaire élémentaire (sinus et cosinus) peut se caractériser simplement par sa fréquence : période et fréquence sont alors deux représentations équivalentes.

Soit une fonction circulaire de période T

$$\cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad \text{ou} \quad \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

Elle est bien évidemment périodique de période rT pour tout r entier. Il est d'usage alors de noter ces fonctions sous les formes suivantes :

— pour le cosinus :

$$\cos(2\pi f t)$$

— pour le sinus

$$\sin(2\pi f t)$$

avec $f = 1/T$, et on vérifie que cette notation correspond bien à une période T^1 .

On peut aussi remarquer que si une fonction circulaire a pour période T/r (c'est à dire pour fréquence la valeur r/f) avec r entier, alors elle est aussi périodique de période T .

A la différence des fonctions en escalier rencontrées précédemment, les fonctions circulaires élémentaires sont continues : elles sont donc représentatives de phénomènes physiques continus, comme les oscillations d'un ressort. Mieux : si une fonction circulaire, observée sur une durée T , admet comme période $t = \frac{T}{r}$ avec r entier, alors sa représentation circulaire est continue (voir l'exemple figure 4.1). Le paramètre r représente le nombre d'oscillations observables sur la durée T .

Il est alors tentant d'envisager la substitution des fonctions de Hadamard par des fonctions circulaires pour créer des matrices permettant la transformation d'un vecteur de valeurs : on peut alors espérer disposer de transformations mieux adaptées pour la représentation de signaux physiques. Ce sera donc l'objet des prochains paragraphes.

1. Pour le ressort, on a bien évidemment $2\pi f = \omega$

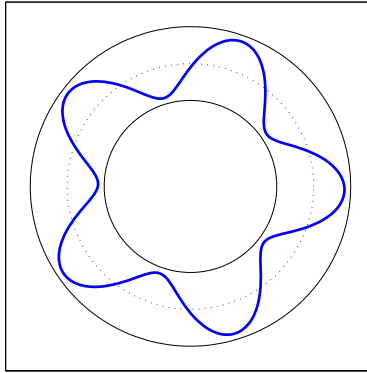


FIGURE 4.1 – Représentation circulaire de la fonction circulaire $\cos(2\pi ft)$ avec $f = 1/5$ sur une durée $T = 1$ seconde. Elle est périodique de période $1/5$ et sa fréquence est 5Hz. On observe 5 oscillations de la fonction circulaire et une continuité du signal à l'origine.

4.3 Les fonctions circulaires discrètes pour $N = 4$

Pour commencer, prenons un cas très simple sur 4 valeurs : $N = 4$. Dans ce cas, le système de Hadamard s'écrit :

$$M_{H,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et, en prenant en compte la représentation circulaire des données, l'analyse par passages à zéro donne :

1 1 1 1 : pas de passage à zéro
1 -1 1 -1 : 4 passages à zéro
1 1 -1 -1 : 2 passages à zéro
1 -1 -1 1 : 2 passages à zéro

Cherchons maintenant des fonctions circulaires continues qui permettraient cette même description de passages à zéro.

Une première condition à imposer est que ces fonctions admettent la durée T comme période : la continuité en représentation cyclique s'en déduit (revoir la figure 4.1). De ce fait, les périodes recevables s'écrivent :

$$T_r = \frac{T}{r}$$

d'où les fréquences recevables :

$$f_r = \frac{r}{T}$$

L'indice r a une signification très concrète : r représente le nombre de fois que la fonction circulaire effectue d'oscillations élémentaires sur la durée T . Si l'on considère qu'une fonction circulaire de période T effectue une oscillation sur la durée T , on dira alors qu'une fonction circulaire de période T/r effectue r oscillations sur la durée T . En utilisant la définition de la fréquence d'échantillonnage (formule 4.1), on peut réécrire ces fréquences recevables :

$$f_r = r F_e$$

Dans notre cas ($N = 2$) nous allons voir que r ne peut pas dépasser la valeur 2 (pour un signal de longueur N , on aurait $r \leq N/2$).

Les fonctions circulaires (continues) que nous cherchons sont alors déterminées par les valeurs de ces fonctions circulaires aux instants t correspondant aux échantillons, c'est-à-dire les 4 valeurs correspondant aux instants $0, \delta t, 2\delta t, 3\delta t$ ($t_n = (n-1)\delta t, n \in [1, 4]$). Analysons maintenant les cas possibles selon les valeurs de r :

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

- $r = 0$ (c'est à dire $f = 0$) : on a alors $\forall t \sin(2\pi ft) = 0$ et $\cos(2\pi ft) = 1$. Seul le cosinus est non nul et on voit qu'il est constant : il ne présente donc aucun passage à zéro. Cette fréquence nulle donne une valeur constante : c'est un reliquat du système $\Sigma\Delta$. On a alors aux instants $0, \delta t, 2\delta t, 3\delta t$ les valeurs :

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

le signal est constant et non nul : il n'y a aucun passage à zéro (la fonction constante n'est finalement qu'un cas dégénéré de fonction circulaire)

- $r = 1$ (c'est-à-dire $f = 1/T$: la fonction a donc une période T) : on a alors pour la fonction cosinus les valeurs

$$1 \quad 0 \quad -1 \quad 0$$

et pour la fonction sinus

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad -1$$

soit, dans les deux cas, deux passages à zéro (on observe une unique oscillation de ces deux fonctions sur la durée T).

- $r = 2$ (c'est-à-dire $f = 2/T$: la fonction a donc une période $T/2$) : on a alors $\forall t \sin(2\pi ft) = 0$ et le cosinus prend alors les valeurs :

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$$

on compte alors 4 passages à zéro. Le cosinus ne prend comme valeurs que ses bornes (-1 et +1), il passe systématiquement de sa borne supérieure (+1) à sa borne inférieure (-1), et de sa borne inférieure (-1) à sa borne supérieure (+1) : il ne peut osciller plus vite.

Remarquons qu'à partir des observations menées dans le cas $r = 2$, on ne peut construire de signaux dont les coefficients présentant plus de $N/2$ oscillations : en effet, le cas $r = 2$ se traduit par une succession de +1 et de -1, ce qui correspond au plus grand nombre possible de passages à zéros et donc le plus grand nombre possible d'oscillations sur 4 points.

En résumé, et en prenant bien en compte la représentation circulaire des données l'analyse par passage à zéro donne :

$f = 0$	fonction cosinus	1	1	1	1	pas de passage à zéro
$f = 1/T$	fonction cosinus	1	0	-1	0	2 passages à zéro
$f = 1/T$	fonction sinus	0	1	0	-1	2 passages à zéro
$f = 2/T$	fonction cosinus	1	-1	1	-1	4 passages à zéro

Et on retrouve la même répartition de fonctions selon les passages à zéro que dans le cas Hadamard (une fonction pour aucun passage à zéro, deux fonctions pour 2 passages à zéro, une fonction pour 4 passages à zéro).

Si l'on construit une matrice à partir de ces 4 lignes de 4 valeurs, on obtient la matrice $M_{SC,2}$ (SC pour Sinus Cosinus)² :

$$M_{SC,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Notons que le temps caractérise les colonnes, et que la fréquence caractérise les lignes.

A la différence des matrices de Hadamard, les valeurs de la matrice sont des +1, des -1 mais aussi des 0. On peut constater que les vecteurs lignes sont orthogonaux entre eux. Mais on peut aussi noter que les vecteurs colonnes ne sont pas orthogonaux entre eux.

La représentation classique de ces 4 fonctions est donné figure 4.2 : les fonctions circulaires continues correspondent aux tracés continus, les fonctions circulaires discrètes sont représentées par des "+".

On remarque que la matrice $M_{SC,2}$ est inversible et que son inverse $M_{SC\ inv,2}$ s'écrit :

$$M_{SC\ inv,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Comme pour les matrices de Hadamard, on se cantonne à des valeurs de N puissance de 2, donc $N = 2^q$, d'où la notation $M_{SC,q}$.

La transformation est bien réversible et on a bien une nouvelle représentation des données de l'espace Θ dans un dual noté Φ_{SC} . Cependant son inverse n'a aucune interprétation apparente (alors que la matrice de Hadamard inverse était elle aussi une matrice de Hadamard, à un facteur multiplicatif près).

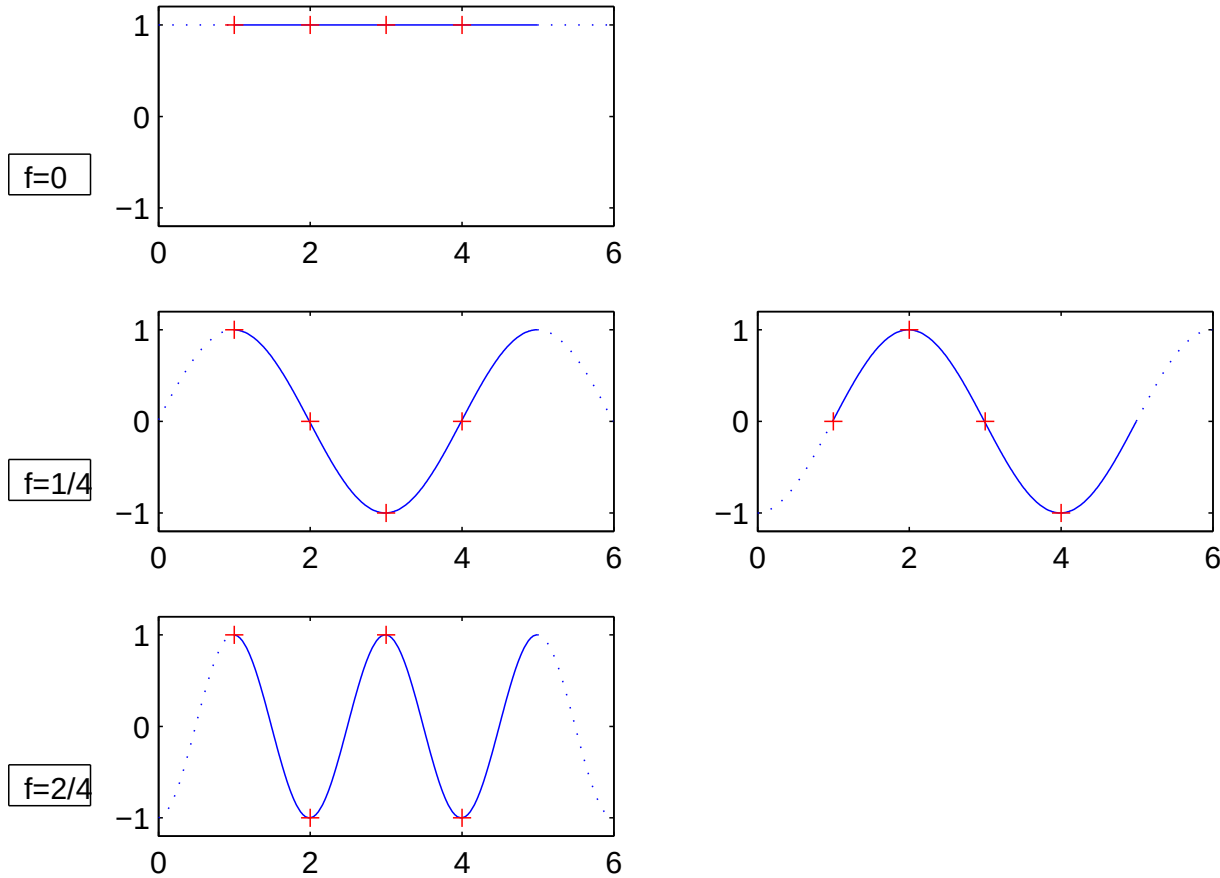


FIGURE 4.2 – Cas $N = 4$: fonctions circulaires périodiques sur $[0, 6[$, tracées en bleu continu entre les instants 1 et 5, et tracées en bleu pointillé sur $[0, 1[$ et sur $[5, 6[$ pour en montrer la périodicité. Les valeurs des lignes de la matrice $M_{SC,2}$ sont marquées par un signe + rouge et placés aux instants discrets 1 à 4. La colonne de gauche correspond à des fonctions cosinus, la colonne de droite, à des fonctions sinus. La fréquence est calculée pour $T = 1$.

La représentation classique de ces 4 fonctions est donné figure 4.2.

En première conclusion, l'approche SC (sinus-cosinus) permet de généraliser le rôle des passages à zéro rencontré dans le système de Hadamard et de lui associer une autre grandeur : la fréquence, plus appréhendable que la séquence. La fréquence caractérise alors les lignes de la matrice $M_{SC,2}$ qui se définit (ou s'interprète) comme des fonctions circulaires à valeurs réelles (sinus et cosinus) dont les valeurs sont prises exactement aux instants d'échantillonnage $(0, \delta t, 2\delta t, 3\delta t)$ sur le signal de durée T . Les fréquences recevables sont des multiples entiers de la fréquence $1/T$, fréquence que l'on peut qualifier de fondamentale³. Ceci revient à dire que les fréquences sont des fractions entières de la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/\delta t$ (puisque $N\delta t = T$). Il faut aussi noter l'observation suivante : il y a une borne max pour la fréquence recevable dans le système de fonctions SC qui est $F_e/2$.

3. Comme en acoustique lorsque l'on étudie la corde vibrante fixe aux deux bouts.

4.4 Les fonctions circulaires discrètes pour $N = 8$

4.4.1 Construction des fonctions SC et première représentation

Soient $N = 8$ valeurs acquises à la fréquence d'échantillonnage F_e (ou, ce qui revient au même, avec un pas d'échantillonnage $\delta t = 1/F_e$) : la durée du signal est $T = 8\delta t = 8/F_e$. Nous allons donc pouvoir choisir les fréquences f suivantes pour nos fonctions circulaires :

- $r = 0$ ($f = 0$) : c'est le "cosinus constant" du cas précédent

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

- $r = 1$ ($f = 1/T$), c'est-à-dire $f = F_e/8$: on a alors le cosinus

$$1 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -1 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

et le sinus

$$0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -1 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc deux passages à zéro, et on a une seule oscillation ($r = 1$) de la fonction circulaire .

- $r = 2$ ($f = 2/T$), c'est-à-dire $f = 2F_e/8 = F_e/4$: on a alors le cosinus

$$1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0$$

et le sinus

$$0 \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad -1$$

On a donc quatre passages à zéro, et on a deux oscillations ($r = 2$) de la fonction circulaire

- $r = 3$ ($f = 3/T$), c'est-à-dire $f = 3F_e/8$: on a alors le cosinus

$$1. \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0. \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -1. \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0. \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et le sinus

$$0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad -1. \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0. \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1. \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc six passages à zéro, et on a trois oscillations ($r = 3$) de la fonction circulaire

- $r = 4$ ($f = 4/T$), c'est-à-dire $f = F_e/2$: on a alors le seul cosinus

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$$

On a huit passages à zéro et quatre oscillations ($r = 4$) de la fonction cosinus. On remarque qu'il n'est pas possible d'avoir une fonction discrète avec $N = 8$ valeurs ayant plus de 4 oscillations.

La représentation de ces 8 fonctions est donnée figure 4.3.

Tout ceci nous permet de construire une matrice de transformation $M_{SC,3}$ de dimension 8×8 dont les 8 lignes sont les descriptions de ces fonctions circulaires ainsi sélectionnées.

$$M_{SC,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1. & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0. & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1. & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0. & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1. & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0. & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1. & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si l'on peut remarquer que les lignes sont orthogonales entre elles, ce n'est pas le cas des colonnes.

Cette matrice possède un inverse : la transformation est donc inversible (réversible). Mais, comme dans le cas $N = 4$, le dual ne semble pas avoir de propriétés sympathiques utilisables pour caractériser et surtout modifier le signal initial.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

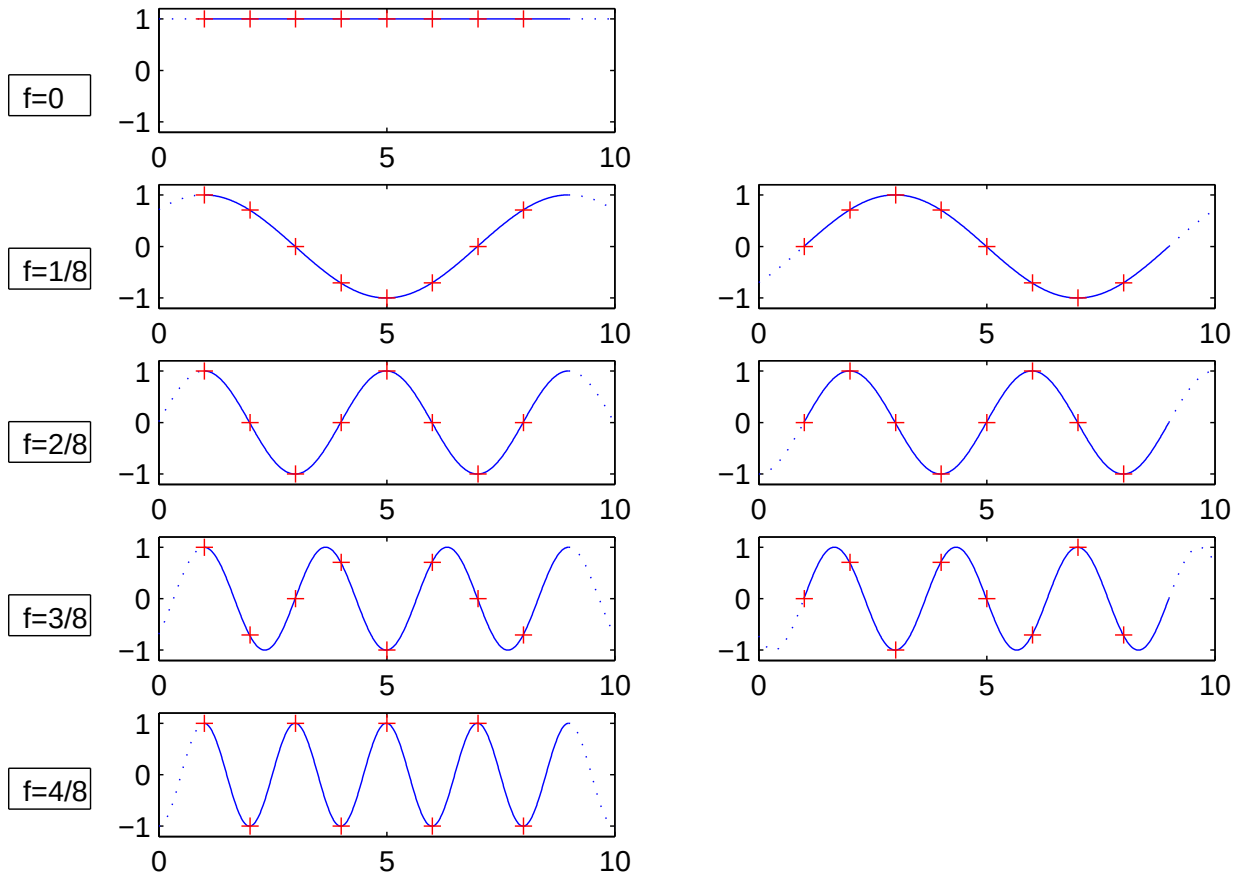


FIGURE 4.3 – Cas $N = 8$: fonctions circulaires périodiques sur $[1, 9]$, tracées en bleu continu entre les instants 1 et 9, et tracées en bleu pointillé sur $[0, 1[$ et sur $[9, 10]$ pour en montrer la périodicité. Les valeurs des lignes de la matrice $M_{SC,3}$ sont marquées par un signe + rouge et placés aux instants discrets 1 à 8. La colonne de gauche correspond à des fonctions cosinus, la colonne de droite, à des fonctions sinus. La fréquence est calculée pour $T = 1$.

4.4.2 Représentation circulaire des fonctions SC

Pour mieux comprendre certaines subtilités des fonctions SC, traçons les en représentation circulaire (figure 4.4) pour $N = 8$. On observe alors que ces fonctions sont périodiques et continues en représentation circulaire (ce qui est plus évident à comprendre que pour des fonctions discontinues comme les fonctions de Hadamard).

On constate sur cette figure les évidences suivantes :

- $F=1/8$ Cosinus et $F=1/8$ Sinus sont identiques à un déphasage de $\pi/2$, c'est à dire à un retard de 2 pas temporel près.
- $F=2/8$ Cosinus et $F=2/8$ Sinus sont identiques à un déphasage de $\pi/4$, c'est à dire à un retard de 1 pas temporel près.
- $F=3/8$ Cosinus et $F=3/8$ Sinus sont identiques à un déphasage de $\pi/6$, c'est à dire à un retard de 0,666 pas temporel près. Il est intéressant de noter que ce retard n'est plus un multiple entier du pas temporel δt (alors que dans le cas du système de Hadamard, les décalages étaient toujours des entiers).

On en déduit que l'analyse d'un signal donné et celle du même signal retardé (ou avancé) donnerons des

décompositions très différentes, ce qui peut s'avérer très pénalisant si on cherche à les comparer à partir de leur décomposition dans l'espace SC.

4.5 Les fonctions circulaires : généralisation

On peut donc penser qu'il est possible de généraliser cette approche pour toute valeur⁴ de N . Pour toute fréquence $f = rF_e/N$, on va donc définir des vecteurs lignes avec les fonctions circulaires élémentaires dont le nombre d'oscillations varie de 0 à $N/2$.

- pour $r = 0$, on a une fonction cosinus constante et égale à 1
- pour $0 < r < N/2$ on a une paire de fonctions : la fonction sinus et la fonction cosinus. Cela donne alors $N - 2$ vecteurs lignes
- pour $r = N/2$, on aura la seule fonction cosinus, qui ne sera qu'une succession de +1 et de -1 et qui correspond à la fréquence la plus élevée qui puisse être représentée sur N échantillons temporels.

On obtient bien N vecteurs ligne de N valeurs, soit une matrice carrée $M_{SC,q}$ de dimension $N \times N$, avec $N = 2^q$. On peut montrer que cette matrice est inversible : l'espace transformé est donc bien un dual de l'espace initial. Mais il est difficile de trouver des propriétés fondamentales à ce dual, d'autant que le résultat est sensible à l'origine choisie pour le signal à analyser.

Cependant, cette exploration dans le monde des fonctions circulaires nous a permis d'avancer sur les points suivants :

- sinus et cosinus sont des fonctions périodiques qui semblent mieux appropriées à l'analyse de phénomènes physiques courants que ne l'étaient des fonctions dont les valeurs étaient réduites à des "-1", "0" et "+1".
- sinus et cosinus sont des fonctions dont les valeurs sont continues.
- sinus et cosinus sont des fonctions infiniment dérivables, ce qui explique leur allure très fortement "lisses".
- sinus et cosinus sont des fonctions caractérisées par un paramètre unique : la fréquence
- pour N échantillons de pas d'échantillonnage δt , en choisissant astucieusement ces fréquences comme des multiples entiers d'une fréquence fondamentale F_0 :

$$F_0 = \frac{1}{N} \frac{1}{\delta t} = \frac{1}{N} F_e$$

on peut trouver une transformation inversible fondées sur les r fonctions sinus et cosinus de fréquence $f = rF_0$, r variant entre les valeurs 1 et $N/2 - 1$, ce qui donne $2(N/2 - 1) = N - 2$ vecteurs de la matrice de transformation, auxquels on rajoute le cosinus pour $r = 0$ et le cosinus pour $r = N/2$, soit au total N vecteurs orthogonaux. La transformation peut donc être inversible.

Le seul problème restant à traiter est celui des valeurs dans l'espace dual et du sens que l'on peut donner à cet espace. Nous avons vu en effet qu'un simple décalage d'une des fonctions SC pouvait conduire à des modifications de représentations dans l'espace dual. Comme dans le cas de Hadamard, on ne peut obtenir aucune forme d'invariance par translation pour cette transformation.

4. On suppose néanmoins dans ce texte que N est une puissance de 2 et est donc un nombre pair.

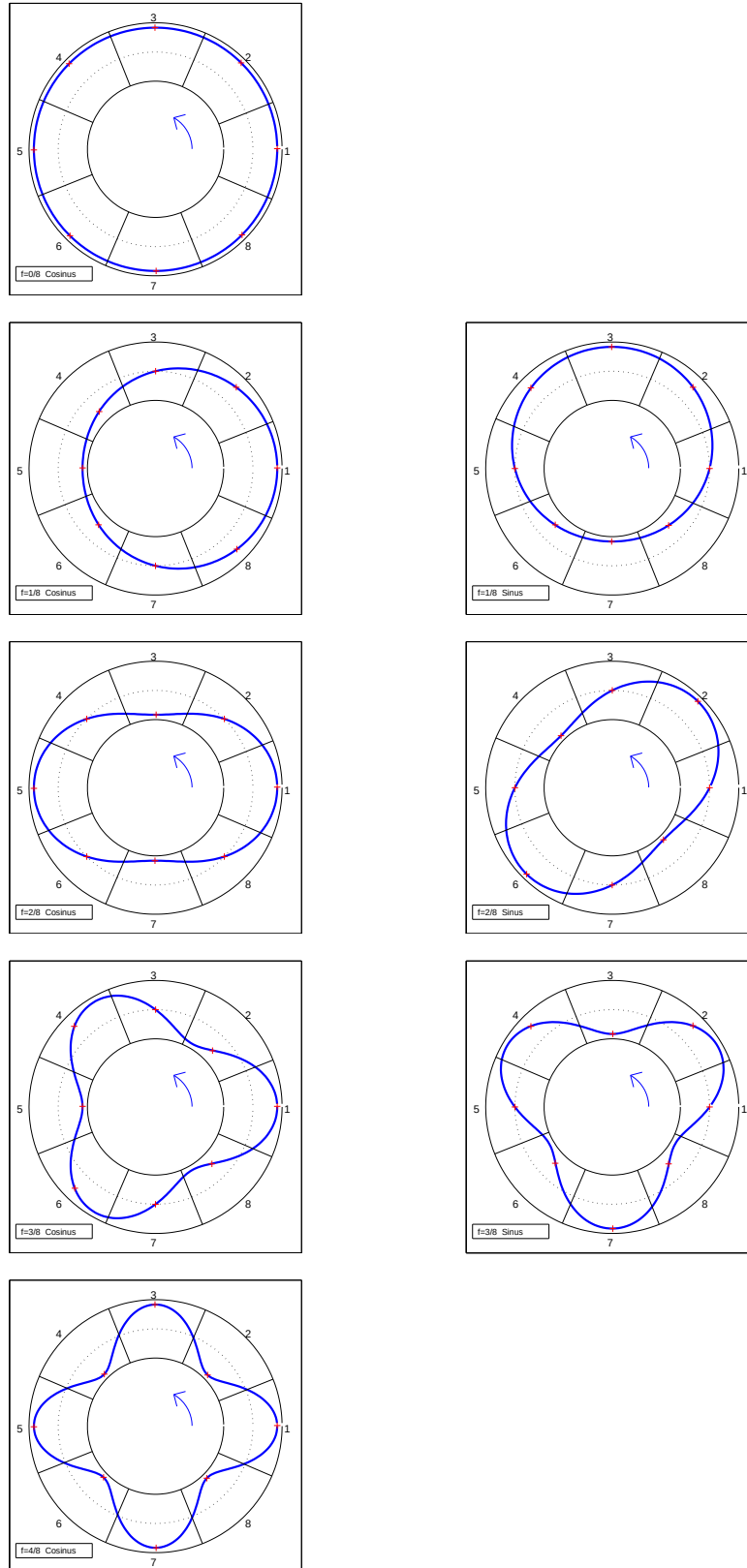


FIGURE 4.4 – Représentation circulaire des 8 fonctions SC (cas $N = 8$), représentées de manière traditionnelle figure 4.3. La fréquence est calculée pour $T = 1$. On observe que pour chaque ligne, on peut faire correspondre les deux parties à l'autre par une simple rotation.



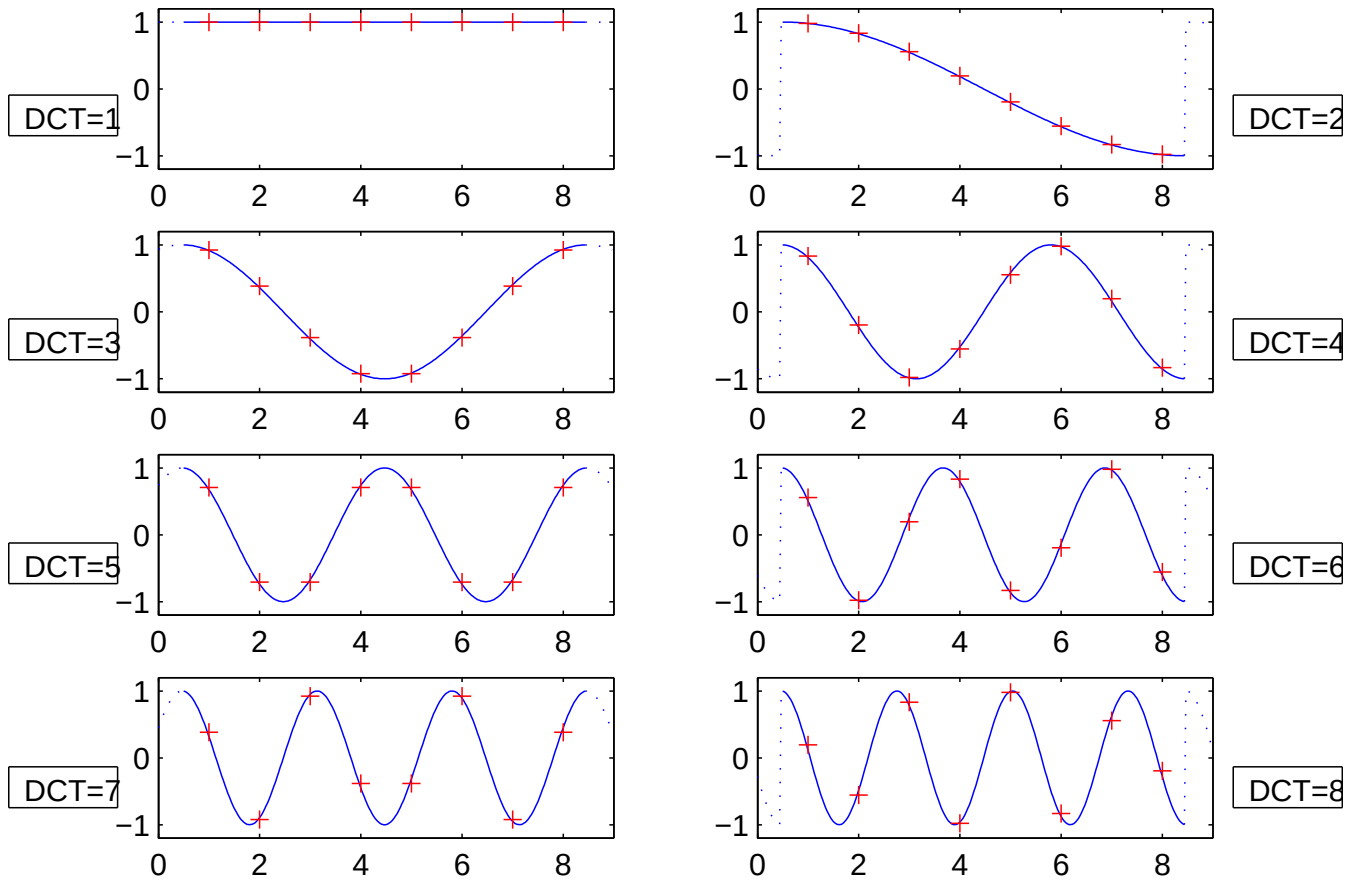


FIGURE 4.5 – Cas $N = 8$: fonctions DCT sur $[1, 9[$, tracées en bleu continu entre les instants $1/2$ et 8.5 , et tracées en bleu pointillé sur $[0, 1/2[$ et sur $[8.5, 9]$ pour en montrer la non-périodicité (plus précisément les fonctions correspondant à un indice pair, correspondant à un nombre de passages à zéro impair). Les valeurs des lignes de la matrice $M_{DCT,3}$ sont marquées par un signe $+$ rouge et placés aux instants discrets 1 à 8. On remarque que ces fonctions ont de 0 à 7 passages par zéro.

4.6 Une autre utilisation du cosinus et du sinus : la DCT

Le choix des fonctions SC était de construire une base orthogonale (c'est à dire une famille orthogonale) telle que les fonctions de cette famille soient périodiques de période égale à la longueur de notre représentation (N , choisie en puissance de 2 par simplification) : la représentation circulaire permettait de bien comprendre cette périodicité des fonctions de cette famille.

Un autre raisonnement aurait pu s'appuyer uniquement sur une fonction unique : la fonction cosinus, en la décrivant par le nombre de passage à zéro, ce qui revient à compter le nombre de maxima locaux. Pour un N donné tel que $N = 2^q$, il peut y avoir ainsi N fonctions de base ayant de 0 à $N - 1$ maxima locaux (alternativement des valeurs +1 et des valeurs -1. Dans ce contexte, les fonctions de bases correspondant à une transformation bien connue en compression, la DCT *Discrete Cosine Transform*, s'écrivent :

$$M_{DCT,q} = (d_{k,n})$$

avec :

$$d_{k,n} = \cos\left(\frac{\pi}{N}\left(n - \frac{1}{2}\right)(k - 1)\right) \quad k \in [1, N] \quad n \in [1, N] \quad N = 2^q \quad (4.2)$$

Pour $q = 3$, c'est à dire $N = 8$, les 8 fonctions de base (c'est à dire les 8 lignes de la matrice $M_{DCT,3}$) sont tracées figure 4.5. Les valeurs de la matrice sont donc :

$$M_{DCT,3} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 \\ 0.9808 & 0.8315 & 0.5556 & 0.1951 & -0.1951 & -0.5556 & -0.8315 & -0.9808 \\ 0.9239 & 0.3827 & -0.3827 & -0.9239 & -0.9239 & -0.3827 & 0.3827 & 0.9239 \\ 0.8315 & -0.1951 & -0.9808 & -0.5556 & 0.5556 & 0.9808 & 0.1951 & -0.8315 \\ 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 & 0.7071 & -0.7071 & -0.7071 & 0.7071 \\ 0.5556 & -0.9808 & 0.1951 & 0.8315 & -0.8315 & -0.1951 & 0.9808 & -0.5556 \\ 0.3827 & -0.9239 & 0.9239 & -0.3827 & -0.3827 & 0.9239 & -0.9239 & 0.3827 \\ 0.1951 & -0.5556 & 0.8315 & -0.9808 & 0.9808 & -0.8315 & 0.5556 & -0.1951 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer le comportement suivant (généralisable à des DCT d'ordre quelconque) :

- les lignes de cette matrice sont orthogonales entre elles ;
- en revanche, les colonnes de cette matrice ne sont pas orthogonales ;
- la matrice est inversible.

On retrouve donc le comportement des fonctions SC.

En traçant les fonctions continues associées en représentation circulaire (figure 4.6) on observe dans certains cas une discontinuité à l'origine. En effet la fonction circulaire continue associée à la ligne k s'écrit $\cos(2\pi f_k t)$ avec :

$$f_k = \frac{1}{T} \frac{k-1}{2}$$

et on remarque que :

- si k est impair, $\cos(2\pi f_k T) = 1$ et la fonction est continue à l'origine ;
- si k est pair, $\cos(2\pi f_k T) = -1$ et la fonction est discontinue à l'origine.

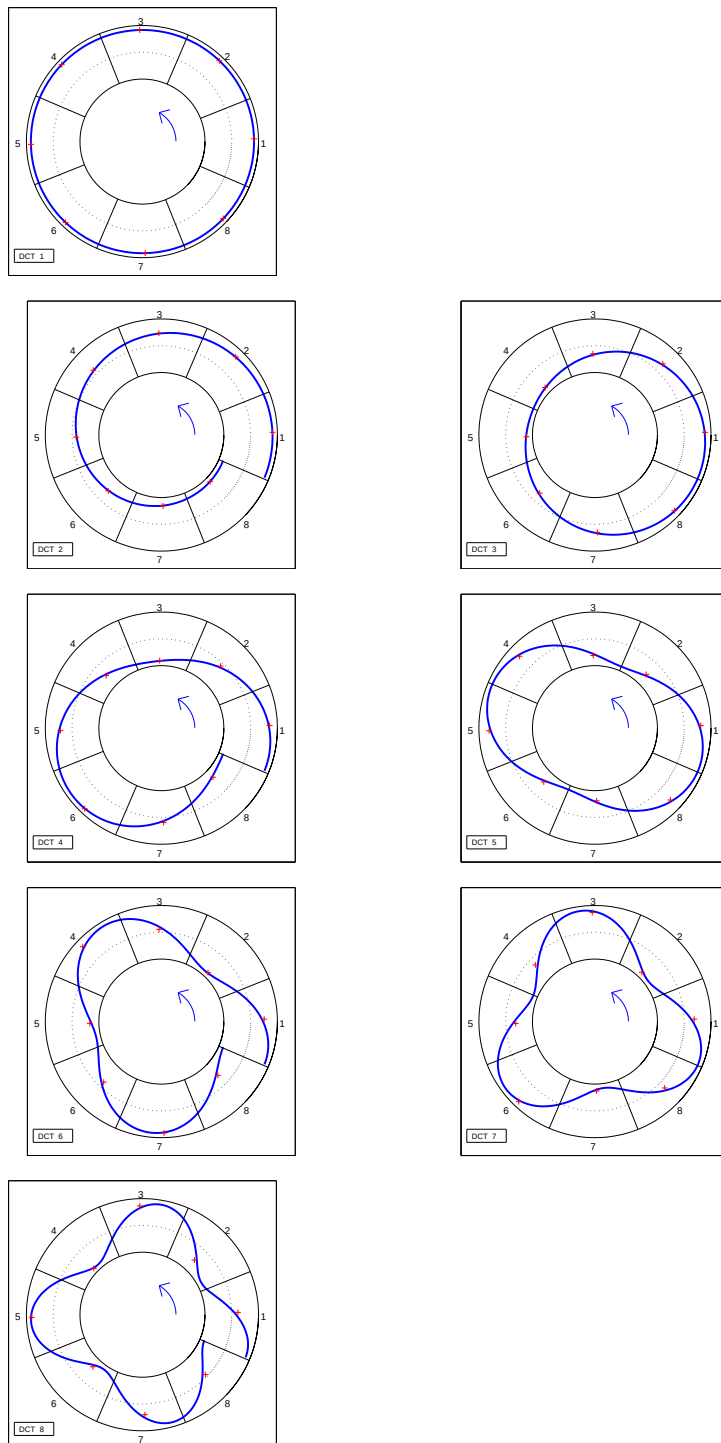


FIGURE 4.6 – Représentation circulaire des 8 fonctions DCT (cas $N = 8$), dont la représentation traditionnelle est donnée figure 4.5.

Chapitre 5

Le Traitement du signal : Ondes de Fourier et Ondes de Fourier Discrètes

5.1 Equation des ondes et Ondes de Fourier

5.1.1 L'exponentielle complexe

L'analyse effectuée jusqu'ici se fonde sur des matrices de transformation à valeurs réelles : ce choix est totalement justifié puisqu'un capteur physique élémentaire donne toujours une valeur réelle (une tension, une pression, une température, ...) et que le résultat est plus simple à interpréter s'il est lui aussi réel (comme dans le cas de la transformation $\Sigma\Delta$). Néanmoins, ce choix ne doit pas empêcher toute analyse mathématique s'appuyant sur une extension du corps des réels comme le corps des nombres complexes, que nous avons rapidement évoqué au paragraphe 2.6, et qui est fondé sur l'existence d'un nombre particulier, i , tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe s'écrit donc :

$$z = z_R + iz_I$$

z_R et z_I étant deux réels, et la norme d'un nombre complexe $|z|$ s'écrit :

$$|z| = \sqrt{z_R^2 + z_I^2}$$

Or les fonctions circulaires peuvent se représenter sous forme de nombres complexes particuliers : les complexes de norme égale à 1. Ces nombres peuvent en effet se mettre sous la forme :

$$z_C = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

et on vérifie immédiatement la propriété

$$z_C z_C^* = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

Il est d'usage de parler de **cercle unité**. On a donc une relation biunivoque entre tout nombre complexe sur le cercle unité et toute valeur φ sur $[0; 2\pi[$.

N'importe quel nombre complexe z peut alors se caractériser de deux manières :

— par deux nombres réels : z_R sa partie réelle et z_I sa partie imaginaire

$$z = z_R + iz_I$$

— par son module $|z|$ (réel positif) et sa phase φ (réel sur $[0; 2\pi[$)

$$\frac{z}{|z|} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Au passage il faut observer que $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe appartenant au cercle unité.

Si $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, alors on a un nombre réel. Si $\varphi = \pi/2$ ou $\varphi = 3\pi/2$, alors on a un nombre imaginaire (appelé parfois imaginaire pur). Dans le cas général, on parle de nombre complexe.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Ces deux représentations sont équivalentes et on a pour tout nombre complexe z :

$$\begin{aligned} z_R &= |z| \cos \varphi \\ z_I &= |z| \sin \varphi \end{aligned}$$

Les complexes z_C appartenant au cercle unité ont une autre représentation extrêmement utile : l'exponentielle complexe. Posons par définition (voir l'annexe B) pour φ quelconque :

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Cette définition permet d'écrire :

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

La notation par l'exponentielle complexe est donc une représentation des nombres complexes appartenant au cercle unité pour $\varphi \in [0; 2\pi[$. Tout complexe de norme unité (avec φ_0 quelconque) peut se représenter sur ce cercle unité (avec $\varphi \in [0; 2\pi[$) puisque que, pour tout entier r quelconque ($r \in \mathbb{Z}$), on a

$$e^{i2r\pi} = 1$$

et pour tout $\varphi_0 \in \mathbb{R}$, on peut trouver un entier r unique et une valeur $\varphi \in [0; 2\pi[$ unique tels que

$$e^{i(2r\pi + \varphi)} = e^{i\varphi_0}$$

La notation en exponentielle complexe permet alors de définir les fonctions sinus et cosinus, puisque l'on a :

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \\ \sin \varphi &= \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \end{aligned}$$

Enfin, en utilisant les propriétés élémentaires de la fonction exponentielle complexe, pour tout z

$$z = e^{i\varphi}$$

son conjugué s'écrit :

$$z^* = e^{-i\varphi}$$

que l'on peut aussi écrire (pour $\varphi \in [0; 2\pi[$) :

$$z^* = e^{i(2\pi - \varphi)}$$

5.1.2 Les solutions complexes de l'équation des ondes

Nous avons rencontré l'équation du ressort au paragraphe 4.2 : elle est définie à partir de coefficients réels et on ne recherche que ses solutions réelles. En fait, c'est une version simplifiée d'une équation très familière aux physiciens : l'équation des ondes, qui s'écrit :

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

En passant par le formalisme des exponentielles complexes, on voit que les deux solutions possibles de cette équation sont ¹ :

$$y_1(t, x) = e^{i(2\pi f t - k x)} \quad \text{et} \quad y_2(t, x) = e^{i(2\pi f t + k x)}$$

avec la relation

$$k = \frac{2\pi f}{c}$$

1. et les mathématiciens montrent que ce sont les seules

Une solution de l'équation des ondes est donc une fonction de deux variables t et x . Elle varie à la fois dans le temps –la variable t – (phénomène périodique pour un observateur immobile) et dans l'espace –la variable x – (phénomène spatialement périodique pour un observateur “figeant” le temps à un instant donné). Ces deux phénomènes (spatial et temporel) sont liés par une constante : la célérité de l'onde c . La célérité a une interprétation assez simple : un observateur se déplaçant à une vitesse égale à la célérité de l'onde ne verra aucune modification temporelle (c'est un peu ce qui se passe pour un surfeur qui se déplace pour être à peu près sur le même état de vague).

Le premier volet de cette approche est donc d'avoir des solutions sous la forme d'une fonction de type exponentielle complexe : on généralise le monde des valeurs réelles. Un second volet réside dans le fait que le paramètre f (lié dans le paragraphe précédent par une relation du type $f = 1/T$, T étant une durée positive) n'a pas de contrainte de positivité à vérifier : mathématiquement rien n'empêche que f soit négatif².

Notons que les solutions de l'équation de propagation sont périodiques, de période $T = 1/|f|$ (la période est traditionnellement toujours positive).

5.1.3 Les Ondes de Fourier $\mathcal{OF}_f$

Nous allons sélectionner une catégorie de fonctions solutions de l'équation de propagation que nous appellerons **Ondes de Fourier** et que nous définissons sur l'intervalle $] -\infty; \infty[$. A une fréquence f (quelconque, aussi bien positive que négative), on associe la fonction $e^{i2\pi ft}$ qui est donc la solution $y_1(t, x)$ en $x = 0$ d'une équation de propagation. On parlera alors de l'Onde de Fourier Continue $\mathcal{OF}_f(t)$ (ou pour simplifier, Onde de Fourier). On a donc par définition :

$$\mathcal{OF}_f(t) = e^{i2\pi ft} \quad (5.1)$$

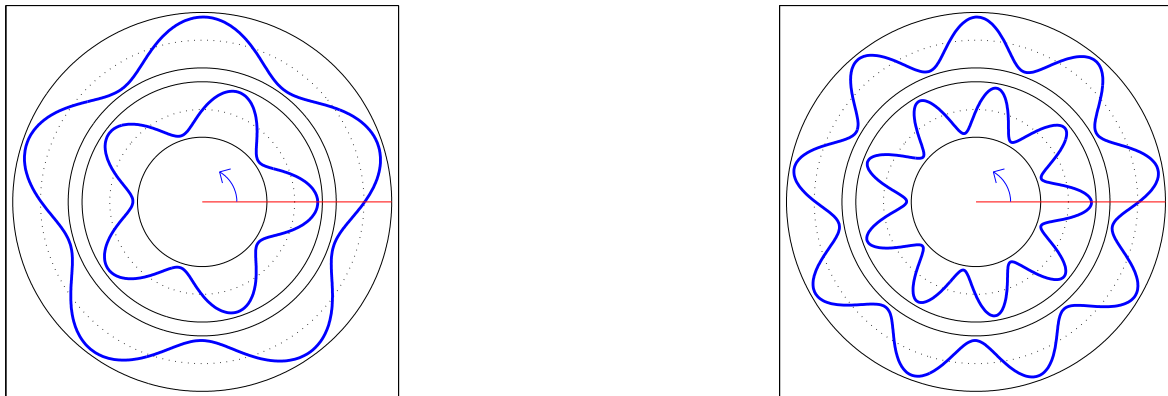


FIGURE 5.1 – Représentation circulaire de l' $\mathcal{OF}_f$ (à gauche) et de l' $\mathcal{OF}_{-f}$ (à droite). Les parties réelles sont à l'intérieur, les parties imaginaires sont à l'extérieur. Si l'on fait tourner la figure de gauche d' $1/5$ de tour (ou la figure de droite d' $1/9$ de tour), l'opération redonne la représentation initiale.

Ces Ondes de Fourier sont des objets mathématiques possédant certaines propriétés bien spécifiques :

- ce sont des fonctions continues,
- elles sont périodiques de période $T = \frac{1}{f}$:

$$\forall p \in \mathbb{Z} \quad \mathcal{OF}_f(t + pT) = \mathcal{OF}_f(t)$$

ce que l'on peut exprimer ainsi : sur une période l'Onde de Fourier effectue une oscillation complète.

2. Si $f < 0$, on peut alors considérer $f' = -f$ et $t' = -t$: le problème ressemble au problème précédent, sauf que l'on remonte le temps

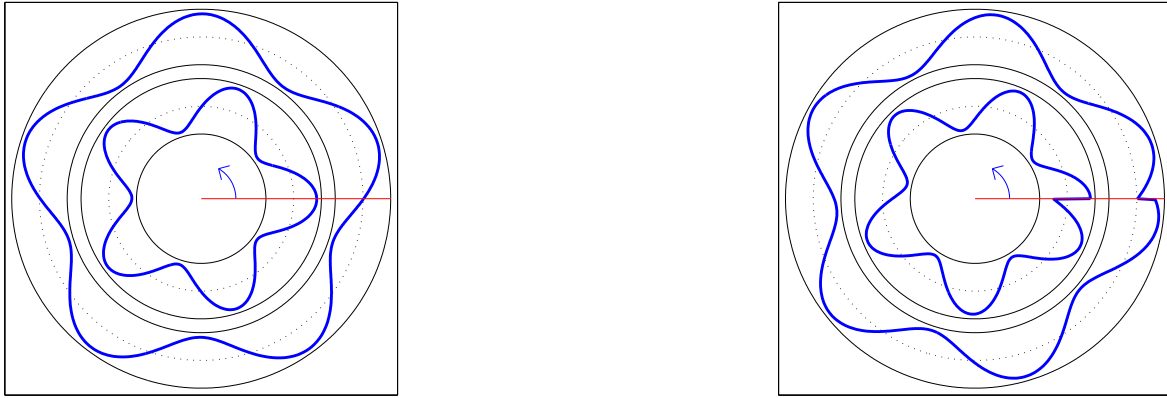


FIGURE 5.2 – Représentation circulaire de l' $\mathcal{O}_F$ (à gauche) et de l' $\mathcal{O}_{F,35}$ (à droite) pour une durée $\tau = 1$ s. Les parties réelles sont à l'intérieur, les parties imaginaires sont à l'extérieur. On note la forte discontinuité à l'origine de l' $\mathcal{O}_{F,35}$ qui empêche de retrouver la représentation initiale en faisant tourner la figure d'un angle autre que 2π . On en conclut que l' $\mathcal{O}_{F,35}$, d'indice non entier, ne possède pas les propriétés requises pour donner une “bonne” transformation.

- sur un intervalle temporel donné τ , on observe un nombre d'oscillations r :

$$r = \frac{\tau}{T} = f\tau$$

- en particulier, pour $\tau = 1$, r représente le nombre d'oscillations par seconde, puisqu'il est égal à la fréquence f .
- Pour f entier, r est entier et la représentation circulaire sur la durée $\tau = 1$ ne présente aucune discontinuité.
- Pour f non entier, le nombre r n'est pas un entier et la représentation circulaire sur la durée $\tau = 1$ présente une discontinuité à l'origine (voir figure 5.2 droite).
- Grâce à leur représentation dans l'espace des nombres complexes, elles présentent une particularité si leur applique une translation temporelle. En effet, considérons le résultat d'une translation de durée τ de l'Onde de Fourier Continue $\mathcal{O}_F(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_F(t + \tau) &= e^{i2\pi f(t+\tau)} \\ &= e^{i2\pi f\tau} e^{i2\pi ft} \\ &= e^{i2\pi f\tau} \mathcal{O}_F(t)\end{aligned}$$

On obtient au final l'Onde de Fourier Continue initiale $\mathcal{O}_F(t)$ multipliée par une constante de norme unité et ne dépendant que de τ et de f . En écrivant $2\pi f\tau = \varphi$, on a :

$$\mathcal{O}_F(t + \tau) = e^{i\varphi} \mathcal{O}_F(t) \quad (5.2)$$

On ne change pas la fréquence de l'Onde de Fourier : on ne fait que changer son origine temporelle, ce qui se traduit dans le plan complexe par la multiplication par une constante de norme unité : il est d'usage de parler de **déphasage** de l'Onde de Fourier. La figure 5.3 propose des exemples de retards sur l' $\mathcal{O}_F$.

5.2 Ondes de Fourier Discrètes

Les propriétés des Ondes de Fourier énoncées dans le précédent paragraphe ne sont pas totalement compatibles avec les signaux discrets (ou “paquets d'octets”) puisque :

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

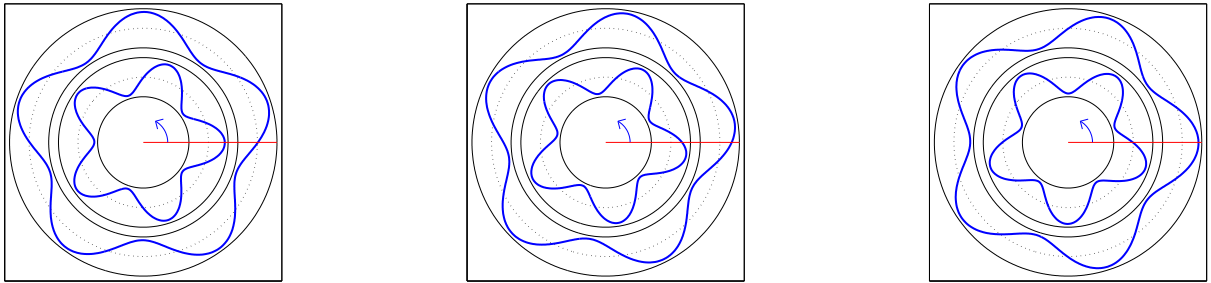


FIGURE 5.3 – Représentation circulaire de l' $\mathcal{O}_F$ (à gauche), pour un support temporel $[0;1[$ et de l' $\mathcal{O}_F$ retardée de 0.025 (au milieu) et de 0.05 (à droite), c'est à dire d' $1/4$ de période. Les parties réelles sont à l'intérieur, les parties imaginaires sont à l'extérieur.

- Un paquet d'octets est défini par un pas d'échantillonnage séparant les instants auxquels on a des données. Or par définition les Ondes de Fourier sont des fonctions continues.
- Un paquet d'octets a un nombre fini de valeurs : il y a donc un début et une fin à la variable temporelle. Il faudra "ajuster" l'intervalle de temps ainsi défini à la durée $T = 1s$ choisie dans la définition de l'Onde de Fourier.

Aussi, à partir des Ondes de Fourier, nous allons maintenant définir les Ondes de Fourier Discrètes qui vont nous permettre de traiter les données discrètes.

Comme dans le cas des matrices de Hadamard, on se restreint dans ce document à des espaces dont la dimension N est une puissance de 2 : $N = 2^q$.

5.2.1 Ondes de Fourier Discrètes : cas $N=4$

Approche intuitive : la matrice $\overline{M}_{F,2}$

Dans le cadre qui nous préoccupe dans ce texte, nous avons donc N données acquises avec un pas d'échantillonnage donné δt : on a donc des instants bien définis t_n avec $n \in [1, N]$, tels que $t_n = (n-1)\delta t$. Il faut bien prendre en compte que la durée du signal discret T est alors $T = t_N - t_1 + \delta t = N\delta t$.

Considérons en un premier temps le cas $N = 4$, c'est-à-dire $q = 2$. La durée des signaux analysés est alors $4\delta t$. Pour $N = 4$, nous avons précédemment défini la transformation SC en considérant les fonctions circulaires faisant zéro, une ou deux oscillations (paragraphe 4.3). Nous allons adopter une démarche analogue en considérant les Ondes de Fourier Continues $\mathcal{O}_F(t)$ ayant au plus $r = 4$ oscillations complètes –soit $N = 4$ cas possibles–, et en supposant $f \geq 0$. On trouve alors :

- pour $r = 0$ oscillation, l'Onde de Fourier avec $f = 0$, qui donne alors une liste de valeurs constantes pour l'Onde de Fourier Discrète de même fréquence aux instants $t_n, n \in [1, 4]$:

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

coefficients ne font apparaître aucune oscillation.

- pour $r = 1$ oscillation, l'Onde de Fourier avec $f = \frac{1}{4\delta t}$, qui donne alors la liste de valeurs pour l'Onde de Fourier Discrète de même fréquence aux instants $t_n, n \in [1, 4]$:

$$1 \quad e^{i\pi/2} = i \quad -1 \quad e^{3i\pi/2} = -i$$

Les valeurs de ces 4 coefficients font apparaître une oscillation.

- pour $r = 2$ oscillations, l'Onde de Fourier avec $f = \frac{2}{4\delta t}$, qui donne alors la liste de valeurs pour l'Onde de Fourier Discrète de même fréquence aux instants $t_n, n \in [1, 4]$:

$$1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$$

3. Bien entendu, nous faisons toujours l'hypothèse que le pas d'échantillonnage est régulier

- Les valeurs de ces 4 coefficients font apparaître deux oscillations.
- enfin, pour $r = 3$ oscillations, l'Onde de Fourier avec $f = \frac{3}{4\delta t}$, qui donne alors la liste de valeurs pour l'Onde de Fourier Discrète de même fréquence aux instants $t_n, n \in [1, 4]$:

$$1 \quad e^{3i\pi/2} = -i \quad -1 \quad e^{i\pi/2} = i$$

Les valeurs de ces 4 coefficients font apparaître une seule oscillation (bien que l'onde de Fourier sous jacente oscille 3 fois sur le support).

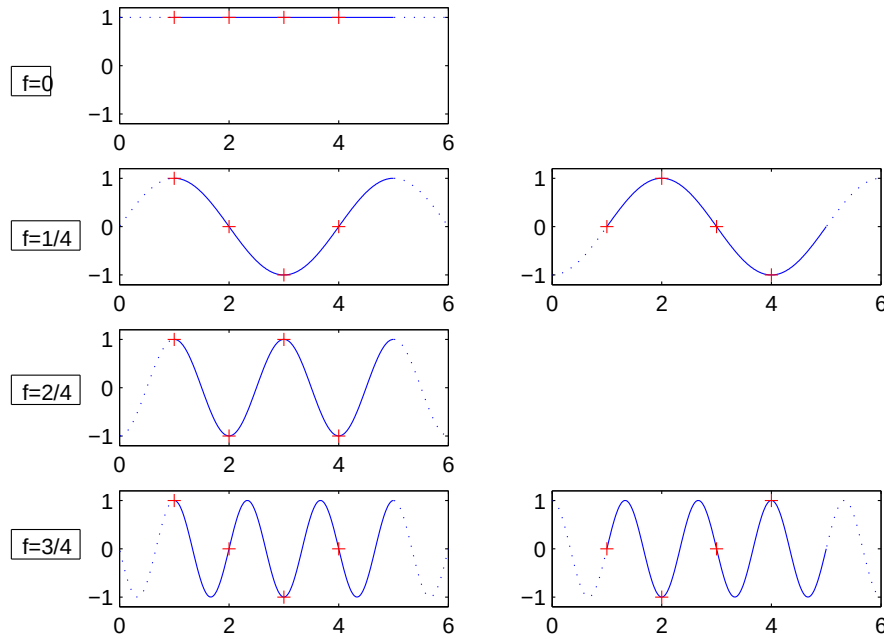


FIGURE 5.4 – Cas $N = 4$, $\delta t = 1$: Ondes de Fourier continues (en bleu) et valeurs des Ondes de Fourier Discrètes (signe + rouge) pour des fréquences $f_k = \frac{k-1}{4\delta t}$ avec k variant de la valeur 1 (en haut) à la valeur 4 (en bas). Colonne de gauche : partie réelle. Colonne de droite : partie imaginaire, représentée pour les cas où les valeurs discrètes ne sont pas toutes nulles. Il bien noter que les Ondes de Fourier (définies sur $]-\infty, +\infty[$), de fréquence f_k ($k = 1, 2, 3, 4$) sont ici représentées en trait continu pour $t \in [1, 5[$ (et en pointillé en dehors de cet intervalle). A noter que pour $k = 1$ ($f=0$) et $k = 3$ ($f=1/2$), la partie imaginaire est nulle.

Nous venons donc de construire 4 vecteurs, à valeurs complexes, dont l'ordre est spécifié par le nombre d'oscillations de l'Onde de Fourier sous jacente. Ces vecteurs seront ici catalogués en utilisant l'indice k , $k \in [1, N]$, tel que la fréquence correspondante soit $f_k = (k-1)F_0$. Ce choix, différent de celui de la fréquence recevable f_r , permettra une écriture plus homogène de la transformation formelle que nous verrons au paragraphe 5.2.3 et permettant des indices variant de 1 à N , choix compatible avec celui de Matlab qui requiert des indices positifs pour ses vecteurs et matrices. Ces vecteurs vont nous permettre de définir la matrice de transformation $\overline{M}_{F,2}$.

Pour construire la matrice 4×4 de cette transformation, il faut aussi s'appuyer la propriété de périodicité de l'Onde de Fourier Discrète : soit F_e la fréquence d'échantillonnage, définie par

$$F_e = \frac{1}{\delta t}$$

alors, pour toute valeur de temps $t_n = (n-1)\delta t$, on a pour l'Onde de Fourier

$$e^{i2\pi(f+F_e)t_n} = e^{i2\pi f t_n} e^{i2\pi F_e t_n} = e^{i2\pi f t_n} e^{i2\pi \frac{1}{\delta t} (n-1)\delta t} = e^{i2\pi f t_n}$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

On note donc que les coefficients sont périodiques.

A partir des vecteurs trouvés, on obtient alors, pour $q = 2$ (c'est-à-dire $N = 2^2 = 4$), la matrice $\overline{M}_{F,2}$:

$$\overline{M}_{F,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\pi/2} & -1 & e^{3i\pi/2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{3i\pi/2} & -1 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix}$$

et puisque $e^{3i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -e^{i\pi/2}$, on peut écrire :

$$\overline{M}_{F,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\pi/2} & -1 & e^{-i\pi/2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{-i\pi/2} & -1 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Les matrices $M_{F,2}$ et $M_{Finverse,2}$

Pour respecter certaines conventions que nous verrons ultérieurement⁴, il est d'usage de prendre la matrice conjuguée de la matrice ainsi construite. On obtient alors, pour $q = 2$ (c'est-à-dire $N = 2^2 = 4$), la matrice $M_{F,2}$, définie comme la conjuguée de $\overline{M}_{F,2}$ (relation 5.3) :

$$M_{F,2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\pi/2} & -1 & e^{i\pi/2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i\pi/2} & -1 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix}$$

C'est cette matrice qui sera utilisée dans la Transformée de Fourier Discrète que nous étudierons au chapitre 6.

La matrice $M_{F,2}$ a des propriétés mathématiquement "intéressantes" :

- $M_{F,2}$ est symétrique.
- le produit hermitien entre lignes est nul : les vecteurs lignes sont orthogonaux,
- le produit hermitien entre colonnes est nul : les vecteurs colonnes sont orthogonaux,
- $M_{F,2}$ est inversible et son inverse s'écrit :

$$M_{Finverse,2} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -e^{-i\pi/2} & -1 & e^{-i\pi/2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{-i\pi/2} & -1 & -e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

c'est-à-dire, en prenant le conjugué de $M_{F,2}$

$$M_{Finverse,2} = \frac{1}{4} M_{F,2}^*$$

La figure 5.4 illustre les 4 Ondes de Fourier Discrètes utilisées pour la construction de la matrice $M_{F,2}$, avec l'Onde de Fourier (continue) périodique correspondante tracée sur la même représentation.

Analysons maintenant la matrice $M_{Finverse,2}$ (formule 5.4). Nous pouvons tout à fait la considérer comme la liste (ligne à ligne) de coefficients décrivant une Onde de Fourier. La matrice a donc la même construction que la matrice de transformation de l'espace initial : simplement, l'ordonnancement des lignes semble à l'opposé de celui choisi pour la matrice $M_{F,2}$, comme si l'on prenait les fréquences dans l'ordre décroissant en partant de la fréquence nulle.

Pour résumer ce cas $N = 4$, on a un résultat identique à celui obtenu pour les matrices de Hadamard : transformation directe et transformation inverse s'expriment à partir de la même matrice, en prenant, pour les Ondes de Fourier, la conjuguée pour construire la transformation inverse. L'intérêt des Ondes de Fourier est que la paramétrisation dans l'espace dual se fait par les fréquences, la ligne k de la matrice $M_{F,2}$ correspondant à la fréquence $f_k = \frac{k-1}{4\delta t}$ pour l'Onde de Fourier Discrète décrivant la ligne.

4. convention du traitement du signal pour la définition de la Transformée de Fourier, voir le paragraphe 6.1.1

5.2.2 Ondes de Fourier Discrètes : cas N=8

Il est facile d'appliquer cette approche au cas $N = 8$, c'est-à-dire avec $q = 3$ et $N = 2^q$. Comme dans le cas précédent, on va rechercher les fréquences (avec $f \geq 0$) des Ondes de Fourier Continues ayant de 0 à 7 oscillations sur 8 points, ce qui donne les 8 fréquences possibles :

$$f_k = \frac{k-1}{8\delta t} \quad k \in [1, 8]$$

Comme précédemment, nous allons ordonner les lignes dans l'ordre des fréquences croissantes entre 0 et $f = \frac{7}{8\delta t}$, et nous traçons dans cet ordre ces Ondes de Fourier Discrètes (figure 5.5).

Avec la convention précédente (prendre le conjugué de la valeur de l'Onde de Fourier pour construire la matrice de la transformation), la matrice $M_{F,3}$ peut alors s'écrire :

$$M_{F,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{-3i\pi/4} & -1 & e^{3i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{i\pi/4} \\ 1 & e^{-i\pi/2} & -1 & e^{i\pi/2} & 1 & e^{-i\pi/2} & -1 & e^{i\pi/2} \\ 1 & e^{-3i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{-i\pi/4} & -1 & e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{3i\pi/4} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{3i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{i\pi/4} & -1 & e^{-i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{-3i\pi/4} \\ 1 & e^{i\pi/2} & -1 & e^{-i\pi/2} & 1 & e^{i\pi/2} & -1 & e^{-i\pi/2} \\ 1 & e^{i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{3i\pi/4} & -1 & e^{-3i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

et on peut noter que les vecteurs ligne sont orthogonaux entre eux, et que les vecteurs colonnes sont orthogonaux entre eux.

$M_{F,3}$ est symétrique et possède un inverse :

$$M_{Finverse,3} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{3i\pi/4} & -1 & e^{-3i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{-i\pi/4} \\ 1 & e^{i\pi/2} & -1 & e^{-i\pi/2} & 1 & e^{i\pi/2} & -1 & e^{-i\pi/2} \\ 1 & e^{3i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{i\pi/4} & -1 & e^{-i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{-3i\pi/4} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{-3i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{-i\pi/4} & -1 & e^{i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{3i\pi/4} \\ 1 & e^{-i\pi/2} & -1 & e^{i\pi/2} & 1 & e^{-i\pi/2} & -1 & e^{i\pi/2} \\ 1 & e^{-i\pi/4} & e^{-i\pi/2} & e^{-3i\pi/4} & -1 & e^{3i\pi/4} & e^{i\pi/2} & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, en prenant le conjugué de $M_{F,3}$

$$M_{Finverse,3} = \frac{1}{8} M_{F,3}^*$$

On retrouve les acquis observés dans le cas $N = 4$, à savoir :

- la k -ème ligne de la matrice de transformation est la conjuguée de l'Onde de Fourier Discrète de fréquence $f_k = \frac{k-1}{8\delta t} = \frac{k-1}{8} F_e$
- la matrice transformée inverse est la conjuguée de la matrice transformée directe.

Notons que rien ne nous empêche de tracer ces Ondes de Fourier Discrètes en utilisant les fréquences entre $-\frac{3}{8\delta t}$ et $\frac{1}{2\delta t}$:

$$-\frac{3}{8\delta t} \quad -\frac{2}{8\delta t} \quad -\frac{1}{8\delta t} \quad 0 \quad \frac{1}{8\delta t} \quad \frac{2}{8\delta t} \quad \frac{3}{8\delta t} \quad \frac{1}{2\delta t}$$

ce qui donne la figure 5.6. Notons que dans ce cas, on place la fréquence nulle en indice 4, c'est-à-dire en $N/2$.

5.2.3 Ondes de Fourier Discrètes : cas général

On peut se placer dans un cadre plus général et définir, pour $N = 2^q$, l'Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{OFD}_{k,N}$ telle que ses coefficients s'écrivent sous la forme⁵ :

$$\boxed{OFD_{k,N}(n) = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \quad \forall n \in [1, N]} \quad (5.5)$$

5. On peut noter que la définition donnée par la relation 5.5 est valable pour tout $N \in \mathbb{N}^*$.

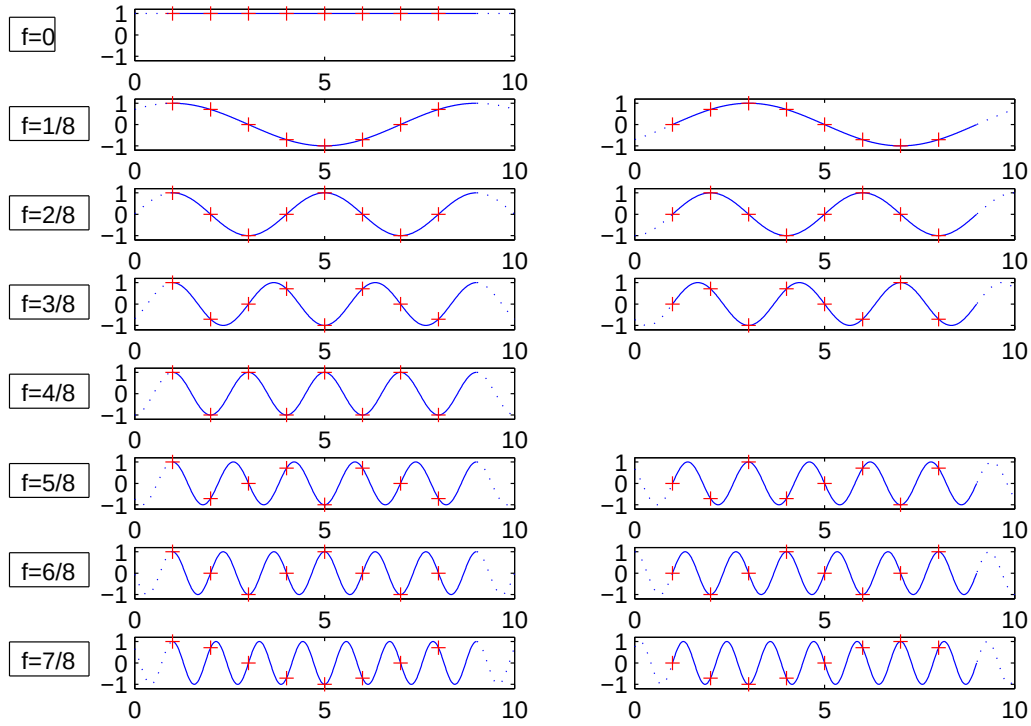


FIGURE 5.5 – Cas $N = 8$: Ondes de Fourier continues (en bleu) et valeurs des Ondes de Fourier Discrètes (signe + rouge) pour des fréquences $f_k = \frac{k-1}{8\delta t}$ avec k variant de la valeur 1 (en haut) à la valeur 8 (en bas). Colonne de gauche : partie réelle. Colonne de droite : partie imaginaire, représentée pour les cas où les valeurs discrètes ne sont pas toutes nulles. Il bien noter que les Ondes de Fourier (définies sur $] - \infty, +\infty[$), de fréquence f_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ et 7) sont ici représentées en tracé continu pour $t \in [1, 9[$ et en pointillé sur $[0, 1]$ et $[9, 10]$, ce qui illustre bien la périodicité et la continuité des Ondes de Fourier.

cette Onde de Fourier Discrète étant paramétrée par $k, k \in [1, N]$ qui représente le paramétrage en fréquences, et l'indice n correspondant à la variable (par exemple temporelle)⁶. Il faut souligner que N valeurs caractérisent cette Onde de Fourier Discrète ($n \in [1, N]$).

On a alors les propriétés suivantes :

- pour $k = 1$, $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{1,N}$ est le vecteur composé de N valeurs 1.
- pour $k = N/2 + 1$, $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{N/2+1,N}$ est le vecteur composé alternativement de la valeur +1 et de la valeur -1. Pour ainsi dire, on ne peut trouver de suite de valeurs échantillonnées oscillant plus rapidement que cette Onde de Fourier Discrète particulière (il faut noter que l'on retrouve une des fonctions de Hadamard).
- pour $k > 1$, $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ est l'Onde de Fourier Discrète conjuguée de $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{N+2-k,N}$. En effet :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{OFD}_{N+2-k,N}(n) &= e^{2i\pi \frac{((N+2-k)-1)(n-1)}{N}} \\
 &= e^{2i\pi \frac{(N-(k-1))(n-1)}{N}} \\
 &= e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \\
 &= (\mathcal{OFD}_{k,N}(n))^*
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

6. La contrainte d'avoir N s'exprimant en puissance de 2 n'est pas restrictive : on peut prendre n'importe quelle valeur de N entier.

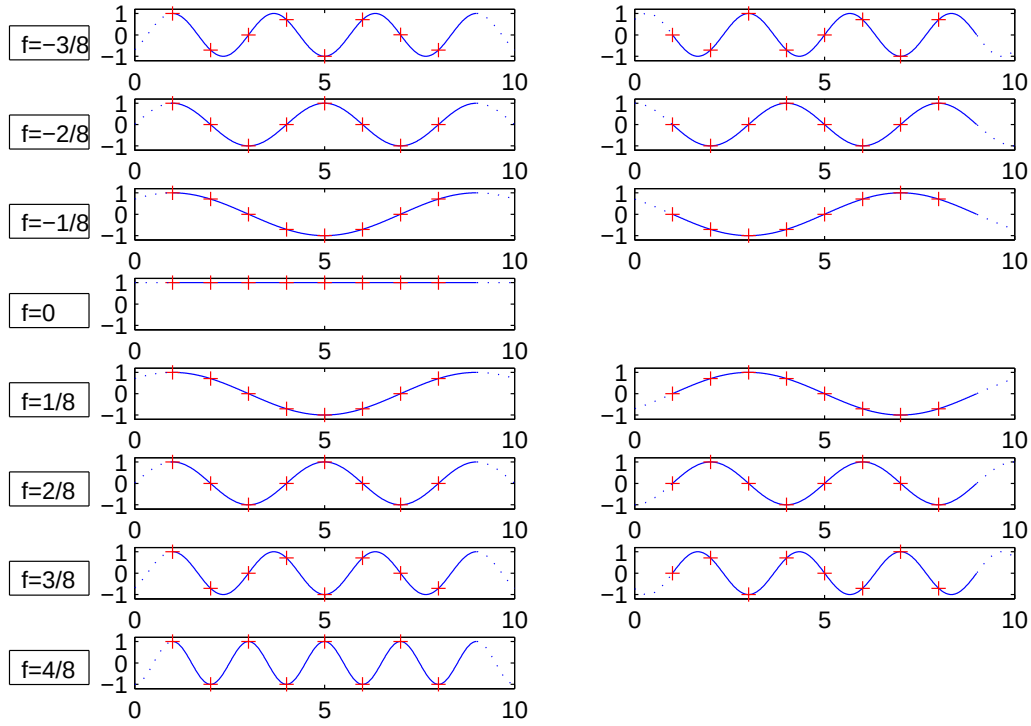


FIGURE 5.6 – Cas $N = 8$: Ondes de Fourier continues (en bleu) et valeurs des Ondes de Fourier Discrètes (signe + rouge) pour des fréquences $f_k = \frac{k}{8\delta t}$ avec k variant de la valeur -3 (en haut) à la valeur 4 (en bas). A gauche : partie réelle. A droite : partie imaginaire. Il bien noter que les Ondes de Fourier (définies sur $]-\infty, +\infty[$), de période $8/r$ ($r = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ et 4) sont ici représentées en trait plein pour $t \in [1, 9[$ et en pointillé pour $[0, 1]$ et $[9, 10]$.

Cependant, nous observons des différences entre le nombre d'oscillations de l'Onde de Fourier continue (N) et l'Onde de Fourier Discrète puisque :

- pour $k \in [2, N/2]$, les valeurs de $\overrightarrow{\mathcal{O}FD}_{k,N}$ correspondent aux valeurs prises par l'Onde de Fourier Continue $e^{i2\pi f_k t}$, t réel, $t \in [0, N\delta t[$, avec :

$$f_k = \frac{k-1}{N\delta t} = (k-1)\frac{F_e}{N}$$

et il est facile de comprendre que l'Onde de Fourier de fréquence f_k possède $k-1$ oscillations sur la durée totale $N\delta t$.

- pour $k \in [N/2 + 1, N]$, l' $\overrightarrow{\mathcal{O}FD}_{k,N}$ est l'Onde de Fourier Discrète conjuguée de $\overrightarrow{\mathcal{O}FD}_{N+2-k,N}$: ceci explique que l'on observe $N+1-k$ oscillations sur l' $\overrightarrow{\mathcal{O}FD}_{k,N}$ alors que l'Onde de Fourier Continue a bien k oscillations.
- en posant $T = N\delta t$, pour $k \in [2, N/2]$, considérons l'Onde de Fourier de fréquence $f_k = \frac{k-1}{N\delta t}$. On a pour tout $r \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} e^{i2\pi f_k(t+r\frac{T}{k-1})} &= e^{i2\pi(f_k t + f_k(r\frac{T}{k-1}))} \\ &= e^{i2\pi(f_k t + \frac{k-1}{N\delta t}(r\frac{T}{k-1}))} \\ &= e^{i2\pi f_k t} \end{aligned} \quad (5.7)$$

ce qui montre que l'Onde de Fourier $\overrightarrow{\mathcal{O}FD}_{k,N}$, paramétrée par k , est, pour $k > 1$, périodique de période

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

$T/(k-1)$. Ceci donne une autre interprétation du paramètre k des Ondes de Fourier Discrètes : ce paramètre correspond à la période $T/(k-1)$ de l'Onde de Fourier associée. Donc, pour un signal échantillonné sur N valeurs au pas δt , donc de durée $N\delta t$, on va associer, par le biais des Ondes de Fourier Discrètes, les Ondes de Fourier de période T/r avec $r \in [1, N/2]$, ce qui donne $N/2$ valeurs possibles pour la période.

- Pour achever ces remarques diverses, en posant $T = N\delta t$, si on considère l'Onde de Fourier de fréquence $f_k = \frac{k-1}{N\delta t}$ et $t \in [0, N\delta t[$, on a bien évidemment pour tout $r \in \mathbb{Z}$

$$e^{i2\pi f_k(t+rT)} = e^{i2\pi f_k t}$$

ce qui signifie que l'Onde de Fourier associée se répète $(k-1)$ fois sur la fenêtre temporelle $T = N\delta t$: elle a bien $k-1$ oscillations.

5.2.4 Ondes de Fourier Discrètes : premières propriétés

Une des propriétés essentielles des Ondes de Fourier Discrètes est qu'elles sont orthogonales.

Pour cela une remarque s'impose. Prenons comme exemple l'Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{2,N}$ ($\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{1,N}$ est trop particulière, puisque toutes ses valeurs sont constantes). Considérons sa n -ème valeur $b_{2,n}$:

$$b_{2,n} = e^{2i\pi \frac{(n-1)}{N}}$$

et élevons cette valeur à la puissance N . On a :

$$b_{2,n}^N = \left(e^{2i\pi \frac{(n-1)}{N}} \right)^N = e^{2i\pi \frac{N(n-1)}{N}} = e^{2i\pi(n-1)} = 1$$

Toutes les valeurs de cette seconde ligne de cette matrice sont donc des racines N -ème de l'unité.

Cette observation se généralise à toute les lignes. En effet, considérons l'Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N}$, décrite par ses coefficients $b_{k,n}$:

$$b_{k,n} = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

Posons :

$$z_k = e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \quad (5.8)$$

On remarque que z_k est racine N -ème de l'unité. On peut réécrire le coefficient $b_{k,n}$ sous la forme :

$$b_{k,n} = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} = e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}(n-1)} = \left(e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \right)^{n-1} = z_k^{n-1}$$

ce qui signifie que les $b_{k,n}$ sont des puissances n -ème de z_k , et donc, de manière évidente, des racines N -ème de l'unité puisque :

$$b_{k,n}^N = \left(e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \right)^N = e^{2i\pi \frac{N(k-1)(n-1)}{N}} = e^{2i\pi(k-1)(n-1)} = 1$$

(k et n étant des entiers, $(k-1)(n-1)$ est un entier).

Grâce à cette écriture, on remarque que la somme des valeurs d'une Onde de Fourier Discrète est de facto la somme des N puissances d'une racine N -ème de l'unité et possède de ce fait des propriétés remarquables (ce point sera approfondi en annexe C). Soit donc $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N}$: les valeurs qui la définissent sont la suite des puissances de la racine de l'unité $z_k = e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}}$. Il y a alors deux cas possibles :

- $k = 1$, la racine de l'unité est égale à 1 et la somme s'écrit $\sum_{n=1}^N 1 = N$
- $k \neq 1$ et on sait que, dans ce cas, la somme des puissances (de 0 à $N-1$) d'une racine N -èmes de l'unité donne la valeur 0 (voir l'annexe C).

Cette observation va nous permettre de montrer aisément l'orthogonalité des Ondes de Fourier Discrètes en utilisant le produit hermitien comme outil puisque ce sont des vecteurs complexes. Considérons maintenant

deux Ondes de Fourier Discrètes différentes, $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ et $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k',N}$, et calculons $b_{k,j}^* b_{k',j}$:

$$\begin{aligned} b_{k,j}^* b_{k',j} &= e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} e^{2i\pi \frac{(k'-1)(n-1)}{N}} \\ &= e^{2i\pi \frac{(k'-k)(n-1)}{N}} \\ &= \left(e^{2i\pi \frac{(k'-k)}{N}} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

On remarque alors que $e^{2i\pi \frac{(k'-k)}{N}}$ est une racine N -ème de l'unité. Il y a alors deux cas possibles :

- $k' = k$ et on a alors

$$\sum_{n=1}^N b_{k,n}^* b_{k,n} = \sum_{n=1}^N 1 = N$$

- $k' \neq k$ et on sait que, dans ce cas, la somme des puissances (de 0 à $N-1$) d'une racine N -èmes de l'unité donne la valeur 0 (voir l'annexe C), c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^N b_{k,n}^* b_{k',n} = \sum_{n=1}^N \left(-e^{2i\pi \frac{(k'-k)}{N}} \right)^{n-1} = 0$$

En résumé, on a :

$$\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N} \odot_H \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k',N} = \begin{cases} N & \text{si } k = k' \\ 0 & \text{si } k \neq k' \end{cases} \quad (5.9)$$

L'orthogonalité des Ondes de Fourier Discrètes a l'interprétation naïve suivante : l'information contenue dans une Onde de Fourier Discrète est décorrélée de l'information contenue dans une autre Onde de Fourier Discrète.

L'orthogonalité des Ondes de Fourier Discrètes est un élément clé de l'analyse de Fourier et de la transformation de Fourier Discrète que nous allons maintenant définir.

5.2.5 Ondes de Fourier Discrètes et Ondes de Fourier : fréquences et fréquences réduites

Récapitulons les propriétés des Ondes de Fourier Discrètes $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$: ce sont donc des listes de N valeurs, paramétrées par un entier $k \in [1, N]$. Ces valeurs sont définies par la relation :

$$\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}(n) = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

Le paramètre n correspond à l'indice “temps”. Le paramètre k correspond au paramètre dual, ici la fréquence.

Par ailleurs, on a défini les Ondes de Fourier Continues, $\mathcal{OF}_f(t)$, définies pour tout instant t et toute fréquence f par :

$$\mathcal{OF}_f(t) = e^{i2\pi ft}$$

Considérons un “paquet de N octets”.

- Si on a un signal temporel composé de N valeurs et dont on connaît le pas d'échantillonnage, on a alors tout naturellement la durée du signal :

$$T = N\delta t$$

- Si l'on connaît la durée du signal, on en déduit le pas d'échantillonnage :

$$\delta t = \frac{T}{N}$$

Mais il faut remarquer que ces grandeurs (durée du signal et pas d'échantillonnage) ne jouent aucun rôle dans la définition des Ondes de Fourier Discrètes : les Ondes de Fourier Discrètes $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ sont en fait obtenues à des instants discrets $t_n, n \in [1, N]$ définis par :

$$t_n = (n-1)\delta t$$

et pour un paramètre k associé à la fréquence de sorte que :

$$\mathcal{OFD}_{k,N}(n) = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

En revanche, cet aspect temporel est requis pour les Ondes de Fourier Continues associées aux Ondes de Fourier Discrètes. Néanmoins, il est possible d'associer une Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ et une Onde de Fourier Continue $\mathcal{OF}_f(t)$: il suffit que pour tous les instants discrets $t_n, n \in [1, N]$ on ait :

$$e^{i2\pi ft} \leftrightarrow e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

ce qui revient à chercher les valeurs k et f telles que :

$$ft = \frac{(k-1)(n-1)}{N}$$

En utilisant la fréquence d'échantillonnage F_e :

$$F_e = \frac{1}{\delta t}$$

il vient un choix discret de fréquences pour les fréquences possibles pour les Ondes de Fourier Continues associées aux Ondes de Fourier Discrètes :

$$f_k = \frac{k-1}{N} F_e$$

avec k variant de 1 à N , et c'est ce choix qui a été choisi en première étape.

Il est donc d'usage de faire correspondre le paramètre k d'une Onde de Fourier Discrète avec la fréquence f_k de l'Onde de Fourier associée. Mais faisons une remarque supplémentaire car on voit que la fréquence d'échantillonnage est alors requise. Deux cas sont possibles :

- cette fréquence est connue (par exemple, pour un signal audio archivé sur un CD audio, elle est normalisée et égale à 44,1 KHz). Dans ce cas, on peut donner les valeurs f_k .
- cette fréquence est inconnue. Cela ne change rien au traitement matriciel effectué. Par convention, on prendra arbitrairement ⁷ $F_e = 1$: tous les f_k seront alors compris entre 0 et 1 : on parle de **fréquence réduite**. On a alors la relation pour la fréquence réduite $f_{R,k}$ de l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$

$$\boxed{\begin{aligned} f_{R,k} &= \frac{k-1}{N} \\ &\Leftrightarrow \\ f_k &= f_{R,k} F_e \end{aligned}} \quad (5.10)$$

Enfin notons que la relation

$$f_k = \frac{k-1}{N} F_e \quad k \in [1, N]$$

est arbitraire. En effet, on aurait pu tout aussi bien choisir :

$$f_k = pF_e + \frac{k-1}{N} F_e \quad k \in [1, N] \quad p \in \mathbb{Z}$$

mais, en règle générale, les signaux acquis et fournis sous forme de “paquets d'octets” ont été numérisés dans l'hypothèse où $p = 0$.

⁷. Bien se rappeler ultérieurement que ce choix est arbitraire...

5.3 Représentation circulaire des Ondes de Fourier Discrètes

Nous avons vu au paragraphe 2.7 une modalité de représentation graphique pour des signaux discrets : la représentation circulaire. Nous allons l'appliquer pour les $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}$ analysées figure 5.5, c'est à dire le cas $N = 8$. Puisque les $\mathcal{OF}$ et les $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}$ ont des valeurs complexes, nous allons représenter la partie réelle et la partie imaginaire sur le même graphe circulaire, la partie réelle étant à l'extérieur, et la partie imaginaire à l'intérieur.

Pour paramétrer ces $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}$, nous utiliserons deux possibilités :

- la notation $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{n,8}$, $n \in [1, 8]$ qui nous a servi à introduire les $\mathcal{OFD}$ et pour laquelle on sait que l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{n,8}$ a $n - 1$ oscillation(s) ;
- la notation $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=n/8,8}$, $n \in [0, 7]$ ou $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=n/8,8}$, $n \in [-3, 4]$ dans laquelle on utilise la fréquence réduite. On a avec cette notation :

$$\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=n/8,8} = \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{n+1,8}$$

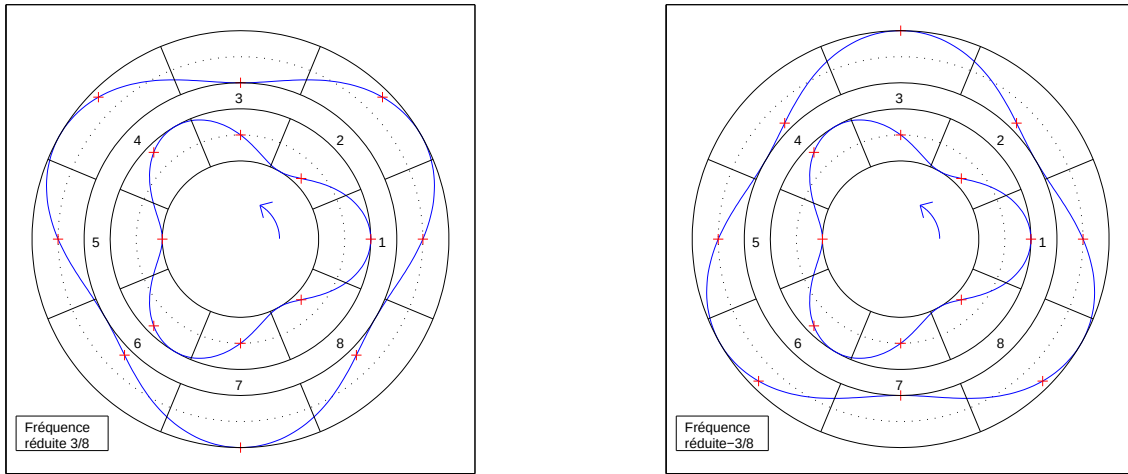


FIGURE 5.7 – Représentation circulaire de l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=3/8,8}$ (à gauche) et de l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=-3/8,8}$ (à droite) : les valeurs discrètes sont marquées par des +. On peut observer que les parties réelles sont identiques, mais que les parties imaginaires sont déphasées de π . Sont tracées en trait continu la partie réelle et la partie imaginaire de l' $\mathcal{OF}_f$ associée (avec $f = \frac{k-1}{N}$) : $\mathcal{OF}$ et $\mathcal{OFD}$ coïncident pour les valeurs discrètes associées à l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}$.

A une $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ est associée une $\mathcal{OF}_f$ dont le paramètre f est choisi de sorte que pour tout $n \in [1, N]$, on ait :

$$\mathcal{OFD}_{k,N}(n) = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} = e^{i2\pi f \frac{n-1}{N}}$$

Pour $N = 8$ les 8 $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{n,8}$, $n \in [1, 8]$ sont représentées figure 5.10. Ce type de représentation met bien en valeur la propriété fondamentale des $\mathcal{OFD}$ qui peuvent être vues comme une période d'un signal périodique de durée infinie. Cette propriété jouera un rôle essentiel lorsque nous voudrons étendre un signal limité dans le temps à un signal couvrant une durée tendant vers l'infini. Sur la figure 5.10, le choix des fréquences réduites f_n est d'appartenir à $[0, 1[$: l'intérêt est que l'on peut effectivement compter $n - 1$ oscillations pour l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{n,8}$, $n \in [1, 8]$ grâce à cette représentation circulaire.

Si l'on travaille en fréquences réduites $f \in]-0.5, 0.5]$, on aura visuellement 0 oscillations pour l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=0,8}$, une oscillation pour les $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=1/8,8}$ et $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=-1/8,8}$, deux oscillations pour les $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=2/8,8}$ et $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=-2/8,8}$, trois oscillations pour les $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=3/8,8}$ et $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=-3/8,8}$, et finalement 4 oscillations pour l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=4/8,8}$. La figure 5.7 permet de comparer dans ce type de représentation l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=3/8,8}$ et de l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_r=-3/8,8}$: on note que si les parties réelles (intérieur) sont identiques, les parties imaginaires sont déphasées de π . On peut

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



aussi imaginer que l'on prend la convention horaire (sens de l'horloge) et non mathématique (sens direct) pour représenter la rotation dans le plan complexe. Tout ceci peut donner un sens à la notion de fréquence négative.

Toujours dans cette représentation circulaire, on peut mettre en évidence le phénomène de repliement, comme l'illustre la figure 5.8 : sur cette figure, on compare en représentation circulaire l' $\overrightarrow{OFD}_{f_r=-3/8,8}$ et de l' $\overrightarrow{OFD}_{f_r=5/8,8}$. Si les OF sont effectivement différentes, les OFD (représentées par des +) sont identiques, ce qui est normal puisque nous avons $5/8 + 3/8 = 0 \text{ \%}8$.

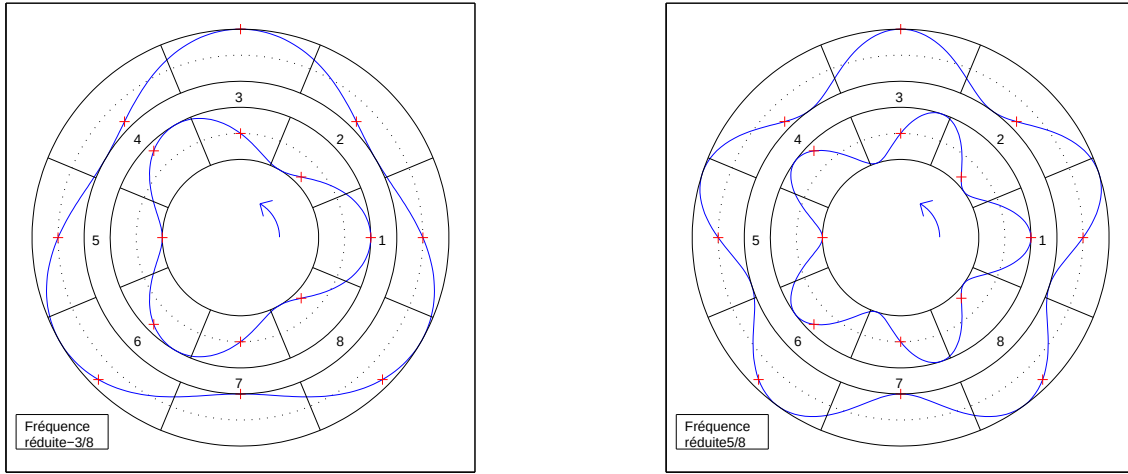


FIGURE 5.8 – Représentation circulaire de l' $\overrightarrow{OFD}_{f_r=-3/8,8}$ et de l' $\overrightarrow{OFD}_{f_r=5/8,8}$. Si les OF sont effectivement différentes, les OFD (représentées par des +) sont identiques.

Enfin, toujours dans cette représentation circulaire, on peut mettre en évidence les effets d'un retard sur une OFD. La figure 5.9 permet de comparer l' $\overrightarrow{OFD}_{4,8}$ (fréquence réduite 3/8) et un signal s_n construit à partir de la même $\overrightarrow{OFD}_{4,8}$ et auquel on a fait subir un retard "angulaire". On a de manière évidente (avec la convention circulaire pour les indices) :

$$\begin{aligned} s_n &= OFD_{4,8}(n+r) \\ &= K OFD_{4,8}(n) \end{aligned}$$

la constante K vérifiant :

$$K = e^{2i\pi \frac{3}{8}}$$

Donc s_n , version retardée de l' $\overrightarrow{OFD}_{4,8}$, se décompose uniquement sur l' $\overrightarrow{OFD}_{4,8}$. Rappelons que ce n'était pas le cas pour les représentations précédentes puisque

- pour la base de Hadamard, nous avons observé, figure 3.4.3, une identification –à un retard près– de $Sequence_2$ et $Sequence_3$, de $Sequence_5$ et $Sequence_7$, et de $Sequence_6$ et $Sequence_8$). La décomposition d'un signal dans le système de Hadamard devenait alors sensible à un décalage temporel.
- pour la base des fonctions SC, une identification –à un retard près– de $F=1/8$ Cosinus et $F=1/8$ Sinus, de $F=2/8$ Cosinus et $F=2/8$ Sinus, et de $F=3/8$ Cosinus et $F=3/8$ Sinus. Là aussi la décomposition d'un signal devenait alors sensible à un décalage temporel.

C'est cette propriété d'invariance (à une constante près) de la base des OFD qui est une des forces de cette base : elle permet à la transformation associée, la Transformée de Fourier Discrète –qui sera étudiée au prochain chapitre– d'être un incontournable du traitement du signal discret.

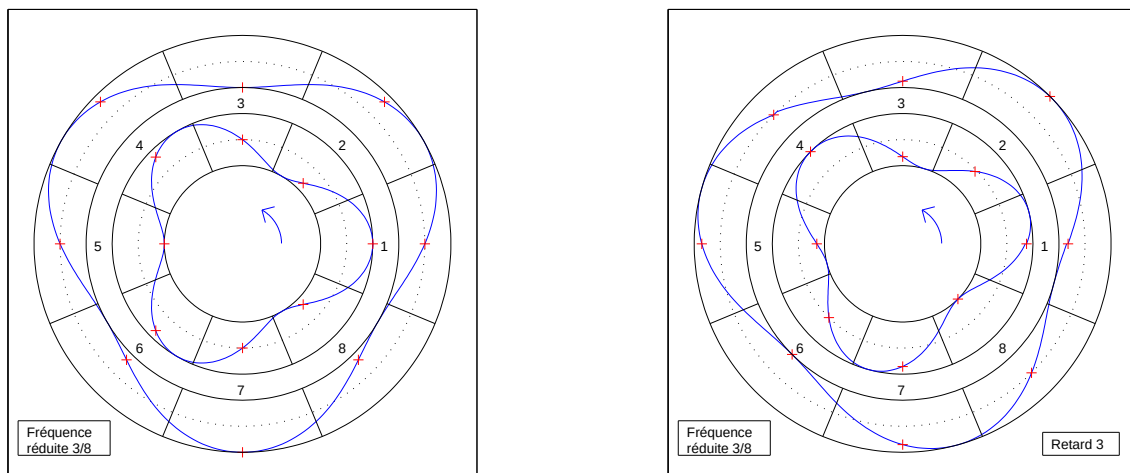
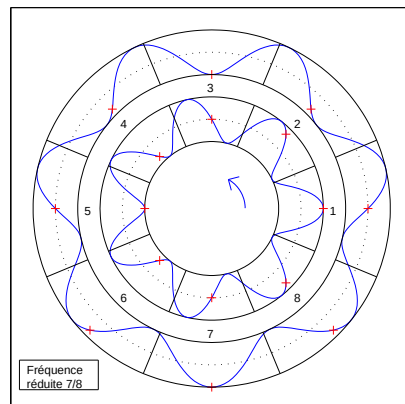
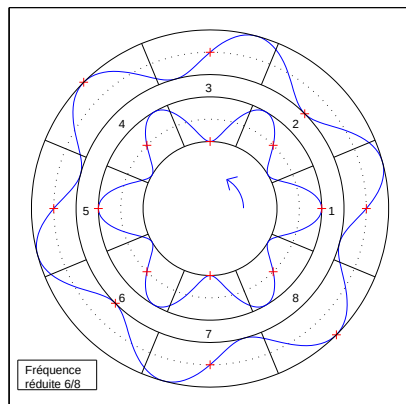
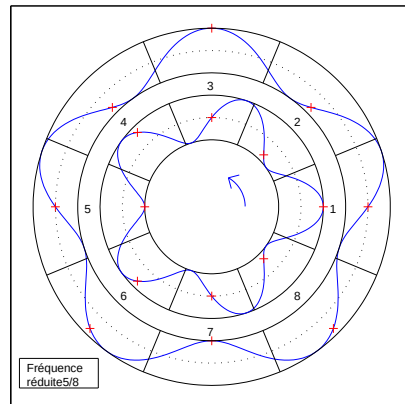
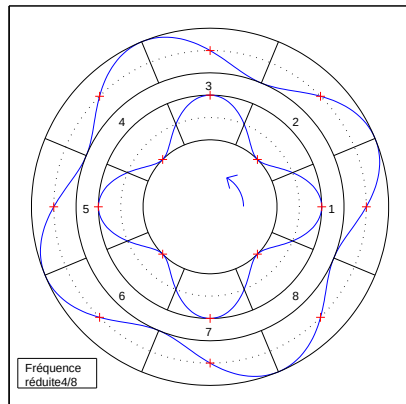
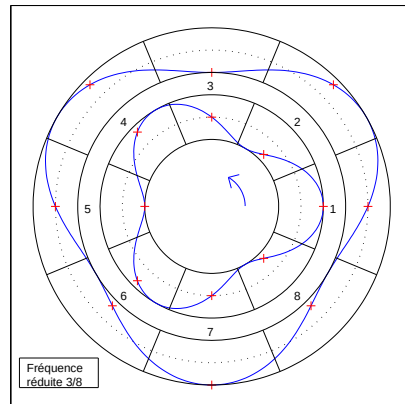
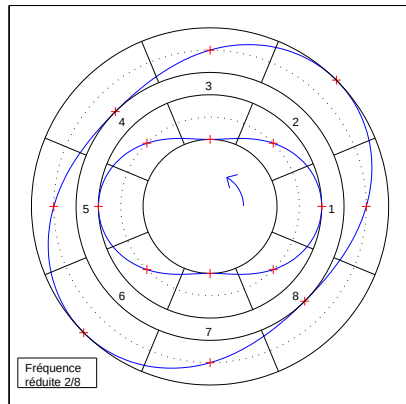
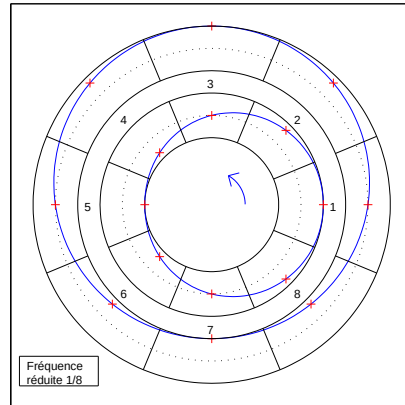
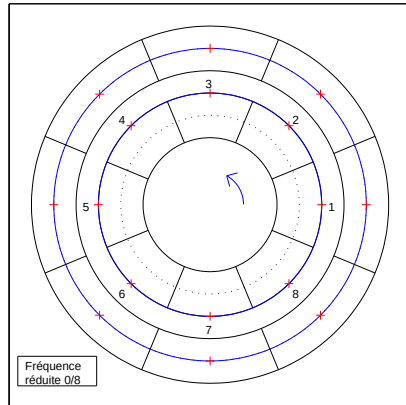


FIGURE 5.9 – Représentation circulaire de $\vec{\overline{OFD}}_{4,8}$ (à gauche, 3 oscillations) et d’un signal construit à partir de $\vec{\overline{OFD}}_{4,8}$ et auquel on a fait subir un retard “angulaire” de $3/8 \times 2\pi$. Ces deux signaux ont 3 oscillations et sont identiques à une constante multiplicative complexe près.



Jean Marie Nicolas, Marine Campedel

Représentation circulaire des 8 $\overline{OFD}_{k,8}$ ($k \in [1,8]$) représentées de manière tr
figure 5.5. La partie réelle est à l'intérieur, la partie imaginaire à l'extérieur.

Chapitre 6

Ondes de Fourier et transformation de Fourier Discrète

6.1 La Transformation de Fourier Discrète : définition

Dans ce paragraphe, on se cantonnera toujours à des espaces de dimension $N = 2^q$. Ce choix n'a rien de limitatif ; simplement, les illustrations sont toujours plus compréhensibles pour $N = 2^q$ car les Ondes de Fourier "passent" alors obligatoirement par les valeurs $1, i, -1, -i$.

6.1.1 Définition : matrice de Fourier

Pour définir une nouvelle transformation, qui sera appelée simplement Transformation de Fourier Discrète¹, nous allons définir la matrice de Fourier $M_{F,q}$: elle a $N = 2^q$ lignes et $N = 2^q$ colonnes. Nous allons définir la ligne k , $k \in [1, N]$, en identifiant ses coefficients $m_{k,n}$, $n \in [1, N]$ aux coefficients du conjugué² de l'Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$:

$$M_{F,q} = (m_{k,n}) \quad \text{avec} \quad m_{k,n} = \mathcal{OFD}_{k,N}^*(n) = e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \quad (6.1)$$

La ligne k est donc associée au conjugué de l'Onde de Fourier $\mathcal{OF}_f(t)$ de fréquence $f = f_k = \frac{k-1}{N\delta t} = \frac{k-1}{N}F_e$. On a donc les propriétés suivantes :

- les lignes sont donc caractérisées par des fréquences croissantes, depuis la valeur 0 à la valeur $f_N = \frac{N-1}{N\delta t}$. Ces fréquences sont indicées par la variable k .
- pour $k \in [1, N/2]$, les lignes ont $k-1$ oscillation(s),
- pour $k = N/2 + 1$, la ligne a exactement $N/2$ oscillations et correspond à une onde dégénérée composée d'une succession de +1 et de -1
- pour $k \in [N/2 + 2, N]$, on peut remarquer que la ligne k est alors la conjuguée de la ligne $k' = N + 2 - k$, avec $k' \in [2, N/2]$ (relation 5.6). On en déduit que, pour $k \in [N/2 + 2, N]$, les lignes ont $N + 1 - k$ oscillation(s).

Il est trivial de constater que cette matrice est symétrique :

$$m_{k,n} = e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} = e^{-2i\pi \frac{(n-1)(k-1)}{N}} = m_{n,k}$$

En utilisant les propriétés des Ondes de Fourier Discrètes, il est facile de vérifier que les lignes sont orthogonales entre elles, et que les colonnes sont orthogonales.

1. Pour être plus précis, on devrait l'appeler Transformation de Fourier Discrète à Temps Discret.

2. C'est un choix et c'est celui du traitement du signal. En optique par exemple[1], on peut trouver une définition de la transformée de Fourier faisant intervenir directement les coefficients des OFD.

6.1.2 Définition : matrice de Fourier inverse

La matrice de Fourier $M_{F,q}$ possède une inverse $M_{Finverse,q}$, de coefficients $\tilde{m}_{k,n}$, $k \in [1, N]$, $n \in [1, N]$, donnée par la relation :

$$M_{Finverse,q} = (\tilde{m}_{k,n}) \quad \text{avec} \quad \tilde{m}_{k,n} = \frac{1}{N} e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \quad (6.2)$$

ces valeurs donnent bien des Ondes de Fourier Discrètes, mais dans l'ordre inverse des fréquences (et en partant toujours de la fréquence nulle).

Il est facile de montrer que l'on a bien :

$$M_{Finverse,q} \times M_{F,q} = M_{F,q} \times M_{Finverse,q} = I_N \quad (6.3)$$

En effet, notons que les lignes de ces deux matrices ($M_{F,q}$ et $M_{Finverse,q}$) sont composées de racines N -ème de l'unité, et que les colonnes de ces matrices sont composées de racines N -ème de l'unité. On peut en effet réécrire les composants de ces matrices sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} m_{k,n} &= \left(e^{-2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \right)^{(n-1)} = \left(e^{-2i\pi \frac{(n-1)}{N}} \right)^{(k-1)} \\ \tilde{m}_{k,n} &= \frac{1}{N} \left(e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \right)^{(n-1)} = \frac{1}{N} \left(e^{2i\pi \frac{(n-1)}{N}} \right)^{(k-1)} \end{aligned} \quad (6.4)$$

et on remarque aussi que :

$$\tilde{m}_{k,n} = \frac{1}{N} m_{k,n}^*$$

Ces observations nous permettent de démontrer que $M_{Finverse,q}$ est bien la matrice inverse de $M_{F,q}$. En effet, soit la matrice T définie par :

$$T = M_{Finverse,q} \times M_{F,q}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} t_{k,k'} &= \sum_{n=1}^N \tilde{m}_{k,n} m_{n,k'} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(e^{2i\pi \frac{(n-1)}{N}} \right)^{(k-1)} \left(e^{-2i\pi \frac{(k'-1)}{N}} \right)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \right)^{(n-1)} \left(e^{-2i\pi \frac{(k'-1)}{N}} \right)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}} e^{-2i\pi \frac{(k'-1)}{N}} \right)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(e^{2i\pi \frac{(k'-k)}{N}} \right)^{(n-1)} \end{aligned}$$

On remarque alors que $e^{2i\pi \frac{(k'-k)}{N}}$ est une racine N -ème de l'unité. Il y a alors deux cas possibles :

- $k' = k$ et alors la somme $\sum_{n=1}^N 1 = N$, d'où $t_{k,k} = 1$;
- $k' \neq k$ et on sait que, dans ce cas, la somme des puissances (de 0 à $N-1$) d'une racine N -èmes de l'unité donne la valeur 0 (voir l'annexe C), d'où $t_{k,k'} = 0 \forall k \neq k'$.

La matrice T est donc une matrice diagonale, la valeur sur la diagonale est constante et égale à 1.

CQFD

A partir des définitions de $M_{F,q}$ et de $M_{Finverse,q}$, on peut noter que :

$$\tilde{m}_{k,n} = \frac{1}{N} m_{n,k}^*$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

et donc que

$$M_{F,q} = N M_{F^{-1},q}^*$$

On en déduit alors :

$$M_{F,q}^* \times M_{F,q} = N M_{F^{-1},q} \times M_{F,q} = N I_N \quad (6.5)$$

6.1.3 Définitions : Transformation de Fourier Discrète et Transformation de Fourier Inverse Discrète

Ce sont ces transformations fondées sur les matrices de Fourier $M_{F,q}$ et les matrices de Fourier inverse $M_{F^{-1},q}$ que l'on appelle Transformation de Fourier Discrète (TFD) et Transformation de Fourier Inverse Discrète (TFID).

Soit donc un vecteur en entrée $\vec{B} = (b_n)$, l'indice n dans l'espace initial Θ correspondant à un instant $t_n = (n-1)\delta t$.

La TFD associe à un vecteur $\vec{B}$ un vecteur transformé $\vec{\hat{B}}$ par la relation :

$$\vec{\hat{B}} = \text{TFD} [\vec{B}] = M_{F,q} \times \vec{B} \quad (6.6)$$

et connaissant la matrice $M_{F,q}$ (relation 6.1) on a :

$$\vec{\hat{B}} = \text{TFD} [\vec{B}] \Leftrightarrow \hat{b}_k = \sum_{n=1}^N \mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{k,N}^*(n) b_n = \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} b_n \quad (6.7)$$

L'indice k dans le dual Φ correspond donc à la fréquence $f_k = \frac{k-1}{N\delta t}$. La TFD permet donc le passage de l'univers temporel Θ (ici indices n) à l'univers fréquentiel Φ (ici indices k).

A partir de la relation 6.7, on peut écrire :

$$\hat{b}_k = \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N} \odot_H \vec{B} \quad (6.8)$$

Pour "retourner" à l'univers temporel, on a donc la TFID que l'on peut définir comme :

$$\forall \vec{B} \quad \text{TFID} [\text{TFD} [\vec{B}]] = \text{TFD} [\text{TFID} [\vec{B}]] = \vec{B}$$

Puisque nous avons défini $M_{F^{-1},q}$ par la relation 6.2, et que $M_{F^{-1},q}$ vérifie (relation 6.3) :

$$M_{F^{-1},q} \times M_{F,q} = M_{F,q} \times M_{F^{-1},q} = I_N$$

cela revient à dire qu'à tout vecteur $\vec{\hat{B}}$ (appartenant à l'univers Φ), la TFID associe le vecteur $\vec{B}$ (appartenant à l'univers Θ) par la relation :

$$\vec{B} = \text{TFID} [\vec{\hat{B}}] = M_{F^{-1},q} \times \vec{\hat{B}} \quad (6.9)$$

et on a donc :

$$\vec{B} = \text{TFID} [\vec{\hat{B}}] \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{n,N}(k) \hat{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2i\pi \frac{(n-1)(k-1)}{N}} \hat{b}_k \quad (6.10)$$

que l'on peut écrire :

$$b_n = \frac{1}{N} \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^* \odot_H \vec{\hat{B}} \quad (6.11)$$

Grâce à la TFD, on passe d'un jeu de N valeurs b_n décrivant le signal dans le monde temporel à un jeu de N valeurs $\hat{b}_k$ décrivant le signal dans le monde fréquentiel : on dit que les N valeurs $\hat{b}_k$ décrivent le **spectre** du signal. En résumé on a donc, pour tout vecteur $\vec{B}$, le système suivant :

$$\begin{cases} \hat{b}_k &= \sum_{n=1}^N b_n \mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{k,N}^*(n) &= \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N} \odot_H \vec{B} \\ b_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{n,N}(k) &= \frac{1}{N} \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^* \odot_H \vec{B} \end{cases} \quad (6.12)$$

Nous allons voir que la TFD joue un rôle essentiel en traitement du signal discret car nous allons découvrir qu'elle possède des propriétés essentielles concernant certaines opérations entre signaux, point que nous n'avons pas encore évoqué stricto sensu.

6.2 La Transformation de Fourier Discrète : propriétés élémentaires

6.2.1 TFD et TFID : propriétés élémentaires

Ainsi définie, la TFD transforme un vecteur complexe en un autre vecteur complexe. A l'échelle du temps correspond donc l'échelle des fréquences ; au monde temporel Θ correspond le monde fréquentiel Φ , appelé **espace de Fourier** et la paire de transformations TFD+TFID permet le passage d'un mode à l'autre.

A la différence de nos premières analyses (celles utilisant la matrice de Hadamard par exemple), où l'on s'est focalisé sur des données à valeurs réelles, les données peuvent donc être des valeurs complexes. Si l'on analyse un signal sur N points dans un premier monde (physique ou Fourier), on a donc en entrée N données décrites par N valeurs complexes, qui se décomposent en N réels et N imaginaires, soient $2N$ valeurs. A ces $2N$ valeurs (N réels et N imaginaires) correspondent $2N$ valeurs dans le monde dual (N réels et N imaginaires) : la quantité d'information représentable est donc la même dans les deux mondes.

On peut se demander pourquoi, dans le cas d'un signal à valeurs réelles (N valeurs), il faille $2N$ valeurs (N données complexes) dans l'espace des fréquences : il semble donc y avoir redondance d'information, ce qui est le cas. En effet, soit un signal s réel (c'est à dire dont les valeurs sont réelles), décrit par ses coefficients $s_n \in \mathbb{R}$, $n \in [1, N]$. Dans l'espace des fréquences, calculons la composante de la transformée de notre signal réel correspondant à la fréquence k . On a :

$$\hat{s}_k = \sum_{n=1}^N s_n e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

Faisons de même pour la fréquence $N - k + 2$. On a :

$$\hat{s}_{N-k+2} = \sum_{n=1}^N s_n e^{-2i\pi \frac{(N-k+1)(n-1)}{N}} = \sum_{n=1}^N s_n e^{-2i\pi \frac{(-k+1)(n-1)}{N}} = \sum_{n=1}^N s_n e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

c'est-à-dire, puisque les valeurs s_n sont des réels :

$$\hat{s}_{N-k+2}^* = \hat{s}_k \quad (6.13)$$

On déduit donc les valeurs $\hat{s}_{N-k+2}$ à partir des valeurs $\hat{s}_k$: l'information dans le dual est donc redondante et il y a grosso modo deux fois trop d'information dans l'espace de Fourier en utilisant la TFD sur un signal réel. Si l'on a la relation 6.13, on dit que la TFD d'un signal réel possède la symétrie hermitienne.

Autre point d'interrogation : que se passe-t-il si on applique deux fois la TFD. Cela revient à calculer la matrice :

$$T = M_{F,q} \times M_{F,q}$$

On a alors :

$$t_{k',k} = \sum_{n=1}^N m_{k',n} m_{n,k}$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \left(e^{-2i\pi \frac{(k'-1)}{N}} \right)^{(n-1)} \left(e^{-2i\pi \frac{(n-1)}{N}} \right)^{(k-1)} \\
&= \sum_{n=1}^N \left(e^{-2i\pi \frac{(k'-1)}{N}} \right)^{(n-1)} \left(e^{-2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \right)^{(n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^N \left(e^{-2i\pi \frac{(k+k'-2)}{N}} \right)^{(n-1)} \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Par un raisonnement analogue à celui que nous avons mené pour la démonstration de la matrice inverse, il faut considérer que $e^{-2i\pi \frac{k+k'-2}{N}}$ est une racine N -ème de l'unité :

- soit $k' + k - 2 = 0$ modulo N et la somme sera égale à N ,
- soit $k' + k - 2 \neq 0$ modulo N et la somme sera nulle.

Il est alors facile de voir que l'on obtient une matrice composée de $N(N-1)$ valeurs nulles et de N valeurs égales à N disposées sur l'antidiagonale. C'est la matrice carrée particulière AD_N (voir le paragraphe 2.5.1) qui retourne l'ordre des indices (voir la relation 2.21), dont on donne ici un exemple pour $N = 8$ (c'est à dire $q = 3$) :

$$AD_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Appliqué à un signal temporel, cela revient à retourner le sens du temps. On a donc :

$$M_{F,q} \times M_{F,q} = N AD_N \tag{6.15}$$

Grâce à la relation 2.20

$$AD_N \times AD_N = I_N$$

on en déduit qu'appliquer 4 fois une TFD revient à appliquer l'opération identité, à un facteur multiplicatif N^2 près.

6.2.2 TFD et TFID : propriété “Translation/Onde de Fourier”

Que se passe-t-il si l'on décale dans le temps un signal (retard ou avance)? Soit un vecteur $\vec{B}$ de longueur N et de valeurs b_n . Pour une valeur $j \in [-N+1; N]$ donnée, on construit alors un vecteur $\vec{C}$, de valeurs c_n tel que

$$c_n = b_{n+j} \quad \forall n \in [1, N] \quad \text{et} \quad \forall j \in [1, N]$$

en appliquant la convention de circularité pour l'indice $n+j$ du coefficient b :

$$\begin{cases} \text{si } n+j > N & \text{alors } n+j \rightarrow n+j-N \\ \text{si } n+j < 1 & \text{alors } n+j \rightarrow n+j+N \end{cases} \tag{6.16}$$

Cette convention revient à considérer le signal comme des données agencées sur un cercle (une fois arrivé au dernier échantillon, on reprend du début). Cela revient à utiliser l'opération de décalage $D_{(j,N)} \times$:

$$\vec{C} = D_{(j,N)} \times \vec{B}$$

Soit $\vec{\tilde{B}}$ la TFD de $\vec{B}$ et $\vec{\tilde{C}}$ la TFD de $\vec{C}$. Il vient alors :

$$\hat{c}_k = \sum_{n=1}^N m_{k,n} c_n$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} c_n \\
 &= \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} b_{n+j} \\
 &= \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-j-1)}{N}} b_n \\
 &= \sum_{n=1}^N \left(e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} e^{-2i\pi \frac{(k-1)(-j)}{N}} \right) b_n \\
 &= e^{-2i\pi \frac{(-j)(k-1)}{N}} \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} b_n \\
 &= e^{2i\pi \frac{j(k-1)}{N}} \hat{b}_k
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

ce qui revient à écrire :

$$\hat{c}_k = e^{2i\pi \frac{j}{N}(k-1)} \hat{b}_k$$

Ce résultat est essentiel car il montre que la k -ème composante du vecteur $\vec{C}$ se déduit uniquement de la k -ème composante du vecteur $\vec{B}$ par une multiplication par un scalaire complexe. En particulier, on ne change par la norme de la k -ème composante dans le monde fréquentiel si on opère un décalage (avance ou retard) dans le monde temporel : pour ainsi dire, on conserve la même quantité d'information dans chaque composante du monde fréquentiel.

C'est la force de la transformée de Fourier discrète vis à vis des transformées de Hadamard ou SC (sinus-cosinus) puisque nous avons vu pour ces transformées qu'un décalage temporel du signal initial changeait la répartition et la norme des coefficients dans le dual.

Phénoménologiquement, si l'on analyse ce qui se passe dans le monde physique et le monde dual, on observe un changement dans la modalité de transformation :

— Dans l'espace temporel Θ , on effectue un retard³ $j\delta t$ sur le signal $\vec{C}$

$\Leftrightarrow$

— Dans l'espace fréquentiel Φ , on multiplie la TFD par une Onde de Fourier de fréquence $\frac{j}{N\delta t}$, c'est-à-dire :

$$\text{TFD} [\vec{C}] = \text{TFD} [D_{(j,N)} \times \vec{B}] = \overrightarrow{\text{OFD}}_{j,N} [\cdot \times] \text{TFD} [\vec{B}] \tag{6.18}$$

l'opération $[\cdot \times]$ signifiant que l'on multiplie les deux vecteurs point à point (c'est l'opération “ $\cdot$ ” de Matlab, voir 2.2.5). On en déduit qu'en multipliant point à point la TFD par une Onde de Fourier, on effectue une translation du signal temporel dont la valeur ne dépend que de la fréquence de l'Onde de Fourier.

On peut tout à fait appliquer ce raisonnement au monde dual Φ :

— Dans l'espace fréquentiel Φ , on effectue un décalage en fréquence $\delta f = \frac{k}{N\delta t}$ (on parle souvent de *shift* en fréquence)

$\Leftrightarrow$

— Dans l'espace temporel Θ , on multiplie le signal par une Onde de Fourier de fréquence $-\frac{k}{N\delta t}$.

Donc, grâce à cette “analyse duale”, en multipliant le signal temporel point à point par une Onde de Fourier, on effectue une translation de sa TFD.

$$\text{TFD} [\overrightarrow{\text{OFD}}_{j,N} [\cdot \times] \vec{B}] = D_{(j,N)} \times \text{TFD} [\vec{B}]$$

3. Si la valeur est négative, on a un vrai retard ; si la valeur est positive, on “avance”, ce qui n'a pas de sens en temps réel, puisque l'on ne peut connaître le futur. ...

6.2.3 TFD et TFID sur une Onde de Fourier

Revenons sur un point essentiel de la TFD : la matrice $M_{F,q}$ est symétrique, les vecteurs ligne sont orthogonaux entre eux, les vecteurs colonne sont orthogonaux entre eux.

Cette observation est importante : en effet, considérons comme signal une Onde de Fourier Discrète (ici la k -ème Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$) :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \\ e^{2i\pi \frac{(k-1)^2}{N}} \\ \vdots \\ e^{2i\pi \frac{(k-1)(N-1)}{N}} \end{pmatrix}$$

Cette Onde de Fourier est donc la conjuguée de la k -ème ligne de la matrice de Fourier. Les produits de chaque ligne de la matrice $M_{F,q}$ avec ce vecteur seront donc nuls, excepté pour le k -ème vecteur ligne correspondant à l'Onde de Fourier Discrète caractérisant l'entrée $\vec{B}$. Autrement dit, puisque en utilisant les coefficients $\hat{b}_j$ on peut écrire (relation 6.12) :

$$\vec{B} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{b}_j \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{j,N}$$

on en déduit qu'il n'y a qu'une seule valeur non nulle dans l'espace dual Φ :

$$\begin{cases} \hat{b}_j = 0 & j \neq k \\ \hat{b}_k = N \end{cases}$$

La TFD de notre signal ($\mathcal{OFD}$ paramétré par l'indice k) est alors associé dans l'espace Φ à un "signal Kronecker" indicé par le même indice k (c'est-à-dire nul partout, sauf pour une seule valeur).

Puisque l'on a :

$$M_{F,q} \times \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N} = N \vec{K}_{k,N}$$

on a donc le résultat essentiel suivant :

$$\text{TFD} \left[\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N} \right] = N \vec{K}_{k,N} \quad (6.19)$$

A une Onde de Fourier Discrète de l'univers Θ , indicé par k , correspond dans l'espace dual Φ un unique signal Kronecker : l'Onde de Fourier Discrète est donc parfaitement caractérisée par un indice, k , de l'espace dual Φ .

Ce résultat est bien connu des acousticiens : certains signaux stationnaires, les "sinusoïdes pures", ne sont composés que d'une seule fréquence caractérisant totalement le signal.

Inversement, on en déduit :

$$\text{TFID} \left[\vec{K}_{k,N} \right] = \frac{1}{N} \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$$

Au final, on a donc :

$$\begin{aligned} \text{TFD} \left[\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N} \right] &= N \vec{K}_{k,N} \\ \Leftrightarrow \\ \text{TFID} \left[\vec{K}_{k,N} \right] &= \frac{1}{N} \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N} \end{aligned} \quad (6.20)$$

6.2.4 TFD et TFID sur un "signal Kronecker"

Nous avons vu qu'un "signal Kronecker" pouvait se décomposer sur la base de Hadamard (paragraphe 3.4) : en particulier, tous les vecteurs du système de Hadamard étaient requis pour caractériser ce type de signal.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Calculons donc la TFD d'un "signal Kronecker". Considérons donc en première étape $\vec{K}_{1,N}$ (on a donc $K_{1,N}(1) = 1$ et $K_{1,N}(n) = 0 \ \forall n \neq 1$). En appliquant la définition de la TFD, on obtient :

$$\vec{B} = \text{TFD}(\vec{K}_{1,N}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c'est à dire :

$$\hat{b}_k = 1 \ \forall k \in [1, N]$$

On a donc un résultat apparemment étonnant : en appliquant la relation 6.12, on voit que le signal Kronecker $\vec{K}_{1,N}$, qui n'a qu'une seule valeur non nulle dans son espace temporel Θ , requiert la totalité des Ondes de Fourier Discrètes pour sa représentation dans le monde dual Φ :

$$\vec{K}_{1,N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{j,N}$$

A analyser de plus près, un signal Kronecker est un exemple typique de signal fortement discontinu : on parle de phénomène impulsif (une impulsion à $t = 0$, le reste des valeurs étant nulles) et on ne lui voit aucun aspect "lisse" comme peuvent le présenter les Ondes de Fourier Discrètes. Il ne semble donc pas étonnant qu'il faille, pour décrire ce signal à caractère impulsif, toutes les Ondes de Fourier Discrètes (nous avons aussi observé ce phénomène avec la transformation de Hadamard).

Pour un signal Kronecker quelconque $\vec{K}_{p,N}$ (avec $p \in [1, N]$), le résultat peut s'obtenir de deux manières différentes :

— soit en appliquant la formule de la TFD et on obtient :

$$\hat{b}_k = e^{-2i\pi \frac{(k-1)(p-1)}{N}}$$

— soit en remarquant que $\vec{K}_{p,N}$ est le translaté temporel de $\vec{K}_{1,N}$ d'un intervalle de temps $(p-1)\delta t$. On a en effet :

$$\vec{K}_{p,N} = [D_{p,N} \times] \vec{K}_{1,N}$$

Dans ce cas, on peut appliquer le résultat du paragraphe précédent (relation 6.18) car la TFD de $\vec{K}_{p,N}$ s'obtient alors en multipliant (point à point) la TFD de $\vec{K}_{1,N}$ par l'Onde de Fourier de fréquence $\frac{p-1}{N\delta t}$, ce qui donne :

$$\hat{b}_k = e^{-2i\pi \frac{(k-1)(p-1)}{N}}$$

On remarque au passage que les coefficients $\hat{b}_k$ ainsi définis sont ceux de l' $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{p,N}^*$, ce qui permet d'écrire :

$$\text{TFD}[\vec{K}_{n,N}] = \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^*$$

On a donc

$$\vec{K}_{n,N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-2i\pi \frac{(n-1)(j-1)}{N}} \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{j,N}$$

et donc la totalité des Ondes de Fourier Discrètes sont requises pour décrire ce Kronecker.

Il faut bien remarquer que $\forall k, |\hat{b}_k| = 1$: le module est le même, seule la phase change. Le changement de la phase dépend de deux paramètres :

- de la valeur du décalage temporel p : en l'absence de décalage (c'est à dire $p = 1$), il n'y aura aucun déphasage.
- de l'indice j de l' $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{j,N}$: plus la fréquence est grande, plus le déphasage doit être grand. En effet, un retard et un déphasage représentent la même chose pour une exponentielle complexe. Si l'on retarde deux exponentielles complexes de la même valeur temporelle, cela revient à leur faire subir deux déphasages différents, d'autant plus élevés que la fréquence est grande.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } **sans modifications**
Voir page 172

Au final, on a donc :

$$\begin{aligned} \text{TFD} \left[\vec{K}_{n,N} \right] &= \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^* \\ &\Leftrightarrow \\ \text{TFID} \left[\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^* \right] &= \vec{K}_{n,N} \end{aligned} \quad (6.21)$$

6.2.5 Récapitulatif

En résumé, le système suivant illustre les liens étroits entre Krnoecker et Ondes de Fourier Discrètes :

$$\begin{cases} \text{TFD} \left[\vec{K}_{n,N} \right] = \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^* & \text{TFID} \left[\vec{K}_{k,N} \right] = \frac{1}{N} \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N} \\ \text{TFD} \left[\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N} \right] = N \vec{K}_{k,N} & \text{TFID} \left[\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^* \right] = \vec{K}_{n,N} \end{cases} \quad (6.22)$$

Dans le cas particulier $n = 1$, en notant :

$$\vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

on a bien évidemment :

$$\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{1,N} = \vec{1}$$

et on retrouve :

$$\begin{cases} \text{TFD} \left[\vec{K}_{1,N} \right] = \vec{1} & \text{TFID} \left[\vec{K}_{1,N} \right] = \frac{1}{N} \vec{1} \\ \text{TFD} \left[\vec{1} \right] = N \vec{K}_{1,N} & \text{TFID} \left[\vec{1} \right] = \vec{K}_{1,N} \end{cases} \quad (6.23)$$

Dans le cas particulier $n = 2$, on a pour l' $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{2,N}$:

$$\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{2,N}(n) = e^{2i\pi \frac{k-1}{N}} \quad \forall n \in [1, N]$$

ce qui donne :

$$\text{TFD} \left[\vec{K}_{2,N} \right] (k) = e^{-2i\pi \frac{k-1}{N}} \quad (6.24)$$

c'est à dire une Onde de Fourier Discrète effectuant une unique oscillation sur N , longueur du signal.

Si on pose :

$$z_k = e^{2i\pi \frac{k-1}{N}}$$

on peut écrire :

$$\text{TFD} \left[\vec{K}_{2,N} \right] (k) = z_k^{-1} \quad (6.25)$$

ce qui se généralise par :

$$\text{TFD} \left[\vec{K}_{n,N} \right] (k) = (z_k^{-1})^{n-1} = z_k^{-(n-1)} \quad (6.26)$$

6.3 Propriétés essentielles de la TFD et de la TFID

6.3.1 Décomposition en Ondes de Fourier Discrètes

La TFD possède une caractéristique essentielle : elle permet de décomposer tout signal discret comme combinaison d'Ondes de Fourier Discrètes.

En effet, soit un vecteur de données $\vec{B}$ et soit sa TFD $\vec{\hat{B}}$:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{N-1} \\ b_N \end{pmatrix} \quad \vec{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \dots \\ \hat{b}_{N-1} \\ \hat{b}_N \end{pmatrix}$$

Sa TFD $\vec{\hat{B}}$ peut s'écrire⁴ :

$$\begin{aligned} \vec{\hat{B}} &= \hat{b}_1 \vec{K}_{1,N} + \hat{b}_2 \vec{K}_{2,N} + \dots + \hat{b}_k \vec{K}_{k,N} + \dots + \hat{b}_N \vec{K}_{N,N} \\ &= \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \vec{K}_{k,N} \end{aligned}$$

Or on connaît la TFID de $\vec{K}_{k,N}$ (relation 6.22) :

$$\text{TFID} [\vec{K}_{k,N}] = \frac{1}{N} \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N}$$

On en déduit le principe fondamental de décomposition en Ondes de Fourier Discrètes :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{TFID} [\vec{\hat{B}}] \\ &= \text{TFID} \left[\sum_{k=1}^N \hat{b}_k \vec{K}_{k,N} \right] \\ &= \sum_{k=1}^N \text{TFID} [\hat{b}_k \vec{K}_{k,N}] \\ &= \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \text{TFID} [\vec{K}_{k,N}] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N} \end{aligned}$$

c'est à dire la relation qui exprime que tout signal se décompose en somme d'Ondes de Fourier Discrètes :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N}} \quad (6.27)$$

Donc, tout signal discret peut se décomposer en somme d' $\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}$, le coefficient⁵ de chaque $\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}$ correspondant à la k -ème valeur de sa TFD.

6.3.2 Relation de Parseval discrète

Soit un vecteur de données $\vec{B}$ et sa TFD $\vec{\hat{B}}$ (avec $N = 2^q$). Calculons le produit hermitien de $\vec{\hat{B}}$ avec lui-même (ce qui revient à calculer le carré de sa norme) :

$$\vec{\hat{B}} \odot_H \vec{B} = (M_{F,q} \times \vec{\hat{B}}) \odot_H (M_{F,q} \times \vec{B})$$

4. On parle alors de décomposition canonique

5. à un facteur multiplicatif $1/N$ près

Utilisons maintenant une propriété du produit hermitien (relation 2.30) : on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} (M_{F,q} \times \vec{B}) \odot_H (M_{F,q} \times \vec{B}) &= (M_{F,q}^{t*} (M_{F,q} \times \vec{B})) \odot_H \vec{B} \\ &= ((M_{F,q}^{t*} \times M_{F,q}) \times \vec{B}) \odot_H \vec{B} \end{aligned}$$

et puisque :

$$M_{F,q}^{t*} \times M_{F,q} = N I_N$$

on obtient la relation suivante :

$$\vec{B} \odot_H \vec{B} = \frac{1}{N} \vec{B} \odot_H \vec{B} \quad (6.28)$$

c'est à dire :

$$\boxed{\sum_{n=1}^N b_n b_n^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{b}_n^* \hat{b}_n} \quad (6.29)$$

Cette relation s'appelle **relation de Parseval discrète** et nous permet d'affirmer que, au facteur $1/N$ près, on conserve la norme quand on passe de l'espace Θ à l'espace Φ .

Il faut noter que, lorsque l'on passe de l'espace Φ à l'espace Θ , on utilise la matrice $M_{Finverse,q}$ qui possède la propriété :

$$M_{Finverse,q}^{t*} \times M_{Finverse,q} = \frac{1}{N} I_N$$

ce qui permet de démontrer directement :

$$\sum_{n=1}^N \hat{b}_n^* \hat{b}_n = N \sum_{n=1}^N b_n b_n^*$$

6.3.3 TFD et corrélation de signaux réels

Définition

Nous avons déjà analysé comment deux événements pouvaient être corrélés (paragraphe 1.3) en associant le terme de ressemblance au terme de corrélation. Nous allons maintenant définir un opérateur spécifique du traitement de signal, appelé **corrélation**, notée dans ce document $\otimes$, et en expliciter les propriétés.

La ressemblance entre deux signaux réels B et C en calculant le produit scalaire de leurs vecteurs descripteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$. Si ces deux signaux sont de longueur N , on calcule :

$$\vec{B} \odot \vec{C} = \sum_{n=1}^N b_n c_n$$

et nous avons vu que ce résultat pouvait donner lieu à l'interprétation suivante dans deux cas :

- $\vec{B} \odot \vec{C} = 0$: les deux vecteurs sont orthogonaux (donc a priori "décorrélés", c'est à dire ne partageant pas d'information)
- $|\vec{B} \odot \vec{C}| = |\vec{B}| |\vec{C}|$, c'est à dire une valeur maximale. Les deux vecteurs sont linéairement dépendants, et il existe une valeur λ telle que $\vec{C} = \lambda \vec{B}$. Les deux données sont alors parfaitement corrélées, la seconde n'apportant aucune information nouvelle par rapport à la première (hormis le facteur λ qui peut se voir comme un simple gain).

Ce calcul unique de ressemblance n'est pas très concluant en traitement du signal : en effet, tout décalage temporel dans l'acquisition des données changera fondamentalement ce résultat. Aussi on va calculer un vecteur de résultats $\vec{R}$ (et non une simple valeur) en décalant les valeurs du second vecteur par pas de δt . Par exemple, pour un décalage temporel de j pas, on a alors le vecteur $\vec{C}' = D_{(j,N)} \times \vec{C}$, ce qui permet de calculer la composante r_j de $\vec{R}$:

$$r_j = \vec{B} \odot \vec{C}' = \vec{B} \odot (D_{(j,N)} \times \vec{C}) = \sum_{n=1}^N b_n c_{n+j-1}$$

avec la convention de circularité (si $n + j - 1 > N$, on prendra, au lieu de $n + j - 1$, $n + j - 1 - N$).
On obtient ainsi la définition de la corrélation :

$$\vec{R} = \vec{B} \otimes \vec{C} \Leftrightarrow r_j = \sum_{n=1}^N b_n c_{n+j-1} \quad (6.30)$$

Calculons maintenant la transformée de Fourier Discrète de ce vecteur $\vec{R}$:

$$\begin{aligned} \hat{r}_k &= \sum_{j=1}^N m_{k,j} r_j \\ &= \sum_{j=1}^N m_{k,j} \left(\sum_{n=1}^N b_n c_{n+j-1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N m_{k,j} b_n c_{n+j-1} \end{aligned}$$

Pour bénéficier des propriétés du noyau exponentiel $m_{k,j}$ de la TFD (relation 6.7) :

$$\hat{b}_k = \sum_{n=1}^N m_{k,n} b_n = \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} b_n$$

effectuons une jonglerie sur l'indice j :

$$\begin{aligned} j &= j + (n - 1) - (n - 1) \\ &= (n + j - 1) - (n - 1) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$m_{k,j} = m_{k,(n+j-1)-(n-1)}$$

On peut alors continuer le calcul précédent :

$$\begin{aligned} \hat{r}_k &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N m_{k,j} b_n c_{n+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N m_{k,(n+j-1)-(n-1)} b_n c_{n+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n+j-1-(n-1)-1)}{N}} b_n c_{n+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n+j-1-1)}{N}} e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} b_n c_{n+j-1} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N m_{k,n+j-1} m_{k,n}^* b_n c_{n+j-1} \\ &= \sum_{n=1}^N \left(m_{k,n}^* b_n \left(\sum_{j=1}^N m_{k,(j+n)-1} c_{(n+j)-1} \right) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N \left(m_{k,n}^* b_n \left(\sum_{j'=1}^N m_{k,j'-1} c_{j'-1} \right) \right) \end{aligned}$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^N ((m_{k,n} b_n^*)^* \hat{c}_k) \\ &= \hat{b}_k^* \hat{c}_k \end{aligned}$$

On obtient alors le résultat assez remarquable :

$$\text{TFD} [\vec{R}] = \text{TFD} [\vec{B} \otimes \vec{C}] = \text{TFD} [\vec{B}^*]^* [\cdot \times] \text{TFD} [\vec{C}]$$

l'opération $[\cdot \times]$ étant la multiplication point à point des composantes des vecteurs (l'opération $["*"]$ de Matlab définie au paragraphe 2.2.5).

Il faut bien sentir toute la saveur de cette relation :

— au lieu d'effectuer une opération de corrélation définie par la relation

$$r_j = \sum_{n=1}^N b_n c_{n+j-1}$$

on obtient un résultat identique en calculant $\text{TFD} [\vec{B}]^*$ et $\text{TFD} [\vec{C}]$, puis un produit point à point de ces deux grandeurs, et enfin une TFD inverse.

— le contenu fréquentiel du résultat est une opération élémentaire (multiplication) sur les composantes fréquentielles des deux TFD. Si l'un des deux signaux a une de ses composantes fréquentielles nulle, le résultat aura la même composante fréquentielle nulle. Si l'un des deux signaux a une de ses composantes fréquentielles égale à 1, le résultat aura la même composante fréquentielle que l'autre signal.

On voit donc apparaître la notion de traitement fréquentiel. Soit un signal $\vec{C}$ auquel on aimerait modifier le contenu dans l'espace des fréquences (par exemple, en supprimant une composante stationnaire à la fréquence f_x lié à un phénomène parasite). Il suffit de trouver un signal $\vec{B}$ tel que sa TFD ait une composante nulle à cette fréquence f_x et ait les autres composantes égales à 1. Dans ce cas, on retrouvera tout le contenu du signal initial $\vec{C}$, hormis ce qui constitue la composante de fréquence f_x .

En réalité, ce ne sera pas l'opérateur de corrélation qui est alors choisi pour traiter le signal initial : en effet, on peut déplorer un manque de symétrie dans le plan de Fourier puisque c'est le conjugué de la TFD de $\vec{B}$ qui est utilisé. Pour symétriser cette relation, il faudra modifier l'opération de corrélation pour que la TFD du résultat soit le produit des TFD : on obtient ainsi la définition de la convolution, qui sera étudiée au paragraphe 6.3.4.

Exemple de corrélation

La figure 6.1 illustre ce mécanisme de corrélation : pour un signal initial $\vec{B}$ de longueur N que l'on veut corréler avec un signal de même longueur $\vec{C}$, il faut effectuer N étapes, chaque étape consistant d'abord à aligner une copie décalée de $\vec{C}$ avec $\vec{B}$, puis à faire le produit scalaire de ces deux vecteurs.

6.3.4 TFD et convolution

Définition

Nous avons donc trouvé une transformation telle que la TFD de la transformation s'exprime à l'aide de la TFD des signaux initiaux, mais en faisant intervenir une opération de conjugaison.

L'objectif de ce paragraphe est de trouver une transformation entre deux signaux telle que la TFD de la transformation soit le produit des TFD des signaux.

Cette transformation s'appelle **convolution** et se définit par :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} \Leftrightarrow r_j = \sum_{n=1}^N b_n c_{j-n+1} \quad (6.31)$$

Cette définition ressemble énormément à la corrélation : la différence vient de ce que le signal $\vec{C}$ est retourné selon le temps (les indices sont balayés dans le sens des temps décroissants).

Vérifions que cette définition a bien les propriétés recherchées. Soit $\vec{R} = \text{TFD} [\vec{R}]$ la TFD de $\vec{R}$, défini par la relation explicitant l'opération de convolution 6.31. On a :

$$\begin{aligned}\hat{r}_k &= \sum_{j=1}^N m_{k,j} r_j \\ &= \sum_{j=1}^N m_{k,j} \left(\sum_{n=1}^N b_n c_{j-n+1} \right) \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N m_{k,j} b_n c_{j-n+1}\end{aligned}$$

Par une jonglerie analogue à celle du calcul de la corrélation, on a :

$$\begin{aligned}j &= j - (n - 1) + (n - 1) \\ &= (j - n + 1) + (n - 1)\end{aligned}$$

Ceci permet de continuer le calcul précédent :

$$\begin{aligned}\hat{r}_k &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N m_{k,j} b_n c_{j-n+1} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N m_{k,(j-n+1)+(n-1)} b_n c_{j-n+1} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)((j-n+1)+(n-1)-1)}{N}} b_n c_{j-n+1} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)((j-n+1)-1)}{N}} e^{-2i\pi \frac{(n-1)}{N}} b_n c_{j-n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \left(m_{k,n} b_n \left(\sum_{j=1}^N m_{k,j-n+1} c_{j-n+1} \right) \right) \\ &= \left(\sum_{n=1}^N m_{k,n} b_n \hat{c}_k \right) \\ &= \hat{b}_k \hat{c}_k\end{aligned}$$

On obtient alors le résultat remarquable :

$$\text{TFD} [\vec{R}] = \text{TFD} [\vec{B} \star \vec{C}] = \text{TFD} [\vec{B}] [\cdot \times] \text{TFD} [\vec{C}] \quad (6.32)$$

l'opération $[\cdot \times]$ signifiant que l'on multiplie les deux vecteurs composante par composante (définition donnée par la relation 2.6).

On voit que notre espace dual a des propriétés étonnantes : la TFD d'une convolution est le produit des TFD. On change donc le mode opératoire de la transformation : à une convolution dans l'espace Θ , on fait correspondre une multiplication dans l'espace Φ .

Cette propriété essentielle n'est pas spécifique de l'espace initial : on peut donc l'appliquer à l'espace Φ . On a donc la propriété suivante : à une convolution dans l'espace Φ , on fait correspondre une multiplication dans l'espace Θ .

Pour finir, on peut en déduire que la TFD d'un produit de deux signaux de l'espace Θ s'obtient par corrélation de leurs TFD.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Propriétés de la convolution

La convolution possède 3 propriétés essentielles :

— commutativité :

$$\vec{B} \star \vec{C} = \vec{C} \star \vec{B}$$

propriété évidente puisque le produit ($[\cdot \times]$ dans l'espace de Fourier) est commutatif.

— associativité :

$$\vec{B} \star (\vec{C} \star \vec{D}) = (\vec{B} \star \vec{C}) \star \vec{D}$$

propriété évidente puisque le produit ($[\cdot \times]$ dans l'espace de Fourier) est associatif.

— linéarité

$$\begin{cases} \vec{B} \star (\vec{C} + \vec{D}) = \vec{B} \star \vec{C} + \vec{B} \star \vec{D} \\ \vec{B} \star (\lambda \vec{C}) = \lambda (\vec{B} \star \vec{C}) \end{cases}$$

La convolution présente aussi une propriété d'invariance par translation (ou invariance par décalage) : traduire un des termes de la convolution revient à traduire le résultat de la convolution.

Exemple de convolution

La figure 6.2 illustre ce mécanisme de convolution : pour un signal initial $\vec{B}$ de longueur N que l'on veut convoluer avec un signal de même longueur $\vec{C}$, il faut effectuer N étapes, chaque étape consistant d'abord à aligner une copie décalée et retournée de $\vec{C}$ avec $\vec{B}$, puis à faire le produit scalaire de ces deux vecteurs.

6.3.5 Matrice de convolution

Nous avons défini la convolution entre deux signaux par la relation 6.31 :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} \Leftrightarrow r_j = \sum_{n=1}^N b_n c_{j-n+1}$$

Il est possible de la définir sous la forme d'un opérateur matriciel. Pour cela, si l'on connaît le signal discret $\vec{C} = (c_n)$, on peut définir la matrice $MC = (mc_{n,m})$ par la relation :

$$mc_{n,m} = c_{m-n+1} \quad (6.33)$$

en appliquant la convention de circularité :

$$\begin{aligned} c_{m-n+1} &= c_{m-n+1+N} \text{ si } m-n+1 \leq 0 \\ c_{m-n+1} &= c_{m-n+1-N} \text{ si } m-n+1 > N \end{aligned}$$

Cette matrice a une forme connue : c'est une matrice de Toeplitz. Puisqu'elle vérifie de plus notre convention de circularité, on parle de **matrice de Toeplitz circulante**. Concrètement, on dit qu'une matrice est "Toeplitz circulante" si toutes les lignes de valeurs parallèles à la diagonale de la matrice sont composées de valeurs égales et si placer la première colonne après la dernière colonne (ou la première ligne après la dernière ligne) ne change pas cette répartition de valeurs.

On obtient ainsi la définition d'une **matrice de convolution** : c'est une matrice de Toeplitz circulante de dimension $N \times N$ caractérisée par les N valeurs d'un signal discret de longueur N . En exemple la matrice suivante est bien une matrice "Toeplitz circulante" (on a mis en gras les coefficients c_2) :

$$MC = \begin{pmatrix} c_1 & \mathbf{c_2} & c_3 & \dots & c_{N-2} & c_{N-1} & c_N \\ c_N & c_1 & \mathbf{c_2} & \dots & c_{N-3} & c_{N-2} & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_N & c_1 & \dots & c_{N-4} & c_{N-3} & c_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_4 & c_5 & c_6 & \dots & c_1 & \mathbf{c_2} & c_3 \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_N & c_1 & \mathbf{c_2} \\ \mathbf{c_2} & c_3 & c_4 & \dots & c_{N-1} & c_N & c_1 \end{pmatrix}$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Ce passage biunivoque de vecteur en matrice permet l'écriture matricielle d'une convolution :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} \Leftrightarrow \vec{R} = [MC \times] (\vec{B}) = MC \times \vec{B}$$

Une matrice de convolution possède deux propriétés intéressantes :

- le produit de deux matrices de convolution est une matrice de convolution (le produit de matrice est donc une loi interne pour les matrices de convolution).
- le produit de deux matrices de convolution est commutatif.



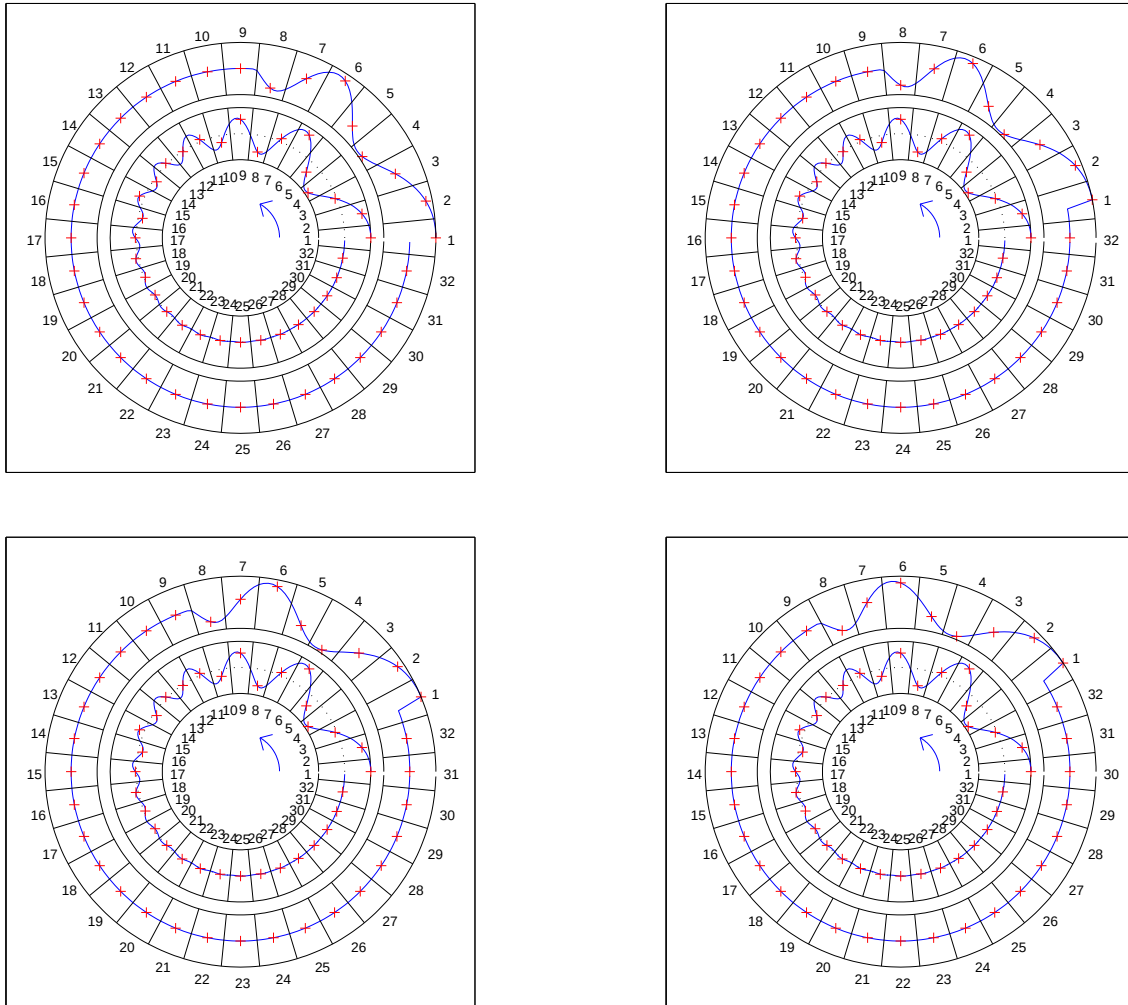


FIGURE 6.1 – Exemple de positionnement de deux signaux pour le calcul des coefficients d’une corrélation de deux signaux ($\vec{B}$ est à l’intérieur, $\vec{C}$ est à l’extérieur). En haut à gauche, l’agencement des données au point 1, permettant le calcul de la valeur r_1 . En haut à droite : l’agencement permettant le calcul de r_2 : pour cela le signal $\vec{C}$ est retardé d’un pas temporel. En bas à gauche : l’agencement permettant le calcul de r_3 : pour cela le signal $\vec{C}$ est retardé de 2 pas temporels. En bas à droite : l’agencement permettant le calcul de r_4 : pour cela le signal $\vec{C}$ est retardé de 3 pas temporels.

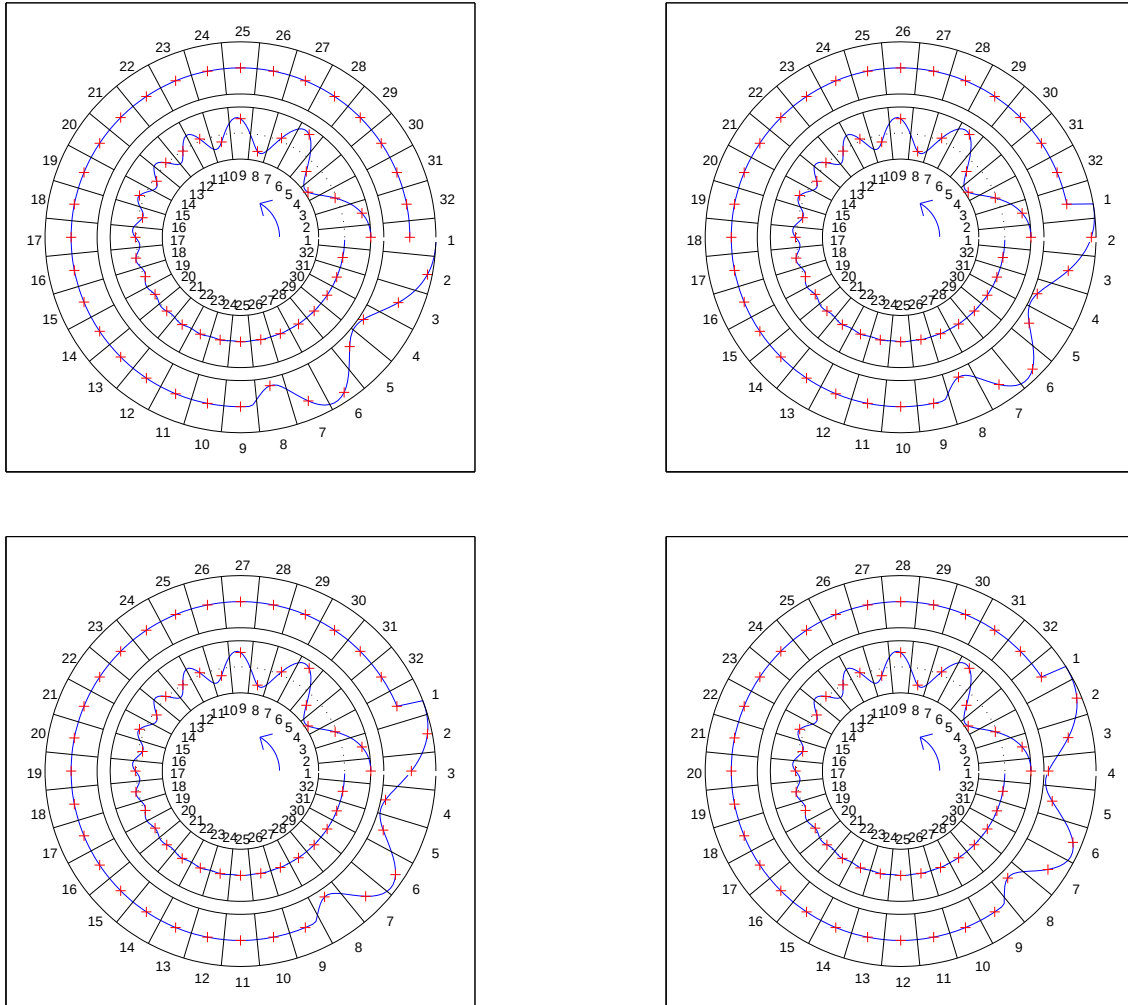


FIGURE 6.2 – Exemple de positionnement de deux signaux pour le calcul des coefficients d’une convolution ($\vec{B}$ est à l’intérieur, $\vec{C}$ est à l’extérieur). En haut à gauche, l’agencement des données au point 1, permettant le calcul de la valeur r_1 : $\vec{C}$ a été retourné dans le temps. En haut à droite : l’agencement permettant le calcul de r_2 : pour cela le signal $\vec{C}$ a été retourné dans le temps et retardé d’un pas temporel. En bas à gauche : l’agencement permettant le calcul de r_3 : pour cela le signal $\vec{C}$ a été retourné dans le temps et retardé de 2 pas temporels. En bas à droite : l’agencement permettant le calcul de r_4 : pour cela le signal $\vec{C}$ a été retourné dans le temps et retardé de 3 pas temporels.

Chapitre 7

Traitements des signaux discrets

Nous avons donc vu quelques propriétés des signaux discrets : en particulier, le rôle des espaces duaux (Hadamard, Fourier) qui permettent une représentation différente d'un signal sans perte d'information. En pratique, c'est l'espace de Fourier qui joue un rôle incontournable en traitement du signal : on peut en trouver une raison dans le rôle clé que jouent les fonctions circulaires dans l'analyse de phénomènes physiques courants (oscillateur amorti, ...). C'est donc lui qui est le plus souvent utilisé et c'est donc dans ce cadre que nous allons détailler quelques traitements usuels appliqués aux signaux discrets.

La principale catégorie de traitements usuels est celle des **filtres linéaires** : en effet, les transformations linéaires sont une étape indispensable à la compréhension de tout phénomène et nous avons déjà rencontré leur définition au chapitre 2, (relation 2.28) :

$$\mathcal{T}(\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}) = \lambda \mathcal{T}(\vec{B}) + \mu \mathcal{T}(\vec{C})$$

Appliquer un traitement linéaire à un signal permet de conserver l'intégrité de certaines caractéristiques de linéarité du phénomène analysé. En sus, l'algèbre linéaire est un outil parfaitement adapté au traitement d'un signal discret. Dans ce cadre nous définirons donc les **SLI** (Systèmes Linéaires Invariants par translation) et nous verrons qu'ils s'expriment comme des convolutions. Ceci nous conduira à définir une nouvelle transformée, la transformée en Z.

Face à ces exigences de linéarité, nous aborderons néanmoins à la fin de ce chapitre d'autres types de traitements qui n'auront pas cette propriété de linéarité (comme la décimation, *i.e.* la construction d'un nouveau signal en ne prenant qu'un point sur deux d'un signal initial). Nous verrons alors que l'intégrité du signal initial est fortement remise en cause puisque le résultat pourra être fondamentalement différent du signal initial, voire induire des informations erronées sur le signal initial : on parle alors de phénomène d'**aliasing**, *alias* signifiant "faux nom" (et aussi "nom d'emprunt") ce qui donne une connotation de falsification à ce traitement.

Dans ce chapitre, nous considérerons un vecteur $\vec{B}$ représentant un signal de N valeurs : les indices "licites"¹ pour désigner ces valeurs sont donc comprises entre 1 et N . En l'absence de toute information complémentaire, nous allons considérer ce vecteur sous forme cyclique, ce qui revient à appliquer la règle de circularité (définie par la relation 6.16) qui assure qu'un indice k appartient toujours au domaine $[1, N]$:

- pour tout entier $k > N$, on fait correspondre des valeurs $k' = k - rN$ (avec r entier) strictement positive : la plus petite de ces valeurs k' correspond donc à un indice licite de $\vec{B}$
- pour tout entier $k < 1$, on fait correspondre la valeur $k' = k + rN$ (avec r entier) inférieure ou égale à N : la plus grande de ces valeurs k' correspond donc à un indice licite de $\vec{B}$

Ce fut grâce à cette hypothèse de circularité que nous avons pu obtenir le résultat clé sur la convolution (formule 6.32) :

$$\text{TFD}[\vec{R}] = \text{TFD}[\vec{B} \star \vec{C}] = \text{TFD}[\vec{B}] \cdot [\times] \text{TFD}[\vec{C}]$$

l'opération $[\times]$ signifiant que l'on multiplie les deux vecteurs composante par composante.

1. Ces indices sont ainsi définis pour permettre une transcription directe dans le monde de Matlab.



7.1 Analyse de Fourier

Le premier traitement que l'on peut effectuer sur un signal discret $\vec{B}$ est de l'analyser avec la Transformée de Fourier Discrète. On obtient alors le signal $\vec{\hat{B}}$:

$$\vec{\hat{B}} = \text{TFD} [\vec{B}]$$

Cette analyse donne alors une décomposition en Ondes de Fourier Discrètes puisque l'on a la relation essentielle suivante (équation 6.27) :

$$\vec{B} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N}$$

7.1.1 Signaux quelconques

A priori, les composantes du signal (les $b_n, n \in [1, N]$) peuvent être des valeurs réelles ou complexes. Commençons par le cas général des signaux à valeurs complexes. Soit un signal discret $\vec{B}$ avec $b_n \in \mathbb{C}, \forall n \in [1, N]$. Alors $\vec{\hat{B}}$ est tel que $\hat{b}_k \in \mathbb{C}, \forall k \in [1, N]$.

Il est intéressant d'analyser la signification de ce résultat. En effet, pour tout $\hat{b}_k, k \in [1, N]$:

- la norme de ce complexe, $|\hat{b}_k|$ détermine le poids de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N}$ dans la décomposition canonique de $\vec{B}$ sur la base des OFD.
- la phase de ce complexe, φ_k , va s'ajouter à la phase propre des valeurs de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N}$. Or on sait qu'un déphasage appliqué sur une Onde de Fourier Discrète revient à faire subir un retard à cette OFD.

En particulier, si on change l'origine temporelle du signal discret $\vec{B}$, on ne change pas l'amplitude des coefficients $\hat{b}_k$: seule la phase de ces coefficients change.

7.1.2 Signaux à valeurs réelles

Soit un signal $\vec{B}$ avec $b_n \in \mathbb{R}, \forall n \in [1, N]$.

- calculons $\hat{b}_k$ pour $k = 1$ (relation 6.12) :

$$\hat{b}_1 = \overrightarrow{\text{OFD}}_{1,N} \odot_H \vec{B} = \sum_{n=1}^N b_n$$

et puisque le signal est réel, $\hat{b}_1$ est réel. On a bien évidemment $\hat{b}_1^* = \hat{b}_1$.

- calculons $\hat{b}_k$ pour $k \in [2, N/2]$:

$$\hat{b}_k = \overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N} \odot_H \vec{B}$$

- calculons $\hat{b}_{N+2-k}$ pour $k \in [2, N/2]$:

$$\hat{b}_{N+2-k} = \overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N+2-k} \odot_H \vec{B}$$

Or on a :

$$\begin{aligned} \text{OFD}_{N+2-k,N}(n) &= e^{2i\pi \frac{(N+2-k-1)(n-1)}{N}} \\ &= e^{2i\pi \frac{(N+1-k)(n-1)}{N}} \\ &= e^{2i\pi \frac{(N-1)(n-1)}{N}} e^{2i\pi \frac{(-k+1)(n-1)}{N}} \\ &= \left(e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \right)^* \\ &= (\text{OFD}_{k,N})^*(n) \end{aligned}$$

On en déduit, puisque le signal initial est à valeurs réelles :

$$\hat{b}_{N+2-k} = \hat{b}_k^* \quad \forall k \in [2, N] \quad (7.1)$$

expression qui est aussi valide pour $k = 1$ avec l'hypothèse de circularité.

On dit que la TFD possède la propriété de symétrie hermitienne.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



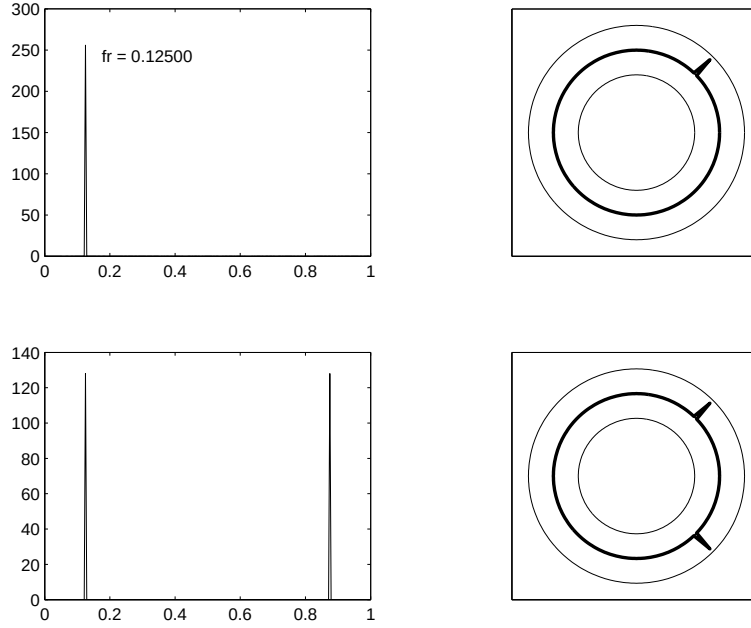


FIGURE 7.1 – En haut : partie réelle de la TFD de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{32,256}$ (fréquence réduite de 0,125), en représentation classique à gauche (fréquences réduites entre 0 et 1) et en représentation circulaire à droite. Cette partie réelle est un Kronecker unique d'amplitude $N = 256$ (la partie imaginaire de cette TFD est nulle). En bas : TFD de la partie réelle de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{32,256}$, c'est à dire la TFD d'un cosinus discret. On observe clairement la symétrie hermitienne sur la représentation circulaire puisqu'au Kronecker correspondant à la fréquence réduite de 0,125 on associe le Kronecker correspondant à la fréquence réduite de 0,875 (symétrie par rapport à l'axe horizontal, qui contient la fréquence réduite 0,5).

7.1.3 Exemples : signaux circulaires et OFD

Nous allons interpréter ces résultats sur des OFD et des fonctions circulaires discrètes. En particulier, nous allons nous intéresser aux fonctions cosinus discrets $\vec{G}_k$ défini par :

$$\vec{G}_k = \text{Re} \left(\overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N} \right)$$

et aux fonctions sinus discrets $\vec{H}_k$:

$$\vec{H}_k = \text{Im} \left(\overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N} \right)$$

Puisque l'on a (relation 6.19) :

$$\text{TFD} \left[\overrightarrow{\text{OFD}}_{k,N} \right] = N \vec{K}_{k,N}$$

il est facile de démontrer les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \text{TFD} \left[\vec{G}_k \right] &= \frac{N}{2} \left(\vec{K}_{k,N} + \vec{K}_{N+2-k,N} \right) \\ \text{TFD} \left[\vec{H}_k \right] &= \frac{N}{2} i \left(\vec{K}_{k,N} - \vec{K}_{N+2-k,N} \right) \end{aligned}$$

La figure 7.1 illustre ce résultat pour une OFD avec $N = 256$ et $k = 32$: la symétrie hermitienne est clairement visible dans la symétrie axiale de la représentation circulaire (rappelons que la fréquence réduite 0 se trouve sur l'axe horizontal). Remarquons aussi que cette TFD a une composante réelle non nulle en un seul point et une composante imaginaire nulle partout.

Il est intéressant de voir ce qui se passe quand on fait croître la fréquence réduite :

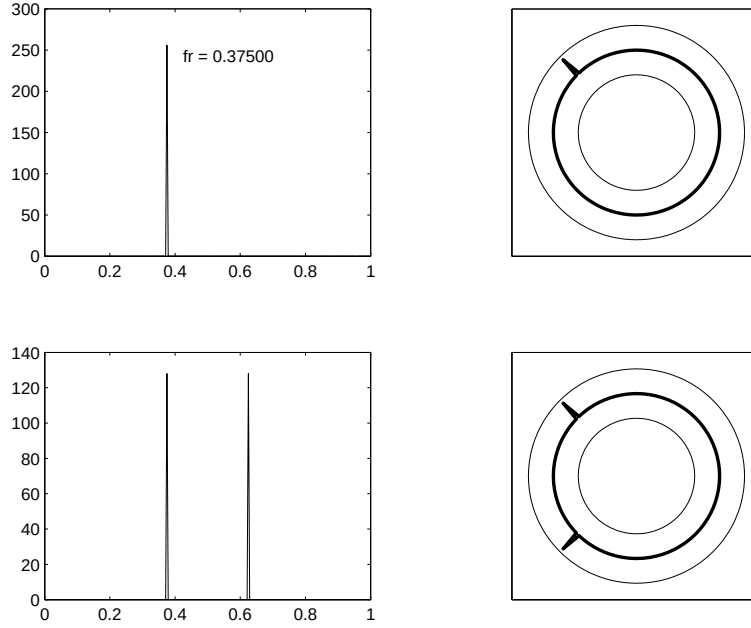


FIGURE 7.2 – En haut : partie réelle de la TFD de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{96,256}$ (fréquence réduite de 0,375), en représentation classique à gauche (fréquences réduites entre 0 et 1) et en représentation circulaire à droite. Cette partie réelle est un Kronecker unique d'amplitude $N = 256$ (la partie imaginaire de cette TFD est nulle). En bas : partie réelle de la TFD de la partie réelle de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{96,256}$, c'est à dire la TFD d'un cosinus discret. On observe clairement la symétrie hermitienne sur la représentation circulaire puisqu'au Kronecker correspondant à la fréquence réduite de 0,375 on associe le Kronecker correspondant à la fréquence réduite de 0,625 (symétrie par rapport à l'axe horizontal).

- Pour l'OFD avec $N = 256$ et $k = 96$ (figure 7.2), en comparant avec le résultat de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{32,256}$, on retrouve la même symétrie. Les Kroneckers sont tournés trois fois plus que précédemment en représentation circulaire.
- Pour l'OFD avec $N = 256$ et $k = 160$ (figure 7.3), en comparant avec le résultat de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{32,256}$, on retrouve la même symétrie. Les Kroneckers sont tournés cinq fois plus que pour l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{32,256}$ en représentation circulaire.

Le problème est que le diagramme de la fonction circulaire “cosinus” correspondant à l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{160,256}$ est identique à celui de la fonction circulaire “cosinus” correspondant à l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{96,256}$. Rien d'étonnant à cela puisque le cosinus discret représente une fonction cosinus, qui est paire, et que l'on a la relation :

$$\cos\left(2\pi \frac{(N+2-k-1)(n-1)}{N}\right) = \cos\left(2\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}\right)$$

La symétrie hermitienne a donc une conséquence sur les signaux réels de cet exemple : la TFD du signal à fréquence réduite $f_r \in]0, 5[$ usurpe la place de la TFD du signal à fréquence réduite $f_r \in]0, 0, 5[$. C'est la base du phénomène d'aliasing (*to alias* signifiant usurper), appelé aussi **repliement** (puisque l'on aurait envie de replier la figure circulaire selon l'axe horizontal).

7.2 Filtrage linéaire

Modifier un signal porte un nom spécifique : **filtrage**, et les méthodes permettant de filtrer un signal s'appelle **filtre**. Dans ce document, nous nous cantonnons à une seule catégorie de filtre : les filtres linéaires invariants par translation (SLI). De plus, nous allons voir quelles sont les opérations possibles sur un signal analogique et nous en inspirer pour définir les opérations élémentaires possibles pour un filtrage.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



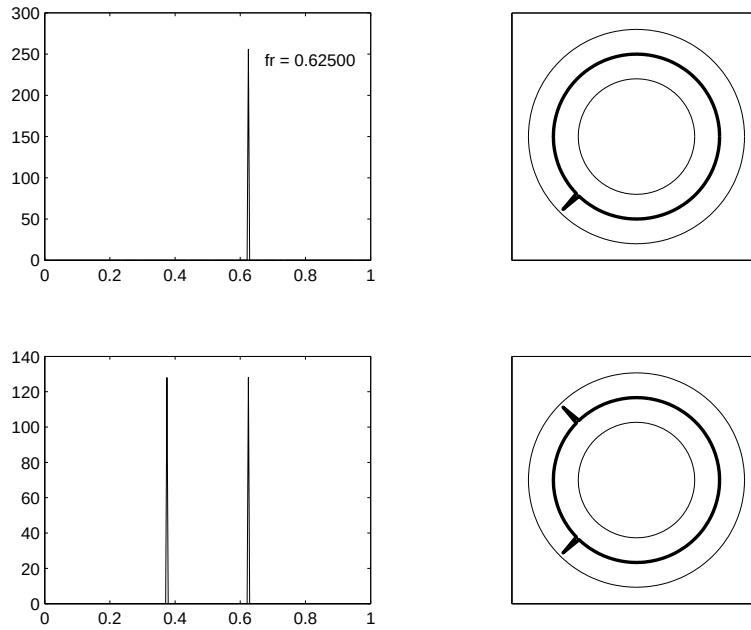


FIGURE 7.3 – En haut : TFD de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{160,256}$ (fréquence réduite de 0,625), en représentation classique à gauche (fréquences réduites entre 0 et 1) et en représentation circulaire. On observe un Kronecker isolé en partie réelle et une partie imaginaire nulle. En bas : TFD de la partie réelle de l'OFD $\overrightarrow{\text{OFD}}_{96,256}$ qui est un cosinus discret. On observe clairement la symétrie hermitienne sur la représentation circulaire puisqu'au Kronecker correspondant à la fréquence réduite de 0,375 on peut associer le Kronecker correspondant à la fréquence réduite de 0,375 (symétrie par rapport à l'axe horizontal).

7.2.1 Opérations élémentaires et causalité

Parmi les opérations élémentaires que nous pouvons envisager sur le signal discret, nous choisissons celles qui peuvent être réellement effectuées sur un signal analogique, c'est-à-dire (figure 7.4) :

- la somme entre deux signaux.
- la multiplication par une constante. Cela revient à modifier le signal en l'amplifiant (ou en l'atténuant) d'un facteur constant λ appelé **gain**.
- le retard d'une valeur constante τ . Par exemple, en optique, cela revient à utiliser une certaine longueur de fibre optique : le retard est alors donné par le rapport de cette longueur sur la célérité de la lumière dans la fibre.

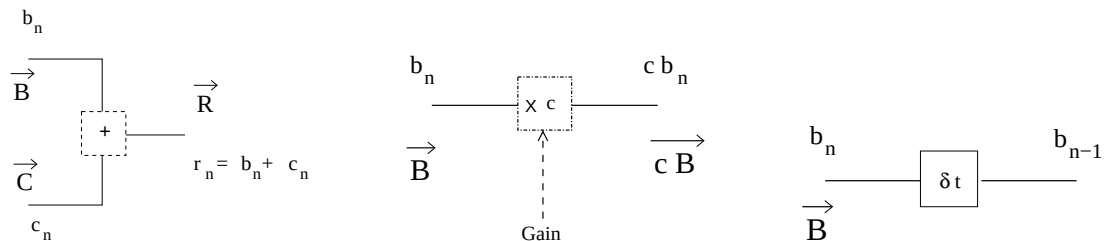


FIGURE 7.4 – Les opérateurs élémentaires (Somme, Gain et Retard) pouvant être effectués sur un signal analogique (temps continu) et illustré ici sur un signal discret (indices entiers). Ici le retard correspond effectivement à une valeur δt qui est le pas d'échantillonnage du signal discret, d'où le décalage d'un indice.

Dans ce document, nous nous limiterons aux retards correspondant à un multiple entier du pas d'échantillonnage. Ce ne seront que des retards car un traitement ne peut s'appliquer sur un signal qui ne sera connu que dans le futur (l'effet ne peut précéder la cause). Aussi nous pouvons, à ces trois opérations élémentaires, faire

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

correspondre un traitement formalisé par un opérateur matriciel :

- la somme de deux signaux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ est bien évidemment la somme des composantes individuelles. On obtient ainsi le signal vecteur $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \text{Somme}(\vec{B}, \vec{C}) \Leftrightarrow w_n = b_n + c_n$$

- la multiplication par une constante donne bien évidemment le produit des composantes du vecteur initiale par une constante λ unique :

$$\vec{W} = \text{Gain}(\vec{B}) \Leftrightarrow w_n = \lambda b_n$$

- le retard peut s'exprimer par une matrice appliquée au vecteur d'entrée, cette matrice appartenant à un sous ensemble des matrices de permutation que sont les matrices de décalage $D_{p,N}$ (voir le paragraphe 2.5.1).

7.2.2 Propriétés d'un filtre linéaire invariant par translation

Il est d'usage de privilégier, en traitement du signal, les traitements linéaires. En effet, nous avons vu la définition d'une transformation linéaire $\mathcal{T}$ (relation 2.28) qui associe un nouveau vecteur $\vec{W}$ à deux vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ selon la propriété suivante :

$$\vec{W} = \mathcal{T}(\lambda \vec{B} + \mu \vec{C}) = \lambda \mathcal{T}(\vec{B}) + \mu \mathcal{T}(\vec{C})$$

Dans ce cas, si on calcule la TFD de $\vec{W}$ (la TFD est un opérateur linéaire), on a :

$$\text{TFD}[\vec{W}] = \lambda \text{TFD}[\mathcal{T}(\vec{B})] + \mu \text{TFD}[\mathcal{T}(\vec{C})]$$

Cela signifie que, pour une fréquence réduite f donnée, les composantes sont déduites uniquement de la TFD de $\mathcal{T}(\vec{B})$ à cette fréquence réduite et de $\mathcal{T}(\vec{C})$ à cette même fréquence réduite.

Un autre élément essentiel pour les filtres linéaires est d'être des SLI : **Systèmes Linéaires Invariants par translation**. En effet, cela n'aurait aucun sens d'avoir une transformation donnant des résultats différents si on opérât sur le même signal en lui faisant subir un retard². Soit un signal décrit par le vecteur $\vec{B}$ de longueur N , et construisons un signal décalé dans le temps $\vec{B}'$ par la relation :

$$b'_n = b_{n-p}$$

en appliquant la convention de circularité (voir relation 6.16) : si $n + p > N$, on prendra, au lieu de $n + p$, $n + p - N$. Cela revient à utiliser une matrice de décalage et à écrire :

$$\vec{B}' = D_{p,N} \times \vec{B}$$

Puisque la transformation doit être invariante par translation, on doit avoir :

$$\mathcal{T}(\vec{B}') = \mathcal{T}(D_{p,N} \times \vec{B}) = D_{p,N} \times (\mathcal{T}(\vec{B}))$$

Si l'on se cantonne à des opérations fondées sur des matrices, c'est-à-dire à des transformations de type $[M \times]$, la transformation doit vérifier :

$$\begin{aligned} [M \times] (\vec{B}') &= [M \times] (D_{p,N} \times (\vec{B})) = [(M \times D_{p,N}) \times] (\vec{B}) \\ &= [D_{p,N} \times] ([M \times] (\vec{B})) = [(D_{p,N} \times M) \times] (\vec{B}) \end{aligned}$$

2. ou même formellement une avance, même si cela n'a pas de sens si on applique le principe de causalité.

et ceci n'est vérifié que si

$$M \times D_{p,N} = D_{p,N} \times M$$

c'est à dire que si les matrices M et $D_{p,N}$ commutent. Etant donné les propriétés des matrices de décalage (relations 2.26 et 2.27), on obtient alors aisément la propriété suivante que doit vérifier la matrice M (avec la convention de circularité) :

$$m_{i-p,j} = m_{i,j+p} \quad \forall p \in [1, N]$$

ce qui revient à remarquer que toutes les parallèles à la diagonale principale de la matrice M ont chacune une valeur unique : on reconnaît une matrice de convolution (voir paragraphe 6.3.5). Ce sera uniquement dans ce cas qu'une transformation matricielle sera bien invariante par translation.

7.2.3 Caractérisation d'un SLI

Nous allons voir maintenant comment caractériser tout SLI matriciel. Soit une transformation de type matricielle $\mathcal{T}$ et considérons un signal particulier : le Kronecker $\vec{K}_{1,N}$. Notons sa transformée $\vec{W}$:

$$\vec{W} = \mathcal{T}(\vec{K}_{1,N}) = (w_n)$$

Considérons le Kronecker $\vec{K}_{p,N}$. Il s'écrit comme un décalage du Kronecker $\vec{K}_{1,N}$:

$$\vec{K}_{p,N} = [D_{p,N} \times] \vec{K}_{1,N}$$

On a alors de manière triviale :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{K}_{p,N}) &= \mathcal{T}([D_{p,N} \times] (\vec{K}_{1,N})) \\ &= [D_{p,N} \times] (\mathcal{T}(\vec{K}_{1,N})) \\ &= (w_{n-p}) \end{aligned} \tag{7.2}$$

(il faut toujours garder, pour simplifier cette présentation, l'hypothèse de la représentation des vecteurs sous forme cyclique).

Comme tout vecteur $\vec{B}$ se décompose sur la base des vecteurs Kronecker (relation 2.5) :

$$\vec{B} = \sum_{p=1}^N b_p \vec{K}_{p,N}$$

et puisque la transformée $\mathcal{T}$ est SLI, il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\vec{B}) &= \mathcal{T}\left(\sum_{p=1}^N b_p \vec{K}_{p,N}\right) \\ &= \sum_{p=1}^N b_p \mathcal{T}(\vec{K}_{p,N}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $\mathcal{T}(\vec{B}) = (\vec{B}') (b'_n)$:

$$b'_n = \sum_{p=1}^N b_p w_{n-p}$$

On vient de montrer que :

- tout SLI $\mathcal{T}$ s'écrivant sous forme matricielle se ramène à une convolution.
- tout SLI matriciel $\mathcal{T}$, décrit par la matrice W (opérateur $[W \times]$), peut aussi se noter sous forme de l'opérateur $[\vec{W} \star]$ et se caractérise par la transformée du Kronecker $\vec{K}_{1,N}$:

$$\vec{W} = (w_n) = \mathcal{T}(\vec{K}_{1,N}) \tag{7.3}$$

on appelle ce signal réponse impulsionnelle de la transformation $\mathcal{T}$.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

7.2.4 Filtrage convolutif

Nous abordons maintenant le cas où nous disposons de deux signaux, décrits par leurs vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$. En pratique, $\vec{B}$ correspond à un jeu de données que l'on souhaite modifier à l'aide d'un second jeu de données décrites par le vecteur $\vec{C}$ qui est caractéristique du filtre appliqué. L'objectif est donc d'avoir une opération linéaire. Il semble naturel d'envisager des produits entre coefficients, ne faisant intervenir à l'étape k que les coefficients du signal d'entrée d'indice inférieur ou égal à k : cette dernière condition étant la condition de causalité.

Nous avons rencontré la convolution au paragraphe 6.3.4. En fait, cette opération est bien connue des traiteurs de signaux puisqu'il était possible naguère de la réaliser sur des signaux analogiques dans le cas où le signal $\vec{C}$ est de longueur $M < N$ (on peut compléter aussi $\vec{C}$ par des valeurs nulles pour les indices $M + 1$ à N)³. Pour cela, trois types composants étaient requis : la ligne à retard, le produit analogique, l'addition analogique (voir figure 7.4).

La figure 7.5 montre une illustration analogique de la convolution, le retard agissant sur les valeurs du vecteur d'entrée $\vec{B}$ comme un décalage d'indice. L'opération discrète s'écrit alors (équation 6.31) :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} \Leftrightarrow r_n = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1}$$

Nous avons vu que la propriété essentielle de la convolution discrète est qu'elle s'exprime comme un produit dans l'espace de Fourier :

$$\text{TFD}[\vec{R}] = \text{TFD}[\vec{B} \star \vec{C}] = \text{TFD}[\vec{B}] [\cdot] \text{TFD}[\vec{C}]$$

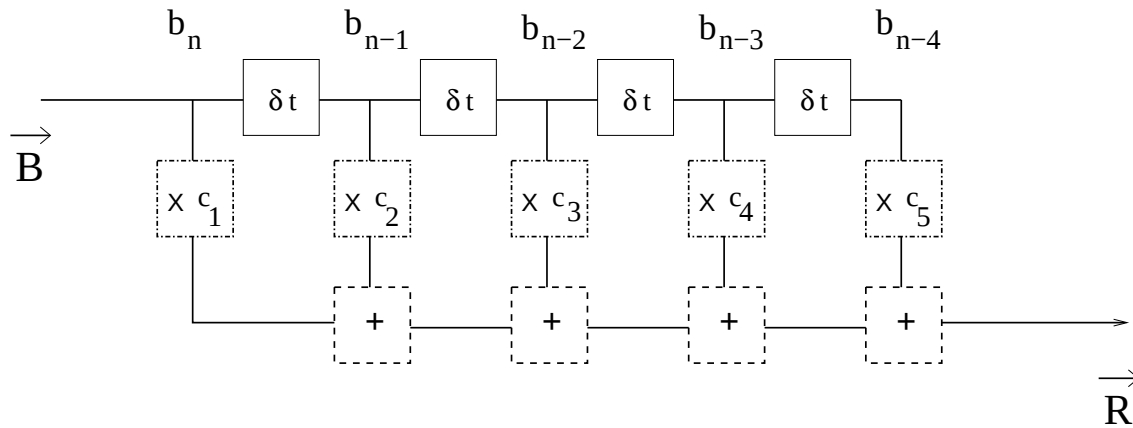


FIGURE 7.5 – Filtrage convolutif analogique. Le circuit est construit uniquement avec des composants retard, des composants somme et des composants multiplication par une constante. L'équivalent discret donne donc la valeur $r_n = b_n c_1 + b_{n-1} c_2 + b_{n-2} c_3 + b_{n-3} c_4 + b_{n-4} c_5$.

Très souvent en pratique, la convolution peut s'effectuer en combinant TFD, TFID et multiplication :

- calculer la TFD de $\vec{B}$
- calculer la TFD de $\vec{C}$ (en complétant $\vec{C}$ par des valeurs nulles pour les indices $M + 1$ à N)
- effectuer le produit (point à point) de ces deux TFD
- la convolution est simplement la TFID de ce résultat.

On a donc le résultat fondamental :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} = \text{TFID}[\text{TFD}[\vec{B}] [\cdot] \text{TFD}[\vec{C}]]$$

Cette démarche peut se vérifier sous Matlab, puisque l'on a à la fois la convolution, la TFD et la TFID.

3. Bien entendu, le raisonnement est analogue pour $M > N$: il suffit d'invertir les signaux!!

Propriétés de base de la convolution L'opération de convolution discrète peut donc se représenter comme une somme finie de valeurs finies (le signal initial $\vec{B}$ avec N valeurs et le signal filtre $\vec{C}$ avec M valeurs) : pour chaque valeur du signal initial, le nombre d'opérations ne dépend que de la longueur du signal filtre. Les valeurs obtenues sont donc finies et l'opération est toujours légitime : on dit aussi que l'on a un système EBSB (Entrée Bornée Sortie Bornée) ou BIBO (*Bounded-Input Bounded-Output*).

Réponse impulsionnelle d'un filtre Une convolution peut donc se voir comme une opération modifiant le spectre discret du signal d'entrée. Cette modification s'opère multiplicativement : on modifie le spectre discret du signal d'entrée en le multipliant par un gabarit ne dépendant que du signal filtre (décrit par le vecteur $\vec{C}$).

Une autre manière de caractériser un filtre (décrit par le vecteur $\vec{C}$) est de voir le résultat de son application sur un signal très particulier : le Kronecker $\vec{K}_{1,N}$. En appliquant tout simplement la définition, on obtient la transformation suivante :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \rightarrow \vec{B} \star \vec{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_M \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Ce vecteur résultat du filtrage d'un Kronecker est la **réponse impulsionnelle** du filtre (voir 7.3) et caractérise totalement le filtre. Il est important de voir que cette réponse impulsionnelle est définie par un nombre de coefficients bien déterminés, indépendant de la longueur du signal d'entrée : ce nombre de coefficients ne dépassant pas la valeur N est donc fini.

On dira que le filtre convolutif est un filtre RIF (Réponse Impulsionnelle Finie) ou FIR (*Finite Impulse Response*).

Ecriture canonique d'un filtre convolutif Soit un filtre destiné à traiter un signal de longueur N et décrit par un vecteur $\vec{C}$ de longueur M (c'est à dire tel que $c_n = 0$ si $n \in [M+1, N]$). Il s'écrit sous forme canonique (voir la relation 2.5) :

$$\vec{C} = \sum_{n=1}^M c_n \vec{K}_{n,N}$$

En utilisant la "notation en z " introduite au paragraphe 6.2.5 :

$$z_k = e^{2i\pi \frac{k-1}{N}}$$

sa TFD s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{TFD} [\vec{C}] (k) &= \sum_{n=1}^M c_n \text{TFD} [\vec{K}_{n,N}] (k) \\ &= \sum_{n=1}^M c_n \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{n,N}^* (k) \\ &= \sum_{n=1}^M c_n e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \\ &= \sum_{n=1}^M c_n z_k^{-(n-1)} \end{aligned}$$

d'où la relation canonique des filtres convolutifs décrits par M coefficients $(c_1, c_2, \dots, c_M)$:

$$\text{TFD} [\vec{C}] (k) = \sum_{n=1}^M c_n z_k^{-(n-1)} \quad (7.4)$$

7.2.5 Filtrage récursif

Dans le précédent paragraphe, nous avons donc transformé les données d'entrée par un opérateur, la convolution, dont le résultat est une somme pondérée des valeurs d'entrée. Etant donné le signal d'entrée ($\vec{B}$) et le filtre ($\vec{C}$), le signal résultat ($\vec{R}$) s'écrit :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C}$$

On peut alors envisager une nouvelle sorte d'opération qui associe ce résultat à une somme pondérée causale sur les coefficients de sortie : r_k dépend alors des valeurs d'entrée d'indice inférieur ou égal à k , et aussi des sorties r_j avec j inférieur à k (figure 7.6).

L'opération sur les valeurs de sortie peut se définir comme une somme pondérée des sorties précédentes : on a donc en pratique une convolution de la sortie avec un filtre défini par les valeurs $\vec{D}$, vecteur de dimension L . La sortie s'écrit alors

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} + \vec{R} \star \vec{D} \Leftrightarrow r_n = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1} + \sum_{m=1}^L d_m r_{n-m} \quad (7.5)$$

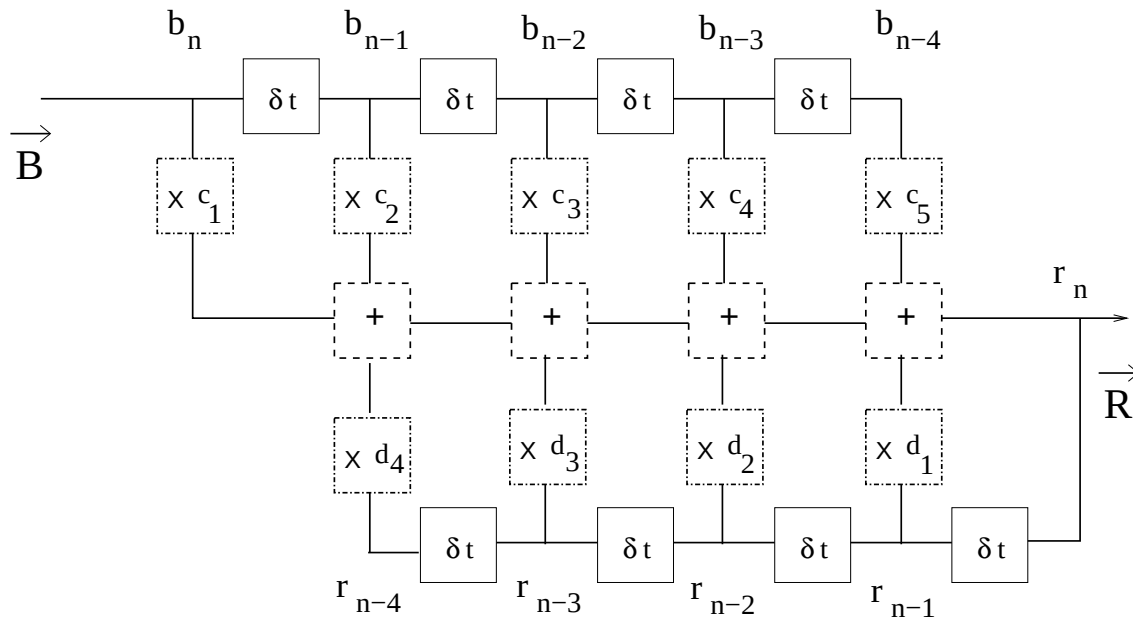


FIGURE 7.6 – Filtrage récursif analogique. Le circuit est composé de composants retard, de composants somme et de composants multiplication par une constante. L'équivalent discret donne donc la valeur $r_n = b_n c_1 + b_{n-1} c_2 + b_{n-2} c_3 + b_{n-3} c_4 + b_{n-4} c_5 + d_1 r_{n-1} + d_2 r_{n-1} + d_3 r_{n-3} + d_4 r_{n-4}$.

La question est de savoir si cette écriture assez formelle a un sens : on peut en effet –entre autres– se demander si réinjecter la sortie comme une entrée ne pourrait pas se traduire par des effets indésirables, comme une sortie beaucoup trop grande (ce qui contredirait les exigences d'un filtre BIBO). Nous allons donc analyser les propriétés de tels filtres pour en définir les limitations possibles.

Deux Propriétés fondamentales du filtrage récursif Considérons l'expression 7.5 :

$$r_n = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1} + \sum_{m=1}^L d_m r_{n-m}$$

On observe que la sortie r_n dépend des sorties r_{n-m} , $m \in [1, M]$. Rien n'empêche de remplacer ces valeurs par leurs propres expressions donnée par la même relation 7.5. En réitérant cette opération, on obtient une



expression de r_n ne dépendant que des entrées $b_n, n \in [1, N]$: pour cela il faut N coefficient pour décrire ce filtre. On ne peut plus affirmer que le filtre est à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) : on parle alors de filtre RII (Réponse Impulsionnelle Infinie) ou IIR (*Infinite Impulse Response*).

Le second point à analyser est de savoir si un filtre récursif est BIBO.

Pour cela, en première étape, nous allons simplement trouver un exemple de filtre récursif non BIBO. Soit un filtre récursif tel que :

$$\begin{cases} c_1 = 1 & c_j = 0 & \forall j \in [2, N] \\ d_1 = 1 & d_m = 0 & \forall m \in [2, N] \end{cases}$$

Si l'on met en entrée le Kronecker $\vec{K}_{1,N}$, la sortie s'écrit alors :

$$r_n = 1 \quad \forall n \in [1, N]$$

et on obtient alors un signal constant égal à 1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

De manière plus générale, considérons le filtre récursif tel que :

$$\begin{cases} c_1 = 1 & c_j = 0 & \forall j \in [2, N] \\ d_1 = \alpha & d_m = 0 & \forall m \in [2, N] \end{cases}$$

Si l'on met en entrée le Kronecker $\vec{K}_{1,N}$, la sortie s'écrit alors :

$$r_m = \alpha^{m-1} \quad \forall m \in [1, N]$$

On peut envisager l'étude de trois cas :

- Si $\alpha = 1$, on retrouve le cas précédent et la sortie est alors un vecteur composé uniquement de "1".
- Si $|\alpha| \in [0, 1[$, la sortie tendra, plus ou moins lentement, vers 0. Comme l'on peut décomposer tout signal comme somme de Kronecker, la sortie sera donc la somme de ce type de signaux tendant, plus ou moins lentement, vers zéro. La somme étant finie, on aura une sortie finie.
- Si $|\alpha| > 1$, la sortie tendra vers des valeurs très grandes. Dans ce cas, on ne peut parler de BIBO puisque, à une entrée bornée (valeur 1) correspond une valeur d'autant plus grande que le nombre de points du signal d'entrée est grande. On ne peut parler mathématiquement d'infini puisque le nombre de valeurs et d'opérations est fini. Mais le principe est bien là : la valeur peut être très grande, voire trop grande (pour l'aspect numérique, qui demandera des précisions élevées pour le calculateur, et pour l'aspect analogique, qui atteindra peut-être des intensités propres à détruire les appareils). C'est ce qui arrive quand on place un microphone à proximité d'un haut parleur : une fraction du signal de sortie est réinjectée dans la chaîne d'amplification. Le système résultant est donc récursif et l'amplitude, sous certaines conditions, atteint des valeurs très grandes (effet Larsen).

Cette étude sera approfondie quand nous aborderons le traitement de signal des signaux continus.

Réponse impulsionnelle d'un filtre récursif Le vrai problème est de savoir si ce nouveau filtre entre bien dans le cas d'un système SLI. Considérons la sortie d'un tel filtre :

$$r_n = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1} + \sum_{m=1}^L d_m r_{n-m}$$

on peut en déduire :

$$r_n - \sum_{m=1}^L d_m r_{n-m} = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1}$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

expression qui définit un nouveau filtre $\vec{D}'$ tel que

$$\begin{aligned} d'_1 &= 1 \\ d'_m &= d_{m-1} \quad m \geq 2 \end{aligned} \quad (7.6)$$

d'où

$$\sum_{m=1}^{L+1} d'_m r_{n-m+1} = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1}$$

ce qui donne :

$$\vec{R} \star \vec{D}' = \vec{B} \star \vec{C}$$

et par passage dans l'espace de Fourier :

$$\text{TFD}[\vec{R}] \quad [.\times] \quad \text{TFD}[\vec{D}'] = \text{TFD}[\vec{B}] \quad [.\times] \quad \text{TFD}[\vec{C}]$$

Si aucune valeur de $\text{TFD}[\vec{D}']$ n'est nulle, on peut simplifier l'expression en utilisant l'opérateur $[./]$ (relation 2.7), ce qui donne :

$$\text{TFD}[\vec{R}] = \text{TFD}[\vec{B}] \quad [.\times] \quad \text{TFD}[\vec{C}] \quad [./] \quad \text{TFD}[\vec{D}'] \quad (7.7)$$

ce qui permet d'écrire

$$\vec{R} = \text{TFID}[\text{TFD}[\vec{C}] \quad [./] \quad \text{TFD}[\vec{D}']] \star \vec{B}$$

Si maintenant on pose :

$$\vec{W} = \text{TFID}[\text{TFD}[\vec{C}] \quad [./] \quad \text{TFD}[\vec{D}']]$$

on a :

$$\vec{R} = \vec{W} \star \vec{B} \quad (7.8)$$

On retrouve l'expression d'un SLI et tout se passe comme si on appliquait un filtre convolutif au signal d'entrée : on a bien un filtre SLI.

Un des points majeurs de cette démarche est de bien voir que ces opérations ne sont légitimes que si la division est légitime (pas de division par zéro). Si cette division n'est pas légitime, on se trouve probablement dans un cas "non BIBO".

Ecriture canonique d'un filtre récursif Soit un filtre récursif destiné à traiter un signal de longueur N . Il est décrit :

- pour sa partie convolutive par un vecteur $\vec{C}$ de longueur M (c'est à dire tel que $c_n = 0$ si $n \in [M+1, N]$) tel que :

$$\vec{C} = \sum_{n=1}^M c_n \vec{K}_{n,N}$$

- pour sa partie récursive par un vecteur $\vec{D}$ de longueur L , donc par un vecteur $\vec{D}'$ de longueur $L+1$

$$\vec{D}' = \sum_{m=1}^{L+1} d'_m \vec{K}_{m,N}$$

tel que $d'_1 = 1$ et $d'_m = d_{m-1} \quad m \geq 2$
ce qui donne :

$$\vec{R} \star \vec{D}' = \vec{B} \star \vec{C}$$

En utilisant la "notation en z " introduite au paragraphe 6.2.5 :

$$z_k = e^{2i\pi \frac{k-1}{N}}$$

on a d'une part :

$$\text{TFD} \left[\vec{C} \right] (k) = \sum_{n=1}^M c_n z_k^{-(n-1)}$$

et d'autre part :

$$\text{TFD} \left[\vec{D}' \right] (k) = \sum_{n=1}^{L+1} d'_n z_k^{-(n-1)}$$

Si cette dernière relation est non nulle pour tout $k \in [1, N]$, alors le filtre global est caractérisé par un vecteur $\vec{W}$ et on peut écrire :

$$\text{TFD} \left[\vec{W} \right] (k) = \frac{\sum_{n=1}^M c_n z_k^{-(n-1)}}{\sum_{n=1}^{L+1} d'_n z_k^{-(n-1)}} \quad (7.9)$$

On remarque que si l'on supprime la partie récursive, on a $d'_1 = 1$, $L = 0$ et on retrouve l'expression canonique d'un filtre convolutif (relation 7.4).

7.3 Exemples de filtres linéaires discrets

Avant d'aborder stricto sensu le "design" d'un filtre linéaire (c'est à dire, à partir du cahier des charges proposé par l'utilisateur, trouver le filtre $\vec{C}$ idéal), nous allons voir quelques exemples classiques de filtres.

7.3.1 Filtre retard d'indice entier

Le filtre le plus élémentaire est celui qui retarde un signal donné : c'est un décalage d'indice vers le passé, conséquence de la causalité des filtres réels (on ne peut connaître le futur...).

Si le signal à traiter est décrit par le vecteur $\vec{B}$, et si le signal de sortie est décrit par le vecteur $\vec{R}$, on a :

$$\begin{cases} r_n = b_{n-p} & \text{si } n > p \\ r_n = 0 & \text{si } n \leq p \end{cases}$$

la valeur de p étant le seul paramètre du filtre.

A partir de la définition de la convolution (équation 6.31) :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} \Leftrightarrow r_n = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1}$$

on voit qu'un filtre retard d'indice entier p s'exprime par une convolution par un filtre $\vec{C}$ de longueur p avec

$$\begin{cases} c_n = 0 & \text{si } n \leq p \\ c_{p+1} = 1 \end{cases}$$

On reconnaît un Kronecker :

$$\vec{C} = \vec{K}_{p+1, N}$$

Pour être parfaitement rigoureux, il faut légèrement allonger le vecteur d'entrée $\vec{B}$ en lui rajoutant p valeurs nulles⁴.

Dans l'espace de Fourier, un décalage de p indices (convolution par $\vec{K}_{p+1, N}$) se traduit par une multiplication⁵ de la TFD du signal par le conjugué de $\overrightarrow{\text{OFT}}_{p+1, N}$ (revoir le paragraphe 6.2.5) :

$$\text{TFD} \left[\vec{K}_{p+1, N} \right] = \overrightarrow{\text{OFT}}_{p+1, N}^*$$

ce qui donne pour la TFD de la sortie du filtre :

$$\text{TFD} \left[\vec{R} \right] = \text{TFD} \left[\vec{B} \right] \overrightarrow{\text{OFT}}_{p+1, N}^*$$

4. ceci pour garder la propriété de circularité des traitements tout en associant des valeurs nulles à la sortie pour les indices $n \in [1, p]$

5. c'est à dire la multiplication point à point ".*" de Matlab

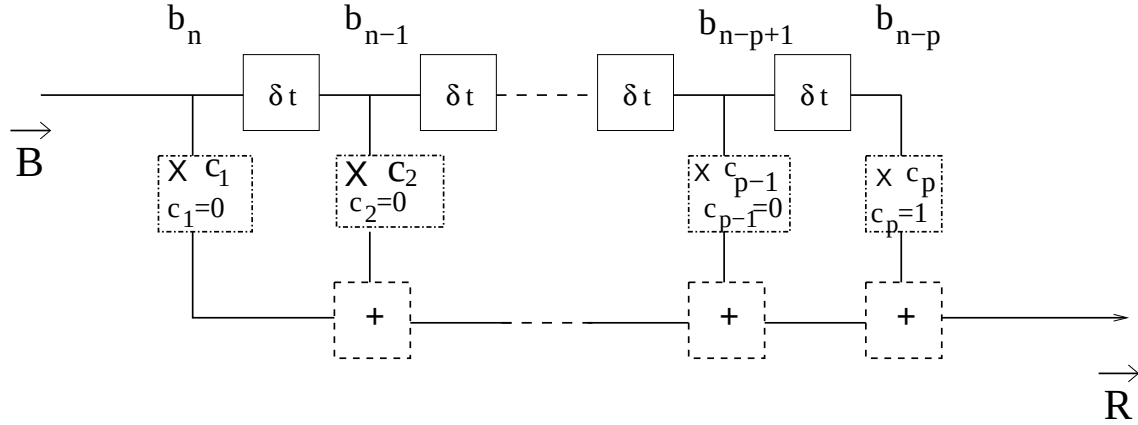


FIGURE 7.7 – Filtrage retard analogique sous forme convolutive. Le retard est égal à $p\delta t$. L'équivalent discret ($c_{p+1} = 1$, les autres coefficients étant nuls) donne en sortie la valeur $r_n = b_{n-p}$, c'est à dire le signal d'entrée retardé de p indices.

7.3.2 Exemple de filtre passe-bas : le filtre moyenne

Soit un signal de N points, et considérons le filtre $\vec{C}$ tel que :

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{M} \quad \forall n \in [1, M] \\ c_n = 0 \quad \forall n \in [M+1, N] \end{cases}$$

Nous pouvons y reconnaître un opérateur ayant une forte ressemblance avec l'opérateur Σ du chapitre 2, c'est à dire un opérateur donnant une moyenne glissante.

Calculons sa TFD (formule 6.7).

— pour $k = 1$, on a de manière évidente :

$$\hat{c}_1 = 1$$

— pour $k \neq 1$, on utilise l'équation C.3 de l'annexe dédiée aux racines N-èmes de l'unité (annexe C.3) :

$$\begin{aligned} \hat{c}_k &= \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} c_n \\ &= \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \\ &= \begin{cases} e^{-i\pi \frac{(M-1)(k-1)}{N}} \frac{1}{M} \frac{\sin\left(\pi \frac{M(k-1)}{N}\right)}{\sin\left(\pi \frac{(k-1)}{N}\right)} & \text{si } k > 1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Deux exemples sont donnés figure 7.8 dans le cas de $N = 256$ pour $M = 5$ et $M = 17$: on voit que la largeur utile fréquentielle est inversement proportionnelle à M : plus la fenêtre est large, plus le résultat est confiné autour de la fréquence nulle.

L'expression 7.10 fait apparaître deux termes liés par une multiplication : dans l'espace Θ , les TFID agissent donc entre eux par une convolution. Ces deux termes sont :

— un terme réel :

$$\frac{1}{M} \frac{\sin\left(\pi \frac{M(k-1)}{N}\right)}{\sin\left(\pi \frac{(k-1)}{N}\right)}$$

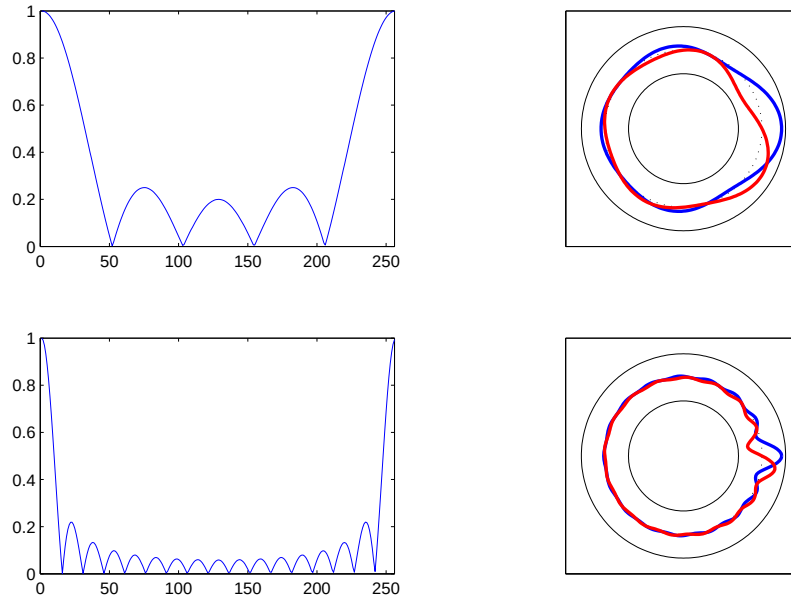


FIGURE 7.8 – Spectres discrets de fenêtres discrètes. En haut on a $M = 5$: à gauche la norme du spectre, à droite le spectre en représentation circulaire (la partie réelle est symétrique par rapport à l’horizontale, la partie imaginaire semble tournée d’une valeur correspondant à un retard). En bas, on a $M = 17$.

égal à 1 si $k = 1$ et qui donne le gabarit du filtre en fonction de la fréquence. On peut se risquer à remarquer que, pour N très grand, on peut approximer ce terme en :

$$\frac{\sin\left(\pi \frac{M(k-1)}{N}\right)}{M\pi \frac{(k-1)}{N}} \quad (7.11)$$

qui est alors une fonction très utilisée en traitement du signal qui s’appelle **sinus cardinal discret** et que nous reverrons au chapitre 8.

On peut aussi remarquer que ce terme s’annule pour les valeurs de $k \in [1, N]$ notées $\check{k}$:

$$\frac{M(\check{k}-1)}{N} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \check{k} = p \frac{N}{M} + 1 \text{ avec } p \in [1, \frac{N-1}{N}M]$$

Notons que l’on a $M - 1$ indices $\check{k}$ possibles, et que $\check{k}$ n’est pas obligatoirement un entier.

— un terme de norme unité correspondant à une exponentielle complexe :

$$e^{-i\pi \frac{(M-1)(k-1)}{N}} = e^{-2i\pi \frac{(\frac{M+1}{2}-1)(k-1)}{N}}$$

Si on remarque que ce terme est la TFD du Kronecker $\vec{K}_{\frac{M+1}{2}, N}$ (du moins si M est impair si l’on veut que cela ait un sens), on a donc, dans l’espace Θ , signal, un opérateur “retard” de $\frac{M+1}{2}$ échantillons. Une interprétation de ce terme vient de ce que le vecteur du filtre a une longueur M et commence par l’indice 1 (valeurs non nulles pour les coefficients c_1 à c_M). Si l’on place son milieu sur l’indice 1, ce qui revient à avoir pour M impair

$$c_{N-\frac{M-1}{2}} = c_{N-\frac{M-1}{2}+1} = \dots = c_N = c_1 = c_2 = \dots = c_{\frac{M-1}{2}+1} = 1$$

la TFD sera alors réelle. En raison de la symétrie circulaire de nos signaux, ce filtre est tel que tout

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

échantillon initial est alors pondéré par ses voisins, tant en indices plus grands qu'en indices plus petits⁶ : puisque l'on utilise les indices plus grands, ce filtre n'est alors pas causal.

Si nous analysons le terme réel (donc l'amplitude de la TFD), nous pouvons remarquer qu'il décroît en fonction de k puisque le dénominateur est une fonction croissante de l'indice pour $k \in [1, N/2]$, donc de la fréquence : on a donc un filtre passant les basses fréquences et atténuant les hautes fréquences : on l'appelle filtre passe-bas.

7.3.3 Exemple de filtres : les fonctions de Hadamard à une oscillation

Soit un signal de N points, et considérons le filtre $\vec{C}$ de longueur M paire tel que :

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{M} \quad \forall n \in [1, M/2] \\ c_n = -\frac{1}{M} \quad \forall n \in [M/2 + 1, M] \\ c_n = 0 \quad \forall n \in [M + 1, N] \end{cases} \quad (7.12)$$

Nous pouvons y reconnaître un opérateur ayant une forte ressemblance avec une fonction de Hadamard (une oscillation).

Pour en calculer la TFD, on peut directement s'inspirer de la relation exprimant la TFD d'un créneau (formule 7.10) en prenant en compte la TFD d'un décalage de longueur M (le filtre étant un premier créneau positif suivi d'un second créneau négatif). On obtient :

$$\begin{aligned} \hat{c}_k &= \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} c_n \\ &= e^{-i\pi \frac{(M-1)(k-1)}{N}} \frac{2i \left(\sin \left(\pi \frac{M}{2} \frac{(k-1)}{N} \right) \right)^2}{M \sin \left(\pi \frac{(k-1)}{N} \right)} \end{aligned} \quad (7.13)$$

et on retrouve un sinus cardinal discret.

La figure 7.9 montre que ce type de filtre a une largeur utile inversement proportionnelle à M : plus la fenêtre est large, plus le résultat est confiné autour d'une fréquence non nulle dont la valeur est d'autant plus faible que M est grand.

7.4 La transformée en Z

7.4.1 TFD de la réponse impulsionnelle d'un filtre récursif causal

Nous avons vu (relation 7.5) que la sortie d'un filtre récursif s'écrit :

$$\vec{R} = \vec{B} \star \vec{C} + \vec{R} \star \vec{D}$$

c'est à dire (expression 7.5) :

$$r_n = \sum_{j=1}^M c_j b_{n-j+1} + \sum_{m=1}^L d_m r_{n-m}$$

et que sa TFD se déduisait de la relation 7.7 :

$$\text{TFD} [\vec{C}] \quad [./] \quad \text{TFD} [\vec{D}']$$

le vecteur $\vec{D}'$ se déduisant des valeurs d_n (volet récursif du filtre) par les expressions 7.6 :

$$\begin{aligned} d'_1 &= 1 \\ d'_m &= d_{m-1} \quad m > 1 \end{aligned}$$

6. et on utilise la symétrie circulaire pour un indice éventuellement inférieur ou égal à 0, ainsi que pour tout indice supérieur à N .

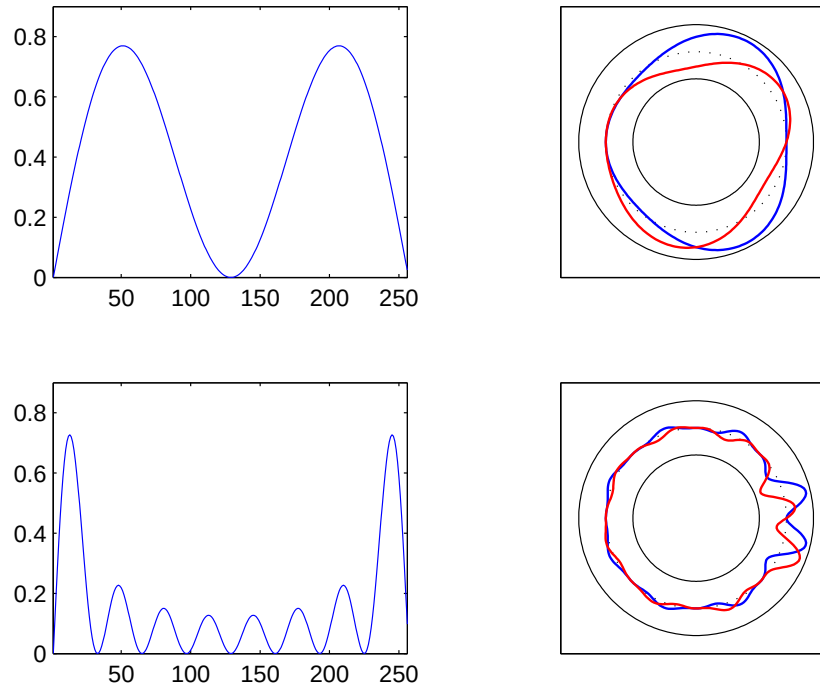


FIGURE 7.9 – Spectres discrets du filtre décrit par la relation 7.12. En haut on a $M = 4$: à gauche la norme du spectre, à droite le spectre en représentation circulaire (la partie réelle est symétrique par rapport à l’horizontale, la partie imaginaire semble tournée d’une valeur correspondant à un retard). En bas, on a $M = 16$.

On dit que ce filtre est causal car il ne prend effectivement en compte, pour le calcul de la sortie à l’indice n , que des valeurs en entrée d’indice $m \leq n$ ainsi que les sorties obtenues précédemment (l’avenir n’est pas requis!!).

L’écriture canonique d’un filtre récursif associée à l’“écriture en z ”, c’est à dire en prenant

$$z_k = e^{2i\pi \frac{k-1}{N}}$$

est donnée par la relation 7.9 :

$$\text{TFD} [\vec{W}] (k) = \frac{\sum_{n=1}^M c_n z_k^{-(n-1)}}{\sum_{n=1}^{L+1} d'_n z_k^{-(n-1)}}$$

Il faut donc que $\text{TFD} [\vec{D}']$ n’ait pas de valeur nulle pour tout $k \in [1, N]$. Mais cela ne suffit pas à garantir l’existence d’un filtre : nous avons déjà rencontré des filtres récursifs au comportement pathologique (voir le paragraphe 7.2.5). Reste à trouver une règle pour savoir si un filtre récursif existe et est effectivement BIBO.

7.4.2 Etude d’un filtre récursif d’ordre 1

Pour aller plus loin dans la caractérisation d’un filtre récursif, considérons à nouveau le filtre récursif d’ordre 1 : dans ce cas, seul d_1 est défini, et on a (relation 7.9) :

$$\text{TFD} [\vec{W}] (k) = \frac{1}{1 - d_1 z_k^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{d_1}{z_k}}$$

Deux cas sont possibles :

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

— $|d_1| < 1$. on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{d_1}{z_k}} &= \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1 + \sum_{p=1}^P \left(\frac{d_1}{z_k}\right)^p}{1 - \left(\frac{d_1}{z_k}\right)^{P+1}} \\ &\sim 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{d_1}{z_k}\right)^p \\ &\sim 1 + \sum_{p=1}^{\infty} d_1^p z_k^{-p} \end{aligned}$$

la série a un nombre infini de termes, mais converge. Le résultat est bien un filtre causal : on le reconnaît au signe négatif de la puissance de z_k (la puissance “-1” représente un retard d’un indice, la puissance “-p” représente un retard de p indices)

— $|d_1| > 1$. on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{d_1}{z_k}} &= -\frac{z_k}{d_1} \frac{1}{1 - \frac{z_k}{d_1}} \\ &= -\frac{z_k}{d_1} \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{1 + \sum_{p=1}^P \left(\frac{z_k}{d_1}\right)^p}{1 - \left(\frac{z_k}{d_1}\right)^{P+1}} \\ &\sim -\frac{z_k}{d_1} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{z_k}{d_1}\right)^p\right) \\ &\sim -\frac{z_k}{d_1} \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{d_1}\right)^p z_k^p\right) \end{aligned}$$

la série a un nombre infini de termes, mais converge puisque $|\frac{1}{d_1}| < 1$. Cependant, une modification importante apparaît : la puissance de z_k est positive, ce qui veut dire que le décalage n’est plus un retard, mais une avance. On parle alors de filtre **anti-causal** et on ne peut envisager de le réaliser concrètement puisque l’on a, en quelque sorte, retourné le sens du temps.

En conclusion, on voit qu’un filtre récursif d’ordre 1 physiquement réalisable doit vérifier $|d_1| < 1$. Si ce n’était pas le cas, le résultat divergerait et la sortie tendrait vers l’infini. Ou bien ce filtre serait stable anti-causal.

7.4.3 Définition de la Transformée en Z

L’approche menée sur un filtre récursif d’ordre 1 se généralise par l’introduction d’une nouvelle transformée, la Transformée en Z, notée TZ. Pour un filtre récursif donné (M coefficients C_i pour la partie convolutive, L coefficients D_i pour la partie récursive), la TZ telle qu’elle se trouve dans les bons auteurs, est définie pour une variable complexe z quelconque par la relation :

$$\boxed{\text{TZ}[\vec{W}](z) = \frac{\sum_{n=0}^M C_n z^{-n}}{1 - \sum_{n=1}^L D_n z^{-n}}} \quad (7.14)$$

C’est la relation 7.9 généralisée à tout le plan complexe. Notons le choix particulier des indices puisque, dans ce document, les indices des coefficients démarrent à $n = 1$ alors que dans la définition de la TZ, les indices débutent à 0.

Nous avons donc une fonction de la variable complexe z (c'est à dire une fonction holomorphe) et on peut espérer que son comportement analytique permettra de caractériser n'importe quel filtre discret récursif correspondant aux valeurs de z telles que :

$$z = z_k = e^{2i\pi \frac{k-1}{N}}$$

ceci devant donc être vérifié pour n'importe quelle longueur de signal, donc pour n'importe quelle valeur de N .

7.4.4 Transformée en Z d'un filtre récursif d'ordre 1

Considérons comme précédemment un filtre récursif d'ordre 1 (vu le choix des notations, on a $D_1 = d_1$). On a alors :

$$\text{TZ}[\vec{W}](z) = \frac{1}{1 - d_1 z^{-1}}$$

à condition que le dénominateur ne s'annule pas, c'est à dire :

$$1 - d_1 z^{-1} \neq 0 \Leftrightarrow z - d_1 \neq 0 \Leftrightarrow z \neq d_1$$

Nous avons déjà obtenus des résultats importants sur la TZ :

- pour certaines valeurs de z telles que $z = e^{2i\pi \frac{k-1}{N}}$, on retrouve les valeurs des coefficients de la TFD. Ceci doit être vérifié pour toute valeur de N . Donc on doit avoir $d_1 \neq 1$ et dans ce cas le dénominateur de la TZ est toujours non nul pour $|z| = 1$.
- On sait que pour qu'un filtre récursif d'ordre 1 corresponde à un filtre causal, on doit avoir $|d_1| < 1$. Dans ce cas, pour vérifier à la fois $z \neq d_1$ et le fait que la TZ est définie pour tout z tel que $|z| = 1$, z doit appartenir au complémentaire du disque centré sur l'origine du plan complexe et de rayon d_1 .
- On sait que pour qu'un filtre récursif d'ordre 1 corresponde à un filtre anti-causal, on doit avoir $|d_1| > 1$. Dans ce cas, pour vérifier à la fois $z \neq d_1$ et le fait que la TZ est définie pour tout z tel que $|z| = 1$, z doit appartenir au disque centré sur l'origine du plan complexe et de rayon d_1 .

Reste à étendre ce comportement à des filtres quelconques.

7.4.5 Généralisation et propriétés fondamentales

Dans le cas général, pour analyser le comportement d'un filtre, il faut trouver les zéros et les pôles de l'expression 7.14. L'expression de la transformée en Z s'écrit alors :

$$\text{TZ}[\vec{W}] = \frac{\sum_{n=0}^{M-1} C_n z^{-n}}{1 - \sum_{n=1}^L D_n z^{-n}} = \frac{\prod_{n=1}^{M-1} (\alpha_n - z^{-n})}{\prod_{n=1}^{L-1} (\beta_n - z^{-n})}$$

Les α_n caractérisent les zéros du numérateur et les β_n caractérisent les zéros du dénominateur, donc les pôles.

A partir de cette expression canonique, on montre que pour qu'un filtre récursif soit stable et causal, il faut que tous ses pôles soient à l'intérieur du cercle unité (figure 7.10). Dans ce cas seulement, le filtre sera stable et causal. La démonstration complète est donnée dans [4]. Cette propriété fondamentale de la transformée en Z est un moyen théorique de savoir si un filtre récursif est stable, et donc de savoir si un filtre récursif discret est stable.

En traitement du signal, on s'intéresse principalement à la Transformée de Fourier : c'est un cas particulier de la transformée en Z puisque elle correspond aux valeurs de z sur le cercle unité du plan complexe dans lequel est définie la transformée en Z.

- Si un zéro se trouve sur le cercle unité, la TF s'annule : ceci révèle un filtre qui supprime la fréquence correspondant à cette valeur z et porte parfois le nom de filtre "bouchon" .
- Si un zéro se trouve en une valeur z_p proche du cercle unité, la TF pour des z_k proches de z_p aura une valeur faible. On a un comportement de filtre "bouchon".
- Si un pôle se trouve en une valeur z_p proche du cercle unité, on peut penser que la valeur du point z du cercle unité qui se trouve le plus proche de ce point z_p aura une valeur plus élevée que celles de ses voisins sur le cercle unité : ceci révèle un filtre qui renforce –relativement– la fréquence correspondant

au point z . La TZ est donc un outil permettant aisément de caractériser l'allure d'un filtre, de type passe-bas si la valeur de z_p est proche du point $z = 1$, de type passe-haut si la valeur de z_p est proche du point $z = -1$, de type passe bande ailleurs.

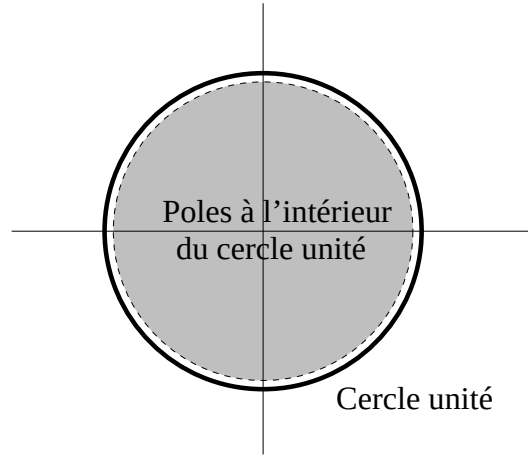


FIGURE 7.10 – Filtre RII : les pôles doivent se trouver à l'intérieur du cercle unité pour que le filtre soit stable.

Enfin signalons que l'on appelle filtre à minimum de phase un filtre récursif causal stable dont les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité.

7.4.6 Autre propriété de la TZ

Une des propriétés essentielles de la TZ se rapporte à la convolution : comme dans le cas de la TFD (relation 6.32), la TZ d'une convolution est le produit des TZ :

$$\text{TZ} [\vec{R}] = \text{TZ} [\vec{B} \star \vec{C}] = \text{TZ} [\vec{B}] \cdot \text{TZ} [\vec{C}] \quad (7.15)$$

7.4.7 Exemple

Nous allons illustrer ce paragraphe sur trois cas très simples.

Soit un signal d'entrée $\vec{B}$. On le traite par un filtre, ce qui donne le signal de sortie $\vec{R}$. Les trois filtres étudiés sont les suivants :

- Le premier concerne un filtre convolutif : le filtre moyenne sur 4 points (rencontré en 7.3.2, cas $M = 4$) :

$$\{ c_n = \frac{1}{4} \quad \forall n \in [1, 4] \}$$

On a alors en sortie :

$$r_n = \frac{1}{4} (b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3})$$

C'est un filtre au comportement passe-bas, et filtrant totalement les fréquences $F_e/4$, $-F_e/4$ et $F_e/2$. Sa TZ est tracée figure 7.11 (gauche). Elle est donnée par ;

$$\text{TZ}_1 = \frac{1}{4} (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3})$$

- Le second est un filtre récursif d'ordre 1 s'écrivant :

$$r_n = b_n - 0,8r_{n-1}$$

et dont la TZ est donnée par :

$$\text{TZ}_2 = \frac{1}{1 + 0,8z^{-1}}$$

Sa TZ est tracée figure 7.11 (milieu). Son pôle est en $z = -0,8$, donc à l'intérieur du cercle unité : le filtre est stable.

- le troisième combine les aspects convolutif et récursif :

$$TZ_2 = \frac{1}{4} \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}}{1 + 0,8z^{-1}}$$

c'est à dire

$$r_n = \frac{1}{4} (b_n + b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}) - 0,8r_{n-1}$$

Les poles sont donc ceux du second cas et les zéros ceux du premier cas. Sa TZ est tracée figure 7.11 (droite).

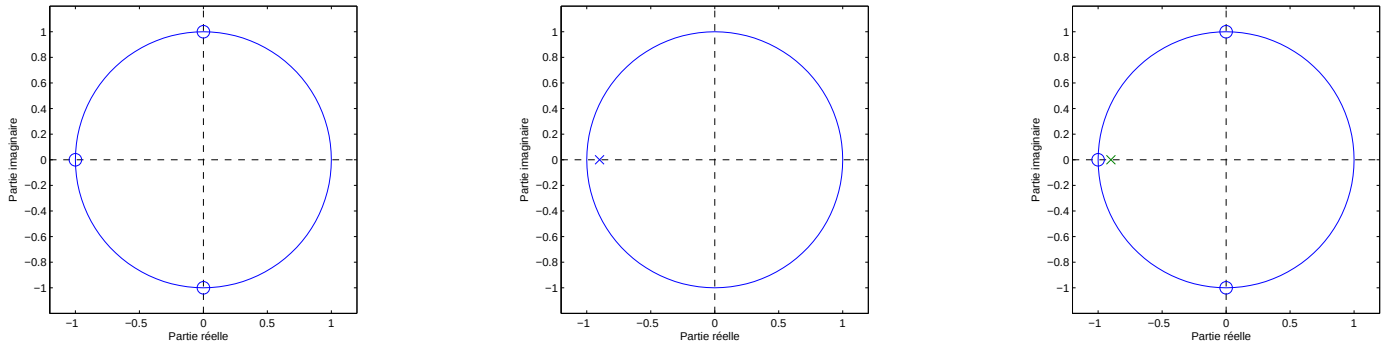


FIGURE 7.11 – Exemples de transformée en Z. A gauche, filtre convolutif (moyenneur sur 4 points) : le cercle unité fait apparaître trois zéros, correspondant aux fréquences à laquelle le filtre s'annule. Au milieu, filtre récursif stable d'ordre 1 (avec $d_1 = 0,9$). A droite filtre dont l'aspect convolutif est celui du premier cas, et l'aspect récursif est celui du second cas.

Pour mieux analyser ces transformées en Z, la figure 7.12 donne l'amplitude des 3 TFD correspondant aux 3 filtres étudiés. On peut ainsi observer les aspects marquants suivants :

- le filtre moyenneur (figure de gauche) supprime les fréquences réduites -0,25 , 0,25 et 0,5.
- le filtre récursif (figure du milieu) renforce la fréquence réduite 0,5
- la combinaison des deux (figure de droite) supprime les fréquences réduites -0,25 , 0,25 et 0,5. Cependant les fréquences réduites autour de la valeur 0,5 sont globalement conservées.

7.5 Opération sur le vecteur de données

7.5.1 Décimation

Une opération facile et tentante est de décimer un ensemble de valeurs, c'est-à-dire de "sauter" des valeurs pour réduire l'ensemble, ce qui revient à augmenter le pas d'échantillonnage δt . Cette opération est la moins coûteuse en terme d'opération à effectuer. Le revers de la médaille est qu'elle sort du cadre des SLID puisqu'elle n'est pas invariante par translation⁷ : on peut donc en déduire que le résultat risque d'apporter son lot de surprise. En fait, nous allons observer que cette opération présente des risques importants de deux natures :

- la première est que la réduction du nombre de valeurs revient implicitement à réduire l'information disponible. C'est une démarche propre à la compression des données : si parfois il est effectivement possible de réduire ce nombre de données, en règle générale, toute restriction d'information peut être pénalisante.

7. l'opération $v_n = u_{2n}$ donnera des résultats différents si on l'applique au signal u_n ou au signal $u'_n = u_{n+1}$.

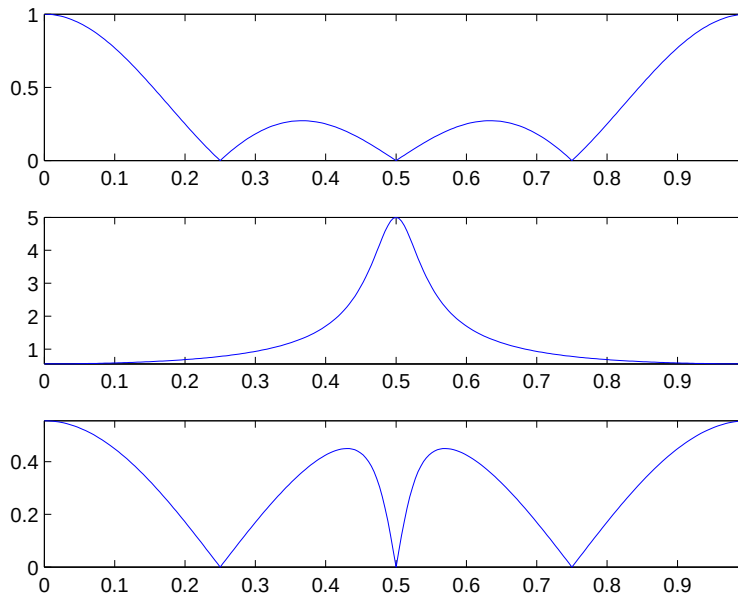


FIGURE 7.12 – TFD des 3 exemples de filtres dont les transformées en Z sont illustrées figure 7.11 en échelle de fréquences réduites (entre 0 et 1). En haut, filtre convolutif (moyenneur sur 4 points) : c’est un exemple de filtre passe bas. Au milieu, filtre récursif stable d’ordre 1 dont le pôle est proche de la fréquence réduite 0,5 : les fréquences proches de cette valeur sont renforcées. En bas, filtre dont l’aspect convolutif est celui du premier cas, et l’aspect récursif est celui du second cas (renforcement des fréquences proche de la fréquence réduite 0,5), hormis pour la fréquence réduite 0,5 qui est supprimée par le premier filtre convolutif.

- la seconde est que l’information est non seulement réduite, mais aussi transformée par un phénomène qualifié couramment de **repliement de spectre**. C’est ce dernier point que nous allons illustrer tout d’abord sur la décomposition de Hadamard, puis sur la décomposition en Ondes de Fourier.

Décimation du système de Hadamard

Nous allons considérer la décimation la plus classique qui consiste à prendre un point sur deux, notée traditionnellement $\downarrow 2$. De manière illustrative, commençons par analyser les conséquences sur la base de Hadamard (cas $N = 8$). En reprenant la figure 3.7, nous allons placer un cercle noir sur les points ainsi conservés, ce qui donne la figure 7.13.

On observe donc que le résultat final donne le système de Hadamard pour $N = 4$, ce qui est assez satisfaisant puisque l’on a au final $N = 4$ points. Ce qui est plus surprenant a priori est que, si l’on ne regarde que les points noirs (résultats de la décimation), on peut associer une fonction de Hadamard dans la colonne de droite (définie par des seq_N pairs) avec une fonction de Hadamard dans la colonne de gauche (définie par des seq_N impairs) donnant la même fonction de Hadamard dans le système $N = 4$.

$$\begin{array}{llll} seq_8 = 1 & \text{et} & seq_8 = 2 & \rightarrow & seq_4 = 1 \\ seq_8 = 3 & \text{et} & seq_8 = 4 & \rightarrow & seq_4 = 2 \\ seq_8 = 5 & \text{et} & seq_8 = 6 & \rightarrow & seq_4 = 3 \\ seq_8 = 7 & \text{et} & seq_8 = 8 & \rightarrow & seq_4 = 4 \end{array}$$

En opérant ainsi, les fonctions de Hadamard ($seq_8 = 2r$ et $seq_8 = 2r + 1$), $r \in [1; 4]$, sont donc confondues deux à deux.

Au final, l’information est réduite d’un facteur 2 : sauf cas spécifique, il y a perte d’information. Mais ce qui est plus grave est le fait que l’analyse de Hadamard initiale ($N = 8$) conduit à des valeurs qui seront

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



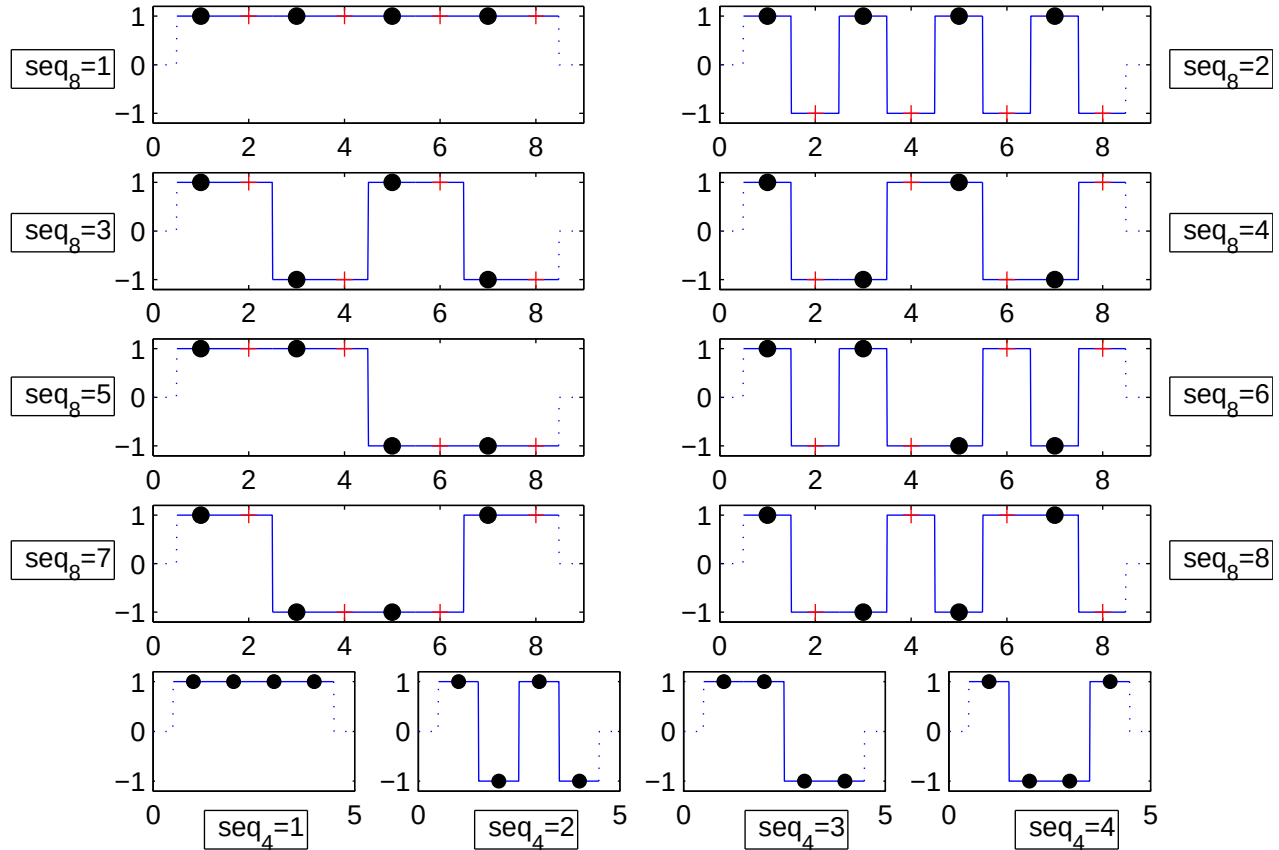


FIGURE 7.13 – Décimation d’un signal et système de Hadamard (voir figure 3.7). Cas $N = 8$: fonctions de Hadamard (en bleu) et valeurs des lignes de la matrice de Hadamard (signe + rouge). La décimation revient à ne retenir que les points noirs (les indices impairs). Il est intéressant de noter que le résultat est identique dans la colonne de droite (indices pairs) et dans la colonne de gauche (indices impairs) : au final, on obtient le système de Hadamard avec $N = 4$ (voir figure 3.6).

confondues deux à deux dans le nouveau système de Hadamard ($N = 4$) : on a des fonction de Hadamard usurpant les fonctionnalités d’une autre fonction de Hadamard. Voilà pourquoi la littérature anglosaxonne qualifie cet effet d’aliasing.

Décimation d’une Onde de Fourier

Nous avons vu que tout signal discret peut s’écrire comme somme d’Ondes de Fourier Discrètes, le facteur multiplicatif associé à chaque Onde de Fourier étant obtenu par transformée de Fourier discrète. Pour un vecteur de données $\vec{B}$, on a (formule 6.27 du paragraphe 6.3.1) :

$$b_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \mathcal{O}FD_{k,N}(n) \quad \forall n \in [1, N]$$

Donc analyser la décimation sur un signal décrit par N valeurs revient à analyser la décimation des Ondes de Fourier Discrètes $\mathcal{O}FD_{k,N}$ pour tout $k \in [1, N]$.

Pour une meilleure généralisation des résultats, nous nous plaçons en fréquences réduites et nous prenons l’espace des fréquences réduites dans l’intervalle $]-1/2; 1/2]$.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Reprenons donc les Ondes de Fourier de la figure 4.3 (cas $N = 8$) et plaçons un cercle noir un point sur 2 (les points noirs représentent donc les valeurs conservées). Observons les résultats (figure 7.14) :

- l'Onde de Fourier de fréquence réduite $-3/8$ et l'Onde de Fourier de fréquence réduite $1/8$ donnent le même ensemble de points noirs qui peut être vu comme une Onde de Fourier à une oscillation (seconde représentation en bas de la figure).
- l'Onde de Fourier de fréquence réduite $-2/8$ et l'Onde de Fourier de fréquence réduite $2/8$ donnent le même ensemble de points noirs qui peut être vu comme une Onde de Fourier à deux oscillations (troisième représentation en bas de la figure), caractérisée par une valeur imaginaire nulle.
- l'Onde de Fourier de fréquence réduite $3/8$ et l'Onde de Fourier de fréquence réduite $-1/8$ donnent le même ensemble de points noirs qui peut être vue comme une Onde de Fourier à une seule oscillation (quatrième représentation en bas de la figure).
- l'Onde de Fourier de fréquence réduite $4/8$ et l'Onde de Fourier de fréquence réduite 0 donnent le même ensemble de points noirs qui peut être vue comme une Onde de Fourier sans oscillation (première représentation en bas de la figure).

ce qui donne en fréquences réduites

$$\begin{array}{lll} f_r = -3/8 & \text{et} & f_r = 1/8 \rightarrow f'_r = 1/4 \\ f_r = -2/8 & \text{et} & f_r = 2/8 \rightarrow f'_r = 2/4 \\ f_r = -1/8 & \text{et} & f_r = 3/8 \rightarrow f'_r = -1/4 \\ f_r = 0 & \text{et} & f_r = 4/8 \rightarrow f'_r = 0 \end{array}$$

ou en considérant les OFD :

$$\begin{array}{lll} \overrightarrow{\text{OFD}}_{5,8} & \text{et} & \overrightarrow{\text{OFD}}_{1,8} \rightarrow \overrightarrow{\text{OFD}}_{1,4} \\ \overrightarrow{\text{OFD}}_{6,8} & \text{et} & \overrightarrow{\text{OFD}}_{2,8} \rightarrow \overrightarrow{\text{OFD}}_{2,4} \\ \overrightarrow{\text{OFD}}_{7,8} & \text{et} & \overrightarrow{\text{OFD}}_{3,8} \rightarrow \overrightarrow{\text{OFD}}_{3,4} \\ \overrightarrow{\text{OFD}}_{8,8} & \text{et} & \overrightarrow{\text{OFD}}_{4,8} \rightarrow \overrightarrow{\text{OFD}}_{4,4} \end{array}$$

Comme dans le cas du système de Hadamard, il y a donc comme un effet d'usurpation de la part des Ondes de Fourier de fréquences réduites $\{-3/8, -2/8, 3/8, 4/8\}$ qui viennent se placer sur le domaine des Ondes de Fourier de fréquences réduites $\{-1/8, 0, 1/8, 2/8\}$: l'appellation d'**aliasing** est donc bien adaptée.

Par rapport au système de Hadamard, les Ondes de Fourier sont caractérisées par la fréquence, grandeur qui nous est maintenant familière. Or nous venons donc d'observer que pour les fréquences réduites $f \in \{-3/8, -2/8, 3/8, 4/8\}$, on fait correspondre une valeur $f' \in [-1/8; 1/4]$ par la règle :

$$\begin{cases} f \leq -\frac{2}{8} & \rightarrow f' = f + \frac{1}{2} \\ f > \frac{2}{8} & \rightarrow f' = f - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Le phénomène s'apparente à une translation des fréquences de $1/2$ ou $-1/2$.

Une autre interprétation, spécifique aux signaux réels et qui ne s'appuie que sur la partie réelle de l'Onde de Fourier, donne ;

$$\begin{cases} f < -\frac{2}{8} & \rightarrow f' = -\frac{1}{2} + (|f| - \frac{1}{2}) \\ f > \frac{2}{8} & \rightarrow f' = \frac{1}{2} - (|f| - \frac{1}{2}) \end{cases}$$

ce qui correspond à un **repliement** de l'axe des fréquences autour des axes de symétries $-1/2$ et $1/2$. C'est cette terminologie qui est en général utilisée en traitement de signal, malgré sa restriction aux signaux réels.

Puisque les Ondes de Fourier ont des effets pervers par décimation, il suffit que la décomposition par transformée de Fourier Discrète des données initiales ait des composantes nulles pour toute fréquence réduite supérieure à $1/2$ (dans le cas où on représente les fréquences réduites entre 0 et 1), ou pour toute fréquence réduite appartenant à $] -1/2, -1/4]$ et $]1/4, 1/2]$ (dans le cas où on représente les fréquences réduites entre $-1/2$ et $1/2$). Dans ce cas on peut affirmer qu'aucune information n'a été perdue par décimation (même nombre de coefficients non nuls) et que surtout cette information n'a pas été perturbée par le mécanisme de décimation (pas d'**aliasing**).

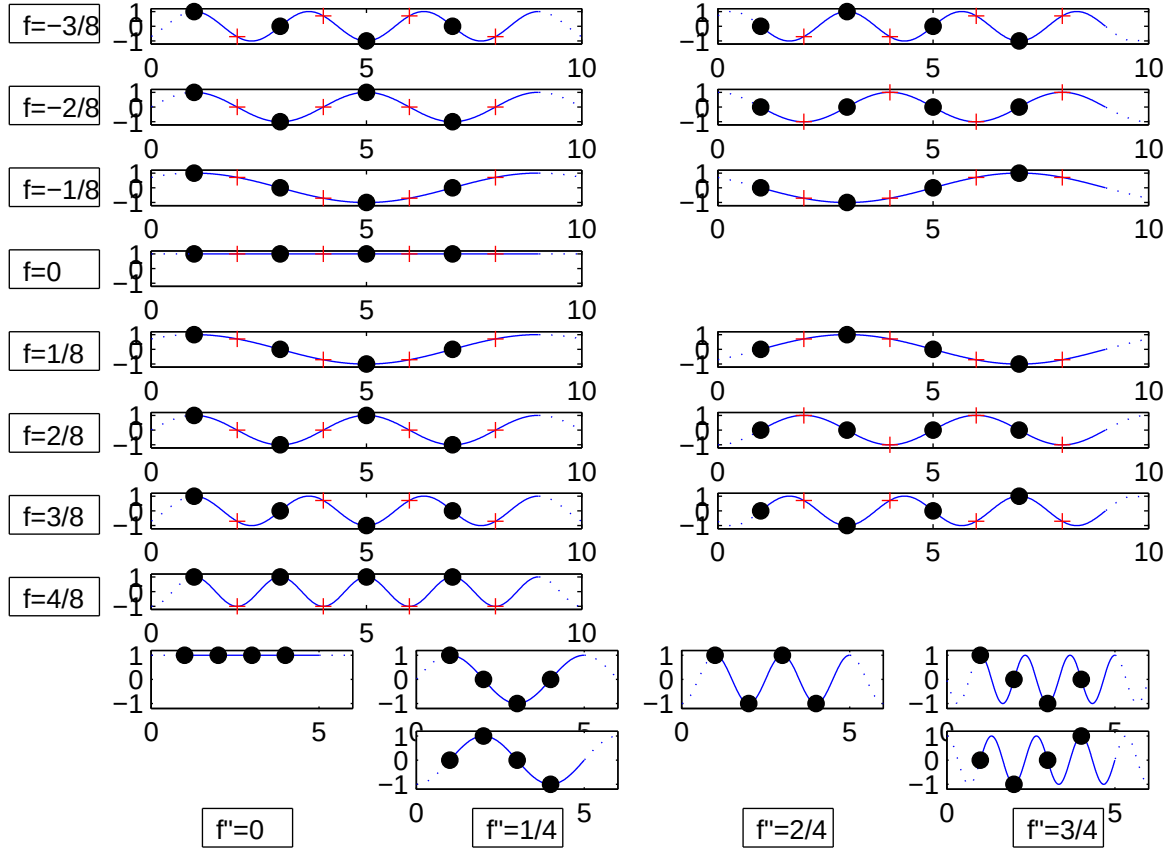


FIGURE 7.14 – Décimation d’un signal et système de Fourier. Cas $N = 8$: fonctions circulaires (tracées en bleu continues entre les instants 1 et 9, en pointillé sur $[0, 1[$ et $]9, 10]$) et valeurs des Ondes de Fourier Discrètes correspondantes. La décimation revient à ne retenir que les points noirs. On observe alors une allure identique de ces points noirs entre les fréquences réduites $-3/8$ et $1/8$, les fréquences réduites $-2/8$ et $2/8$, les fréquences réduites $3/8$ et $-1/8$, et les fréquences réduites $4/8$ et 0 . Les dernières lignes donnent successivement les Ondes de Fourier pour $N = 4$.

Règle pour la décimation

Les observations que nous avons menées sur le système de Hadamard et les Ondes de Fourier nous ont montré que les données initiales doivent vérifier certaines propriétés pour pouvoir être décimées sans conséquence pour la suite. Si on dispose d’un vecteur de données $\vec{B}$ représentant N valeurs échantillonnées, alors les coefficients de sa TFD permettent une écriture du vecteur $\vec{B}$ comme somme d’Ondes de Fourier $\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{k,N}$ (formule 6.27) :

$$b_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{k,N}(n) \quad \forall n \in [1, N]$$

Si on a :

$$\hat{b}_k = 0 \quad \forall k \in \left[\frac{N}{4}, \frac{3N}{4}\right]$$

alors on peut “simplifier” le vecteur par décimation en ne prenant qu’une valeur sur 2, ce qui donne le vecteur $\vec{B}_{\downarrow 2}$. Cette opération est parfaitement licite et ne modifie en rien le contenu informatif des données initiales ($\vec{B}$).

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



7.5.2 Interpolation

Dans un registre similaire, il est des cas en traitement du signal où l'on souhaite changer l'échantillonnage des données en diminuant le pas d'échantillonnage : il s'agit alors de rajouter des valeurs au signal initial sans perdre pour autant ses propriétés initiales (c'est-à-dire sans modifier son contenu informatif).

Interpolation par ajout de zéros Une première piste consiste à intercaler des zéros entre les valeurs existantes : mettre une valeur zéro revient à une ignorance totale de la valeur à intercaler, ce qui pourrait s'assimiler a priori à n'introduire aucune connaissance dans le signal modifié.

Considérons le cas $N = 4$ et rajoutons entre chaque valeur un zéro. La figure 7.15 illustre cette démarche : on analyse les 4 Ondes de Fourier Discrètes $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,4}$ (interpolées par des zéros) à l'aide des 8 Ondes de Fourier Discrètes $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,8}$. Rajouter ainsi des zéros a deux conséquences :

- on conserve les bonnes valeurs des coefficients de la TFD pour les fréquences correspondant au signal initial (le produit scalaire des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,4}$ par des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,8}$ donne la valeur attendue)
- on crée de l'information dans des fréquences où il n'y en avait pas, c'est-à-dire
 - pour les produits scalaires des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,4}$ par des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k',8}$ avec $k' \in [5, 8]$).
 - en fréquence réduite f'' pour $f'' = -3/8, f'' = -2/8, f'' = 3/8, f'' = 4/8$
 puisque pour ces valeurs, le produit scalaire des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,4}$ par des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,8}$ donne un résultat non nul (alors que par construction, ces fréquences n'étaient pas présentes dans le signal de départ).

La méthode est donc à revoir, sauf si l'on envisage de traiter le signal résultant pour qu'aucune fréquence supérieure à la fréquence maximale du signal initial n'existe dans le signal interpolé.

En conclusion, on associe deux coefficients dans le système des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,8}$ à un coefficient initial du système des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,4}$.

$$\begin{array}{lll} f'_r = -3/8 \text{ et } f'_r = 1/8 & \rightarrow & f_r = 1/4 \\ f'_r = -2/8 \text{ et } f'_r = 2/8 & \rightarrow & f_r = 2/4 \\ f'_r = -1/8 \text{ et } f'_r = 3/8 & \rightarrow & f_r = -1/4 \\ f'_r = 0 \text{ et } f'_r = 4/8 & \rightarrow & f_r = 0 \end{array}$$

Pour éviter cet effet d'aliasing, il faut donc filtrer les fréquences $f'_r = -3/8, f'_r = -2/8, f'_r = 3/8$ et $f'_r = 4/8$ sur le signal ainsi obtenu pour que sa décomposition dans le monde des fréquences soit inchangé. En particulier on peut effectuer cette opération en prenant le spectre du nouveau signal, mettre à zéro les composantes fréquentielles en dehors de la zone de fréquence résuite $] -0,25; 0,25]$ et effectuer une TFID, ce qui nous amène à la seconde technique proposée : le bourrage de zéros.

Interpolation par bourrage de zéros dans le spectre Puisque ajouter des zéros sur le signal sans précaution crée de l'information parasite, on peut se demander si ajouter des valeurs nulles dans le spectre ne serait pas la bonne piste pour interpoler un signal.

Considérons donc un signal de N valeurs, échantillonné selon le pas temporel δt , dont le vecteur d'entrée est $\vec{B}$. Sa TFD est le vecteur $\vec{B}$ composé de N valeurs : si l'on considère les fréquences normalisées associées aux N valeurs de $\vec{B}$, elles appartiennent à $] -1/2, 1/2]$.

On recherche donc un nouveau signal $\vec{C}$ "ressemblant" le plus possible à $\vec{B}$, mais ayant $M = 2N$ valeurs. Pour assurer la meilleure ressemblance possible, il faut que dans le domaine de Fourier ses coefficients soient les mêmes que ceux de $\vec{B}$. Si l'on analyse un signal sur $2N$ points, les Ondes de Fourier possibles sont au nombre de $2N$, l'onde $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,M}$ ayant $(k-1)$ oscillations sur le support de longueur M . Or on peut remarquer tout simplement que le signal initial se décompose sur des Ondes de Fourier ayant au plus $(N-1)$ oscillations. Si l'on veut que $\vec{C}$ "ressemble" le plus possible à $\vec{B}$, il faut que les deux points suivants soient vérifiés :

- l'analyse par Onde de Fourier du signal $\vec{C}$ doit donner les mêmes valeurs pour des ondes décrites sur M points et ayant de 0 à $N-1$ oscillations. On doit donc avoir :

$$\hat{c}_k = \hat{b}_k \quad \forall k \in [1, N = \frac{M}{2}]$$

- l'analyse par Onde de Fourier du signal $\vec{C}$ doit donner, pour des Ondes de Fourier décrites sur M points et ayant de $M/2 + 1$ à M oscillations, un résultat nul, puisque pour ces fréquences, le signal

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

initial ne porte aucune information. On doit avoir :

$$\hat{c}_k = 0 \quad \forall k \in [\frac{M}{2} + 1, M]$$

On voit que cette analyse justifie cette approche d'introduction de zéros dans le spectre, appelé **bourrage de zéros** (pour le spectre), ou *zero padding*. L'interpolation ainsi effectuée est dite **interpolation de Shannon**.

On obtient ainsi la règle pour l'interpolation par bourrage de zéro :

- On calcule la TFD sur N valeurs.
- on intercale N valeurs nulles entre la valeur $N/2$ (correspondant à la fréquence réduite $1/2$ dans la représentation initiale sur N valeurs) et la valeur $N/2 + 1$ (correspondant à la fréquence réduite $1/2 + 1/N$ dans la représentation initiale sur N valeurs). On obtient ainsi un vecteur dans l'espace de Fourier avec $2N$ valeurs ;
- on calcule la TFID pour ce nouveau vecteur de $2N$ valeurs. On obtient ainsi le signal interpolé d'un facteur 2.



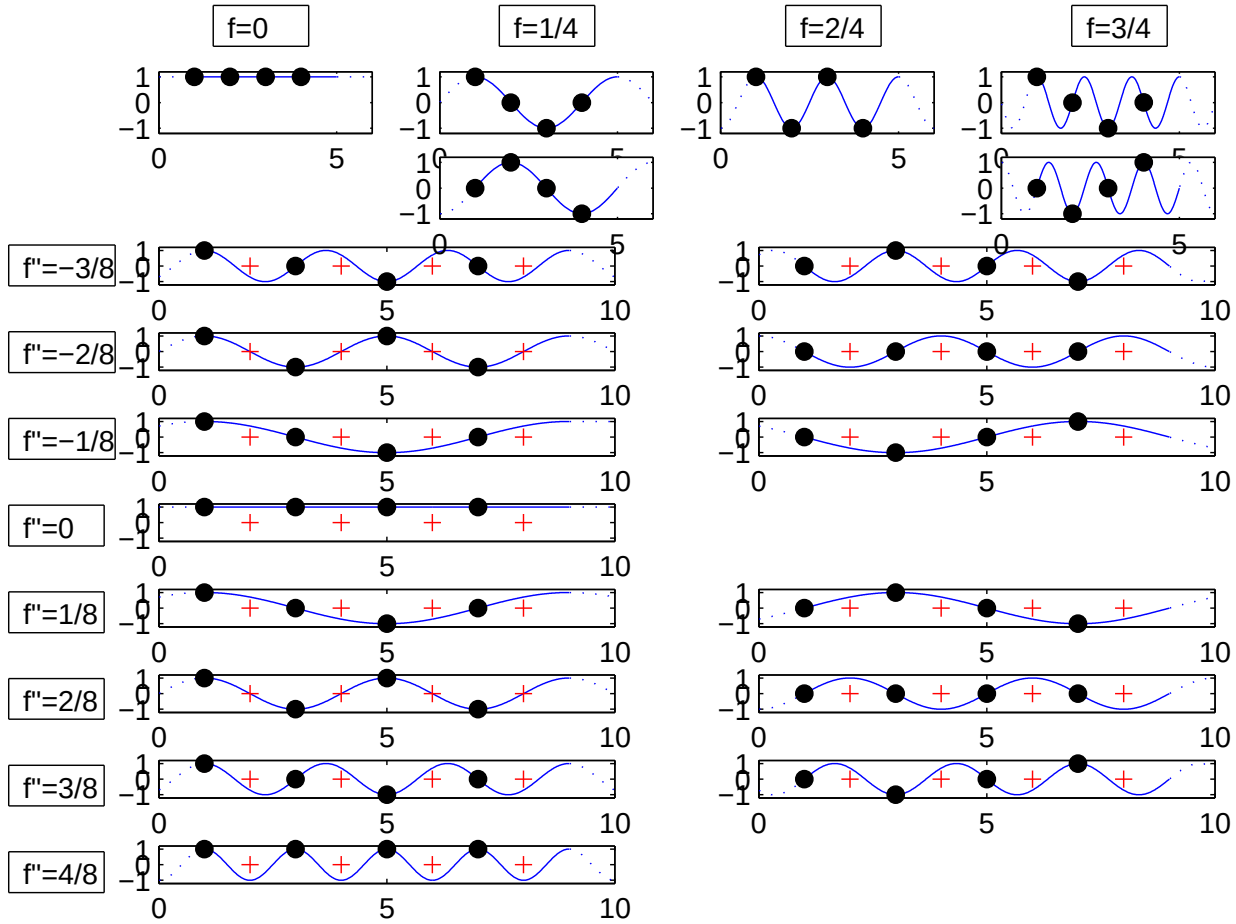


FIGURE 7.15 – Interpolation d’un signal (cas $N = 4$, famille des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,4}$) et système de Fourier. Partie supérieure : pour $N = 4$, fonctions circulaires (tracées en bleu continues entre les instants 1 et 5, en pointillé sur $[0, 1[$ et $]5, 6]$) et valeurs des Ondes de Fourier Discrètes correspondantes (les valeurs sont représentées par des points noirs). L’interpolation par ajout de zéros revient à intercaler des valeurs nulles (marquées par des croix rouges) entre les points noirs des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,4}$. En analysant ces données avec le système de Fourier $N' = 2N = 8$, on observe alors un résultat identique pour les paires de fréquence réduite $-1/8$ et $3/8$, 0 et $4/8$, $1/8$ et $-3/8$ et $2/8$ et $-2/8$. Tout se passe comme si l’information contenue dans les fréquences réduites $-1/8, 0, 1/8$ et $2/8$ “percolait” dans les fréquences réduites $-3/8, -2/8, 3/8$ et $4/8$.

Chapitre 8

Du signal discret au signal continu

Nous avons vu précédemment l'étude de signaux discrets, représentés par des "paquets d'octets". Si le formalisme semble accessible, son utilité est néanmoins limitée car il existe très peu d'outils analytiques pour étudier des signaux discrets : par exemple la notion de dérivée n'existe pas. D'un autre côté, les signaux physiques étudiés en général sont par essence continus : ce n'est finalement que pour des raisons d'archivage et de calcul qu'il est souhaitable d'en avoir une forme discrète en "paquets d'octets". La question est donc de savoir quelle légimité il y a à discrétiser un signal continu et à rendre continu un signal discret pour bénéficier des avantages des deux mondes (par exemple la dérivation dans le monde continu ou le calcul numérique dans le monde discret).

Aussi ce chapitre va-t-il aborder le traitement des signaux continus : au lieu d'être, comme précédemment un tableau d'octets indicé par des entiers, le signal se décrit comme une fonction d'une variable continue réelle, le temps, et l'objectif de ce chapitre est de voir comment on peut passer du continu au discret –et vice versa– et comment définir des outils spécifiques pour le traitement des signaux continus.

Les "bons" ouvrages de traitement de signal posent les concepts mathématiques requis pour passer du continu au discret : cette opération nécessite en effet de se placer dans un cadre théorique solide, ce qui conduit à déterminer des classes de fonctions pour lesquelles on peut effectuer certains types d'opérations et de transformations. Le lecteur est vivement incité à trouver ces bases mathématiques dans ce type d'ouvrage, et plus particulièrement dans le polycopié de S. Ladjal [4]. C'est pourquoi ce document ne présente quasiment pas de "vraies" démonstrations : seules certaines suggestions et allusions seront faites pour permettre au lecteur d'aborder sereinement ce type d'ouvrage.

Pour tenter une certaine forme de rigueur mathématique, nous supposerons dans ce chapitre que les fonctions continues que nous traiterons sont ce que les anglo-saxons appellent des *smooth functions*, vérifiant à la demande toutes les conditions requises. En pratique, tout signal physique issu d'un système réel soumis à des contraintes de linéarité vérifie les conditions requises : ce signal est d'amplitude bornée et d'énergie limitée, ce qui permettra de le cataloguer comme une *smooth function*. De plus, en pratique aussi, nos signaux auront une durée limitée (même si elle est très grande) : ceci permettra d'éviter les problèmes subtils de convergence à l'infini.

Ce chapitre va d'abord faire quelques rappels sur certaines propriétés des Ondes de Fourier Discrètes et sur les liens qu'il existe entre Ondes de Fourier Discrètes et Ondes de Fourier. Puis il proposera plusieurs manières de passer du discret au continu et du continu au discret. Enfin il présentera deux outils mathématiques essentiels : le premier pour passer du continu au discret (la formule de Poisson), le second pour passer du discret au continu (la formule d'interpolation de Shannon).

8.1 Quelques propriétés des Ondes de Fourier Discrètes

Nous avons abordé rapidement la notion d'interpolation des signaux discrets au paragraphe 7.5.2. Nous allons maintenant approfondir ce concept dans le cadre de signaux discrets de durée spécifiée et limitée : T .

8.1.1 Rappel de définitions

Soit un signal discret constitué de N valeurs : il a une durée limitée T (N est fini) et donc un pas temporel $\delta t = T/N$.

Rappelons l'expression des Ondes de Fourier Discrètes définies sur N points $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N}$ ($k \in [1, N]$, formule 5.5) et en privilégiant toujours l'hypothèse que N est une puissance de 2¹ :

$$\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}_{k,N}(n) = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \quad \forall n \in [1, N]$$

Ces N $\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}$ sont construites à partir d'Ondes de Fourier $\mathcal{O}\mathcal{F}_f(t)$

$$\mathcal{O}\mathcal{F}_f(t) = e^{2i\pi f t}$$

échantillonnées avec un pas temporel δt , c'est à dire avec une fréquence d'échantillonnage F_e uniquement liée à ce pas d'échantillonnage :

$$F_e = 1/\delta t$$

(voir paragraphe 5.2.5). Ceci définit :

- les instants auxquels on prend les valeurs de l'Onde de Fourier :

$$t_n = (n-1)\delta t$$

- les fréquences possibles de ces ondes de Fourier :

$$f_k = \frac{k-1}{N} F_e \quad k \in [1, N]$$

Le point essentiel à noter est que l'Onde de Fourier est caractérisée par une représentation continue : toutes les valeurs de $t \in \mathbb{R}$ et de fréquence $f \in \mathbb{R}$ sont possibles. Dans le même temps, les Ondes de Fourier Discrètes $\overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{F}\mathcal{D}}_{k,N}(n)$ sont soumises à deux contraintes :

- elles sont simplement caractérisées par un nombre fini de valeurs (puisque $n \in [1, N]$ et N est fini), le signal discret ayant une durée finie T . Ces valeurs correspondent aux instants t_n :

$$t_n = \frac{n-1}{N} T \quad n \in [1, N]$$

- elles sont paramétrées par un nombre fini de fréquences f_k :

$$f_k = \frac{k-1}{N} F_e \quad k \in [1, N]$$

Là aussi on a donc un nombre limité de fréquences possibles, et de plus, ces fréquences sont définies avec un pas fréquentiel $\delta f = 1/N$.

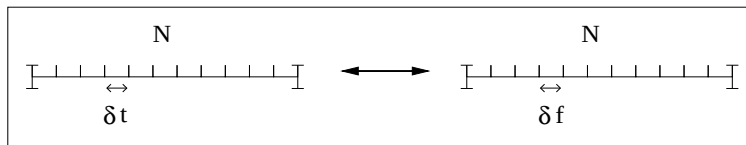


FIGURE 8.1 – Espace temporel discret décrit par N valeurs, c'est à dire une durée $T = N\delta t$ et son espace dual discret décrit par N valeurs, c'est à dire une plage de fréquence de longueur $F_e = N\delta f$

La question, mathématiquement difficile, est de savoir ce qui se passe si l'on fait tendre le nombre de points N vers l'infini : si cette opération est valide, et moyennant de nouveaux outils de traitement, on saura alors passer du discret au continu et vice-versa.

1. Cette hypothèse permet certaines simplifications, en particulier dans les figures, mais ne restreint en rien les principes

8.1.2 Comment passer d'un signal discret (défini par des $\mathcal{OFD}$) à un signal continu (défini par des $\mathcal{OF}$)

Tout d'abord, notons qu'une $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ est caractérisée par sa fréquence $f_k = \frac{k-1}{N}F_e$: il y a N fréquences f_k , $k \in [1, N]$ possibles, ce qui revient à choisir les fréquences réduites dans l'intervalle $[0, N-1/N]$. Etant données les propriétés des fonctions exponentielles complexes, on peut aussi choisir le domaine des valeurs k dans l'intervalle $[-N/2+1, N/2]$, ce qui revient à choisir les fréquences réduites dans l'intervalle $[-1/2+1/N, 1/2]$. C'est ce dernier choix de fréquences réduites que nous ferons dans tout ce chapitre.

Ensuite, remarquons que les signaux analysés, constitués de N valeurs, sont de durée limitée T . Cela revient à attribuer cette même durée aux $\mathcal{OFD}$ et aussi à fixer un pas d'échantillonnage temporel δt : remarquons au passage que, jusqu'à présent, il était toujours possible de traiter nos paquets d'octets en ignorant le pas temporel et la durée². Plus précisément, l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ est définie sur N points, correspondant aux instants t_n :

$$t_n = (n-1)\frac{T}{N} = (n-1)\delta t \quad n \in [1, N]$$

et, dans l'espace des fréquences, puisque l'on a la fréquence d'échantillonnage F_e :

$$F_e = \frac{1}{\delta t}$$

et le pas fréquentiel δf

$$\delta f = \frac{F_e}{N} = \frac{1}{T}$$

Pour une valeur de k donnée, l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$ correspond à la fréquence f_k :

$$f_k = (k-1)\delta f \quad k \in [1, N]$$

Notons les deux invariants fondamentaux spécifiques du signal discret à nombre d'échantillons fini :

$$\begin{aligned} F_e \delta t &= 1 \\ \delta f T &= 1 \end{aligned}$$

Le premier associe fréquence d'échantillonnage et pas temporel. Le second associe durée du signal et pas fréquentiel.

Soit un signal discret de durée T , décrit par N échantillons définis avec un pas temporel δt . Nous allons maintenant observer ce qu'il advient de ce signal si l'on cherche à réduire ce pas temporel δt : la description du signal nécessitera alors un plus grand nombre d'échantillons qu'il faut donc chercher à définir de la meilleure manière possible, c'est à dire sans enlever ni ajouter de l'information. Cette opération s'appelle interpolation.

Pour cela, plaçons nous dans le cas élémentaire où notre signal est une $\mathcal{OFD}$, décrite sur N_1 échantillons : le pas temporel est alors $\delta t_1 = \frac{T}{N_1}$. Si l'on veut le décrire sur N_2 échantillons ($N_2 \geq N_1$), le pas temporel sera alors $\delta t_2 = \frac{T}{N_2}$. On a donc un changement dans la fréquence d'échantillonnage puisque :

$$\begin{aligned} F_{e,1} &= \frac{N_1}{T} \\ F_{e,2} &= \frac{N_2}{T} \end{aligned}$$

Supposons que N_1 soit une puissance de 2 et soit $N_2 = 2^r N_1$. Deux familles d' $\mathcal{OFD}$ se déduisent de ces choix de N_1 et N_2 :

$$\begin{cases} \mathcal{OFD}_{k,N_1}(n) &= e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N_1}} \quad \forall n \in [1, N_1] \quad \forall k \in [-\frac{N_1}{2}+1, \frac{N_1}{2}] \\ \mathcal{OFD}_{k,N_2}(n) &= e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N_2}} \quad \forall n \in [1, N_2] \quad \forall k \in [-\frac{N_2}{2}+1, \frac{N_2}{2}] \end{cases}$$

Le point de ressemblance qui associe ces deux $\mathcal{OFD}$ est que, pour une même valeur de k donnée, toutes les deux possèdent $k-1$ oscillations sur la durée T , durée qui est la même pour nos deux $\mathcal{OFD}$. On peut faire aussi la remarque suivante :

2. Notons à nouveau que Matlab peut traiter les octets d'un paquet audio .wav en "oubliant" la fréquence d'échantillonnage, la fréquence d'échantillonnage étant un paramètre optionnel de la procédure `wavread`.

- Plaçons nous dans l'univers de $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$, avec $k \in [-N_1/2 + 1, N_1/2]$ donné. Pour cette valeur de k correspond la fréquence $f_{1,k}$:

$$f_{1,k} = \frac{k-1}{N_1} F_{e,1} \quad f_{1,k} \in] -\frac{F_{e,1}}{2}, \frac{F_{e,1}}{2}]$$

- Plaçons nous dans l'univers de $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$, avec $k \in [-N_2/2 + 1, N_2/2]$ donné. Pour cette valeur de k correspond la fréquence $f_{2,k}$:

$$f_{2,k} = \frac{k-1}{N_2} F_{e,2} \quad f_{2,k} \in] -\frac{F_{e,2}}{2}, \frac{F_{e,2}}{2}]$$

Si l'on fixe la même valeur de k pour les deux $\mathcal{OFD}$, on vérifie :

$$f_{1,k} = f_{2,k}$$

Donc, en fixant k , on définit très précisément une fréquence qui est identique.

Cherchons s'il existe, pour cette valeur de k et pour tout indice n_1 spécifique à $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$, des instants particuliers n_2 de $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ tels que ces deux $\mathcal{OFD}$ sont identiques. On recherche donc pour tout $n_1 \in [1, N_1]$ la valeur $n_2 \in [1, N_2]$ telle que :

$$\mathcal{OFD}_{k,N_2}(n_2) = \mathcal{OFD}_{k,N_1}(n_1)$$

c'est à dire :

$$e^{2i\pi \frac{(k-1)(n_2-1)}{N_2}} = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n_1-1)}{N_1}}$$

ce qui donne une solution valable pour toute valeur de k :

$$n_2 = \frac{N_2}{N_1}(n_1 - 1) + 1 = 2^r(n_1 - 1) + 1 \quad \forall k \in [-\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_1}{2}] \quad (8.1)$$

A tout indice n_1 correspond donc un indice n_2 indépendamment de la fréquence f_k , d'où, par exemple, le tableau de correspondance pour $N_2 = 2N_1$:

n_1	1	2	3	4	...
n_2	1	3	5	7	...

Si $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$ et $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ partagent ces N_1 valeurs, $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ est aussi décrite avec $N_2 - N_1 = (2^r - 1)N_1$ valeurs supplémentaires : il est important de noter que ces valeurs n'apportent rien de plus à la description de $\mathcal{OFD}$ puisqu'elle est totalement caractérisée par son indice k , qui donne en fait la fréquence de référence

$$f_k = \frac{k-1}{N_1} F_{e,1} \quad \text{avec } k \in [-\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_1}{2}]$$

d'où l'Onde de Fourier (continue) correspondante :

$$\mathcal{OF}_{f_k}(t) = e^{2i\pi f_k t} = e^{2i\pi \frac{(k-1)F_{e,1}}{N_1} t}$$

que l'on prendra à des instants particuliers $t_n = (n-1)\delta t_1$.

Si l'on se place du point de vue de $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$, on a la même fréquence de référence

$$f_k = \frac{k-1}{N_2} F_{e,2} \quad \text{puisque } k \in [-\frac{N_2}{2} + 1, \frac{N_2}{2}] \quad \text{et } N_2 \geq N_1$$

donc la même Onde de Fourier (continue) correspondante :

$$\mathcal{OF}_{f_k}(t) = e^{2i\pi f_k t} = e^{2i\pi \frac{(k-1)F_{e,2}}{N_2} t} = e^{2i\pi \frac{(k-1)F_{e,1}}{N_1} t}$$

Passer de $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$ à $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ n'apporte rien en terme d'information : simplement on a interpolé $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$ de la manière la plus exacte possible par le biais de $\mathcal{OF}$ correspondant à la fréquence f_k

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



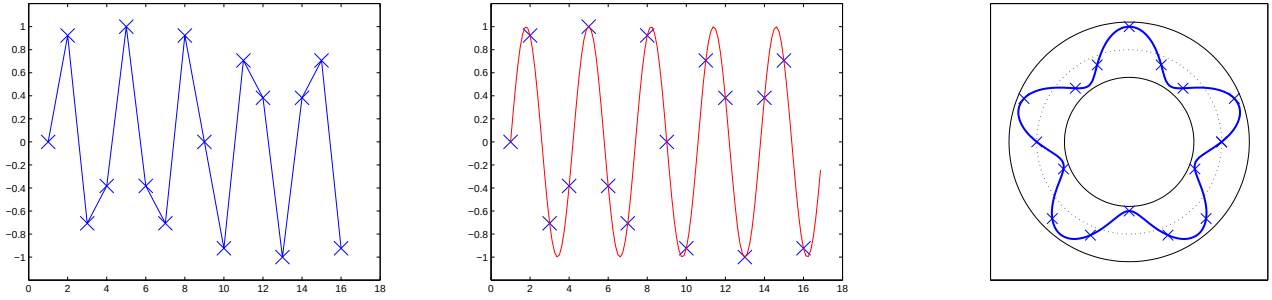


FIGURE 8.2 – Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{5,16}$: elle possède 5 oscillations et ses 16 valeurs discrètes sont marquées par une croix. A gauche, une première interpolation (linéaire par morceaux) est tracée en pointillé. Au milieu, une seconde interpolation (linéaire par morceaux) est construite à partir de l'Onde de Fourier Discrète $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{5,128}$ et semble, pour un observateur, une “meilleure” interpolation de l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{5,16}$. cette impression est confortée par la représentation circulaire de cette seconde interpolation qui assure une continuité apparente à l'origine.

(l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$ et l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ sont définies à l'aide de la même $\mathcal{OF}$). Grâce à ce stratagème (utiliser l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ pour décrire l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$), à tous les instants $t_i = i\delta t_2$, on peut compléter le tracé de l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$ en prenant pour tous les instants $t_i = i\delta t_2$ la valeur correspondant à l' $\mathcal{OF}$ sous jacente. Cette méthode d'interpolation semble plus réaliste qu'une simple interpolation linéaire ainsi que le montre la figure 8.2 (pour cette illustration, on a pris $N_2 = 16 * N_1$).

Notons aussi qu'utiliser l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ pour $k \in [-\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_1}{2}]$ revient à “ignorer” les hautes fréquences pouvant être décrites par l'ensemble des $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k',N_2}$, c'est à dire d'une part les valeurs de k' telles que $k' \in [-\frac{N_2}{2} + 1, -\frac{N_2}{2}]$ (fréquences négatives) et d'autre part les valeurs de k' telles que $k' \in [\frac{N_2}{2} + 1, \frac{N_2}{2}]$ (fréquences positives). C'est nécessaire puisque notre signal de départ avait été échantillonné avec une fréquence donnée F_e et qu'il est souhaitable qu'une étape d'interpolation ne puisse en aucun cas créer de l'information dans les bandes de fréquences non acquises au départ. Cela montre aussi que l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ peut décrire beaucoup plus de signaux que les seules $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$.

La question subsidiaire est le passage au continu : les $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_k,N}$ sont définis pour des instants spécifiques dénombrables t tels que :

$$\exists N \quad \exists n \in [1, N] \quad \text{tels que } t = \frac{n-1}{N}T$$

alors que les $\mathcal{OF}_{f_k}$ sont définies pour toute valeur $t \in \mathbb{R}$ telle que $t \in [0, T]$. Intuitivement, on peut remarquer que si l'on prend N très grand, on pourra approximer une $\mathcal{OF}_{f_k}$ avec une $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_k,N}$ aussi finement que souhaité (on peut se fixer une valeur arbitraire ε et chercher N tel que $\forall k \in [-N_1/2 + 1, N_1/2] \quad \forall t \in [0, T] \quad \exists n \in [1, N] \quad \text{tel que } |\mathcal{OF}_{f_k}(t) - \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_k,N}(n)| < \varepsilon$). Et on peut noter aussi qu'étant donné la durée T et les fréquences utilisées $f_k = \frac{k-1}{N_1}F_e \quad \forall k \in [-N_1/2 + 1, N_1/2]$, on a une intéressante propriété entre deux $\mathcal{OF}$ de fréquences différentes :

$$\begin{cases} \int_0^T \mathcal{OF}_{f_k}(t) \mathcal{OF}_{f_{k'}}^*(t) dt &= 0 & \text{si } k' \neq k \\ \int_0^T \mathcal{OF}_{f_k}(t) \mathcal{OF}_{f_k}^*(t) dt &= T \end{cases}$$

à condition que cette fréquence puisse s'écrire sous la forme $f_k = \frac{k-1}{N_1}F_e$. Le jeu des N_1 $\mathcal{OF}_{f_k}$ vérifient donc des critères d'orthogonalité identiques à ceux des N_1 $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{f_k,N_1}$ du monde discret de départ.

Même si l'intuition semble nous dire que ce passage de l'univers des OFD à l'univers des OF semble raisonnable, voire possible, il va falloir se doter d'outils analytiques spécifiques aux signaux continus ou aux signaux de durée infini. En effet, partant d'un univers discret (décrit par un nombre fini de données), on va se heurter à deux possibilités :

- passer d'un signal échantillonné de durée limitée à un signal échantillonné de durée infinie (on garde la même fréquence d'échantillonnage sur une durée infinie) ;

- passer d'un signal échantillonné de durée limitée à un signal continu de durée limitée (on garde la même durée d'échantillonnage avec une fréquence d'échantillonnage infinie).

Dans les deux cas, il ne sera possible d'approfondir le sujet sans passer par de nouveaux outils qui permettront d'aborder le cas d'un signal continu de durée infinie.

8.2 Du signal discret au signal continu, et vice versa

Nous avons donc vu comment interpoler un signal particulier : l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$, décrit sur N_1 échantillons temporels. L'objectif de ce paragraphe est d'étendre le résultat obtenu à un signal échantillonné quelconque.

8.2.1 Interpolation des signaux discrets de durée finie T

Considérons donc un signal échantillonné s_n de longueur N_1 (supposée être par simplification une puissance de 2), de durée T et de fréquence d'échantillonnage F_e . On a bien évidemment :

$$\delta t = \frac{T}{N_1} \quad \delta f = \frac{F_e}{N_1} \quad F_e = \frac{1}{\delta T} \quad F_e = \frac{N_1}{T} \quad \delta f = \frac{1}{T} \quad \delta t = \frac{1}{F_e}$$

Ce signal peut se décomposer sur la base d' $\mathcal{OFD}$ s définies sur N_1 points $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}, k \in [-\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_1}{2}]$ (formule 6.27) :

$$s_n = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \hat{s}_k \mathcal{OFD}_{k,N_1}(n)$$

avec (formule 6.7) :

$$\hat{s}_k = \sum_{n=1}^{N_1} e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N_1}} s_n \quad k \in [-\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_1}{2}]$$

Or nous avons vu que l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$ peut se décrire à l'aide de l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$. Donc, à partir des N_1 coefficients $\hat{s}_k$, on peut construire un signal r_m de longueur N_2 par la relation :

$$r_m = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \hat{s}_k \mathcal{OFD}_{k,N_2}(m) \quad m \in [1, N_2]$$

Nous avons vu qu'il existe des points tels que l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_1}$ coïncide avec l' $\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N_2}$ (relation 8.1), ce qui donne :

$$r_{\frac{N_2}{N_1}(n-1)+1} = s_n$$

Pour les autres valeurs de m , on peut, comme nous l'avons fait dans le cas des $\mathcal{OFD}$, considérer que le signal r_m est la meilleure interpolation possible du signal s_n puisqu'il ne contient aucune autre information dans le dual fréquentiel. Le nouveau signal r_m n'apporte, stricto sensu, rien d'autre que le signal initial s_n : simplement sa lisibilité est améliorée pour un observateur humain, ainsi que l'illustre la figure 8.3.

On peut, au final, envisager de faire croître N_2 vers l'infini. Moyennant certaines précautions, on peut affirmer que, pour tout signal discret s_n , de durée T , décrit par N_1 valeurs dans l'espace temporel, et donc par N_1 coefficients $\hat{s}_k$ dans l'espace de Fourier, on peut faire correspondre un signal continu $r(t)$, défini sur $[0, T]$ par la relation :

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \hat{s}_k \mathcal{OF}_{f_k}(t) \\ &= \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \hat{s}_k e^{2i\pi f_k t} \\ &= \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \hat{s}_k e^{2i\pi \frac{(k-1)F_e}{N_1} t} \end{aligned}$$

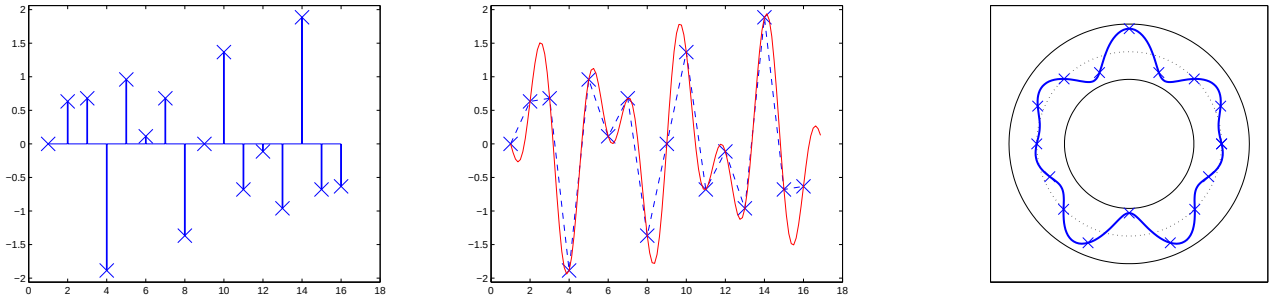


FIGURE 8.3 – Signal $r(t) = \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{4,16} - 0.96\overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{7,16}$: représentation “en peigne” à gauche. Au milieu : les 16 valeurs discrètes sont marquées par une croix. Une première interpolation (linéaire par morceaux) est tracée en pointillé. Le signal $\mathcal{OF}_{4/16} - 0.96\mathcal{OF}_{7/16}$ est superposée et peut sembler, pour un observateur averti, une “bonne” interpolation de l’OFD, comme le suggère aussi la représentation circulaire à droite.

Si le signal discret s_n est donc décrit naturellement par son spectre discret, c’est à dire les N_1 coefficients $\hat{s}_k$, le signal continu est lui aussi décrit par ces N_1 coefficients : on a donc aussi un spectre discret puisque il ne contient que les seules N_1 fréquences $(k-1)F_e/N_1$. On dit alors que l’on a un **spectre de raies**.

Insistons une fois de plus sur les points essentiels suivants :

- Puisque nous partons d’un signal discret, la représentation dans le monde des fréquences Φ est borné dans un intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$. Toutes les fréquences sont possibles dans cet intervalle : il y en a donc une infinité.
- Puisque le signal discret est limité à un nombre fini d’échantillons N_1 , et donc a une durée limitée T , le monde des fréquences est un monde de N_1 valeurs discrètes appartenant à l’intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$ et séparées par un pas constant $\delta f = 1/T$.

8.2.2 Du continu au discret : premier cas, signal continu de durée T , spectre discret

Soit un signal continu $r(t)$, de durée T . D’après les résultats précédents, on peut énoncer un premier jeu d’hypothèses permettant de remplacer sa description continue par une représentation discrète.

- Soit $r(t)$ un signal continu de durée T finie.
- On fait l’hypothèse que ce signal a un spectre discret très particulier, décrit par N_1 valeurs $\hat{r}_k$ correspondant à des fréquences $f_k = (k-1)F_e/N_1$ (ce qui signifie que toutes les fréquences sont un multiple d’une fréquence particulière $f_0 = F_e/N_1$). On a alors :

$$r(t) = \frac{1}{N_1} \sum_{k=1}^{N_1} \hat{r}_k \mathcal{OF}_{f_k}(t)$$

- Alors il est possible de décrire ce signal continu $r(t)$ par un signal discret $r_n, n \in [1, N_1]$ sans qu’aucune information soit perdue..

Ce cas est par trop contraignant car on ne peut savoir a priori la distribution des fréquences d’un spectre discret qui de plus est décrit par des fréquences discrètes de pas $\delta f = F_e/N_1$.

8.2.3 Du continu au discret : second cas, signal continu périodique

Considérons maintenant un signal continu $s(t)$ de durée infini de période T . On a donc par définition

$$\forall t \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad s(t + pT) = s(t)$$

Ce signal est donc parfaitement décrit par ses valeurs sur l’intervalle $[0, T]$ (figure 8.5). Toutes les autres valeurs (appartenant à $[-\infty; 0[$ ou $]T, \infty[$) n’apportent donc aucune information supplémentaire.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



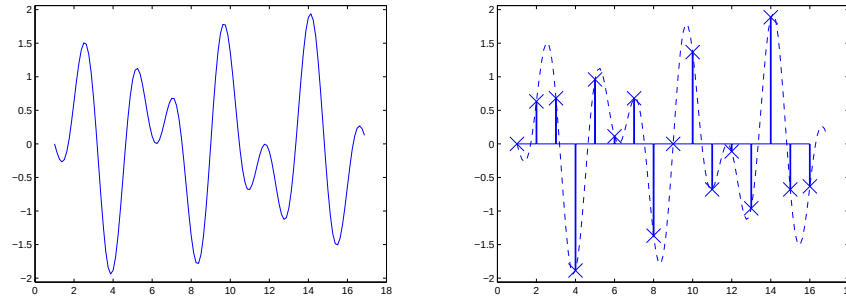


FIGURE 8.4 – Signal $r(t)$ de durée finie $T = 16$: représentation continue à gauche. On sait par ailleurs que ce signal a un spectre discret composé de 2 fréquences $f_1 = 4/16$ et $f_2 = 7/16$ (qui sont donc bien multiples de $f_0 = 1$) : il peut donc être discrétisé. La figure de droite donne une représentation “en peigne” du signal discret correspondant $r_n = \mathcal{O}FD_{4,16}(n) - 0.96\mathcal{O}FD_{7,16}(n)$ $n \in [1, 16]$. (paragraphe 8.2.2)).

Calculons maintenant, en supposant qu’elle existe, l’intégrale suivante³ :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi ft} dt \quad (8.2)$$

Moyennant quelques hypothèses d’existence à vérifier, on peut réécrire cette dernière expression en utilisant la propriété de périodicité de la fonction $s(t)$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi ft} dt \\ &= \int_0^T \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} s(t + pT) e^{-2i\pi f(t + pT)} \right) dt \\ &= \int_0^T \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} s(t) e^{-2i\pi ft} e^{-2i\pi fpT} \right) dt \\ &= \int_0^T s(t) e^{-2i\pi ft} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi fpT} \right) dt \\ &= \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi fpT} \right) \int_0^T s(t) e^{-2i\pi ft} dt \end{aligned}$$

I dépend de J , somme discrète infinie (indiquée par $p \in \mathbb{Z}$), qui peut s’écrire comme somme infinie de puissances de $e^{2i\pi fT}$:

$$J = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi fpT} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (e^{-2i\pi fT})^p$$

Nous reconnaissons (une fois de plus) une somme de puissance d’un complexe z de norme unité et nous savons qu’il faut prendre en compte deux cas :

— le cas de fréquence f telle que

$$e^{-2i\pi fT} = 1$$

c’est à dire :

$$2\pi fT = 2\pi q \text{ avec } q \in \mathbb{Z}$$

3. Nous lui donnerons un nom plus tard.

La somme J n'a pas de sens (car tendant vers l'infini puisque $q \in \mathbb{Z}$). On peut réécrire la condition sur la fréquence f sous la forme :

$$f = q \frac{1}{T} = q \delta f \quad \text{avec } \delta f = \frac{1}{T}$$

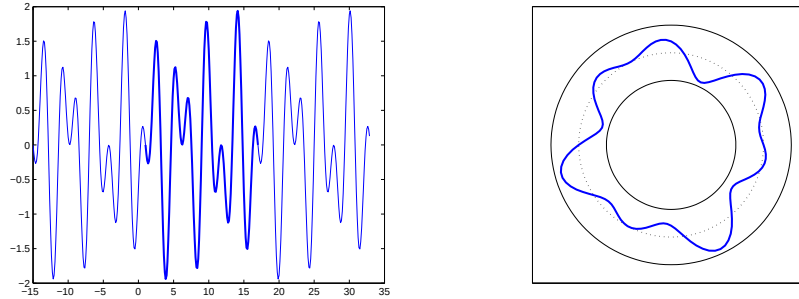


FIGURE 8.5 – Signal infini, de période $T = 16$. A gauche, tracé sur 3 périodes. A droite : représentation circulaire de la totalité du signal.

— Le cas de fréquence f telle que

$$e^{-2i\pi fT} \neq 1$$

Dans ce cas, moyennant quelques hypothèses raisonnables, on peut démontrer que la somme (infinie) J a une valeur bornée (on peut deviner le raisonnement en remarquant que si f et T sont tels qu'il existe un entier r tel que $ft = 1/r$, alors $\sum_{p=1}^r e^{-2i\pi fpT} = 0$).

Vis à vis de valeurs de f donnant une somme tendant vers l'infini, on peut donc “oublier” les valeurs de f du deuxième cas (puisqu'elles donnent une somme finie) et dire que le spectre du signal $s(t)$ est un spectre de raies de fréquence f_q avec

$$f_q = q \frac{1}{T} \quad q \in \mathbb{Z}$$

Ces fréquences ont un pas constant δf donné par :

$$\delta f = \frac{1}{T}$$

Donc la périodicité de la fonction continue $s(t)$, égale à T , a imposé un pas fréquentiel dans le spectre, égal à $1/T$: le spectre est alors un spectre de raies, les fréquences discrètes allant de $-\infty$ à $+\infty$.

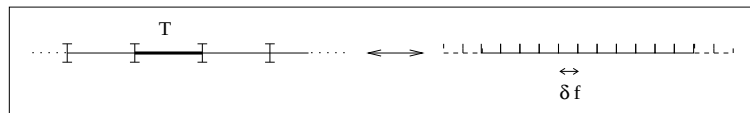


FIGURE 8.6 – Signal de durée infinie et de période T : l'espace des fréquences est alors un espace discret de pas δf .

Il est très important de remarquer que ce pas fréquentiel, imposé par la période, dicte une fréquence minimale aux Ondes de Fourier : en effet, la fréquence non nulle (positive) la plus basse s'écrit :

$$F_{min} = \frac{1}{T}$$

et toutes les fréquences des Ondes de Fourier propres à ce signal sont des multiples entiers de cette fréquence minimale. On peut même appeler cette fréquence la **fondamentale** de la décomposition en Ondes de Fourier. Remarquons qu'il n'y a pas de bornes à la fréquence maximale dans ce cas : en effet, le signal est continu et

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel

il n'y a pas de pas temporel δt , donc pas de relation possible entre δt et une fréquence maximale F_{max} , donc pas de définition d'une fréquence maximale.

Notons aussi (le lecteur attentif l'aura déjà fait) que ce cas est celui, bien connu en mathématique et en traitement du signal, de la décomposition en séries de Fourier.

8.2.4 Du continu au discret : variante du second cas (signal continu périodique avec un spectre borné)

Reprenons le cas précédent (signal continu périodique de période T induisant un spectre de raies de pas fréquentiel δf). Si de plus les fréquences sont bornées ($f \in]-F_e/2, F_e/2]$), ce spectre de raies est décrit par un nombre fini de N valeurs de fréquences f_k

$$f_k = k \frac{1}{T} \quad \text{avec } k \in \left] -\frac{F_e}{2\delta f}, \frac{F_e}{2\delta f} \right]$$

et le nombre de raies N est donné par la relation :

$$N = \frac{F_e}{\delta f} = T F_e$$

On a donc un second jeu d'hypothèses permettant de numériser un signal continu (le premier étant celui du paragraphe 8.2.2 dédié à un signal de durée limitée T) :

- Soit un signal continu de durée infinie et périodique de période T .
- Alors le spectre de ce signal est un spectre de raies de pas fréquentiel $\delta f = 1/T$.
- Si de plus ce signal ne contient aucune composante fréquentielle en dehors d'un intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$, on peut alors le numériser avec un nombre fini $N = T F_e$ de valeurs.

Il est important de noter les effets de la périodicité du signal (période T) : le spectre est alors un spectre discret de pas fréquentiel $1/T$.

Il est important aussi de noter que nous n'avons pas mené ici de "vraies" démonstrations : en effet, tout l'argumentaire réside dans la différence entre une somme donnant une valeur finie et une autre somme donnant une valeur tendant vers l'infini. Le raisonnement (qui ne vaut pas démonstration) réside dans la conservation de ces seules fréquences particulières, et dans l'oubli des autres, pour définir le spectre du signal comme spectre de raies. Nous donnerons ultérieurement une justification théorique à cette démarche dictée par une simple observation.

8.2.5 Du continu au discret : troisième cas (signal continu à spectre borné de durée limitée T + périodisation)

Soit un signal continu $r(t)$, de durée T (une des conditions du premier cas, paragraphe 8.2.2). La seule chose supplémentaire que l'on sache est que le contenu fréquentiel est borné dans l'intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$ (par exemple à la suite d'un filtrage analogique).

Si l'on crée un nouveau signal $s(t)$ défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ à partir de ce signal borné $r(t)$, en périodisant le signal $r(t)$, c'est à dire :

$$\begin{cases} s(t) &= r(t) \quad \forall t \in [0, T] \\ s(t + pT) &= s(t) \quad \forall p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

alors on se retrouve dans le cas déjà analysé au paragraphe 8.2.2 :

- Le spectre de ce signal est un spectre de raies de pas fréquentiel $\delta f = 1/T$.
- Si puisque ce signal ne contient aucune composante fréquentielle en dehors de l'intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$, on peut alors le numériser avec $N = T F_e$ valeurs.

L'idée dans cet exemple est de périodiser un signal de durée bornée T en le répliquant sur la totalité de l'échelle des temps. Cette démarche peut sembler curieuse, mais est bien adaptée à des signaux dont toute l'information est captée sur la durée T : c'est aussi une démarche très antropomorphe puisque cela nous arrive de réécouter un morceau de musique pour mieux le comprendre et mieux l'apprécier.

Le seul "tour de passe passe" est le fait de périodiser le signal à partir d'un temps T qui est sa propre durée initiale.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

8.2.6 Du continu au discret : quatrième cas (signal continu à spectre borné de durée limitée T + bourrage de zéros)

Si l'on se place dans le cas précédent (signal de durée T), on pourrait envisager de construire un signal illimité en complétant par des valeurs nulles les instants passés ($t < 0$) et futur ($t > T$) : c'est la technique dite de "bourrage de zéros" ou *zero padding* en temps (nous avons déjà rencontré le bourrage de zéros dans l'espace des fréquences Φ au paragraphe 7.5.2 comme technique possible pour une "bonne" interpolation temporelle). Cette technique est possible, mais nécessite de bien prendre en compte sa signification. En effet :

- Si on reprend l'exemple du morceau de musique, l'auditeur n'apprend rien de plus à écouter une fois le morceau sur une durée infinie que de l'écouter dans sa durée initiale. Bien entendu, cet exemple est très anthropomorphique, mais mérite de poser clairement le problème.
- L'analyse du signal sera pour ainsi dire focalisée sur l'instant de départ ($t = 0$) et l'instant final ($t = T$) : elle devra proposer des résultats différents si on prend le même signal en en changeant le temps d'origine et le temps final, ce qui n'a pas parfois un grand intérêt.

Sur le plan analytique, nous ne pouvons pour l'instant rien conclure de plus que précédemment puisque, en prenant l'opérateur du paragraphe 8.2.3, si l'intégrale existe, on ne peut qu'écrire :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-2i\pi ft} dt = \int_0^T s(t) e^{-2i\pi ft} dt$$

ce qui ne fait que simplifier le calcul de l'intégrale I .

8.2.7 Durée limitée T et spectre borné : conséquences

A travers ces exemples, et faute de "vraies" démonstrations, on voit poindre un critère essentiel du traitement du signal fondé sur la démarche suivante :

- soit un signal continu à analyser
- ce signal est à durée limitée T
- on construit un nouveau signal de durée infinie en périodisant le signal initial
- le spectre du nouveau signal est un spectre de raies : il est discret de longueur illimitée. Le pas fréquentiel est égal à :

$$T \rightarrow \delta f$$

Remarquons au passage qu'une longueur limitée dans un espace se traduit par une discrétisation dans le dual (et vice versa) : ce phénomène est le résultat du processus de périodisation.

Si de plus ce signal continu a un spectre borné dans l'intervalle $]-F_e/2, F_e/2]$ (par application d'un filtre analogique), ce spectre de raies a donc un nombre limité de fréquences pour lesquelles le spectre est non nul. On en déduit que :

- le spectre est décrit par un nombre limité de coefficients
- donc un nombre limité de coefficients suffit pour décrire le signal.

$$\left] -\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2} \right] \rightarrow \delta t$$

8.2.8 Récapitulatif

Nous allons maintenant condenser les résultats précédents dans le tableau suivant :

Espace Temps	t continu $t \in \mathbb{R}$	t discret, pas δt non borné en temps	t continu durée T	t discret, pas δt durée T
		$F_e = 1/\delta t$ $\delta t = 1/F_e$	$\delta f = 1/T$ $T = 1/\delta f$	$F_e = 1/\delta t, \delta f = 1/T$ $T = 1/\delta f, \delta t = 1/F_e$
Espace Fréquence	f continu $f \in \mathbb{R}$	f continue borne F_e	f discret, pas δf non borné en fréquence	f discret, pas δf borne F_e

On peut noter que ce tableau peut se lire du haut vers le bas (on part de l'Espace Temps et on construit l'Espace Fréquence). On pourrait tout aussi bien le lire du bas vers le haut (on part de l'Espace Fréquence et on construit l'Espace Temps).

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

8.3 Spectre d'un signal continu

Dans les précédents chapitres, nous avons introduit et utilisé la Transformée de Fourier Discrète, outil parfaitement bien adapté à un paquet d'octets (vecteur), c'est à dire à un signal échantillonné de durée T bornée⁴. Cette transformation peut s'appliquer sans aucune hypothèse puisqu'elle traite d'un nombre limité de données et que ces données ont des valeurs finies⁵.

Nous allons maintenant introduire la **Transformée de Fourier**, transformation intégrale destinée à des signaux continus, rencontrée fortuitement au paragraphe 8.2.3 puisque aucun nom n'avait été encore donné à la relation 8.2. Formellement, tout semble résider dans le passage, possible ou impossible, d'un signal discret (pas temporel δt) de durée limitée à une fonction continue obtenue

- d'une part, en faisant tendre le pas temporel δt vers 0 (ce qui revient à dire qu'il y a un nombre infini d'échantillons même pour un signal de durée finie) ;
- d'autre part en faisant tendre la durée du signal vers l'infini (ce qui revient à dire qu'il y a un nombre infini d'échantillons, même pour un signal discret).

Cette démarche semblerait très raisonnable si l'on se cantonnait à des fonctions continues en escalier : or cette limitation est trop contraignante dans le monde réel du traitement du signal.

Aussi faut-il se doter d'outils spécifiques (plutôt récents puisque datant du milieu du XX^e siècle) pour pouvoir passer en toute rigueur du monde discret au monde continu et vice versa.

8.3.1 Cas d'un signal de durée limitée

Soit un signal continu $r(t)$ de durée T finie. Nous savons donc qu'il semble possible, en périodisant ce signal $r(t)$ d'avoir un signal discret de durée infinie et d'utiliser des Ondes de Fourier (signaux a priori défini pour $t \in \mathbb{R}$) pour analyser ce signal (voir le paragraphe 8.2.3) : il y a une infinité d'OF nécessaires (puisque $f \in \mathbb{R}$), mais nous avons vu qu'il semble possible de se restreindre aux valeurs f_k suivantes :

$$f_k = k \frac{1}{T} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il y en a une infinité ($k \in \mathbb{Z}$), mais ces valeurs, qui représentent un spectre de raies, ne sont pas continues mais espacées par la valeur $\delta f = 1/T$. Le fait d'avoir un signal de durée finie a donc transformé le signal continu fréquentiel en un signal discret (valeurs discrètes des fréquences), la longueur restant infinie. L'analyse nécessite donc une infinité⁶ d'Ondes de Fourier $\mathcal{OF}_{f_k}, k \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{OF}_{f_k}(t) = e^{2i\pi f_k t}$$

qui présentent une intéressante propriété d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} \int_0^T \mathcal{OF}_{f_k}(t) \mathcal{OF}_{f_{k'}}^*(t) dt &= 0 \quad \text{si } k \neq k' \\ &= T \quad \text{si } k = k' \end{aligned}$$

proche de celle rencontrée pour les OFD (relation 5.9).

Moyennant certaines hypothèses sur la nature du signal, on peut utiliser ces $\mathcal{OF}_{f_k}$ pour "traiter" notre signal $r(t)$. On définit alors des coefficients $\hat{r}$:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \int_0^T \mathcal{OF}_{f_k}^*(t) r(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-2i\pi f_k t} r(t) dt \end{aligned} \tag{8.3}$$

Formellement, cette expression est très proche de la TFD (relation 6.7) :

$$\hat{b}_k = \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} b_n = \sum_{n=1}^N e^{-2i\pi f_k (n-1)} b_n$$

4. puisqu'un paquet d'octets a physiquement une taille limitée.

5. On supposera que les calculs n'auront pas à traiter les grandeurs **NaN** –Not a Number–.

6. infini plus restreint si on peut dire que l'infinité d'Ondes de Fourier $\mathcal{OF}_f, f \in \mathbb{R}$ initiales.

comme si l'on faisait tendre N , le nombre de points du signal b_n , vers l'infini tout en faisant tendre le pas temporel δt vers 0 de sorte que le nombre de valeurs $\hat{b}_k$ tend vers l'infini aussi.

Le vrai problème mathématique est de savoir si cette intégrale 8.3 existe et quelles sont les hypothèses à faire sur la fonction $r(t)$ (le signal est maintenant un objet mathématique, c'est à dire une fonction du temps) : nous renvoyons donc aux ouvrages classiques de traitement du signal pour approfondir ce point essentiel à une bonne compréhension du traitement du signal continu et nous continuons en supposant simplement que $r(t)$ est une *smooth function*.

8.3.2 Définitions : Transformée de Fourier et Transformée de Fourier Inverse

Considérons maintenant un signal $r(t)$ défini sur $\mathbb{R}$ (le temps peut donc prendre n'importe quelle valeur, entre un passé infini et un futur infini, ce qui rend ce signal irréaliste pour un physicien ou un traiteur de signal). On montre que, moyennant certaines hypothèses (précisées par exemple dans [4]), on peut lui associer sa Transformée de Fourier⁷ TF qui est donnée, par définition, par l'expression suivante :

$$\text{TF}[r(t)](f) = \hat{R}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi ft} r(t) dt \quad (8.4)$$

C'est une transformation intégrale qui, à un signal défini par une variable $t \in \mathbb{R}$ (le temps en traitement du signal) fait correspondre un signal défini par une variable $f \in \mathbb{R}$ (la fréquence en traitement du signal, c'est à dire un inverse du temps : la grandeur ft est sans dimension).

Si, pour un signal donné, la TF existe, alors on peut définir la Transformée de Fourier Inverse par l'expression suivante :

$$\text{TFI}[\hat{R}(f)](t) = r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi ft} \hat{R}(f) df \quad (8.5)$$

On a donc, partant d'un signal défini par la variable temps, un nouveau signal défini par la variable fréquence. Toute l'information contenu dans le signal $r(t)$ est aussi contenu dans le signal $\hat{R}(f)$ puisque la transformée inverse permet de reconstituer de manière exacte le signal initial $r(t)$: on a bien, pour des variables t (l'univers Θ_C , l'indice C nous rappelant que la variable t est continue sur $\mathbb{R}$) et f (l'univers Φ_C , l'indice C nous rappelant que la variable f est continue sur $\mathbb{R}$), variables toutes deux définies sur $\mathbb{R}$, le concept de variables duales ayant déjà été rencontré dans le monde discret au chapitre 5.

Formellement parlant, la TF est une projection d'un signal $r(t)$ sur toutes les Ondes de Fourier possibles, ce qui induit certaines propriétés dans l'espace dual Φ_C . De même que le signal $r(t)$ requiert tous les instants $t \in \mathbb{R}$ pour sa description dans l'univers Θ_C , de même $\hat{r}(f)$, la TF de $r(t)$, requiert toutes les fréquences $f \in \mathbb{R}$ pour une description dans l'univers Φ_C . C'est un aspect lourd de conséquences pour les fondements théoriques de la TF. En effet :

- Nous avons vu qu'un signal discret de durée finie T pouvait s'analyser avec uniquement les Ondes de Fourier de fréquence $f_k = (k-1)\delta f = (k-1)/T$. A chaque f_k on pouvait faire correspondre un signal Kronecker $\vec{K}_{k,N}$ ($K_{k,N}(k) = 1$ et $K_{k,N}(n) = 0 \forall n \neq k$) tel que :

$$\text{TFD}[\vec{K}_{k,N}] = e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

Sachant qu'il y a une infinité de fréquence dans l'espace Φ_C , existe-t-il une fonction définie dans l'espace Θ_C dont la TF soit le conjugué d'une Onde de Fourier ? Ce serait bien pratique et, en l'absence d'outils mathématiques adéquats, les physiciens, tels Dirac, ne se sont pas privés d'utiliser une représentation permettant cet artifice de calcul. Cependant, la réponse est négative dans le monde des fonctions et il faut rendre hommage à L.Schwartz d'avoir introduit l'univers des distributions pour permettre d'asseoir cette propriété. Il est donc possible et justifié d'utiliser la distribution de Dirac $\delta(t)$ (que nous appellerons souvent dans ce texte simplement "Dirac") qui a comme propriété⁸ la relation suivante :

$$\text{TF}[\delta(t-t_0)](f) = e^{-2i\pi ft_0} \quad (8.6)$$

7. L'usage veut que l'on ne précise pas le fait que cette transformée est "continue" et non discrète –comme la TFD–. On trouve néanmoins chez les bons auteurs la terminologie Transformée de Fourier à Temps Continu.

8. que l'on peut aussi choisir comme définition du Dirac à condition d'en poser les conditions d'existence et d'application

En particulier :

$$\text{TF}[\delta(t)](f) = 1 \quad \forall f \in \mathbb{R}$$

De manière équivalente, on a la relation :

$$\text{TFl}[e^{-2i\pi f t_0}] = \delta(t - t_0)$$

Remarquons que l'Onde de Fourier Continue de l'expression 8.6, paramétrée par l'instant t_0 , est définie pour tout $f \in \mathbb{R}$: nous attribuons ainsi, grâce à la TF, une infinité de fréquences à ce signal $\delta(t - t_0)$. Si l'on compare au monde discret étudié au chapitre 5, pour un Kronecker décrit par N valeurs (dépendant donc de la variable temps, $n \in [1, N]$), la TFD attribuait N fréquences discrètes.

- A tout signal dans l'espace des fréquences Φ_C , on peut appliquer une TF. Il est alors facile de montrer⁹ que, pour une Onde de Fourier Continue vue comme fonction du temps t , on a :

$$\text{TF}[e^{2i\pi f_0 t}](f) = \delta(f - f_0) \quad (8.7)$$

La TF d'une Onde de Fourier Continue, dont le spectre est représentée par une fréquence unique f_0 , est un Dirac en fréquence paramétré par f_0 . Ce Dirac devrait être nul pour tout $f \neq f_0$ puisque nous supposons a priori que nous sommes dans un monde linéaire : dans ce cas, on ne peut "créer" des fréquences, et puisque une $\mathcal{OF}$ est caractérisée dans l'espace temporel par une fréquence unique, sa TF est aussi caractérisée par une fréquence unique. On peut remarquer qu'il n'existe pas dans le monde des fonctions usuelles une fonction nulle partout, excepté en une valeur unique, permettant la propriété 8.6.

Pour bien prendre en compte la difficulté du cadre mathématique requis, reprenons la définition de la TF et appliquons la pour la distribution de Dirac $\delta(t)$:

$$\begin{aligned} \text{TF}[\delta(t - t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt \\ &= e^{-2i\pi f t_0} \end{aligned}$$

Sans entrer dans le cœur des démonstrations, modifions cette intégrale en la découpant en 3 morceaux :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{t_0 - \varepsilon} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt + \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt + \int_{t_0 + \varepsilon}^{\infty} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt$$

Le raisonnement mené sur le résultat obtenu, qui est un Dirac en fréquence (impossibilité de "créer" des fréquences), nous conduit assez naturellement à poser pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{t_0 - \varepsilon} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt &= 0 \\ \int_{t_0 + \varepsilon}^{\infty} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt &= 0 \end{aligned}$$

Reste donc le dernier terme, ce qui conduit à poser l'égalité suivante :

$$\int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt = e^{-2i\pi f t_0}$$

Tout se passe comme si $\delta(t - t_0)$ était nul, hormis pour $t = t_0$, et qu'en $t = t_0$, ses propriétés soient telles que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} e^{-2i\pi f t} \delta(t - t_0) dt = e^{-2i\pi f t_0}$$

et pour vérifier cette relation, la valeur de $\delta(t - t_0)$ doit tendre vers l'infini : c'est un des points difficile mais aussi bien utile de la théorie des distributions puisqu'elle permet de gérer des sortes de fonctions se comportant comme si elles prenaient des valeurs infinies en un point bien défini.

9. Faites le!! Pour cela, à partir des définitions de la TF et de la TFl, trouvez une propriété intéressante sur le retournement du temps.

Historiquement, c'est le physicien Paul-Adrien Dirac qui, vers 1926-1927, eut l'idée d'introduire une fonction $\delta(x)$ possédant deux propriétés "surnaturelles"¹⁰ :

- $\delta(x) = 0 \forall x \neq 0$ et $\delta(0) = +\infty$,
- $\int r(x) \delta(x) dx = r(0)$

$r(x)$ étant une fonction¹¹ de la variable x ; il donna comme exemple la fonction égale à $\varepsilon/2$ pour $|x| < \varepsilon$, et nulle ailleurs, à charge de tout un chacun de faire tendre en toute impunité ε vers 0. Comme Dirac se permettait en outre de dériver sa fonction $\delta(x)$ et de lui attribuer la propriété :

$$\int r(x) \delta'(x) dx = -r'(0)$$

<<les mathématiciens n'y comprenaient rien>>¹²

On comprend qu'il ait fallu quelques décennies pour en avoir une assise mathématique solide.

Dans ce document, nous nous cantonnerons à utiliser sans autre commentaire les expressions 8.6 et 8.7 et à utiliser les Dirac en supposant que les fonctions sur lesquelles nous les appliquons vérifient certaines propriétés essentielles¹³. Il sera aussi possible de dériver ce Dirac et obtenir ainsi $\delta'(x)$ caractérisé par :

$$\int r(x) \delta'(x) dx = -r'(0) \quad (8.8)$$

pour toute fonction r un tant soit peu raisonnable. Le lecteur trouvera dans [3] une définition de l'espace fonctionnel de ces fonctions vérifiant 8.8.

8.3.3 Propriétés de la TF

Supposons que nous ayons à traiter un signal $r(t)$ et qu'il soit possible de le décomposer en une infinité d'Ondes de Fourier, ou, ce qui revient au même, tel que l'on puisse lui attribuer une TF $\hat{R}(f)$. On a donc (relation 8.5) :

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi ft} \hat{R}(f) df$$

Pour chaque fréquence f , on peut attribuer une valeur $\hat{R}(f)$ correspondant à une Onde de Fourier de fréquence f . $\hat{R}(f)$ définit le spectre du signal $r(t)$, spectre qui n'a aucune raison d'être discret : la TF donne donc le spectre continu d'un signal de durée infinie (à condition qu'il n'ait pas une période T : dans ce cas, comme nous l'avions vu au paragraphe 8.2.3, nous aurions un spectre de raies).

Introduisons maintenant la convolution : pour cela, on peut appliquer le même raisonnement que dans l'univers discret (paragraphe 6.3.4), c'est à dire on recherche une transformation entre deux signaux telle que la TF de la transformation soit le produit des TF des signaux. On en déduit la définition de la convolution $\star$ de deux fonctions r et s ¹⁴ :

$$h(t) = r(t) \star s(t) = s(t) \star r(t) = \int s(t-u) r(u) du = \int s(u) r(t-u) du \quad (8.9)$$

qui correspond à la relation 6.31 du monde discret, et de sa propriété dans l'espace de Fourier :

$$\text{TF}[r(t) \star s(t)](f) = \text{TF}[r(t)](f) \text{TF}[s(t)](f)$$

qui correspond à la relation 6.32 du monde discret.

10. adjectif proposé par Godement : voir pour plus de détail [3], p132.

11. On devine qu'il faudra sûrement poser des conditions sur cette fonction $r(x)$ pour pouvoir vérifier la seconde propriété.

12. Toujours [3], p132.

13. vérifiées heureusement par pratiquement toutes les fonctions rencontrées dans le monde de la physique.

14. Par simplification typographique nous gardons pour la convolution discrète la typographie $\star$ déjà utilisée pour la convolution continue.

8.3.4 Dirac, convolution, TF et TFI

A partir des définitions précédentes, et en supposant toujours traiter de fonctions raisonnables, regardons le rôle d'un Dirac dans une convolution. Il est facile de montrer la relation suivante pour une fonction $r(t)$:

$$\delta(t - t_0) \star r(t) = r(t - t_0)$$

Comme le Kronecker dans le monde discret, le Dirac joue un rôle de retard (ou d'avance) dans le monde continu et on a (cf relation 6.18) :

$$\text{TF}[r(t - t_0)](f) = e^{2i\pi f t_0} \text{TF}[r(t)](f)$$

Décaler temporellement un signal a pour conséquence de multiplier son spectre par une Onde de Fourier. On sait ainsi comment décaler un signal : il suffit de calculer sa TF, de la multiplier par une Onde de Fourier et prendre sa TFI :

$$r(t - t_0) = \text{TFI}[\text{TF}[r(t)](f) e^{2i\pi f t_0}](t)$$

De même on montre facilement :

$$\text{TF}[e^{2i\pi f_0 t} r(t)](f) = \text{TF}[r(t)](f - f_0) = \text{TF}[r(t)](f) \star \delta(f - f_0)$$

décaler le spectre d'un signal d'une valeur f_0 revient à multiplier le signal (dans son univers temporel) par une l'Onde de Fourier $\mathcal{OF}_{f_0}$.

$$\hat{R}(f - f_0) = \text{TF}[e^{2i\pi f_0 t} r(t)](f)$$

8.3.5 Autres propriétés du Dirac

Un des aspects géniaux de l'invention de Dirac, mais aussi le plus délicat à justifier, repose dans la dérivation du Dirac.

Pour cela commençons par voir si l'on peut dériver un spectre continu. En supposant avoir affaire à une fonction raisonnable $r(t)$ pour laquelle on peut permuter dérivation et intégration, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(\text{TF}[s](f)) &= \frac{d}{df} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi f t} r(t) dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{df} (e^{-2i\pi f t}) r(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2i\pi t) (e^{-2i\pi f t}) r(t) dt \\ &= -2i\pi \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-2i\pi f t}) (t r(t)) dt \\ &= -2i\pi \text{TF}[t r(t)](f) \end{aligned}$$

Le résultat est remarquable puisqu'il est équivalent de dériver dans l'espace des fréquences Φ_C ou de prendre la TF de la fonction $r(t)$ multipliée par la variable t . Si la fonction $r(t)$ le permet, on peut même envisager les dérivées n -èmes :

$$\frac{d^n}{df^n}(\text{TF}[r](f)) = (-2i\pi)^n \text{TF}[t^n r(t)](f)$$

Cette expression n'a pas son équivalent dans le domaine discret (dans lequel on pourrait certes définir une dérivée numérique, mais qui est généralement à éviter¹⁵).

15. En général, la dérivation numérique est à éviter car elle est très sensible aux bruits de toutes sortes, à commencer par les erreurs d'arrondis toujours présentes sur un calculateur.

Si l'on considère maintenant la TFI, on a dans le plan temporel :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}r(t) &= \frac{d}{dt} \left(\text{TFI} [\hat{R}(f)] (t) \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi ft} \hat{R}(f) df \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{2i\pi ft}) \hat{R}(f) df \\
 &= 2i\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi ft} f \hat{R}(f) df \\
 &= 2i\pi \text{TFI} [f \hat{R}(f)] (t)
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

et l'on peut comme précédemment généraliser à la dérivée n -ème (si elle existe) On a ainsi une autre méthode pour calculer la dérivée n -ème d'une fonction :

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t) = (2i\pi)^n \text{TFI} [f^n \hat{R}(f)] (t)$$

Si l'on admet les résultats précédents, on peut tenir un raisonnement "à la Dirac" concernant la dérivée du Dirac. En repartant de l'expression 8.10 et en l'appliquant au Dirac (qui a pour TF la valeur 1), on a :

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \text{TFI} [(2i\pi f)] (t)$$

d'où :

$$\text{TF} [\delta'(t)] (f) = 2i\pi f \tag{8.11}$$

généralisable à la dérivée n -ème du Dirac :

$$\text{TF} [\delta^n(t)] (f) = (2i\pi f)^n$$

On en déduit une relation fondamentale liée à la dérivée du Dirac :

$$\frac{d}{dt}r(t) = \delta'(t) \star r(t) \tag{8.12}$$

généralisable à la dérivée n -ème de la fonction $s(t)$ (si elle existe) :

$$\frac{d^n}{dt^n}r(t) = \delta^n(t) \star r(t)$$

et on comprend mieux pourquoi Dirac tenait tant à cet outil...

8.3.6 Pourquoi la Transformée de Fourier ?

Depuis Fourier, beaucoup de mathématiciens se sont penchés sur cette transformation et l'ont utilisée dans divers domaines. Aussi, pour un grand nombre de fonctions usuelles, on trouve les TF dans des tables¹⁶ : le résultat analytique est donc accessible, et les logiciels de calcul formel comme Maple connaissent tout ou partie des résultats. Aussi, ce n'est que très rarement que le physicien ou l'ingénieur ont effectivement à calculer une intégrale de Fourier.

Les tables existent donc, mais il faut souligner que leurs réalisations ont requis des étapes mathématiquement subtiles car, pour obtenir une TF, <<la méthode bête –calculer une primitive de la fonction à intégrer– n'est en général d'aucune utilité parce que la primitive ne se ramène pas à des fonctions "élémentaires">>¹⁷. Or, grâce aux propriétés des fonctions dans le plan complexe (fonctions holomorphes), des méthodes spécifiques

16. Il existe même des tables de Transformées de Fourier de distributions.

17. Godement, [3],p364

de calcul (comme la méthode de Cauchy [3]) existent et permettent de mener à bien les calculs de TF a priori impossibles si on se cantonne à l'axe réel.

L'univers "continu" existe dans le monde du temps et dans son dual, celui des fréquences : dans ces deux univers existent des outils utiles, comme la dérivation ou l'intégration, qui permettront par exemple de déterminer les extremas de ces fonctions. Revenons à notre problématique de signal numérique : peut-on utiliser ces transformations dédiées au signal continu dans le cas discret ? Plus précisément, connaissant une TF, peut-on en déduire une TFD ? La réponse est positive, mais requiert d'aller chercher une nouvelle relation mathématique : la formule de Poisson.

8.4 Du continu au discret : la formule de Poisson et ses conséquences

8.4.1 Problème posé

Nous avons déjà rencontré les difficultés liées à une discrétisation d'une fonction continue au chapitre 5 où nous avons :

- une fonction continue de référence qui était l'Onde de Fourier, paramétrée par la fréquence $f \in \mathbb{R}$ et définie par la relation 5.1 :

$$\mathcal{OF}_f(t) = e^{2i\pi ft}$$

- une fonction discrète qui était l'Onde de Fourier Discrète, paramétrée par $k, k \in [1, N]$, définie sur N points par la relation 5.5

$$\mathcal{OFD}_{k,N}(n) = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \quad \forall n \in [1, N]$$

l'espace Θ étant échantillonné avec un pas constant δt (c'est à dire avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/\delta t$).

Pour un instant donné $t = n\delta t$, les deux représentations coïncident.

Ces deux représentations ont leurs représentations duales dans l'univers des fréquences Φ :

- pour $\mathcal{OF}_f$, sa Transformée de Fourier TF, exprimée sous la forme d'un Dirac dans Φ ;
- pour $\mathcal{OFD}_{k,N}$, sa Transformée de Fourier Discrète TFD, exprimée sous la forme d'un Kronecker dans Φ .

Dans cet espace Φ , il ne semble y avoir aucun moyen pour associer ces deux objets (Kronecker et Dirac). Or, nous avons vu que l'univers analytique de la TF était un outil extrêmement précieux en Traitement du Signal puisqu'il a permis la construction de tables de transformées de Fourier, évitant ainsi le recours à des calculs souvent fastidieux (et répétitif).

Pour répondre à cette interrogation, deux étapes sont à franchir :

- La TFD est définie pour un signal discret de N valeurs, N étant fini. Il va falloir étendre la définition de ce signal discret à un nombre infini de valeurs ($N \in \mathbb{Z}$). On introduit ainsi la Transformée de Fourier à temps Discret (TFtD) qui peut être vue aussi bien comme une extension de la TFD pour des valeurs discrètes dont l'indice couvre tout $\mathbb{Z}$, que comme une réduction de la TF à des instants discrets :

$$\hat{B}(\nu) = \text{TFtD}[B](\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi n\nu} b_n \quad \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (8.13)$$

On lui associe sa transformation inverse, la Transformée de Fourier Inverse à temps Discret (TFItD), qui s'écrit :

$$b_n = \text{TFItD}[\hat{B}](n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi n\nu} \hat{B}(\nu) d\nu \quad (8.14)$$

Nous verrons qu'il existe une passerelle entre TFtD et TF appelée "formule de Poisson".

- Il est possible de passer d'un signal discret $\vec{B}$ décrit par N valeurs ($n \in [1, N]$) à un signal décrit par un nombre infini de valeurs ($n \in \mathbb{Z}$) : en effet, $\vec{B}$ peut se représenter comme somme d'OFD (relation 6.27) :

$$\vec{B} = \sum_{k=1}^N \hat{b}_k \overrightarrow{\mathcal{OFD}}_{k,N}$$

Or les OFD, définies pour $n \in [1, N]$ sont en fait des fonctions périodiques de période N :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad \mathcal{OFD}_{k,N}(n + kN) = \mathcal{OFD}_{k,N}(n)$$

Sur le plan “information”, cette relation n’apporte rien puisqu’elle est intrinsèque aux Ondes de Fourier, qui sont elles mêmes à la base des Ondes de Fourier Discrète.

On en déduit que l’on ne change rien à l’information contenu dans un signal discret $\vec{B}$ de durée T , décrit par N valeurs, en le transformant en un nouveau signal $\vec{B}'$ à partir du signal $\vec{B}$ par périodisation de $\vec{B}$ avec une période N (c’est à dire $N\delta t = T$). C’est la démarche adoptée au paragraphe 8.2.5 où nous nous étions permis de réécouter en boucle le même morceau de musique.

Il nous faut maintenant un outil mathématique spécifique, appelée “formule de Poisson”, pour tisser des liens entre le monde discret et le monde continu.

8.4.2 Formule de Poisson

La “formule de Poisson” est une relation fondamentale, que nous admettrons¹⁸. Elle tisse un lien entre une fonction $r(t), t \in \mathbb{R}$ et un signal discret $u_p, p \in \mathbb{Z}$ tels que

$$u_p = r(p\delta t)$$

avec δt pas d’échantillonnage du signal u_p .

Elle s’exprime, dans l’univers des fréquences réduites, par la relation :

$$\boxed{\forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[, \quad \hat{u}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}(\nu + n)} \quad (8.15)$$

Dans cette expression :

- ν est une fréquence réduite et appartient à $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$,
- $\hat{R}$ est la Transformée de Fourier (TF) d’une fonction $r(t)$ du temps $t \in \mathbb{R}$,
- $\hat{u}$ est la Transformée de Fourier à temps Discrèt (TFtD) d’une série u_p indexée par $p \in \mathbb{Z}$.

Nous avons donc notre “passerelle” entre TF, qui peut se calculer analytiquement, et TFtD, cette dernière nous permettra de calculer la TFD moyennant certaines hypothèses (comme la périodisation de nos données, ou le bourrage de zéros).

Dans le cas général où le spectre est défini dans l’intervalle $[-F_e/2; F_e/2]$, la formule de Poisson s’écrit :

$$\forall f \in [-F_e/2; F_e/2[, \quad \hat{u}(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{R}(f + nF_e) \quad (8.16)$$

8.4.3 Formule de Poisson appliquée à une OFD

Considérons, sur un temps T , une OFD définie sur N valeurs. Soit $\mathcal{OFD}_{f_k}(p)$, avec $p \in [1, N]$ et $f_k = (k-1)/N$ (on se place en fréquences réduites).

Elle correspond à une OF spécifique : $\mathcal{OF}_{f_k}$ avec $(k-1)/N$. On connaît sa Transformée de Fourier (relation 8.7) :

$$\text{TF}[\mathcal{OF}_{f_k}](f) = \delta(f - f_k)$$

Cette OFD définie pour $p \in [1, N]$ permet, par périodisation, de définir un signal discret (s_p) de durée infinie, avec $p \in \mathbb{Z}$. On peut alors en écrire la TFtD :

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-2i\pi p\nu} s_p \quad \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$$

¹⁸. Elle est aussi admise dans [4] car elle requiert pour sa démonstration des outils mathématiques qui sortent du périmètre d’un simple cours de signal numérique.

expression qui nous avait posé problème au paragraphe 8.2.3 puisque tout laisse à penser que cette somme peut prendre une valeur infinie.

La formule de Poisson nous donne la clé du problème puisque :

$$\hat{s}(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\nu - k/N + n)$$

Cette expression donne une démonstration au résultat intuitif d'un spectre de raies puisque

- la somme qui semblait être infinie au paragraphe 8.2.3 est en fait un Dirac, ce qui donne bien une valeur “infinie” pour certaines fréquences. Il fallait donc introduire mathématiquement ce Dirac pour continuer proprement les calculs.
- pour les autres valeurs de fréquence, la somme (avec une infinité de termes) semblait pouvoir être “oubliée” vis à vis des fréquences particulières précédentes. Ici, on démontre donc que, pour toutes les autres valeurs de fréquence, la TFtD est nulle.

Deux constatations essentielles doivent être faites à partir de ce résultat :

- le résultat pour l' $\overrightarrow{\text{OFD}}_{f_k}$ fait intervenir des Dirac de fréquences réduites $f = k/N + n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Cela correspond donc à des fréquences qui usurpent la position initiale de la fréquence f_k de l'OFD de référence. C'est une piste pour analyser proprement le phénomène d'*aliasing* que nous avons rencontré lors de la décimation des fonctions de Hadamard (paragraphe 7.5.1) et des ondes de Fourier (paragraphe 7.5.1).
- les seules fréquences pour lesquelles le Dirac est non nul correspond à $\nu = k/N$ en fréquence réduite. Il y en a un nombre fini, directement lié à la longueur de l'OFD de référence, c'est à dire N . Le spectre n'est donc pas continu, mais construit par un ensemble fini de Dirac : on a donc effectivement un spectre de raies, résultat de la durée limitée du signal initial (défini sur N valeurs).

8.4.4 Formule de Poisson appliqué à un filtre discret

Nous avons analysé un filtre discret particulier au paragraphe 7.3.2 caractérisé par $\vec{C}$ tel que :

$$\begin{cases} c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = \frac{1}{5} \\ c_n = 0 \quad \forall n \in [6, N] \end{cases} \quad (8.17)$$

Nous avons pu calculer sa TFD (formule 7.10) :

$$\hat{c}_k = e^{2i\pi \frac{2(k-1)}{N}} \frac{\sin\left(\pi \frac{5(k-1)}{N}\right)}{5 \sin\left(\pi \frac{(k-1)}{N}\right)} \quad (8.18)$$

qui est, de facto, sa TFtD si on applique un bourrage de zéros (ici, on ne doit pas réécouter le filtre en boucle car on doit l'appliquer en un instant précis).

Considérons ce même filtre dans sa version continue :

$$c_C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ \frac{1}{5\delta t} & \text{si } t \in [0, 5\delta t] \\ 0 & \text{si } t \in]5\delta t, \infty[\end{cases} \quad (8.19)$$

Il est facile¹⁹ de calculer sa TF :

$$\text{TF}[c_C(t)](f) = e^{-i\pi \frac{5f}{F_e}} \frac{\sin(5\pi f \delta t)}{5\pi \frac{f}{F_e}} \quad (8.20)$$

qui est une fonction très utilisée en traitement du signal et qui s'appelle sinus cardinal, ou SinC²⁰. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$:

$$\text{SinC}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \forall x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad (8.21)$$

19. Faites le!!

20. Attention à son implémentation dans les langages : par exemple, en Python, “sinc” correspond à $\sin(\pi x)/(\pi x)$.

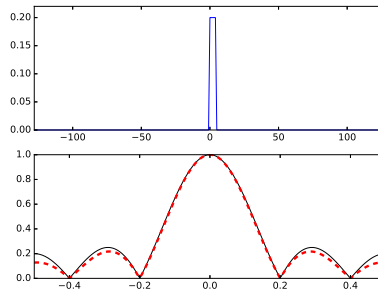


FIGURE 8.7 – Filtre discret moyennneur (équation 8.17). En bas et en noir, sa TFD (équation 8.18), représentée sur le segment $] -0.5; 0.5[$ en fréquence réduite. Sur cette même figure, on a superposé en rouge pointillé la TF (équation 8.18) d'un créneau (équation 8.20). Si ces deux représentations ont les mêmes zéros, elles présentent de fortes similitudes, mais leurs valeurs diffèrent.

(nous en avons déjà rencontré une expression discrète au chapitre précédent : relation 7.11)

Appliqué à la fréquence $f = \frac{k-1}{N} F_e$, la formule de Poisson permet donc d'écrire, pour le terme d'amplitude :

$$\frac{\sin\left(\pi \frac{5(k-1)}{N}\right)}{5 \sin\left(\pi \frac{(k-1)}{N}\right)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin\left(5\pi \left(\frac{k-1}{N} + n\right)\right)}{5\pi \left(\frac{k-1}{N} + n\right)}$$

Cette expression donne donc une sorte de développement en série d'un ratio de sinus en fonction de sinus cardinaux²¹.

Le terme de phase est très légèrement différent puisque le cas continu donne, pour une fréquence $f = \frac{k-1}{N} F_e$:

$$e^{-i\pi 5 f_r}$$

alors que le cas discret donne :

$$e^{-i\pi 4 f_r}$$

En effet, le centre de gravité du filtre fenêtre avec $M = 5$ est en $n = 3$ alors qu'un filtre continu défini sur $[0, 5\delta t]$ a pour centre de gravité $t = 2, 5$.

Sur cet exemple, nous avons donc une illustration de ce qu'apporte la formule de Poisson au monde discret : elle permet donc l'utilisation des outils analytiques du monde continu (comme les tables des transformées de Fourier) pour établir le spectre discret théorique d'un signal discret dans la mesure où ce signal discret est une version discrète d'un signal continu connu. Pour des opérations de filtrage, il est alors possible de connaître le gabarit théorique d'un filtre et d'en appréhender les effets sur un signal après convolution puisque le spectre du signal en entrée est multiplié par ce gabarit (voir le paragraphe 7.2.4).

8.5 Du discret au continu : la formule de reconstruction de Shannon

La formule de Poisson va nous donner aussi une possibilité de reconstruire un signal continu à partir de sa version discrète de manière parfaite (c'est à dire que toute l'information du signal discret se retrouve dans le monde continu sans effet d'aliasing).

Soit un signal discret $b_n, n \in \mathbb{Z}$, représentant un signal continu $r(t)$. Ce signal discret a un spectre à support dans $[-F_{max}/2; F_{max}/2]$. Si le signal continu $r(t)$ a été échantillonné selon le critère de Shannon,

21. Vérifiez que la convergence de la série est raisonnablement rapide.

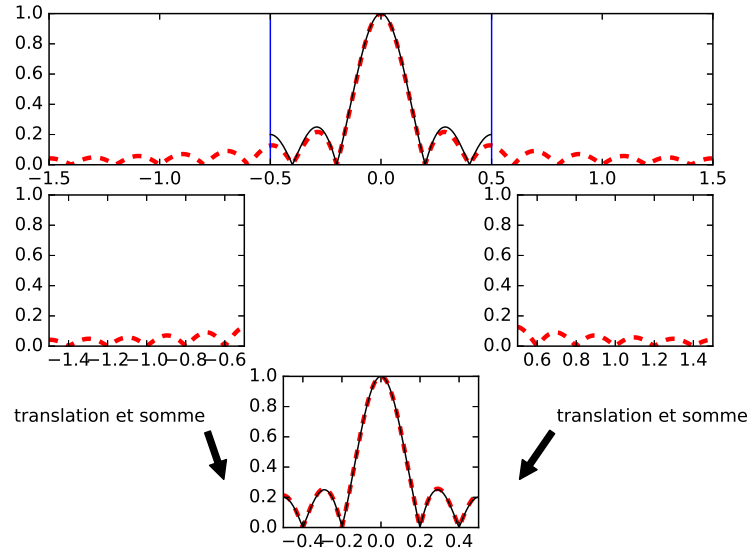


FIGURE 8.8 – Filtre discret et formule de Poisson. La TF de la fonction créneau est représentée, en pointillé rouge, sur le segment $]-1.5; 1.5[$ en fréquence réduite. Sur cette figure, on superpose la TFD du créneau numérique, représenté uniquement sur le segment $]-0.5; 0.5[$ en fréquence réduite. Au milieu, on ne représente la TF que sur les intervalles $]-1.5; -0.5[$ et $]0.5; 1.5[$ en fréquence réduite. La figure du bas est obtenue en rajoutant à la TF de la fonction créneau sur le segment $]-0.5; 0.5[$, cette même TF sur le segment $]-1.5; -0.5[$ ainsi que sur le segment $]0.5; 1.5[$. On observe alors une bien meilleure ressemblance avec la TFD du créneau numérique.

c'est à dire que la fréquence d'échantillonnage F_e vérifie $F_e \geq F_{max}$, alors il est possible de reconstruire à partir de ces valeurs discrètes le signal continu $r(t)$ en appliquant la formule de reconstruction de Shannon :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad r(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \text{SinC}(\pi F_e(t - n\delta t)) \quad (8.22)$$

Cette relation se démontre à partir de la formule de Poisson. Soit un signal continu $r(t)$ dont le spectre $\hat{R}(f)$ est défini dans l'intervalle $[-F_{max}/2; F_{max}/2]$ (il est donc nul en dehors de cet intervalle). Sa version discrète, $b_n, n \in \mathbb{Z}$, représente sa version échantillonnée, avec F_e comme fréquence d'échantillonnage et δt comme pas d'échantillonnage. Pour toute valeur t telle que $t = p\delta t$, on a l'identité $r(t) = b_p$.

Les conditions du théorème de Poisson sont donc vérifiées et, puisque le spectre de $r(t)$ est nul en dehors de l'intervalle $[-F_{max}/2; F_{max}/2]$, on a alors :

$$\hat{b}(f) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{R}(f + pF_e) = \hat{R}(f)$$

$\hat{b}(f)$ est la TFD, ce qui donne :

$$\sum_n b_n e^{-2i\pi \frac{nf}{F_e}} = \hat{R}(f)$$

On prend la transformation de Fourier inverse de cette expression (relation 8.5), ce qui donne, puisque le spectre est borné :

$$\int_{-F_e/2}^{F_e/2} e^{2i\pi ft} \left(\sum_n b_n e^{-2i\pi \frac{nf}{F_e}} \right) df = \text{TFI}[\hat{R}(f)] = r(t)$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

En supposant que les hypothèses requises soient justifiées, on a :

$$\begin{aligned} \int_{-F_e/2}^{F_e/2} e^{2i\pi ft} \left(\sum_n b_n e^{-2i\pi \frac{nf}{F_e}} \right) df &= \sum_n b_n \left(\int_{-F_e/2}^{F_e/2} e^{2i\pi ft} e^{-2i\pi \frac{nf}{F_e}} df \right) \\ &= \sum_n b_n \left(\int_{-F_e/2}^{F_e/2} e^{2i\pi f(t-n\delta t)} df \right) \end{aligned}$$

On reconnaît dans le terme de droite la transformée de Fourier inverse d'une fenêtre naturelle, donc un sinus cardinal (voir la formule 8.21), ce qui donne au final :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n \text{SinC}(\pi F_e(t - n\delta t)) = r(t)$$

Il est important de noter dans cette formule deux points essentiels :

— pour tout t pour lequel il existe un entier m tel que $t = m\delta t$, on a :

$$\text{SinC}(\pi F_e(t - n\delta t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

et pour ces instants t on a

$$r(t) = b_m$$

Le signal discret reflète bien le signal continu aux instants de discrétisation.

— pour les autres instants t , la formule de reconstruction met en œuvre tous les échantillons discrets puisque la somme s'effectue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit un signal discret (fourni par exemple par un paquet d'octets d'un fichier MP3). Pour le transformer en signal continu (ce qui est requis par un haut parleur par exemple), l'appareil qui réalise cette formule de Shannon effectue une reconstruction parfaite : on parle alors d'un CNA idéal (Convertisseur Numérique Analogique). Cependant, il faut remarquer que la mise en application de cette formule est très utopiste car elle nécessite d'avoir tous les échantillons du signal discret, tant passés que futurs !!

D'autres échantillonneurs sont envisageables : même s'ils ne sont pas "idéaux", ils fournissent en sortie des approximations tout à fait réalistes du signal continu idéal (voir par exemple [4]).

Chapitre 9

Processus aléatoires

La dimension “aléatoire” du bruit omniprésent dans les signaux a donné naissance à un volet important du traitement du signal : le traitement des signaux aléatoires. Il a donné naissance à des méthodes couramment employées dans la vie quotidienne, mais ses fondements théoriques sont d’une grande technicité.

Aussi dans ce document, nous nous focalisons sur l’analyse de signaux “aléatoire” plus faciles à étudier : ceux pour lesquels on dispose de plusieurs réalisations possibles et disponibles pour le traitement. L’exemple le plus actuel est l’analyse de données satellitaires pour lesquelles on dispose actuellement d’un grand nombre de données acquises sur la même zone géographique, avec les mêmes paramètres capteurs, mais à des dates différentes, donc à des niveaux de bruits différents.

Ce cas quasiment utopique, même s’il se rencontre dans cette problématique très actuelle qu’est l’imagerie satellitaire, ne reflète pas la réalité des signaux aléatoires : celle-ci doit composer le plus souvent avec un signal unique. Dans ce cas, il est d’usage de faire une hypothèse dite d’ergodicité, qui sera rapidement présentée au paragraphe 9.4. Mais, par soucis d’aborder ce problème difficile des signaux aléatoires, nous garderons la présentation “multi-signaux”, plus simple, mais qui a été aussi la démarche historique qui a permis d’aborder les signaux aléatoires il y a plus de 50 ans (voir par exemple l’ouvrage maintenant historique de Roubine [6]).

9.1 Signaux et bruit

9.1.1 Le bruit dans les signaux de type audiophoniques

Les signaux rencontrés jusqu’à présent ont été généralement des “cas d’école” : signaux synthétiques, ondes de Fourier, ... La détermination de ces signaux ne fait aucunement appel au hasard.

Or dans la “vraie vie”, les signaux sont tous entachés de bruit de sorte que la quantité d’information disponible se trouve sensiblement diminuée. Aussi le problème de la détection doit être envisagé sous un nouvel angle : celui d’une extraction d’un signal représentatif à partir d’un signal corrompu. De plus, si dans le cas d’un signal déterministe, une mesure donne toujours le même résultat, le plus souvent, lorsque l’on renouvelle une expérience “dans les mêmes conditions”, on observera des résultats différents : de tels signaux seront di “aléatoires”.

Dans les anciens manuels de traitement analogique du signal, l’exemple classique qui était proposé est celui de signaux en sortie d’amplificateurs de puissance à tubes à vide (voir par exemple [6]). En effet, tout amplificateur de puissance de ce type rajoute un bruit de type additif, dit de grenaille, dû à l’effet Schottky. Il faut noter que les composants solides (diodes, transistors,...) sont eux aussi source de bruit de même type (bruit de grenaille). La question était alors de savoir s’il était possible de gommer au mieux ce bruit totalement parasite.

9.1.2 Le bruit de chatoiement (*speckle*) dans les images RSO (Radar à Synthèse d’Ouverture)

Parmi les divers types d’imagerie, l’imagerie cohérente, que l’on rencontre en échographie médicale ou en radar à synthèse d’ouverture, est caractérisée par un phénomène très marqué : le chatoiement (*speckle*),

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

qui opère comme un bruit multiplicatif. Aussi une image apparaît granuleuse, même sur des zones a priori homogènes. La figure 9.1 (gauche) montre une image de radar à synthèse d'ouverture (RSO) obtenue par le satellite Terrasar-X : il est quasiment impossible à un non spécialiste d'analyser la scène et d'en comprendre les détails.

Là aussi, on cherche à savoir comment éliminer ce bruit qui perturbe la lisibilité de l'image (voir figure 9.1).

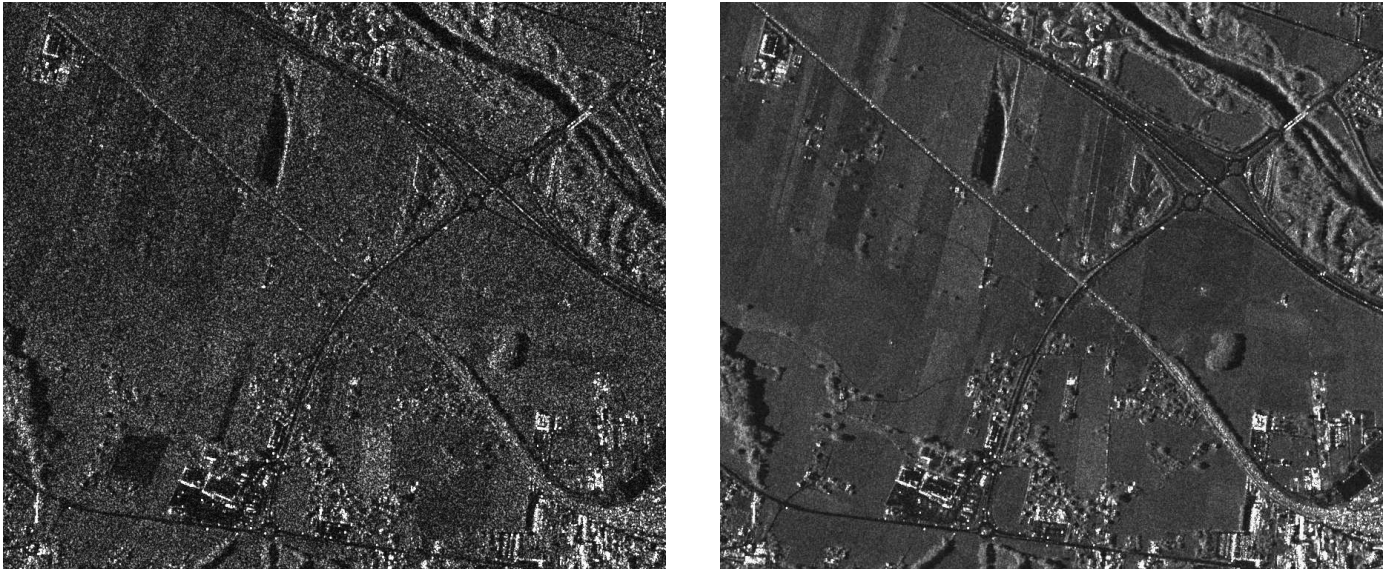


FIGURE 9.1 – A gauche, image obtenue avec le satellite Terrasar-X (résolution au sol d'environ 2m) : le bruit de chatolement, caractéristique de l'imagerie RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture), en dégrade la lisibilité. A droite, image débruitée obtenue à partir d'une vingtaine d'images de la même zone, acquises à diverses dates sur une période d'environ une année. Pour le même point au sol considéré, le bruit de chatolement varie selon les dates : la moyenne temporelle permet alors de lisser ce bruit sans perte de résolution.

9.1.3 Deux cas d'école

- Le premier cas d'école [6] consiste en un ensemble d'amplificateurs identiques court-circuités à l'entrée (voir figure 9.2). Si on compare les signaux en sortie de chaque amplificateur, l'électronique propre à chacun rajoutera un bruit différent, ce qui donne des signaux en sortie différents. Si on court-circuite les sorties, on peut penser que tous ces bruits se compenseront et que le signal d'origine retrouvera ainsi son intégrité.
- Les systèmes RSO actuellement en orbite sont capables d'imager très régulièrement les mêmes zones de la Terre, et la localisation des images permet un recalage inter-image excellent. En moyennant une vingtaine d'images (c'est à dire que chaque pixel est moyenné avec des pixels obtenus exactement au même endroit), on obtient une image filtrée sur laquelle le phénomène de chatolement a été gommé, mettant ainsi en évidence la texture et les structures de la scène (figure 9.1 droite).

Dans ces deux cas, on a donc des signaux qui ne sont plus déterministes, mais qui peuvent être vues comme des fonctions aléatoires du temps. Dans ce cas (fonction aléatoire dont la variable clé est le temps), on parle de processus aléatoire.

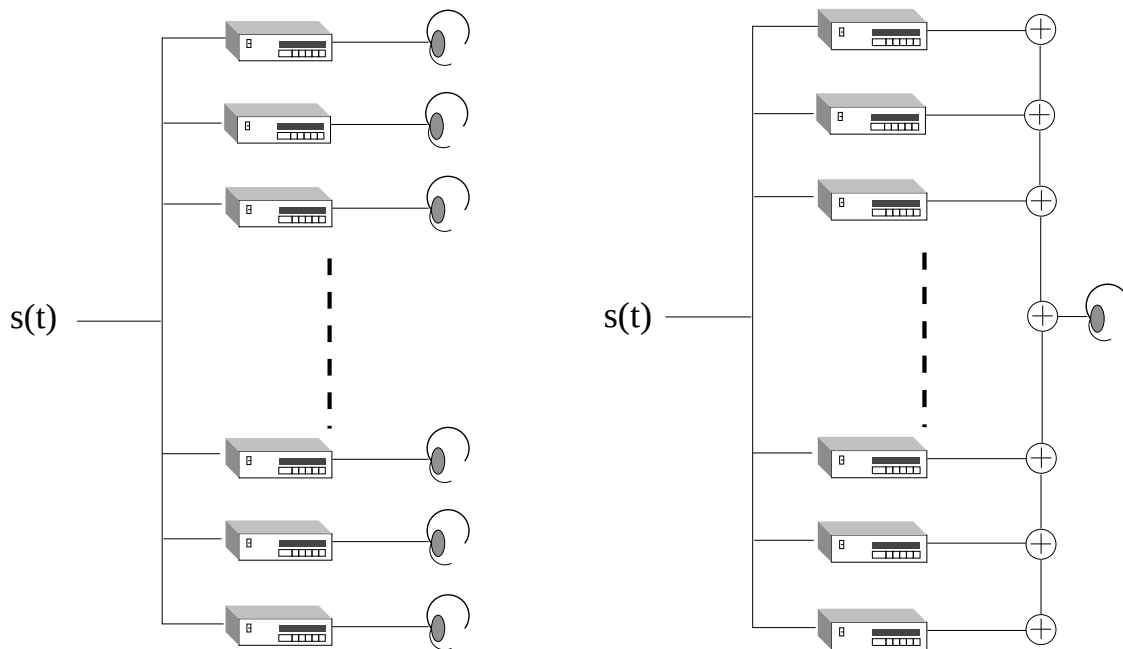


FIGURE 9.2 – Un signal parfait (sans bruit) est envoyé sur un certain nombre d’amplificateurs : l’adjonction de bruit est observable en écoutant chaque sortie individuellement (à gauche). On peut penser que le bruit de chaque amplificateur n’a rien à voir avec celui d’un autre amplificateur. Aussi, en écoutant la somme de toutes les sorties (à droite), on espère que ce bruit sera réduit.

9.2 Définitions

9.2.1 Processus aléatoires

On considère expérimentalement une grandeur (un signal temporel par exemple) qui n’a rien de déterministe : c’est le cas d’un signal bruité pour lequel on ne peut prédire le bruit puisque c’est le résultat d’un phénomène aléatoire (bruit de grenaille sur un amplificateur, bruit de chatolement sur un laser). Pour désigner cette grandeur, on la désignera dans ce document comme une **grandeur aléatoire**¹

Pour introduire la notion de **processus aléatoire**, on va se placer dans un contexte particulier : celui où l’on peut recommencer autant de fois que l’on veut l’expérience. Sa description comme grandeur aléatoire sera différente à chaque expérience puisque le bruit résulte d’un autre tirage aléatoire. On dispose ainsi d’un certain nombre de grandeurs aléatoires, P , chaque grandeur aléatoire étant indicé par la variable p .

Ainsi décrit, le processus aléatoire est donc composé de P grandeurs aléatoires, celles-ci étant des signaux continus ou discrets :

- Dans le cas de signaux continus, on désignera la variable par t (dépendance en temps par exemple). On parle alors de processus aléatoires à temps continu (ou fonctions aléatoires).
- Dans le cas de signaux discrets où l’on dispose de N échantillons, on donnera un indice à la variable, par exemple n avec $n \in [1, N]$. On parle alors de processus aléatoires à temps discrets (ou suites aléatoires).

Un processus aléatoire peut se voir de deux façons différentes :

- Un ensemble de données temporelles, chacune étant une **trajectoire** (ou **épreuve**). Ces données sont indicées par t (ou n) et correspondent à un indice de trajectoire p donné.

1. La notion de **variable aléatoire** est clairement définie dans les cours de probabilité comme étant une application définie sur l’ensemble des éventualités, c’est-à-dire l’ensemble des résultats possibles d’une expérience aléatoire. Cette appellation est déroutante car elle désigne une application, et non le résultat de l’expérience aléatoire. Dans la mesure du possible, dans ce chapitre, on tentera de se limiter au vocable “grandeur aléatoire” pour respecter la terminologie “variable aléatoire”.

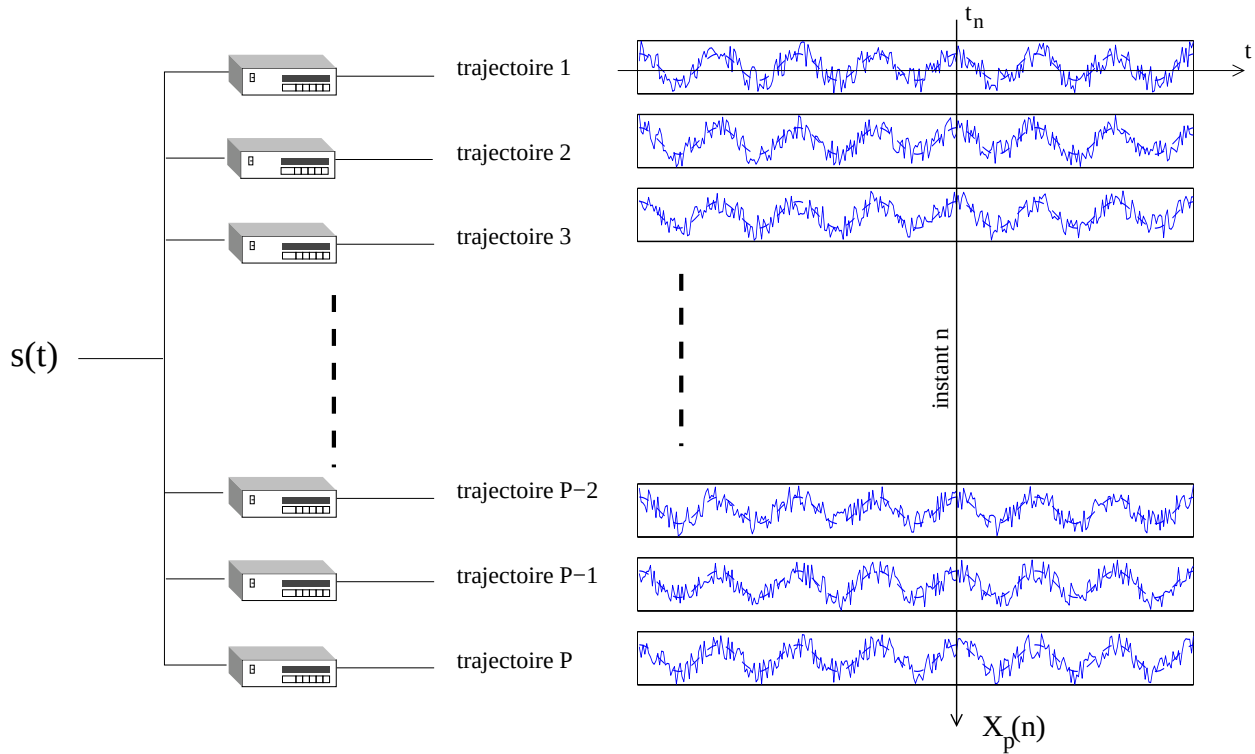


FIGURE 9.3 – Plusieurs réalisations d’un même signal. Pour un instant donné, t (c’est à dire un indice n en discret), on a plusieurs valeurs possibles. Le processus aléatoire X_p est donc décrit à chaque instant t_n (indiqué par n) par les P valeurs prises par les P réalisations : $\{X_1(n), X_2(n), \dots, X_p(n), \dots, X_{P-1}(n), X_P(n)\}$.

- Un ensemble de grandeurs aléatoires, chacune correspondant au même instant donné. Ces grandeurs aléatoires sont indicées par p et correspondent au même instant donné (t ou n).

Dans le cas d’un processus aléatoire classique, la grandeur est désignée par une fonction du temps (donc continue), les trajectoires formant un ensemble discret éventuellement infini (les trajectoires sont indexées par $\mathbb{Z}$). La difficulté théorique repose essentiellement sur cette différence : fonctions continues pour la dimension temporelle de chaque trajectoire, ensemble discret éventuellement infini de réalisations.

Dans le cas d’un processus aléatoire discret, on a pour chaque trajectoire un ensemble discret fini d’échantillons (N échantillons par trajectoire), et un ensemble discret de trajectoires (on a P trajectoires, P fini). Le problème est alors beaucoup plus simple à traiter.

9.2.2 Processus discret, processus continu

Soit un processus aléatoire, décrit par les grandeurs aléatoires X_p . Ces grandeurs peuvent être discrètes ou continues.

Pour faciliter les comparaisons, des notations identiques seront prises pour le monde continu et le monde discret.

- Pour une grandeur discrète, on définit la **moyenne statistique**² du processus comme :

$$E[X_p](n) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P x_p(n) \quad (9.1)$$

2. Dans ce chapitre, on fera une distinction entre moyenne statistique, calculée sur les réalisations en un instant donné, et moyenne temporelle, calculée pour une réalisation donnée.

Il faut insister sur le fait que cette moyenne statistique, établie sur les trajectoires réalisées, n'est pas la moyenne temporelle, que l'on calculerait sur une trajectoire donnée.

- Pour une grandeur continue, et dans le cas où les grandeurs aléatoires sont indicées par $p \in [1, P]$, on définit la moyenne statistique du processus comme

$$E[X_p](t) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P x_p(t) \quad (9.2)$$

Cette définition est à modifier si $p \in \mathbb{Z}$ (la somme étant alors infinie et certaines précautions sont alors à prendre pour que les expressions aient un sens).

La moyenne statistique du processus dépend de l'indice n ou de l'instant t .

9.2.3 Processus centré discret, processus centré continu

Pour chaque instant, on peut “centrer” le processus en soustrayant la moyenne statistique. On a alors :

- Pour une grandeur discrète, la moyenne statistique est donnée par la relation 9.1 et le processus discret centré s'écrit :

$$xc_p(n) = x_p(n) - E[X_p](n) = x_p(n) - \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P x_p(n)$$

- Pour une grandeur continue, la moyenne statistique est donnée par la relation 9.2 et le processus discret centré s'écrit :

$$xc_p(t) = x_p(t) - E[X_p](t) = x_p(t) - \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P x_p(t)$$

On supposera souvent par la suite que les processus sont centrés (ce sera une des conditions à vérifier : il faudra tester que leur moyenne statistique est nulle).

9.2.4 Définition de l'auto-covariance

Soit un processus aléatoire centré, décrit par les grandeurs aléatoires XC_p :

- dans le cas continu, on a, à chaque instant t un jeu de variables $xc_p(t)$;
- dans le cas discret, on a, à chaque indice n , un jeu de variables $xc_p(n)$ indicé par p , $p \in [1, P]$.

On peut espérer que si on se place à des instants très proches, il existe une continuité temporelle dans les signaux : comparer des variables à des instants t_1 et t_2 (ou des indices n et p) assez proches devrait permettre de mettre en évidence cette forme de continuité.

C'est la raison pour laquelle on définit l'auto-covariance, qui, dans le cas continu, consiste à comparer, sur le jeu des P grandeurs aléatoires, un même processus à deux instants différents :

$$R_{XC, XC}(t_1, t_2) = E[XC_p(t_1) XC_p(t_2)]$$

et dans le cas discret à deux indices différents :

$$R_{XC, XC}(n_1, n_2) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P xc_p(n_1) xc_p(n_2)$$

On voit que l'autocovariance est une indication de la liaison stochastique entre les valeurs prises à l'instant t_1 (indice n_1) et à l'instant t_2 (indice n_2).

Notons que pour $n_1 = n_2$, on a³ :

$$R_{XC, XC}(n_1, n_1) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P xc_p(n_1) xc_p(n_1) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (xc_p(n_1))^2 \quad (9.3)$$

et on reconnaît la norme L^2 au carré de XC : on parle alors de la puissance du processus aléatoire⁴

3. On traite ici de signaux réels.

4. et il faut bien insister que l'on a ici une puissance, liée à une moyenne, et non une énergie, car un processus n'est pas obligatoirement d'énergie finie.

9.2.5 Définition des processus stationnaires à l'ordre 1

Soit un processus aléatoire X_p et sa version centrée XC_p , $p \in [1, P]$. On dira qu'il est **stationnaire à l'ordre 1** s'il existe une valeur $\overline{m}$ telle que (dans le cas discret, indicé par n) la moyenne statistique soit indépendante de l'instant à laquelle on la calcule :

$$E[X_p](n) = \overline{m} \quad \forall n$$

L'appellation "stationnaire" est bien liée à ce fait que l'on peut calculer $\overline{m}$ à n'importe quel instant.

Aucun de nos exemples n'est un processus stationnaire à l'ordre 1 : les signaux temporels de la figure 9.3 oscillent dans le temps et leurs valeurs moyennes représentent un signal apparemment de type sinusoïdal. L'image de la figure 9.1 est une zone globalement agricole avec des champs, des routes et des bâtiments : elle n'a rien de constant.

En revanche, en se plaçant sur une vignette de cette image initiale sur une parcelle agricole, on peut avoir un processus stationnaire à l'ordre 1. La figure 9.4 montre un exemple où la moyenne est à peu près constante sur la parcelle alors que pour chaque imagerie le signal, fortement bruité par le bruit de chatoiement, n'est en rien constant : on a bien un exemple de processus stationnaire à l'ordre 1

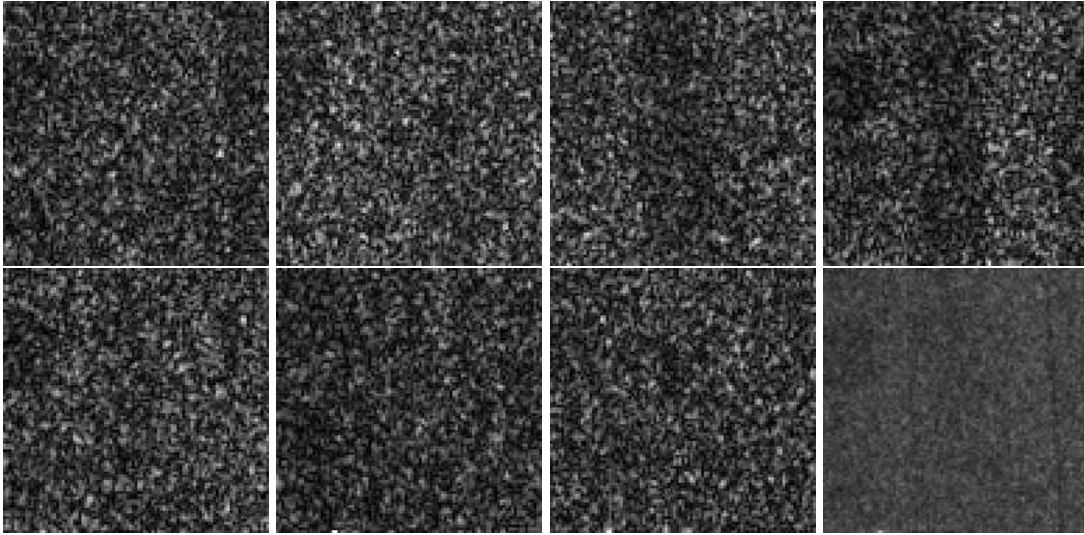


FIGURE 9.4 – Plusieurs imageries radar sur la même parcelle agricole, acquises durant l'été 2009. La moyenne de ces imageries correspond à la dernière imagerie en bas à droite : elle est globalement constante et correspond bien à un champ unique monoculture. C'est un exemple de processus stationnaire à l'ordre 1.

9.2.6 Définition des processus stationnaires à l'ordre 2

Soit un processus aléatoire X_p et sa version centrée XC_p , $p \in [1, P]$. On dira qu'il est **stationnaire au second ordre au sens large**, noté SSL si :

1. il est stationnaire à l'ordre 1, c'est à dire si sa moyenne statistique ne dépend pas du temps (ou de l'indice) :

$$E[X_p] = \text{Cste}$$

2. sa variance est finie, c'est à dire, pour tout instant (ou indice) :

$$E[|X_p|^2] < \infty$$

Si, dans le cas discret, cette variance est toujours finie (puisque l'on a un nombre fini P de trajectoires), dans le cas continu il est d'usage d'étudier les processus aléatoires dont les trajectoires sont indicées sur $\mathbb{Z}$, ce qui nécessite d'effectuer ce test sur la variance qui ne s'exprime plus sous la forme d'une somme finie.

3. son auto-covariance $R_{XC,XC}$ ne dépend que de la différence entre les instants d'analyse, $t_2 - t_1$ dans le cas continu, $n_2 - n_1$ dans le cas discret.

Ce dernier critère sur l'auto-covariance s'exprime :

- dans le cas continu, en posant $\tau = t_2 - t_1$, comme :

$$\begin{aligned} R_{XC,XC}(t_1, t_2) &= E[XC_p(t_1) XC_p(t_2)] \\ &= R(\tau) \end{aligned}$$

- dans le cas discret, comme :

$$\begin{aligned} R_{XC,XC}(n_1, n_2) &= E[XC_p(n_1) XC_p(n_2)] \\ &= R(n_2 - n_1) \end{aligned}$$

9.2.7 Un premier exemple

Considérons un signal harmonique discret composé d'une fréquence unique f et échantillonné à la fréquence F_e . Il s'écrit :

$$s(n) = \cos\left(2\pi \frac{f n}{F_e}\right)$$

Considérons que ce signal soit émis. Supposons qu'un observateur le reçoive sous diverses formes (multi-trajet), chaque réception correspondant à un trajet de longueur différente. On peut alors caractériser chaque réception par un déphasage φ_p aléatoire et on a :

$$s_p(n) = \cos\left(2\pi \frac{f n}{F_e} + \varphi_p\right)$$

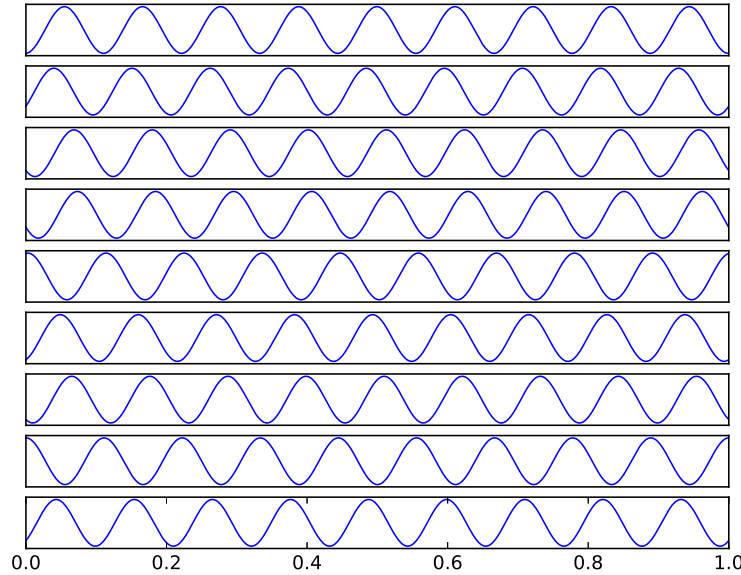


FIGURE 9.5 – 9 réalisations ($P = 9$ trajectoires) d'un signal périodique de fréquence égale à 9. A chaque réalisation correspond un terme de déphasage aléatoire.

Si l'on se place à un instant donné (on fixe n), on peut analyser les P valeurs en cet instant. On a donc P signaux $y(p)$:

$$y(p) = s_p(n) \quad p \in [1, P]$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

$$= \cos\left(2\pi \frac{f n}{F_e} + \varphi_p\right)$$

Calculons la moyenne statistique sur ces P valeurs :

$$\begin{aligned}\overline{m}(n) &= \sum_{p=1}^P \cos\left(2\pi \frac{f n}{F_e} + \varphi_p\right) \\ &= \sum_{p=1}^P \left(\cos\left(2\pi \frac{f n}{F_e}\right) \cos(\varphi_p) - \sin\left(2\pi \frac{f n}{F_e}\right) \sin(\varphi_p) \right) \\ &= \cos\left(2\pi \frac{f n}{F_e}\right) \left(\sum_{p=1}^P \cos(\varphi_p) \right) - \sin\left(2\pi \frac{f n}{F_e}\right) \left(\sum_{p=1}^P \sin(\varphi_p) \right)\end{aligned}$$

Pour P suffisamment grand, et si les φ_p sont bien aléatoires, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^P \cos(\varphi_p) &= 0 \\ \sum_{p=1}^P \sin(\varphi_p) &= 0\end{aligned}$$

et on déduit que :

$$\overline{m}(n) = 0 \quad \forall n \in [1, N]$$

Le processus est stationnaire à l'ordre 1. Il est de plus centré puisque la moyenne statistique est nulle.

Étudions maintenant l'autocovariance. Il faut alors considérer deux indices n_1 et n_2 (deux instants) et calculer la covariance des signaux $y_1(p)$ et $y_2(p)$ donnés par les deux relations :

$$\begin{aligned}y_1(p) &= s_p(n_1) = \cos\left(2\pi \frac{f n_1}{F_e} + \varphi_p\right) \quad p \in [1, P] \\ y_2(p) &= s_p(n_2) = \cos\left(2\pi \frac{f n_2}{F_e} + \varphi_p\right) \quad p \in [1, P]\end{aligned}$$

Faisons le premier calcul préalable suivant :

$$\cos(a+r) \cos(b+r) = \frac{1}{2} (\cos(a+b+2r) - \cos(a-b))$$

Par un raisonnement similaire au cas précédent, on peut écrire :

$$\sum_{p=1}^P \cos\left(2\pi \frac{f n_1}{F_e} + 2\pi \frac{f n_2}{F_e} + 2\varphi_p\right) = 0$$

D'autre part, on a

$$\sum_{p=1}^P \cos\left(2\pi \frac{f n_1}{F_e} - 2\pi \frac{f n_2}{F_e}\right) = P \cos\left(2\pi \frac{f (n_1 - n_2)}{F_e}\right)$$

On en déduit la relation :

$$\sum_{p=1}^P y_1(p) y_2(p) = \frac{P}{2} \cos\left(2\pi \frac{f (n_1 - n_2)}{F_e}\right) \quad (9.4)$$

qui ne dépend que de $n_1 - n_2$.

Le processus est donc SSL.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



9.3 Outils des processus aléatoires

9.3.1 Motivations

Le traitement du signal sur des signaux déterministes fait la part belle à la transformée de Fourier : il n'y a pas de modification de l'information en décrivant un signal par sa représentation temporelle ou par sa représentation fréquentielle, et assez souvent la représentation fréquentielle permet une analyse plus pertinente que l'analyse temporelle. De plus, la relation de Parseval (relation 6.29) permet un lien entre les coefficients de la transformée de Fourier et les valeurs du signal, ce qui donne sous sa forme discrète, une relation entre les échantillons du signal (les b_n) et les coefficients de la TFD (les $\hat{b}_n$) :

$$\sum_{n=1}^N b_n b_n^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \hat{b}_n^* \hat{b}_n$$

Dans le cas de processus aléatoires, on peut se demander quelle est la signification de la transformée de Fourier d'une trajectoire vis à vis de la transformée de Fourier d'une autre trajectoire. En reprenant l'exemple du paragraphe 9.2.7, et en considérant deux trajectoires, on a alors les deux signaux suivants :

$$\begin{aligned} s_{p1}(n) &= \cos\left(2\pi \frac{f}{F_e} n + \varphi_{p1}\right) \quad n \in [1, N] \\ s_{p2}(n) &= \cos\left(2\pi \frac{f}{F_e} n + \varphi_{p2}\right) \quad n \in [1, N] \end{aligned}$$

On peut appliquer une transformée de Fourier à ces deux signaux : elles seront différentes, et si on analyse P trajectoires, on aura P transformées de Fourier différentes qui seront des fonctions aléatoires⁵.

Il va falloir trouver un outil capable de donner une interprétation dans l'espace des fréquences à un processus aléatoire, c'est à dire être capable de décrire la structure fréquentielle d'un signal d'un point de vue statistique. Nous verrons que le descripteur traditionnellement utilisé dans ce cas est la **densité spectrale de puissance**, que nous aborderons au paragraphe 9.3.4 et qui s'appuie sur l'autocovariance.

9.3.2 Processus centré et autocovariance

Processus centré : cas continu

Soit X un processus stationnaire du second ordre que l'on supposera centré et que l'on notera simplement X pour alléger les notations. Pour un instant donné t , $X_p(t)$ représente une suite indexée par $\mathbb{Z}$. On a alors les propriétés suivantes :

- c'est un processus stationnaire du premier ordre. Sa moyenne statistique vérifie :

$$E[X_p(t)] = 0 \quad \forall t$$

- sa variance est finie

$$E[|X_p(t)|^2] < \infty \quad \forall t$$

et son auto-covariance $R_X(t_1, t_2)$ ne dépend que de $t_2 - t_1$. En posant $\tau = t_2 - t_1$, on a :

$$R_X(t_1, t_2) = E[X_p(t_1) X_p(t_2)] = R(\tau)$$

Processus centré : cas discret

Soit X un processus stationnaire du second ordre que l'on supposera centré pour alléger les notations. Pour un indice donné n , $X_p(n)$ représente une suite indexée sur $[1, P]$. On a alors les propriétés suivantes :

- c'est un processus stationnaire du premier ordre. Sa moyenne statistique vérifie (puisque'il est supposé centré) :

$$E[X_p(n)] = 0 \quad \forall n$$

5. Rappelons que la terminologie "processus aléatoire" est traditionnellement réservé à des fonctions aléatoires du temps : or ici nous sommes en fréquence.

— sa variance est finie

$$E [|X_p(n)|^2] < \infty \quad \forall n$$

et son auto-covariance $R_X(n_1, n_2)$ ne dépend que de $n_2 - n_1$:

$$R_X(n_1, n_2) = E [X_p(n_1) X_p(n_2)] = \tilde{R}(n_2 - n_1) \quad (9.5)$$

En choisissant de noter nos suites discrètes indicées $X_p(n)$ sous la forme d'un double indice $x(n, p)$, on a la condition du "premier ordre" :

$$\sum_{p=1}^P x(n, p) = m(n) = \bar{m} \quad \forall n \in [1, N]$$

et la condition sur l'autocovariance :

$$\sum_{p=1}^P x(n_1, p) x(n_2, p) = r(n_2 - n_1) \quad (9.6)$$

Propriété de l'autocovariance (cas discret complexe)

On se place désormais dans le cadre de signaux complexes correspondant à des processus stationnaires à l'ordre 2 : les $x(n, p)$ sont alors des complexes. On a :

$$R_X(n_1, n_2) = \tilde{R}(n_2 - n_1) = \tilde{R}(q)$$

En se plaçant dans le cas plus général de signaux complexes, on remplace le produit par le produit hermitien, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(q) &= \sum_{p=1}^P x(n, p) x^*(n + q, p) \\ &= \sum_{p=1}^P x(n - q, p) x^*(n, p) \end{aligned}$$

cette dernière relation s'obtenant par la propriété de stationnarité à l'ordre 2 (en d'autres termes, l'instant, paramétré par l'indice n , n'intervient pas "en absolu", mais en relatif : toute expression valable en n est aussi valable pour n'importe quel autre n').

$$\begin{aligned} \tilde{R}(q) &= \sum_{p=1}^P x(n - q, p) x^*(n, p) \\ &= \sum_{p=1}^P (x^*(n - q, p) x(n, p))^* \\ &= \left(\sum_{p=1}^P x(n, p) x^*(n - q, p) \right)^* \\ &= \left(\tilde{R}(-q) \right)^* \end{aligned}$$

On en déduit la propriété de symétrie hermitienne pour la fonction d'autocovariance. Notons que si les grandeurs sont des réels, on a alors :

$$\tilde{R}(-q) = \tilde{R}(q)$$

Reprenons la définition de la fonction d'autocovariance (relation 9.5)

$$\tilde{R}(q) = E [X_p(n) X_p^*(n + q)]$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

L'inégalité de Schwarz permet d'écrire :

$$\left| E [X_p(n) X_p^*(n+q)] \right|^2 \leq E [X_p(n) X_p^*(n)] E [X_p(n+q) X_p^*(n+q)] \quad (9.7)$$

ce qui conduit à la relation :

$$\left| \tilde{R}(q) \right|^2 \leq \left| \tilde{R}(0) \right|^2$$

La fonction d'autocovariance a donc son maximum à l'origine et nous avons vu que c'était alors la puissance du processus (paragraphe 9.2.4, relation 9.3), ce qui donne dans notre cas (processus SSL) :

$$\tilde{R}(0) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (x_p(n))^2 \quad \forall n \in [1, N] \quad (9.8)$$

Dans certains cas, cette propriété (relation 9.7) semble "évidente" : c'est celui où lorsque l'écart temporel (lié à q) augmente, les grandeurs aléatoires $X_p(n)$ et $X_p(n+q)$ tendent à devenir indépendantes. Ce cas correspond bien à notre cas d'école d'images satellites : d'une année sur l'autre, une parcelle agricole peut totalement changer (labours, autre plantation...) et les pixels qui la représentent sont alors indépendants d'une année sur l'autre). On a alors (rappelons que les processus sont centrés) :

$$\begin{aligned} \tilde{R}(q) &= E [X_p(n) X_p^*(n+q)] \\ &\rightarrow E [X_p(n)] E [X_p^*(n+q)] \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

On a ici un cas spécifique où la fonction d'autocovariance a donc son maximum à l'origine et devient nulle pour de grandes valeurs de $|q|$. On dit parfois que l'on a un processus sans mémoire⁶.

Enfin, signalons la propriété de positivité. Si on a une famille de K variables complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$, alors $\tilde{R}$ vérifie :

$$\sum_{(i=1, j=1)}^K \lambda_i \lambda_j^* \tilde{R}(i-j) \geq 0 \quad (9.9)$$

Retour à l'exemple du paragraphe 9.2.7

Dans l'exemple étudié au paragraphe 9.2.7, nous avons vu que la covariance s'écrivait (relation 9.4) :

$$R(n_1, n_2) = \tilde{R}(n_1 - n_2) = \sum_{p=1}^P y_1(p) y_2^*(p) = \frac{P}{2} \cos \left(2\pi \frac{f(n_1 - n_2)}{F_e} \right)$$

La puissance du processus est alors égal à :

$$\tilde{R}(0) = \frac{P}{2} \quad (9.10)$$

et est une constante qui ne dépend que du nombre (fini) de trajectoires.

Il est intéressant de noter que cette valeur peut s'estimer pour n'importe quel indice $n \in [1, N]$ sous la forme :

$$\sum_{p=1}^P |s_p(n)|^2$$

parce que le processus est SSL.

6. Attention : les processus qui contiennent des composantes périodiques ne vérifient pas cette propriété : par exemple une zone de montagne sans végétation et couverte de neige l'hiver sera caractérisée par une tendance annuelle.

9.3.3 Matrice de covariance

Reprenons la définition de l'autocovariance :

$$R_X(n_1, n_2) = \tilde{R}(n_2 - n_1) = \tilde{R}(q)$$

Pour tous les $n_1 \in [1, N]$ et les $n_2 \in [1, N]$, on peut définir la matrice suivante $R = r_{ij}$ avec

$$r_{ij} = R_X(i, j) = \tilde{R}(i - j)$$

La matrice R s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \tilde{R}(0) & \tilde{R}(-1) & \dots & \tilde{R}(-N+1) \\ \tilde{R}(1) & \tilde{R}(0) & \dots & \tilde{R}(-N+2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{R}(N-1) & \dots & \tilde{R}(1) & \dots & \tilde{R}(0) \end{pmatrix}$$

Cette matrice a donc la symétrie hermitienne. On montre aussi qu'elle est définie positive (ce qui veut dire, entre autres, que toutes ses valeurs propres sont réelles positives). Sa forme particulière est celle d'une matrice de Toeplitz (que nous avons déjà rencontrée, voir le paragraphe 6.3.5).

9.3.4 La DSP (densité spectrale de Puissance)

Définition (cas discret)

L'autocovariance s'écrit comme une fonction $\tilde{R}(q)$, q représentant la différence entre les indices temporels entre lesquels on calcule cette covariance⁷. Pour q petit, on s'attend à ce qu'il existe des similitudes entre les grandeurs mesurées si les bruits correspondant aux diverses trajectoires n'évoluent que lentement. Pour q grand, on peut s'attendre à de fortes disparités, les bruits ayant une existence propre totalement décorréliés.

$\tilde{R}(q)$ est donc une fonction indicée par la dimension "temps". Rien n'interdit d'effectuer sur cette fonction des opérations classiques de traitement de signal, comme une transformée de Fourier discrète (à temps discret).

On définit ainsi la **densité spectrale de puissance**, que l'on note S_X par la relation (formule de Wiener-Khinchin) :

$$S_X(f) = \sum_q \tilde{R}(q) e^{-2i\pi f q} \quad \forall f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad (9.11)$$

f étant la fréquence réduite.

Dans sa forme discrète, la formule de Wiener-Khinchin s'écrit :

$$S_X(k) = \sum_q \tilde{R}(q) e^{-2i\pi \frac{(k-1)q}{N}} \quad \forall k \in [1, N]$$

Si l'on compare avec la définition de la TFtD d'un signal déterministe B décrit par ses b_n valeurs (relation 8.13) :

$$\hat{B}(\nu) = \text{TFtD}[B](\nu) = \sum_n b_n e^{-2i\pi \nu n} \quad \forall \nu \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

on remarque que l'on a simplement remplacé une valeur, b_n , par le coefficient de la matrice d'autocorrélation $R(q)$.

On pourra donc, si les conditions sont vérifiées, inverser la relation 9.11 au même titre que la TFtD dont l'inverse est donné par la relation de la TFtD inverse (relation 8.14) :

$$b_n = \text{TFItD}[\hat{B}](n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi n \nu} \hat{B}(\nu) d\nu$$

7. A la différence du polycopié [4], l'indice choisi pour cette définition est la lettre q : dans la mesure du possible, dans ce document, la lettre k a été réservée aux indices dans l'espace de Fourier.

Propriétés de la DSP

Nous avons vu que $\tilde{R}(q)$ a la symétrie hermitienne. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} S_X(f) &= \sum_q \tilde{R}(q) e^{-2i\pi f q} \\ &= \left(\sum_q \tilde{R}(q)^* (e^{-2i\pi f q})^* \right)^* \\ &= \left(\sum_q \tilde{R}(-q) e^{-2i\pi f (-q)} \right)^* \\ &= (S_X(f))^* \end{aligned}$$

et donc S_X est un réel. Il est de plus positif (ou nul) : cette propriété, qui peut se déduire de la propriété de positivité (relation 9.9) sera admise dans ce document.

Au même titre que la TFtD, l'expression 9.11 peut s'inverser. En prenant sa valeur pour $q = 0$, on obtient :

$$\tilde{R}(0) = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) df$$

et connaissant la relation entre $\tilde{R}(0)$ et la puissance du processus (relation 9.8), on a :

$$P_X = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (x_p(n))^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_X(f) df$$

La puissance d'un processus se déduit de la densité spectrale de puissance (on peut faire une analogie avec la relation de Parseval dans le cas des signaux déterministes discrets).

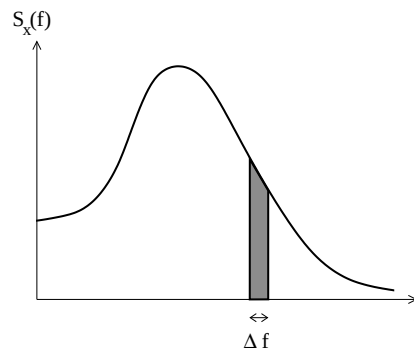


FIGURE 9.6 – Représentation de la densité spectrale d'un processus aléatoire. Dans la bande Δf , la densité spectrale permet de déduire la puissance moyenne du signal à la fréquence f .

Définition du bruit blanc

On appelle **bruit blanc** un processus aléatoire X_p SSL dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences. Autrement dit, le bruit blanc porte de la puissance de manière équivalente pour toutes les fréquences f .

Si cette constante est σ^2 , la relation 9.11 permet d'écrire :

$$\sum_q \tilde{R}(q) e^{-2i\pi f q} = \sigma^2 \quad \forall f \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

Dans le cas d'un processus discret, il est possible d'inverser cette relation et on obtient alors, pour la fonction d'autocorrélation $\tilde{R}(q)$, un Kronecker, c'est à dire l'expression :

$$\begin{cases} \tilde{R}(0) &= R_0 \\ \tilde{R}(q) &= 0 \quad q \neq 0 \end{cases}$$

Filtrage d'un processus aléatoire SSL

Les processus SSL ont leurs filtres, que l'on décrit par la proposition suivante [4] :

Soit X un processus SSL tel que R_X soit sommable. Soit h une suite sommable. Le processus définit par :

$$\forall p, Y_p = \sum h_l X_{p-l} = h \star X_p$$

s'appelle le processus filtré de X par le noyau h . C'est un processus SSL. Sa densité spectrale de fréquence s'écrit :

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

Le même raisonnement peut s'appliquer au filtrage récursif de processus. Si $a_1, \dots, a_M$ et $b_1, \dots, b_L$ définissent un filtre récursif⁸, pour un processus SSL X , il existe un unique processus SSL Y tel que :

$$\sum b_i Y_{p-i} = \sum a_i X_{p-i}$$

9.4 L'hypothèse ergodique

Les cas d'écoles correspondant aux figures 9.2 (amplificateurs en parallèle) et 9.1 (pile temporelle d'images radar) sont très rarement rencontrés dans les cas les plus courants. Néanmoins, le traitement du signal a su analyser les processus aléatoires sans ces hypothèses assez contraignantes demandant P signaux différents pour s'affranchir d'un bruit gênant.

Pour cela, moyennant quelques hypothèses, on peut n'utiliser qu'une seule trajectoire et découper le signal en tranches, chaque tranche étant alors vue comme une trajectoire. Cela revient à identifier la moyenne temporelle à la moyenne statistique : si ces deux grandeurs sont égales, on dira alors que le processus est ergodique. Cependant, cette propriété est très difficile à vérifier.

On a alors les grandeurs suivantes pour un signal $X(n)$ ergodique :

— la moyenne est alors la moyenne temporelle :

$$\overline{m} = \frac{1}{N} \sum_1^N X(n)$$

— la fonction d'autocorrélation s'écrit :

$$\tilde{R}(q) = \sum_{n=q}^N X(n) X(n-q)^*$$

Dire qu'un signal est ergodique revient à affirmer qu'une réalisation unique de ce processus porte en elle toutes les informations statistiques permettant de décrire le processus dans son ensemble (c'est à dire comme si on avait un grand nombre de réalisations).

La figure 9.7 montre comment l'hypothèse d'ergodicité peut s'appliquer sur une image, en supposant que pour un pixel donné, ses voisins situés autour de lui sont des tirages indépendants : il suffit alors d'effectuer la moyenne du pixel et de ses voisins pour retrouver le processus stationnaire sous jacent. Le résultat gomme effectivement le chatoiement. Le défaut de la méthode est que l'image apparaît floue, ce qui est normal puisque c'est un filtre passe bas que l'on a appliqué à l'image.

8. Ces coefficients vérifient donc les propriétés analysées au paragraphe 7.4.5

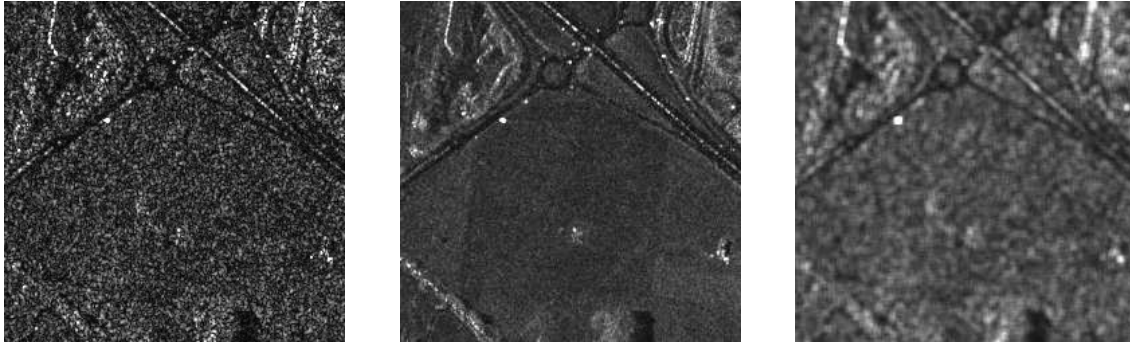


FIGURE 9.7 – Imagerie initiale (à gauche). Moyenne d’une pile d’images acquises à des instants différents (milieu). A droite, sous l’hypothèse d’ergodicité, on a calculé l’image moyenne de l’image initiale de gauche par un filtre moyennneur 5×5 .

9.5 Et pour aller plus loin

Ce chapitre sur les processus aléatoires avait pour but d’introduire le décor de ces phénomènes. Pour aller plus loin, le polycopié de Saïd Ladjal [4] donne toutes les bases nécessaires à leur compréhension et leur traitement.

Annexe A

Information

La théorie de l'information est née de la conjonction de plusieurs disciplines et, à ce titre, il est difficile d'en résumer simplement les concepts.

Le père de la cybernétique, N. Wiener, en donne une vision très anthropocentrique [7] :

Information is a name for the content of what is exchanged with the outer world as we adjust to it, and make our adjustment felt upon it. The process of receiving and of using information is the process of our adjusting to the contingencies of the outer environment and of our living effectively within that environment.

Cette définition a pour intérêt de souligner l'utilisation de l'information comme mode de connaissance du monde extérieur.

A.1 Information et thermodynamique

Une première définition de l'information peut se trouver en physique du solide par le biais de la notion de température. Au zéro absolu, un solide s'observe sous la forme d'un cristal parfait dont les atomes constitutants sont idéalement placés sur le réseau cristallin et ont le même état quantique (même états quantiques pour tous les électrons et tous les nucléons). Pour décrire un tel solide, il suffit de décrire la maille du cristal et l'état quantique d'un des atomes : l'information requise pour décrire ce solide est donc très réduite, et ce quelle que soit le volume du solide.

Dès que la température augmente, pour chaque atome, il faudrait connaître, par exemple, la valeur de son spin, la position relative du noyau sur la maille cristalline ainsi que sa vitesse. La quantité de données est alors ingérable (rappelons que le nombre d'Avogadro est de l'ordre de 10^{23}). Pour caractériser ces états physiques, la thermodynamique introduit la notion d'entropie : l'entropie est nulle au zéro absolu (postulat de Nernst-Planck, appelé aussi troisième principe de la thermodynamique), et l'entropie est croissante avec la température. Cette entropie reflète le degré d'imprévisibilité du milieu physique et donc la complexité de sa description.

Pour aller plus loin en physique, notons que chaque atome constituant le solide ne peut se décrire par sa position et sa vitesse : la mécanique quantique nous interdit la connaissance simultanée et exacte de ces deux grandeurs (le mouvement des électrons autour du noyau n'est pas un problème de mécanique classique). De ce fait, on ne connaît, pour chaque particule élémentaire, que sa probabilité liée à un état donné.

Puisque l'on ne peut décrire chaque particule élémentaire d'un solide, on opte pour une vision probabiliste où l'on considère le nombre d'états possibles physiques associé à leurs probabilités d'apparition. Boltzmann a donc proposé de définir l'entropie par la relation

$$S = k_B \log(\Omega)$$

Ω représentant le nombre d'états possible et dépendant du volume et de l'énergie interne (liée à la température). Remarquons qu'au zéro absolu, il n'y a qu'un seul état possible pour un solide cristallin : l'entropie est bien nulle.

A.2 Information au sens de Shannon

Shannon a repris ce concept en cherchant à quantifier ce qu'apporte la réalisation d'un événement en ne prenant en compte que sa probabilité d'apparition. Pour reprendre un exemple dû à Philippe Réfrégier[5], considérons les deux événements suivants :

- La température aux pieds de la Tour Eiffel a été de 5 degrés le 1^{er} janvier à 12h,
- La température aux pieds de la Tour Eiffel a été de 20 degrés le 1^{er} janvier à 12h.

On admettra simplement que la réalisation du second événement contient plus d'information que la réalisation du premier car sa réalisation semble moins probable et il est donc utile d'en informer la population. La quantité d'information d'un message peut donc se définir comme une mesure de son imprévisibilité.

Pour un ensemble Ω de N événements dont on connaît la probabilité $p_i, i \in [1, N]$, Shannon propose de définir la quantité d'information de l'événement k par

$$I_k = -\log p_k$$

On note que cette quantité d'information est d'autant plus grande que l'événement est moins probable.

Shannon définit alors l'entropie d'un ensemble Ω de N événements par la relation :

$$S[\Omega] = \sum_{k=1}^N p_k I_k = -\sum_{k=1}^N p_k \log p_k$$

On peut noter que si tous les événements sont équiprobables, on obtient :

$$S[\Omega] = \log N$$

et on retrouve l'entropie de Boltzmann (à une constante près).

A.3 Information au sens de Kolmogorov

Une autre source d'interprétation du concept d'information se trouve dans la notion de complexité de Kolmogorov. Appliquée à une suite de caractères, elle se définit comme la longueur du plus petit programme qui permet de l'engendrer.

Voici quelques exemples :

- une onde de Fourier discrète de N valeurs (c'est à dire une fonction circulaire discrète) se génère sous matlab par une seule ligne prenant en compte la fréquence de cette onde (la première ligne de ce code ne définit que les valeurs du temps) :
`T=[1:N];`
`A=sin(2*Pi*f*T);`
- un signal véritablement aléatoire (comme un bruit totalement imprévisible) nécessite un programme effectuant une énumération complète des valeurs de ce signal.
- un morceau de musique peut se réduire à sa simple partition qu'un programme pas trop long peut écrire (et non à une énumération de plusieurs centaines de mégaoctets pour un morceau d'une dizaine de minutes).

Cette définition a un grand intérêt philosophique car elle met en valeur une forme de prédictabilité d'un phénomène (la valeur que prend une fonction sinus est totalement prédictible à partir de la définition de la fonction sinus). La physique vise à résumer un phénomène observé de la manière la plus concise possible : la complexité de Kolmogorov sera d'autant plus faible que la description du phénomène sera concise. Le monde réel fausse cependant la qualité du résultat car s'ajoute toujours aux mesures du bruit d'origine diverse dont la complexité de Kolmogorov est maximale (car imprévisible).

A.4 Quantum d'information

En s'inspirant de ces deux définitions liées à la notion d'information, nous introduisons dans ce texte un néologisme qui est le quantum d'information et qui semble bien adapté à notre univers discret.

Prenons l'exemple d'une onde de Fourier de longueur N et de fréquence f . Elle peut se décrire de deux manières :

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

- N valeurs données par énumération des valeurs (c'est le tableau que Matlab alloue dans sa mémoire). Il est donc requis N cases mémoire pour la décrire.
- la manière de le construire, qui nécessite le nombre de points (N) et la fréquence f . Il est donc requis 2 cases mémoire pour la décrire.

Ce nombre de cases mémoire reflète la complexité de l'information traitée, sauf que dans le premier cas cette information est totalement redondante (N cases) et que dans le second cas elle est la plus concise possible (vous ne pouvez vous passer ni du nombre de valeurs, ni de la fréquence).

C'est ce nombre de descripteurs que nous appelons "quantum d'information". Sur l'exemple de l'onde de Fourier, on observe donc que, pour un signal de longueur N :

- dans l'espace temporel, il faut autant de quantum d'information que de points pour décrire l'onde de Fourier,
- dans l'espace réciproque (l'espace fréquentiel), un seul quantum d'information est requis : la fréquence.

En pratique, c'est ce nombre minimum qui définit l'information d'un signal.

On pourra donc dire qu'une transformation est réversible si elle ne modifie pas le nombre minimum de quanta d'information.



Annexe B

L'exponentielle complexe

B.1 Comment introduire l'exponentielle complexe

La théorie des nombres complexes est tout d'abord liée à l'extension du corps des réels $\mathbb{R}$, l'objectif étant d'avoir un corps algébriquement clos, c'est à dire tel que toute équation algébrique ait une solution. Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique sous la forme :

$$z = z_R + iz_I$$

z_R et z_I étant deux réels, et i un nombre tel que $i^2 = -1$. Toute équation algébrique a alors une solution est l'ensemble des nombres complexes définit un nouveau corps, appelé corps des complexes et noté $\mathbb{C}$.

Euler remarqua qu'il y a une grande parenté entre les développements en séries des fonctions trigonométriques (sinus et cosinus) avec le développement en série de la fonction exponentielle. C'est une manière d'introduire les exponentielles complexes, qui requiert des bases solides sur la théorie des séries entières : celle de l'exponentielle, et celles des fonctions sinus et cosinus.

Godement [2] propose une autre manière s'appuyant sur une connaissance pratique des fonctions sinus et cosinus, ainsi qu'une solide maîtrise de la formule du binôme. En effet, avec un papier et un crayon (voir le paragraphe B.2 page 165), on peut retrouver les formules d'addition des sinus et cosinus :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad (\text{B.1})$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad (\text{B.2})$$

$$(\text{B.3})$$

Si on pose la définition de la "série exponentielle" $\exp$ par la relation :

$$\exp(z) = \sum \frac{z^n}{n!}$$

série qui converge pour tout z complexe, on peut montrer que (application du théorème de convergence dominée) :

$$\exp(z) = \lim \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p$$

On montre alors que la relation suivante –formule d'addition de la série exponentielle– est vérifiée pour tout z_1 et z_2 complexe :

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2).$$

Mieux, on peut alors montrer le corollaire ([2], corollaire 2, p 393) affirmant que toute fonction $h(z)$, continue, dérivable en 0, vérifiant :

$$h(z_1 + z_2) = h(z_1) h(z_2) \quad (\text{B.4})$$

s'écrit :

$$h(z) = \exp(rz) \text{ avec } r = h'(0)$$

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Soient deux fonctions $c(x)$ et $s(x)$ vérifiant les formules d'addition du cosinus (relation B.1) et du sinus (relation B.2) et dérivables en 0, avec $c'(0) = 1$ et $s'(0) = 0$. Introduisons maintenant une nouvelle fonction $g(x)$ telle que :

$$g(x) = c(x) + i s(x)$$

Calculons $g(x+y)$:

$$\begin{aligned} g(x+y) &= c(x+y) + i s(x+y) \\ &= (c(x)c(y) - s(x)s(y)) + i(s(x)c(y) + c(x)s(y)) \\ &= (c(x) + i s(x))(c(y) + i s(y)) \\ &= g(x)g(y) \end{aligned}$$

Le corollaire s'applique à cette fonction et, en appliquant la relation B.4, on calcule r et on obtient :

$$g(x) = \exp(ix)$$

A ce stade, on a donc montré :

$$c(x) + i s(x) = \exp(ix)$$

Reste à donner, pour l'exponentielle complexe, un rôle à un nombre particulier, π , en supposant que nous ne le connaissons pas!!¹. Par des considérations sur le développement en suite alternée, on en déduit qu'il existe un nombre π tel que $c(\pi/2) = 0$ et $s(\pi/2) = 1$ et ceci conduit à écrire :

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

1. C'est l'aspect très original de cette démonstration due à Godement.



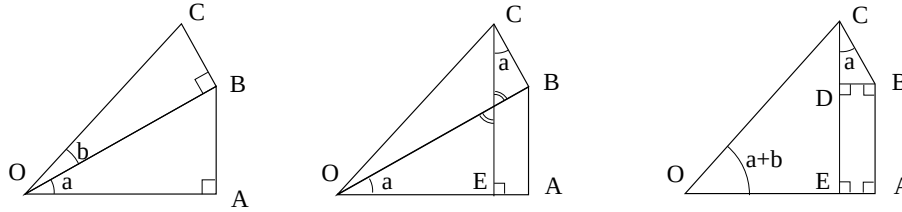


FIGURE B.1 – Cadre géométrique pour démontrer la formule “sinus d’une somme”. L’hypothénuse du triangle OAB (tel que $\widehat{BOA} = a$) est aussi une des bases du triangle OBC (tel que $\widehat{BOC} = b$). En construisant le segment perpendiculaire à OA issu de C , on se dote d’une structure géométrique (le rectangle $ABDE$) qui permettra aisément d’effectuer la démonstration.

B.2 Calculs annexes

Si les relations B.1 et B.2 sont très simples à démontrer, il faut cependant “trouver” la bonne représentation géométrique pour n’avoir à utiliser que des définitions fondamentales (niveau collège). La figure B.1 propose une représentation géométrique des angles a et b comme éléments essentiels de triangles rectangles judicieusement choisis pour que cette démonstration soit la plus limpide possible. Sur cette figure (à gauche), on a :

- un premier triangle rectangle OAB rectangle en A . L’angle $\widehat{AOB}$ est noté a .
- un second triangle rectangle OBC rectangle en B . L’angle $\widehat{BOC}$ est noté b .

Il est alors facile de voir que si l’on trace le segment CE perpendiculaire à OA , l’angle $\widehat{BCE}$ est égal à a (figure B.1, au milieu).

On rajoute alors le point D tel que le quadrilatère $ABDE$ soit un rectangle (figure B.1, à droite). Tout est prêt pour faire une démonstration évidente, n’utilisant que les définitions des fonctions sinus et cosinus :

$$\begin{aligned}
 \sin(a+b) &= \frac{CE}{OC} && \text{figure droite} \\
 &= \frac{CD+DE}{OC} && \text{figure droite } CE = CD + DE \\
 &= \frac{CD}{OC} + \frac{DE}{OC} \\
 &= \frac{CB \cos a}{OC} + \frac{DE}{OC} && \text{figure droite } CD = CB \cos a \\
 &= \frac{CB}{OC} \cos a + \frac{DE}{OC} \\
 &= \sin b \cos a + \frac{DE}{OC} && \text{figure gauche} \\
 &= \sin b \cos a + \frac{BA}{OC} && \text{figure droite } DE = BA \\
 &= \sin b \cos a + \frac{OB \sin a}{OC} && \text{figure gauche } BA = OB \sin a \\
 &= \sin b \cos a + \frac{OB}{OC} \sin a \\
 &= \sin b \cos a + \cos b \sin a && \text{figure gauche}
 \end{aligned}$$

Annexe C

Racines N -èmes de l'unité

C.1 Racines d'un polynôme de degré N

Nous avons donc vu en annexe B que l'introduction des nombres complexes avait été dicté par la recherche de solutions de n'importe quelle équation algébrique. En particulier, pour tout polynôme de degré $N : P_N(z)$, on a N racines $z_n, n \in [1, N]$ et le polynôme peut s'écrire de manière unique :

$$P_N(z) = a_0 \prod_{n=1}^N (z - z_n)$$

de sorte que :

$$\forall n \quad P_N(z_n) = 0$$

Eventuellement, la même valeur z_k peut se retrouver formellement plusieurs fois : on parle alors de racine multiple.

C.2 Racines N -èmes de l'unité : définition

Si l'on se cantonne aux nombres complexes de norme unité (c'est à dire les z tels que $|z| = 1$), on appellera racines N -èmes de l'unité tout complexe $\tilde{z}$ de norme unité et tel que

$$\tilde{z}^N = 1$$

Ces nombres sont bien évidemment racines du polynôme :

$$\tilde{z}^N - 1 = 0 \tag{C.1}$$

Ils peuvent aussi s'écrire sous une forme très simple d'exponentielle complexe :

$$\tilde{z} = e^{i\varphi} \text{ avec } \varphi \in [0, 2\pi[$$

et dans ce cas $\tilde{z}$ est racine N -ème de l'unité si et seulement si :

$$N\varphi = r2\pi \text{ avec } r \in \mathbb{N} \tag{C.2}$$

Nous allons identifier chaque racine N -ème de l'unité en la notant $\tilde{z}_k$. Comme tout polynôme de degré N admet exactement N racines¹, le polynôme de la relation C.1 aura N racines.

1. en prenant en compte, dans le cas général, leurs éventuelles multiplicités

Considérons la condition C.2 et considérons la plus petite valeur de r possible, c'est à dire $r = 1$. On définit ainsi z_1 :

$$\tilde{z}_1 = e^{i\varphi_1} \text{ avec } \varphi_1 = \frac{2\pi}{N}$$

Il est facile de voir que toutes les racines N -ème s'écrivent :

$$\tilde{z}_p = (\tilde{z}_1)^p$$

puisque l'on a ainsi les N racines, que tous les φ_p appartiennent à $[0, 2\pi[$ et sont distincts entre eux ($\varphi_p \neq \varphi_q$ si $p \neq q$). Nous avons maintenant tous les éléments pour montrer que les racines N -èmes de l'unité, munis de la multiplication ($\times$) forment un groupe commutatif fini. En effet :

— Pour tout entier $p \in [0, N-1]$ et $q \in [0, N-1]$, on a

$$\tilde{z}_p \times \tilde{z}_q = \tilde{z}_{p+q}$$

et $\tilde{z}_{p+q}$ est racine de l'unité : l'opération $\times$ est donc une loi interne. Il est aisé de montrer qu'elle est associative.

— $\tilde{z}_0 = 1$: on a donc un élément neutre pour l'opération $\times$.

— Pour tout entier $p \in [0, N-1]$, il existe un entier q unique dans $[0, N-1]$ tel que

$$\tilde{z}_p \times \tilde{z}_q = 1$$

il suffit pour cela de choisir $q = N - p$. Tout élément a donc un symétrique.

On a donc un groupe, qui est fini puisque l'on a N racines. La commutativité se déduit de la commutativité de l'addition puisque :

$$\varphi_{p+q} = \varphi_p + \varphi_q$$

On peut choisir comme générateur de ce groupe $\tilde{z}_1$ avec

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{N}$$

Toutes les racines peuvent alors s'écrire :

$$\tilde{z}_p = (\tilde{z}_1)^p \quad p \in [0, N-1]$$

En résumé, les racine N -ème de l'unité forment un groupe commutatif cyclique fini de dimension N et de générateur $\tilde{z}_1$ défini par :

$$\tilde{z}_1 = e^{\frac{2i\pi}{N}}$$

Ses éléments peuvent se décrire de deux manières équivalentes :

— $(1, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_p, \dots, \tilde{z}_{N-1})$ avec

$$\tilde{z}_p = e^{i\frac{2\pi p}{N}} = (\tilde{z}_1)^p \quad p \in [0, N-1]$$

— $(1, \tilde{z}_1, \tilde{z}_1^2, \dots, \tilde{z}_1^p, \dots, \tilde{z}_1^{N-1})$ avec

$$\tilde{z}_1 = e^{\frac{2i\pi}{N}}$$

C.3 Racines N -èmes de l'unité : propriétés

Une propriété de base est que la conjugué d'une racine N -ème de l'unité est une racine N -ème de l'unité : cela tient dans la structure de groupe des racines N -èmes de l'unité et il est facile de montrer :

$$\tilde{z}_p^* = \tilde{z}_{N-p}$$

Une propriété essentielle des racines N -èmes de l'unité repose dans la somme des racines et la somme des puissances d'une racine.

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172

Pour la somme des N racines N -èmes de l'unité, pour $N > 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{z}_n &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi n}{N}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{N}} \right)^n \\ &= \frac{\left(e^{\frac{2i\pi}{N}} \right)^N - 1}{\left(e^{\frac{2i\pi}{N}} \right) - 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

Dans ce cas, on a en pratique non seulement la somme des N racines N -èmes de l'unité, mais aussi la somme des puissances de 0 à N de la racine $\tilde{z}_1$.

Considérons maintenant une racine N -ème de l'unité : $\tilde{z}_p$ et sommions ses puissances. Un calcul quasiment identique au précédent donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{z}_p^n &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{2i\pi p}{N}} \right)^n \\ &= \frac{\left(e^{\frac{2i\pi p}{N}} \right)^N - 1}{\left(e^{\frac{2i\pi p}{N}} \right) - 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

à condition que cette expression ait un sens, ce qui est le cas si $e^{\frac{2i\pi p}{N}} \neq 1$, c'est à dire si $p \neq 0$. Pour $\tilde{z}_0 = 1$, on a bien évidemment :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{z}_0^n = N$$

Soit maintenant N pair. Considérons maintenant une racine N -ème de l'unité : $\tilde{z}_p = e^{\frac{2i\pi p}{N}}$ et sommions ses puissances entre l'indice 0 et l'indice $N/2 - 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N/2-1} \tilde{z}_p^n &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left(e^{\frac{2i\pi p}{N}} \right)^n \\ &= \frac{\left(e^{\frac{2i\pi p}{N}} \right)^{\frac{N}{2}} - 1}{e^{\frac{2i\pi p}{N}} - 1} \\ &= \frac{e^{i\pi p} - 1}{e^{\frac{2i\pi p}{N}} - 1} \\ &= \frac{e^{i\pi p} - 1}{\left(e^{\frac{i\pi p}{N}} + 1 \right) \left(e^{\frac{i\pi p}{N}} - 1 \right)} \\ &= \frac{1}{\tilde{z}_p + 1}\end{aligned}$$

Il est facile de montrer²

$$\sum_{n=N/2}^{N-1} \tilde{z}_p^n = -\frac{1}{\tilde{z}_p + 1}$$

2. Il y a deux manières de le faire : trouvez les!!

C.4 Ondes de Fourier discrètes et racines N -ème de l'unité

Nous avons vu, pour $N = 2^q$, la définition des ondes de Fourier discrètes $\mathcal{OFD}_{k,N}$ (relation 5.5) :

$$\mathcal{OFD}_{k,N}(n) = e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \quad \forall n \in [1, N]$$

Cette expression peut se réécrire en fonction des racines N -ème de l'unité :

$$\begin{aligned} \mathcal{OFD}_{k,N}(n) &= e^{2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}} \\ &= \left(e^{2i\pi \frac{(n-1)}{N}} \right)^{k-1} = \tilde{z}_{n-1}^{k-1} \\ &= \left(e^{2i\pi \frac{(k-1)}{N}} \right)^{n-1} = \tilde{z}_{k-1}^{n-1} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire immédiatement que la somme des valeurs d'une $\mathcal{OFD}$ est égale à 0, sauf dans le cas $k = 0$ (c'est à dire pour la fréquence réduite nulle) pour lequel la somme est égale à N .

Il est alors trivial de montrer par exemple que deux Ondes de Fourier Discrètes sont orthogonales. En effet, soient $\mathcal{OFD}_{k,N}$ et $\mathcal{OFD}_{k',N}$ deux $\mathcal{OFD}$. Le terme générique de leur produit scalaire s'écrit (relation 5.9) :

$$\left(e^{2i\pi \frac{(k'-k)}{N}} \right)^{n-1}$$

Etant lui même une racine N -ème de l'unité, la somme de toutes ses puissances entre 0 et $N - 1$ est donc nulle (hormis le cas $k' - k = 0$ qui est celui du calcul de la norme d'une $\mathcal{OFD}$).

C.5 Matrices de Fourier discrètes et racines N -ème de l'unité

Nous avons vu qu'une matrice de Fourier $M_{F,q}$ avec $N = 2^q$ est défini par la relation 6.1 :

$$m_{k,n} = e^{-2i\pi \frac{(k-1)(n-1)}{N}}$$

ce qui peut s'exprimer à l'aide de conjugués de racines N -ème de l'unité :

$$\begin{aligned} m_{k,n} &= ((\tilde{z}_{k-1})^*)^{n-1} \\ &= ((\tilde{z}_{n-1})^*)^{k-1} \end{aligned}$$

que l'on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m_{k,n} &= (\tilde{z}_{N-k})^{n-1} \\ &= (\tilde{z}_{N-n})^{k-1} \end{aligned}$$

Il est alors trivial de montrer que les lignes d'une matrice de Fourier sont orthogonales entre elles et que les colonnes d'une matrice de Fourier sont orthogonales entre elles.

De manière similaire, pour une matrice de Fourier inverse $M_{F^{-1},q}$, on a :

$$\hat{m}_{k,n} = \frac{1}{N} (\tilde{z}_{n-1})^{k-1} = \frac{1}{N} (\tilde{z}_{k-1})^{n-1}$$

Il est alors trivial de retrouver la relation :

$$M_{F^{-1},q} \times M_{F,q} = I_N$$

C.6 Somme de puissances d'une racine N-ème de l'unité

Soit $\tilde{z} \neq 1$ une racine n-ème de l'unité : elle vérifie $\tilde{z}^N = 1$. Soit un entier $M \in [2, N]$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^M \tilde{z}^{k-1} &= 1 + \tilde{z} + \tilde{z}^2 + \dots + \tilde{z}^{M-1} \\ &= \frac{\tilde{z}^M - 1}{\tilde{z} - 1} \end{aligned}$$

On peut réécrire ce résultat pour l'exprimer à l'aide des fonctions circulaires. En effet :

$$\frac{\tilde{z}^M - 1}{\tilde{z} - 1} = \frac{\tilde{z}^{\frac{M}{2}} \left(\tilde{z}^{\frac{M}{2}} - \tilde{z}^{-\frac{M}{2}} \right)}{\tilde{z}^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{z}^{\frac{1}{2}} - \tilde{z}^{-\frac{1}{2}} \right)}$$

et si l'on choisit pour racine N-ème de l'unité la grandeur

$$\tilde{z} = e^{-2i\pi \frac{(k-1)}{N}}$$

on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{z}^M - 1}{\tilde{z} - 1} &= \frac{\tilde{z}^{\frac{M}{2}} \left(\tilde{z}^{\frac{M}{2}} - \tilde{z}^{-\frac{M}{2}} \right)}{\tilde{z}^{\frac{1}{2}} \left(\tilde{z}^{\frac{1}{2}} - \tilde{z}^{-\frac{1}{2}} \right)} \\ &= \frac{e^{-i\pi \frac{M(k-1)}{N}}}{e^{-i\pi \frac{(k-1)}{N}}} \frac{e^{i\pi \frac{M(k-1)}{N}} - e^{-i\pi \frac{M(k-1)}{N}}}{e^{i\pi \frac{(k-1)}{N}} - e^{-i\pi \frac{(k-1)}{N}}} \\ &= e^{-i\pi \frac{(M-1)(k-1)}{N}} \frac{\sin \left(\pi \frac{M(k-1)}{N} \right)}{\sin \left(\pi \frac{(k-1)}{N} \right)} \end{aligned} \tag{C.3}$$

Cette formule est essentielle en traitement du signal. En effet, on voit apparaître deux termes :

- un terme de phase (d'amplitude unité)
- un terme réel d'amplitude exprimé comme le rapport de deux fonctions sinus.

Bibliographie

- [1] M. Françon *Optique : formation et traitement des images* Masson 1972
- [2] R. Godement *Analyse mathématique I*. Springer 1998
- [3] R. Godement *Analyse mathématique II : Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes*. Springer 1998
- [4] S. Ladjal *Polycopié de traitement du signal de l'UE OASIS*. Télécom ParisTech 2010-...
- [5] P. Réfrégier *Théorie du bruit et applications en physique*. Hermes, 2002
- [6] E. Roubine *Introduction à la théorie de la communication. Tome II : signaux aléatoires* Masson 1970
- [7] N. Wiener, N. *The Human Use of Human Beings : Cybernetics and Society*. New York : Doubleday & Company Inc., 1956



Index

- aliasing, 116
- BIBO, 102
- Bruit blanc, 157
- cercle unité, 59
- Circularité (convention), 80
- codes barre, 27
- conjugué (vecteur), 17
- convolution, 88
- corrélacion, 87
- corrélacion (codes barre EAN), 32
- déphasage, 62
- DCT (Discrete Fourier Transform), 57
- Dirac (distribution), 134
- EBSB, 102
- Echantillonnage, 5
- Echantillonnage (fréquence), 47
- espace dual, 23
- Filtrage convolutif, 101
- Filtrage linéaire, 99
- Filtrage récursif, 103
- Filtre à minimum de phase, 113
- Filtre passe-bas : exemple, 107
- Filtre retard : exemple, 106
- Filtre RIF, 102
- Filtre RII, 104
- fréquence, 47
- fréquence d'échantillonnage, 47
- fréquence réduite, 71
- Hertz, 47
- Kronecker (vecteur), 10
- Linéarité (matrices), 15
- Linéarité (transformation), 22
- Matrice $\Sigma\Delta$, 35
- Matrice adjointe, 18
- Matrice de convolution, 90
- Matrice de décalage, 19
- Matrice de Fourier, 76
- Matrice de Hadamard, 39
- Matrice de Toeplitz circulante, 90
- Matrice diagonale, 13
- Matrice hermitienne, 18
- Matrice identité, 13
- Matrice symétrique, 17
- norme (vecteur complexe), 17
- norme (vecteur réel), 12
- Onde de Fourier Continue, 61
- Onde de Fourier Discrète, 66
- orthogonal (vecteur complexe) , 17
- orthogonal (vecteur réel) , 12
- période, 48
- pixel, 5
- Poisson (formule), 140
- Processus aléatoire, 146
- Produit hermitien, 17
- Produit scalaire, 11
- pulsation, 48
- Réponse impulsionnelle d'un filtre, 100, 102, 104
- Relation de Parseval (version discrète), 85
- repliement, 117
- séquence, 9
- Shannon (formule de reconstruction), 143
- SLI, 99
- TFD, 78
- TFID, 78
- TFtD, 139
- Transformée de Fourier (TF), 134
- Transformée de Fourier à temps Discret (TFtD), 139
- Transformée de Fourier Discrète (TFD), 78
- Transformée de Fourier inverse (TFI), 134
- Transformée de Fourier Inverse Discrète (TFID) , 78
- Transformée en Z, 109, 111
- voxel, 5
- Wiener-Khinchin (formule), 156

Jean Marie Nicolas, Marine Campedel



Cadre privé } sans modifications
Voir page 172