Un nouvel éclairage de la loi de Cauchy à l'aide des statistiques de Mellin

Jean-Marie Nicolas

2019D005

avril 2019

Département Image, Données, Signal
Groupe IMAGES : *Image, Modélisation, Analyse, GEométrie, Synthèse*

Un nouvel éclairage de la loi de Cauchy
à l'aide des statistiques de Mellin

Jean Marie Nicolas

1 Introduction

Les statistiques de Mellin [4], caractérisant de manière très efficace les lois de probabilités définies sur $\mathbb{R}^+$, sont des outils d'utilisation encore très spécifique à l'imagerie cohérente (radar, sonar, échographie médicale). A priori, ces outils ne peuvent être appliqués à la loi de Cauchy puisque celle-ci est définie sur $\mathbb{R}$. Cependant, cette loi étant symétrique, il peut être instructif d'en étudier sa forme positive (définie uniquement sur $\mathbb{R}^+$) et de voir ce qu'apporte dans ce cas particulier cette nouvelle approche.

Pour aider le lecteur peu familier des statistiques de Mellin, cette note redonnera au fil du texte les définitions et les propriétés essentielles.

2 La loi de Cauchy et la loi de Cauchy positive

2.1 Définition de la loi de Cauchy

La définition la plus générale de la loi de Cauchy est :

$$g(x) \;=\; \frac{a}{\pi\left((x-x_0)^2+a^2\right)} \quad x \in]-\infty;\infty[\tag{1}$$

Son mode, qui est aussi sa médiane, est en $x = x_0$ et elle est symétrique autour de son mode. Sa forme est dictée par le paramètre a. Elle représente une fonction appelée lorentzienne. Une de ses propriétés marquantes est qu'elle n'a pas de moment d'ordre 1 (et aucun d'ordre $n > 1$).

Nous allons considérer dans ce document la loi de Cauchy centrée en 0 : elle sera notée $g(x)$, de paramètre a :

$$g(x) \;=\; \frac{a}{\pi\left(x^2+a^2\right)} \quad x \in]-\infty;\infty[\tag{2}$$

Une de ses propriétés est d'être symétrique autour de l'origine, c'est à dire $\forall x \in \mathbb{R}\; g(-x) = g(x)$. Ce cas particulier revient à translater la loi originelle à l'origine.

Sa transformée de Fourier (voir [3]), c'est à dire sa fonction caractéristique, s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-a|\xi|}$$

Il n'est pas possible de calculer une dérivée entière de cette expression vis à vis de ξ, ce qui est un autre moyen de montrer que le moment d'ordre 1 de la loi de Cauchy n'est pas défini. Aussi les utilisateurs de la loi de Cauchy utilisent le plus souvent le mode de la loi pour caractériser la valeur x_0.

2.2 Définition de la loi de Cauchy positive

Considérons maintenant une nouvelle loi, que nous appellerons la loi de Cauchy positive, définie uniquement pour $x \in \mathbb{R}^+$, notée ici $g_+(x)$:

$$g_+(x) \quad = \quad \frac{2a}{\pi\left(x^2+a^2\right)} \qquad x \in [0;\infty[\tag{3}$$

On peut remarquer que :

$$g_+(x) \quad = \quad g(x) \quad + \quad g(-x)$$

Comme précédemment, il n'est pas possible de calculer une dérivée de sa transformée de Fourier : on ne peut donc obtenir ses moments.

2.3 Transformée de Mellin de la loi de Cauchy positive

Puisque la loi de Cauchy positive est définie pour $\mathbb{R}^+$, on peut envisager d'en calculer la transformée de Mellin. Notons $\mathcal{M}\left[g_+(x)\right](s)$ sa transformée de Mellin si elle existe :

$$\mathcal{M}\left[g_+(x)\right](s) \quad = \quad \int_0^\infty x^{s-1} g_+(x) \mathrm{d}x$$

Dans cette expression s est une variable complexe que l'on peut réécrire sous la forme :

$$s \quad = \quad b \; + \; i\,c \;\; \text{avec} \;\; b \in \mathbb{R} \;\; \text{et} \;\; c \in \mathbb{R}$$

Une propriété très particulière de la transformée de Mellin est que si elle existe pour $s = b$ alors elle existe pour toute valeur $s = b + ic$ $\forall c \in \mathbb{R}$ car le domaine d'existence d'une transformée de Mellin est une bande verticale dans le plan des complexes.

Concernant la la loi de Cauchy positive on trouve dans les tables (par exemple [2]) :

$$\mathcal{M}\left[\frac{1}{a+x}\right](s) \quad = \quad \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \qquad a \in]0;1[$$

En tirant parti des propriétés de la transformée de Mellin (voir par exemple [2]), on obtient aisément la transformée de Mellin de la loi de Cauchy positive :

$$\mathcal{M}\left[g_+(x)\right](s) \quad = \quad \frac{a^{s-1}}{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)} \qquad b \in]0;2[\tag{4}$$

3 La loi de Cauchy positive et les statistiques de Mellin

3.1 Transformée de Mellin et moments

Si on considère la définition de la transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$:

$$\mathcal{M}\left[f(x)\right](s) \quad = \quad \int_0^\infty x^{s-1} f(x) \mathrm{d}x$$

on voit que si $f(x)$ est une densité de probabilité, alors son moment d'ordre r est la transformée de Mellin prise en $s = 1 + r$:

$$m_r \quad = \quad \mathcal{M}\left[f(x)\right](s)\big|_{s=r+1}$$

Comme la condition d'existence de la transformée de Mellin de la loi de Cauchy positive est $b \in]0;2[$, on a une nouvelle preuve que la loi de Cauchy positive ne possède pas de premier moment, ni aucun des suivants.

3.2 La transformée de Mellin vue comme la "fonction caractéristique de deuxième espèce"

Dans l'approche des log-statistiques [4], la transformée de Mellin d'une densité de probabilité est par définition sa "fonction caractéristique de deuxième espèce". De manière analogue à la fonction caractéristique, la dérivée et la dérivée logarithmique prises pour une certaine valeur de la variable s vont donner des grandeurs caractéristiques de cette densité de probabilité. On obtient, grâce aux propriétés fondamentales de la transformée de Mellin :

- les "log-moments" d'ordre r, notés ici LM_r, en prenant la dérivée d'ordre r de la fonction caractéristique de deuxième espèce pour la valeur $s = 1$:

  $$LM_r \;=\; \frac{\partial}{\partial s}\mathcal{M}\left[f(x)\right](s)\Big|_{s=1}$$

  et, dans de nombreux cas, on obtient une formulation analytique des log-moments.

  D'autre part, grâce aux propriétés de la transformée de Mellin, on a aussi :

  $$LM_r \;=\; \int_0^\infty (\log x)^r\, f(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

  Cette dernière relation permet d'estimer les log-moments si l'on dispose d'un certain nombre de valeurs tirées selon la loi de probabilité $p(x)$.
- les "log-cumulants" d'ordre r, notés ici LK_r, en prenant la dérivée logarithmique d'ordre r de la fonction caractéristique de deuxième espèce pour la valeur $s = 1$. Comme dans le cadre des statistiques traditionnelles, on va facilement obtenir les relations suivantes :

  $$\begin{aligned} LK_1 &= LM_1 \\ LK_2 &= LM_2 - LM_1^2 \\ LK_3 &= LM_3 - 3LM_2\, LM_1 + 2LM_1^3 \end{aligned}$$

3.3 Les log-cumulants de la loi de Cauchy positive

Tout d'abord, appliquons un théorème fondamental des log-statistiques. Si $f(x)$ est une densité de probabilité telle que pour toute valeur ϵ appartenant à un ouvert centré à l'origine l'intégrale :

$$\int_0^\infty x^\epsilon f(x)\mathrm{d}x$$

est définie, ce qui revient à dire que sa transformée de Mellin est défini dans un ouvert autour de $s = 1$, alors tous ses log-moments et tous ses log-cumulants sont définis[1].

La loi de Cauchy positive entre dans cette catégorie puisqu'elle possède une transformée de Mellin pour $s = b + jc$ avec $b \in]0, 2[$.

On peut alors calculer les log-cumulants de la loi de Cauchy positive. On obtient aisément :

$$\begin{aligned} LK_1 &= \log(a) \\ LK_2 &= \frac{\pi^2}{4} \\ LK_{2r+1} &= 0 \;\; \forall r \geq 1 \end{aligned}$$

Il est intéressant de noter que les log-cumulants d'ordre supérieur ou égal à 2 sont des constantes.

4 Estimation du paramètre d'une loi de Cauchy positive par le calcul des log-cumulants

Nous pouvons maintenant aborder le point essentiel de cette note : une nouvelle méthode pour estimer le paramètre a d'une loi de Cauchy.

4.1 Inversion des paramètres d'une loi de Cauchy positive

Par le biais du second log-cumulant, on peut avoir un test pour savoir si une loi donnée peut être une loi de Cauchy positive. On doit avoir :

$$LK_2 = \frac{\pi^2}{4} \tag{6}$$

Si ce test est vérifié, alors, par le biais du premier log-moment (égal au premier log-cumulant), on peut déduire la valeur du paramètre a d'une loi de Cauchy positive :

$$a = \mathrm{e}^{LM_1} \tag{7}$$

4.2 Calcul des paramètres d'une loi de Cauchy par une méthode issue des log-statistiques

Soit un jeu d'échantillons $\{y_n\}, n \in [1, N]$. Soit y_{mode} le mode de ces échantillons. Si l'on cherche une loi de Cauchy sous jacente à ces échantillons, on peut construire un jeu d'échantillon dont le mode est à l'origine par la relation :

$$\tilde{y}_n = y_n - y_{\text{mode}}$$

Puisque la loi de Cauchy est symétrique, on va construire le jeu d'échantillons $\{x_n\}, n \in [1, N]$ par la relation :

$$x_n = |\tilde{y}_n| = |y_n - y_{\text{mode}}|$$

et c'est ce jeu d'échantillons sur lequel on va chercher une loi de Cauchy positive sous jacente.

Pour cela, on calcule les deux premiers log-moments par discrétisation de la relation 5 :

$$\begin{aligned} LM_1 &= \frac{1}{N} \sum_1^N \log(x_n) \\ LM_2 &= \frac{1}{N} \sum_1^N (\log(x_n))^2 \end{aligned}$$

En appliquant le test sur le second log-cumulant (relation 6), on doit vérifier :

$$LK_2 = LM_2 - LM_1^2 = \frac{\pi^2}{4} \tag{8}$$

Si ce test est vérifié (à l'utilisateur de fixer le critère de succès de ce test), l'estimé $\tilde{a}$ du paramètre a est donné par la relation 7 :

$$\tilde{a} = \mathrm{e}^{LM_1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{N}\sum_1^N \log(x_n)}$$

Notons que l'on peut éventuellement ajuster le mode pour que la relation 8 soit approchée le mieux possible.

Références

[1] R.Badeau *Transformation de Mellin : aspects numériques et dérivation fractionnaire. Application aux lois des variables aléatoires positives.* Rapport ENST99D009

[2] S. Colombo *Les transformations de Mellin et de Hankel* Centre National de la Recherche Scientifique, 1959

[3] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik *Table of integrals, series and product* Academic Press, 1980

[4] JM Nicolas *Introduction aux statistiques de deuxième espèce : application des log-moments et des log-cumulants à l'analyse des lois d'images radar* Traitement du Signal, 2002, Vol 19, n3, pp139-167

Dépôt légal : 2019 – 2e trimestre
Imprimé à Télécom ParisTech – Paris
ISSN 0751-1345 ENST D (Paris) (France 1983-9999)

Télécom ParisTech

Institut Mines-Télécom - membre de l'Université Paris Saclay

46, rue Barrault - 75634 Paris Cedex 13 - Tél. + 33 (0)1 45 81 77 77 - www.telecom-paristech.fr

Département IDS