



Projet EFIDIR : SP1/WP1

Livrable 1.9 Rapport technique WP1

Caractérisation des diffuseurs temporellement stables

Jean Marie Nicolas, Franck Fayard
Institut TELECOM, Télécom ParisTech, CNRS LTCI
46 rue Barrault, 75634 PARIS Cedex 13
jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

Version V1.1, juillet 2010

1 Introduction

Depuis le lancement des systèmes ERS (1991), l'imagerie RSO (Radar à Synthèse d'Ouverture) est un outil majeur de la télédétection. A cette époque, il était d'usage d'utiliser des images PRI (PRrecision Images) multivues en amplitude. L'évolution des systèmes informatiques a permis d'une part de pouvoir étudier les données de base de type SLC (Single Look Complex) et d'autre part d'analyser des scènes de grande taille (suite à l'amélioration de la résolution et de la diminution de la taille du pixel).

L'étude d'images RSO de type SLC se fonde donc sur un pixel ayant une partie réelle et une partie imaginaire. Ces données requièrent une interprétation fine au niveau du pixel dès lors que les traitements recherchés s'intéressent à la phase et non simplement à l'amplitude, requise par exemple dans les filtres classiques (Lee, Kuan, MAP, ...). En effet, le principe de l'acquisition des données RSO conduit à des valeurs complexes : cet aspect "complexe" est dû à l'étape de démodulation effectuée à bord du satellite qui permet alors un échantillonnage à bande limitée (par exemple 150 MHz pour certaines données Terrasar-X, 18 MHz pour les données ERS) alors que l'échantillonnage du signal physique aurait dû s'effectuer à deux fois la fréquence maximale (soit de 10 GHz à 20 GHz), ce qui est impensable à l'heure actuelle. Ceci conduit à deux remarques fondamentales :

- Le Radar étant fondé sur le principe de l'écholocation (mesure de différence de temps, donc de distance), il est important de souligner que l'étape de démodulation revient à transformer un retard en déphasage.
- Une simple visualisation du spectre d'une image SLC révèle que l'information est largement répartie dans le plan des fréquences. Dans le même temps, un spectre correspondant à la simple amplitude des mêmes données est proche des spectres classiquement observés en imagerie standard (pixel codés en char ou en float) où l'information est localisée autour de l'origine. Cette différence de nature montre tout le rôle de la phase d'une image RSO : si la phase présente une distribution uniforme entre 0 et 2π , elle n'en joue pas moins un rôle essentiel puisqu'elle contient toute cette information liée aux retards et au processus de synthèse RSO.

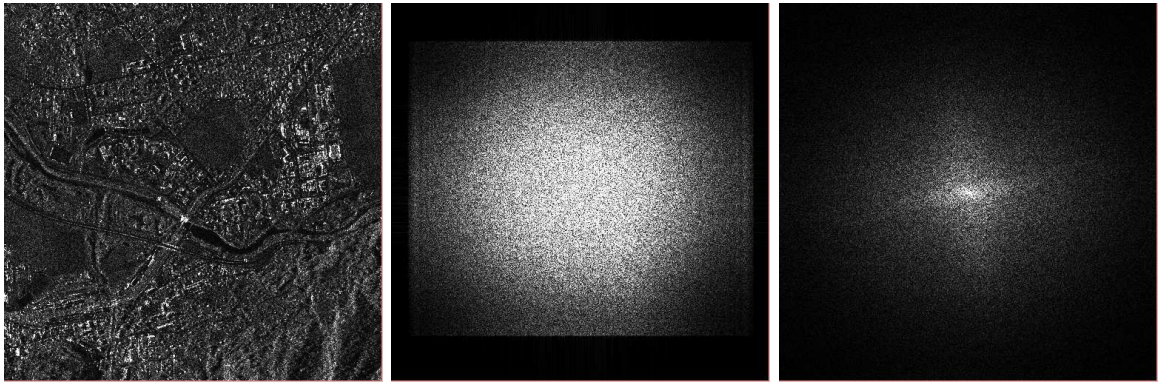


FIG. 1 – Image Terrasar-X de Saint Gervais (à gauche). Spectre de l’image SLC (au milieu). Spectre de l’image en amplitude (à droite)

En interférométrie, la phase joue le rôle essentiel. En effet, si pour une image donnée la phase semble sans signification (du fait que la loi suivie par celle-ci est équidistribuée sur $[0, 2\pi]$), la différence de phase entre deux images a un sens physique : elle révèle une différence de position entre les acquisitions (franges orbitales), une variation du relief (franges topographiques), une évolution locale, voire des variations dans le trajet (franges troposphériques). De nombreuses études ont donc porté sur la différence de phase : interférométrie et interférométrie différentielle, tant sur le plan théorique que sur les aspects thématiques, avec le succès que l’on connaît. Dans le même temps, on peut dire que quasiment rien n’a été fait sur la phase d’une image donnée. Or, si l’on effectue une recherche transdisciplinaire, on voit que dans certaines disciplines (optique, propagation . . .) l’analyse de la phase a été beaucoup plus poussée que dans le domaine radar.

Le livrable 1.9 du projet EFIDIR vise à étudier la caractérisation des diffuseurs temporellement stables observables sur une image complexe RSO. Cette caractérisation requiert une meilleure compréhension de la notion de diffuseur en général, et de diffuseur stable en particulier. Un grand nombre d’études –qui ont en général débouchés sur des plateformes logicielles à vocation scientifique ou commerciale– ont déjà été réalisées en définissant un critère de sélection principalement à partir de l’amplitude des diffuseurs.

L’objectif de ce rapport est de voir s’il n’est pas possible d’innover dans cette voie en montrant le rôle de la phase dans la caractérisation des pixels sur une image RSO. Nous verrons en effet qu’il existe un lien entre phase et extrema sur une image complexe : si les artefacts de type oscillations de Gibbs sont bien connus en analyse d’image lors d’opérations de type suréchantillonnage, d’autres artefacts apparaissent sur les images complexes suréchantillonnées, avec l’apparition de pixels d’amplitude très faible –voire nulle–. Ce genre d’artefact est directement lié à la phase et n’apparaît pratiquement jamais sur une image d’amplitude. De manière phénoménologique, sur des images vraies ou simulées, nous verrons quelques aspects de ce type d’artefacts, bien connu des opticiens, mais semble-t-il ignoré en imagerie cohérente.

Une fois cette étape phénoménologique franchie (faute d’une approche théorique suffisamment aboutie), nous essayerons de voir ce que cette analyse liée à la phase peut apporter dans l’étude de cibles stables, c’est à dire observables de manière plus ou moins identique sur une pile temporelle (stack) d’images acquises sur une même région. Cette analyse apporte un éclairage nouveau sur ces cibles, que l’on trouve dans la littérature sous le nom de PS (*Permanent Scatterers* ou *Persistent Scatterers*), et qui ont un rôle clé en interférométrie sur réseau.

2 Phase et vortex de phase

2.1 La phase en imagerie cohérente

2.1.1 Principes fondamentaux

Les images obtenues par des systèmes d'imagerie cohérente de type écholocation (échographie médicale, imagerie laser, RSO –Radar à Synthèse d'Ouverture–, Sonar,...) ont donc la caractéristique d'être complexes : chaque pixel est alors représenté par une partie réelle et une partie imaginaire. On peut aussi représenter chaque pixel par une amplitude et une phase : généralement, c'est l'image d'amplitude qui est présentée à l'opérateur car c'est elle qui est directement interprétable puisqu'elle représente la rétrodiffusion locale.

Un très grand nombre de travaux ont porté sur l'image d'amplitude. En effet, en raison de l'illumination par des ondes cohérentes, à une zone homogène correspondra sur l'image une région fortement perturbée par le chatoiement (*speckle*). Ce chatoiement peut se modéliser moyennant un certain nombre d'hypothèses : en particulier, on parle de "chatoiement pleinement développé" (ou chatoiement de Goodman [3]) lorsque chaque pixel de l'image est décorrélié de ses voisins. On sait alors que les amplitudes vérifient la loi de Rayleigh-Nakagami et que les phases ont une distribution uniforme entre 0 et 2π . Une autre formulation du chatoiement de Goodman consiste à analyser partie réelle et partie imaginaire : chacune vérifie la même loi normale centrée, et partie réelle et partie imaginaire sont décorréliées.

C'est donc un des paradoxes de l'imagerie cohérente que de pouvoir traiter les données en amplitude et en phase, la phase étant une grandeur parfaitement aléatoire en apparence. Cependant, lorsque l'on peut effectuer une seconde acquisition sur la même zone dans des conditions expérimentales proches, on peut noter que cette phase, bien qu'aléatoire en apparence, est reproductible, donc déterministe. Par exemple :

- En système RSO aéroporté, il est possible d'embarquer deux antennes (dans la configuration la plus standard, l'une d'entre elles agit en émetteur-récepteur, la seconde en récepteur seulement). Les phases sont indépendamment d'apparence aléatoire : la différence de phase en un pixel révèle la différence des trajets entre le point de mesure et les deux antennes. On a ainsi effectué une expérimentation d'interférométrie radar.
- C'est le même principe d'interférométrie qui est utilisé en système RSO satellitaire à deux antennes (cas des expérimentations SRTM en 2000, cas des expérimentations actuelles Terrasar-X dans le cadre de la mission Terrasar-X TANDEM).
- En général, on utilise une seule antenne d'acquisition-réception en interférométrie satellitaire : les deux acquisitions sont effectuées avec au moins un cycle d'intervalle. Si le milieu à l'origine du chatoiement n'a pas été modifié, tout se passe comme si on avait une configuration à deux antennes.
- en SAS (Sonar à Antenne Synthétique), le porteur dispose de trois sous-antennes, ce qui ouvre des possibilités diverses (méthode goniomètre par exemple).

On peut à juste raison se demander alors quelle est la signification exacte de la phase. Pour cela, considérons un milieu avec une seule cible dans chaque cellule de résolution. Le système est alors parfaitement déterministe. Pour comprendre la signification de la phase, prenons deux cas différents :

- chaque cible est exactement au centre de la case temporelle (la cellule d'échantillonnage). Dans ce cas, la phase reflète la distance entre l'antenne et le centre de chaque case distance. Entre deux pixels, la différence de phase est donc liée à la différence des trajets "antenne-case distance". Pour un capteur dont les données ont un échantillonnage temporel δt , la différence de trajets entre cases distance voisines est de $c\delta t/2$. C'est cette différence de trajet qui, divisée par la longueur d'onde λ , donnera la différence de phase.

Pour les capteurs satellitaires, chaque case distance contient un grand nombre de longueur d'onde (de l'ordre de 160 pour ERS, de l'ordre de 50 pour Terrasar-X). Comme il n'y a aucune raison à ce que la dimension de cette case temporelle soit un multiple entier de la

longueur d’onde, dans notre exemple (cible au centre de chaque case), on peut s’attendre à ce que toutes les valeurs possibles de déphasage soient observables le long de la fauchée. Une analyse statistique verra alors une distribution uniforme de la phase entre 0 et 2π sur la totalité de l’image. On aura ainsi l’illusion que la phase est aléatoire si l’on se contente de cette simple analyse d’histogramme.

- Tout mouvement de cette cible par rapport à cette position centrale dans une case distance se traduira par une variation de la phase : cette dernière tournera de 2π pour tout déplacement de λ . Dans nos exemples satellitaires, un déplacement de l’ordre de la longueur d’onde (de l’ordre de 2 cm pour Terrasar-X, 5 cm pour ERS) est très petit vis à vis de la dimension de la case distance (métrique pour Terrasar-X, décimétrique pour ERS). On peut donc supposer que la cible reste très proche du centre de la case, et donc au centre du lobe du sinus-cardinal lié à l’échantillonnage en temps (et donc en distance).

On voit mieux de quelle façon la phase peut être ressentie comme aléatoire tout en étant un phénomène déterministe. A partir du moment où la case temporelle a une dimension de plusieurs dizaines de fois (voire une centaine de fois) celle de la longueur d’onde, la phase peut “tourner” plusieurs dizaines de fois au sein de cette case distance. Faute de pouvoir acquérir le signal d’écholocation à une fréquence d’échantillonnage égale à deux fois la fréquence centrale de l’antenne, on perd au sein de la cellule la possibilité de connaître la position exacte d’une cible élémentaire : la phase, déterminée modulo 2π , donne une information sur la position relative au centre de la case distance, modulo la longueur d’onde : on a une preuve de l’existence de ce décalage, mais sans en connaître la valeur.

2.1.2 L’interférométrie

L’interférométrie RSO [6] s’appuie donc sur cette notion déterministe de la phase : si la valeur de la phase en elle même ne semble pas porter d’information, la différence de phase révèle une différence entre les conditions d’acquisition : on a ainsi très classiquement les problèmes liés à la géométrie des acquisitions (phase orbitale), à la géométrie locale (phase topographique), au trajet antenne-sol (phase troposphérique) et enfin à la modification locale du terrain.

Prenons le cas des franges topographiques : on compare alors la différence entre la différence de phase en une case $\delta\varphi_1$ et la différence de phase en une case voisine $\delta\varphi_2$. La différence $\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1$ est alors directement liée au relief local, c’est à dire à la différence d’altitude entre cette case et sa voisine. Mais, de même que la phase n’est connue que modulo 2π , la différence d’altitude ne sera connue que modulo une altitude caractéristique : l’altitude d’ambiguïté.

Cette indétermination de l’altitude (c’est à dire sa connaissance modulo l’altitude d’ambiguïté) conduit à des techniques de “déroulement” bien connue en interférométrie. En effet :

- sur un tir radar (c’est à dire le long d’une ligne de l’image, donc dans une configuration monodimensionnelle), on peut de proche en proche reconstruire le vrai relief à partir des différences de relief entre deux cases distance : c’est le processus de déroulement de phase qui, appliqué le long d’un trajet “ouvert” (une ligne avec deux extrémités distinctes), donnera un résultat sur lequel on n’a aucun moyen de savoir si un saut de phase de 2π est apparu.
- sur une image radar, il est possible d’envisager des trajets “fermés” : puisque l’on est dans un plan, on peut effectuer une boucle dans cet espace, et il y a beaucoup de possibilités pour effectuer une boucle dans le plan. Or il est bien connu en interférométrie qu’il y a des cas où, à la fin de la boucle fermée, la différence finale ne soit pas nulle : on parle alors de résidu de phase (un nombre entier de 2π) qui correspond alors à une erreur d’altitude égale à un facteur entier de l’altitude d’ambiguïté.

Il est important de souligner que l’apparition de ces résidus n’a été du qu’au changement de dimension : au lieu de raisonner sur un tir d’acquisition, on a effectué un traitement dans le plan image (ce qui n’a au passage de sens que si le signal d’émission est parfaitement cohérent d’un tir à l’autre). Notons au passage que l’interférométrie différentielle permet de passer à un

volume d'images, donc la possibilité d'effectuer des trajets en dimension 3.

2.2 Vortex et résidus

La spatialisation de la phase a donc conduit les spécialistes d'interférométrie à se doter d'outils spécifiques pour dérouler le plus correctement possible la phase. Or il est intéressant de noter que les conséquences de cette spatialisation de la phase (c'est à dire le fait de disposer de la phase dans un plan, voire dans un volume) ont déjà été mises en évidence dans d'autres disciplines : la mécanique des fluides (où a été introduite la notion de *vortex*), la théorie des fonctions analytiques (qui introduit la notion de *résidu*), la cristallographie (qui introduit la notion de *dislocation*) et enfin le domaine ondulatoire (les *wave fields*).

2.2.1 Vortex en mécanique des fluides

Le terme de vortex apparaît souvent dans la vie de tous les jours associés à des phénomènes naturels comme les cyclones. La figure 2 montre une image de télédétection de la tempête tropicale Katrina sur laquelle on observe que le champ de vitesse s'apparente à un mouvement circulaire autour d'un point : si l'on s'attend à ce que la vitesse augmente au fur et à mesure que l'on s'approche du centre, il y aura une discontinuité de vitesse en ce centre (en fait le mécanisme atmosphérique devrait être analysé en 3 dimensions).

Globalement, on observe donc un point sur lequel aucune information de vitesse ne peut être donnée a priori (l'œil du cyclone).

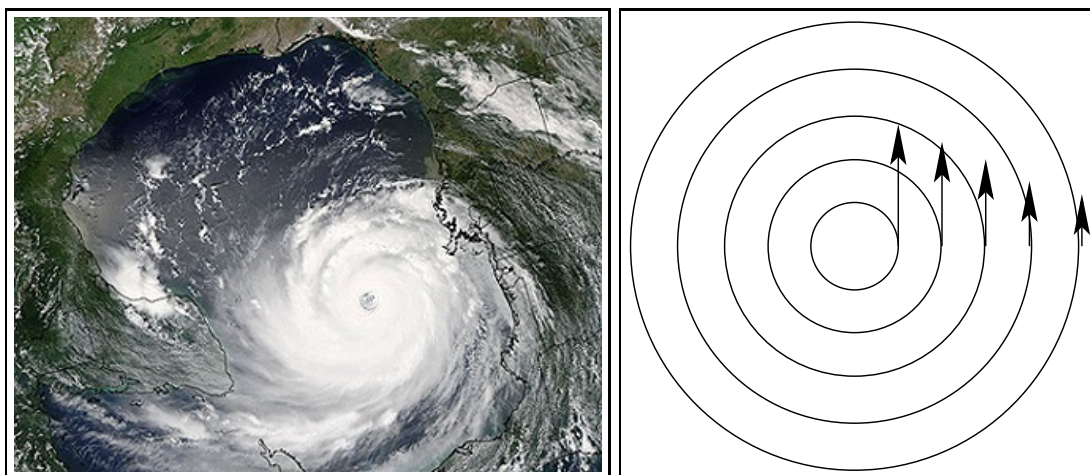


FIG. 2 – A gauche : image de télédétection de la tempête Katrina. A droite, écoulement rotationnel de vecteur tourbillon inversement proportionnel à la distance à l'origine.

La mécanique des fluides propose d'ailleurs un modèle permettant de mieux analyser ce phénomène [5]. Pour un phénomène centré, la vitesse \vec{v} vérifie :

$$\frac{1}{2} \text{rot } \vec{v} = \vec{\Omega} \neq \vec{0}$$

ce qui correspond à un écoulement dit rotationnel et $\vec{\Omega}$ est le vecteur tourbillon.

Si le vecteur $\vec{\Omega}$ a un module inversement proportionnel à la distance, la vitesse sera aussi inversement proportionnelle à la distance, ce qui conduit à une situation irréalisable dans la réalité puisque, à l'origine, la vitesse ne peut alors être définie. En fait, le vrai modèle s'écrit en dimension 3, ce que confortent les images de tourbillons atmosphériques vus du sol et qui conduit à une vitesse nulle sur l'œil du cyclone.

2.2.2 Fonctions analytiques et résidus

Les fonctions analytiques (ou fonctions holomorphes [1]) sont des fonctions de la variable complexe $z = x + iy$. Une fonction $f(z)$ est holomorphe en un point z_0 si sa dérivée par rapport à la variable complexe existe au point z_0 , c'est à dire que

$$\lim_{u \rightarrow 0, u \neq 0} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u} \text{ existe}$$

Un théorème fondamental de la théorie des fonctions analytiques est que si $f(z)$ est holomorphe dans une couronne $\rho_2 < |z| < \rho_1$, alors $f(z)$ est développable en série de Laurent :

$$f(z) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n z^n$$

On introduit alors le théorème des résidus : si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans une couronne $\rho_2 < |z| < \rho_1$, et si γ est un chemin fermé dans cette couronne qui entoure l'origine, on a :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi a_{-1}$$

Le coefficient a_{-1} du développement de Laurent s'appelle résidu de la fonction f au point singulier 0^1 .

La présence de résidu caractérise l'existence d'un point dans le plan complexe où la fonction $f(z)$ n'est pas défini : dans le cas de la série de Laurent, cela correspond au terme en $1/z$ qui n'est pas défini à l'origine.

C'est le passage dans le plan complexe qui a permis de mettre en évidence cette notion de résidu, qui n'existe pas pour les fonctions classiques de la variable réelle.

2.2.3 La notion de dislocation en cristallographie

En cristallographie, un défaut observable dans un plan cristallin peut se traduire par une dislocation[4] dans le volume du cristal. Par exemple, dans le cas d'une dislocation vis, il existe une ligne dans le cristal où la structure cristallographique n'est plus observable, alors qu'en tout autre point du cristal, la structure répond aux hypothèses d'existence d'un cristal.

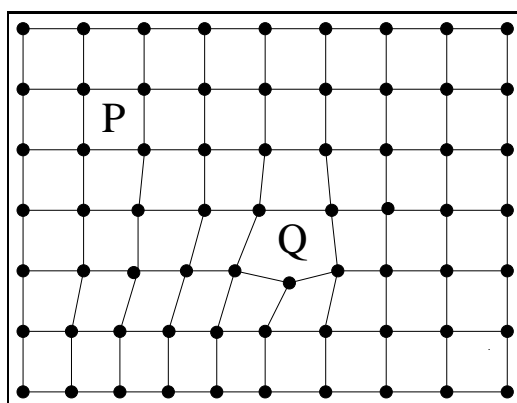


FIG. 3 – Exemple de dislocation en cristallographie : tous les points –comme le point P– sont dans une maille rectangulaire (donc à 4 sommets). Une exception : le point Q est dans une maille à 5 sommets..

Par exemple, sur la figure 3, on observe un cristal à maille rectangulaire : en tout point du plan, le motif est identique.

¹On généralise à tout point singulier situé en n'importe quel point du plan complexe

- les cristallographes diront que tous les atomes du cristal sont en des positions P définies par deux vecteurs \vec{a}, \vec{b} et deux entiers n et p :

$$\vec{OP} = n\vec{a} + p\vec{b}$$

- les traiteurs d’images diront que la fonction d’autocorrélation présente des pics positionnés en

$$\vec{OP} = n\vec{a} + p\vec{b}$$

Sur la figure 3, on note que le point Q ne vérifie pas cette condition : le cristal a donc un défaut ponctuel.

On peut montrer que pour un cristal en dimension 2, un défaut structurel se réduit à un point. En dimension 3, on montre que les défauts ponctuels de chaque plan cristallin se regroupent le long d’une ligne (dimension 2) : pour s’en convaincre, il suffit d’imaginer la figure 3 en 3 dimensions, chaque plan présentant un défaut ponctuel en des points Q_i , ces points Q_i étant placés le long d’une ligne dans la direction perpendiculaire aux plans.

Ce sont ces types de défauts linéiques qui s’appellent **dislocations**.

2.2.4 Les singularités topologiques de la phase

Dennis [2] a été le premier à proposer une analyse transdisciplinaire de ces problèmes de vortex et de résidus en se plaçant dans le cadre des *wave fields*. Le point de départ est celui des interférences que l’on peut observer dans un grand nombre de phénomènes physiques. L’originalité de l’analyse est qu’au lieu de s’intéresser aux interférences constructives, on s’intéresse aux positions des interférences destructives : ces positions peuvent être des points (en dimension 2), mais aussi des lignes (en dimension 3). Ce sont Nye et Berry qui, en 1974, ont proposé de donner le nom de dislocations à ces objets mathématiques (plus précisément *wave dislocation*) par analogie aux défauts dans les solides analysés au précédent paragraphe.

Dennis se pose la question de savoir ce que peut être une singularité.

Par exemple, en physique ondulatoire où la phase joue souvent un grand rôle, il faut insister que le fait qu’elle n’est connue que modulo 2π . Si l’on définit un parcours fermé dans l’espace et que l’on cherche à “déplier” la phase, il existe alors des points de l’espace où deux parcours différents peuvent donner deux valeurs différentes (mais égales modulo 2π). On parle alors de vortex de phase car ceci témoigne d’un point de l’espace où la phase est indéfinie. Or, dans le plan complexe, on définit la phase de diverses manières. On peut choisir les relations fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z) &= |z| \cos \varphi \\ \operatorname{Im}(z) &= |z| \sin \varphi \end{aligned}$$

ce qui donne par exemple :

$$\varphi = \operatorname{Atan} \left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} \right)$$

expression qui est toujours définie excepté au point $(\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 0)$.

Par exemple, pour un point z du plan complexe, on peut écrire

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

Partie réelle et partie imaginaire s’annulent à l’origine : pour pouvoir donner un sens à φ , il faut analyser sa continuité. La limite de φ n’est pas définie à l’origine puisque cette valeur dépend de φ (voir figure 4).

Dans le plan, on peut ainsi définir trois types de singularités (ceci si l’on se contente de singularités d’indice 1 : Berry a aussi analysé les singularités d’indice 1/2 qui ne seront pas traitées dans ce rapport). La figure 5 propose une illustration de ces trois types : dans les trois cas, on ne peut donner une valeur au champ à l’origine.

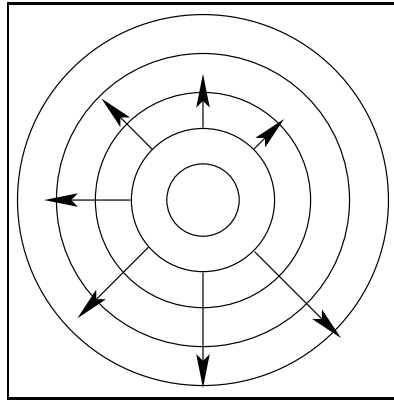


FIG. 4 – Dans le plan complexe, on trace en tout point un vecteur pointant selon l’angle φ et dont la norme est égale aussi à φ (modulo 2π , ce qui assure la continuité selon l’axe Ox). Ce vecteur ne dépend pas de $\rho > 0$. On ne peut attribuer sur cet exemple de valeur à ce vecteur à l’origine (c’est à dire correspondant au cas $\rho = 0$).

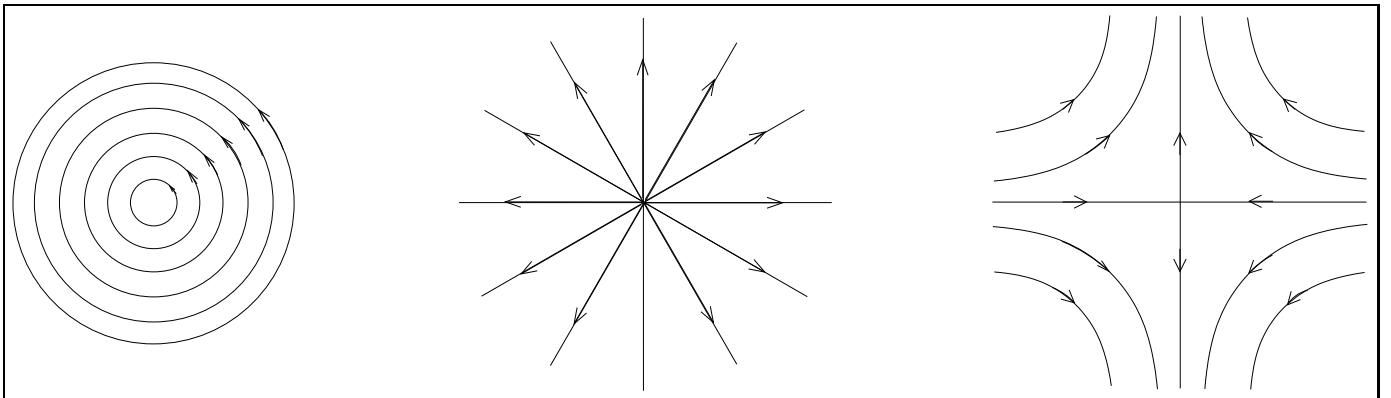


FIG. 5 – Les trois cas des singularités planaires les plus courantes. A l’origine, la direction du vecteur n’est pas définie : l’amplitude du vecteur ne peut qu’être nulle.

2.2.5 Phase et dimensionnalité

Il est vraiment important de souligner que ce problème est lié à la dimensionnalité. En effet, en traitement du signal monodimensionnel, il ne peut exister de problème lié au repliement : même si la phase est connue à 2π près (on parle alors de phase repliée), on peut reconstruire de manière biunivoque la phase vraie à partir de la phase repliée. De même, l’étude des fonctions de la variable réelle ne met pas en évidence les problèmes liés aux résidus. C’est le passage à une dimension au moins égale à 2 qui voit naître “résidus”, vortex ou dislocations.

3 Etude des vortex de phase en imagerie cohérente

3.1 Vortex de phase en imagerie complexe

Il est curieux de constater que jusqu’à présent la phase d’une image RSO n’avait jamais été étudiée sous cet angle : si l’on attribue un caractère aléatoire à la phase des pixels d’une image RSO, ce caractère ne prend pas en compte la spatialisation des données. Or nous allons voir que l’analyse de la phase en tant que grandeur à part entière de l’image conduit à des résultats curieux sur lesquels il est intéressant de se pencher.

Une première constatation peut se mener sur des images réelles et variées. Sur ces images, il est toujours possible de définir l’image comme un pavage bidimensionnel de pixels. Comme en cristallographie, on peut effectuer à partir d’un pixel de l’image un parcours fermé sur ce pavage.

Définissons donc le parcours le plus simple possible qui consiste à choisir un pixel et à effectuer à partir de ce pixel un parcours carré sur l'image, en ne prenant en compte que les voisins les plus proches. Ce parcours (figure 6) ne met donc en jeu que 4 pixels.

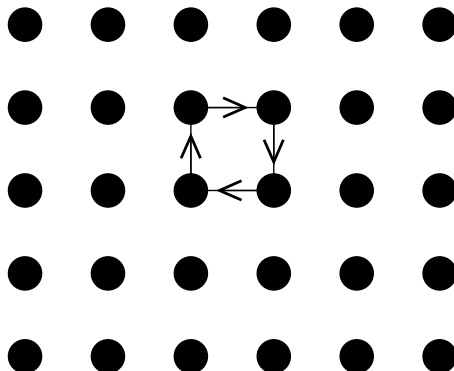


FIG. 6 – Boucle fermée à partir d'un pixel d'une image.

Partant du pixel initial, on déroule la phase puisqu'en chaque pixel celle ci n'est connue que modulo 2π : pour cela, on calcule étape après étape les différences de phase (avec $\varphi_4 = \varphi_0$ puisque l'on a un parcours fermé) : $\delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1} \bmod 2\pi$ et on calcule l'indice de vortex n :

$$n = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^4 \delta\varphi_k$$

n peut prendre 3 valeurs : 0, 1 et -1. Si n n'est pas nul, on dira que l'on est en présence d'un vortex de phase.

Il est à noter que ce parcours est celui utilisé en interférométrie et qui permet de définir les "résidus".

Il est donc facile de voir s'il existe des vortex dans une image complexe : il suffit de balayer tous les pixels de l'image et de compter le nombre de vortex sur cette image. Pour pouvoir comparer entre images, on va définir le taux de vortex qui est le rapport du nombre de vortex sur le nombre total de pixels dans l'image :

$$t_{\text{vortex}} = \frac{n_{\text{vortex}}}{n_{\text{pixels}}}$$

On peut ainsi établir pour diverses images le taux de vortex, que l'on peut calculer aussi bien sur l'image SLC que sur la transformée de Fourier qui est aussi une image complexe. Le tableau 3.1 teste donc différents types d'images, radar, sonar, réelle ainsi qu'une simulation.

Il semble donc bien difficile de comprendre à première vue ce que peut bien vouloir signifier cette nouvelle grandeur qu'est le taux de vortex. Aussi nous allons tenter une analyse théorique des vortex de phase en imagerie, en prenant quelques cas simples facilement abordables sur le plan théorique, même s'ils ne sont parfois pas très réalistes.

3.2 Modélisation analytique : phase équadistribuée sur $[0, 2\pi[$

3.2.1 Position du problème

Soit une image à maille carrée. Considérons pour chaque centre de maille les 4 pixels entourant le centre : ils seront notés A , B , C et D .

Chaque pixel possède une phase φ , dont la valeur est "repliée" : $\varphi \in [0, 2\pi[$. Cette phase sera considérée comme aléatoire, c'est à dire qu'elle est uniforme sur $[0, 2\pi[$, la densité de probabilité (ddp) $p(\varphi)$ de φ s'écrivant :

$$p(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

Capteur	Vortex sur image	vortex sur FFT
ERS-1 SLC (Mustang)	16 %	31.6 %
ERS-2 SLC (Mustang)	19.2 %	30.2 %
ERS-2 SLC (Mont Blanc)	19.5 %	38.5 %
MSTAR	15%	36.2%
Terrasar-X Strip Map (Argentière)	11.9 %	32.2 %
Terrasar-X Dual Pol HH (Argentière)	8.3 %	41.2 %
Terrasar-X Dual Pol HH (Argentière)	7.4 %	39.7 %
Sonar (IXSea)	13.7 %	31.8 %
mire aléatoire	33 %	33 %
Lena (image 8 bits)	0 %	25.6 %

TAB. 1 – Evaluation du taux de vortex sur différentes images RSO, ainsi que sur des données Sonar.

Tout d’abord, il faut noter que l’origine de la phase ($\varphi \in [0, 2\pi[$) ne change rien dans l’équidistribution de celle-ci. Changer l’origine de la phase ne change rien dans son caractère aléatoire. On peut tout à fait considérer chaque pixel comme ayant une phase repliée $\varphi' \in]-\pi, \pi]$.

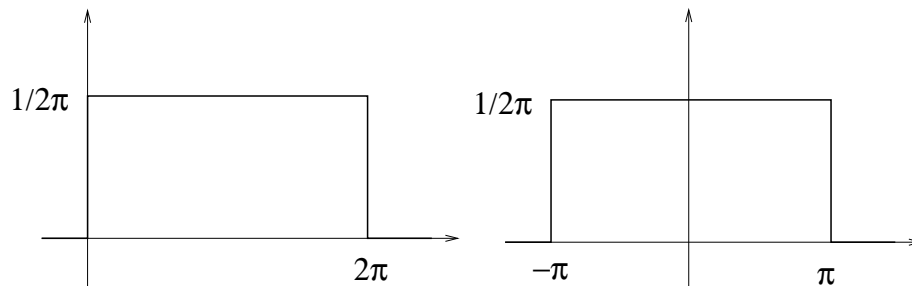


FIG. 7 – Lois uniformes sur $[0, 2\pi[$ (à gauche) et sur $] - \pi, \pi]$ (à droite).

Bien évidemment cette propriété s’étend à toute translation déterministe de l’origine des phases.

3.2.2 Loi de différence de phases et loi de différence *repliée* de phases

Considérons maintenant deux pixels P et Q dont les phases φ_P et φ_Q suivent deux lois uniformes indépendantes sur $[-\pi, \pi[$. Considérons la différence de phase $\delta\varphi_{PQ}$ entre la phase du pixel Q et la phase du pixel P :

$$\delta\varphi_{PQ} = \varphi_Q - \varphi_P$$

Un simple jeu d’écriture permet de poser

$$\delta\varphi_{QP} = \varphi_Q + (-\varphi_P) \tag{1}$$

avec $(-\varphi_P)$ équidistribué sur $] - \pi, \pi]$, c’est à dire suivant la ddp $q(\varphi)$

$$q(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \quad \varphi \in] - \pi, \pi]$$

Comme l’expression 1 représente une somme de variables aléatoires, on sait alors que la ddp de cette somme, $T(\varphi)$, est la convolution des ddp, ce qui donne la loi triangle :

$$p \star q = T(\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} (2\pi - |\varphi|) \quad \varphi \in] - 2\pi, 2\pi]$$

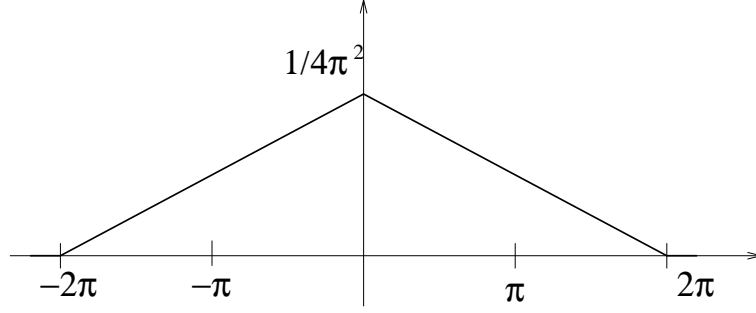


FIG. 8 – Résultat de la convolution de deux lois uniformes : ddp de la différence de phase entre deux pixels.

Le problème en pratique est que l'on ramène par repliement de phase cette variable entre $-\pi$ et π : $\tilde{\varphi}$ a alors comme ddp \tilde{T} telle que :

- pour $\tilde{\varphi} \in [0, \pi[$, il faut prendre en compte les valeurs de $\delta\varphi_{QP} \in [0, \pi[$ et $\delta\varphi_{QP} \in [-2\pi, -\pi[$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{T}(\tilde{\varphi}) &= T(\varphi) + T(\varphi - 2\pi) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} ((2\pi - |\varphi|) + (2\pi - |\varphi - 2\pi|)) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} ((2\pi - \varphi) + (2\pi + \varphi - 2\pi)) \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} (2\pi) \\
 &= \frac{1}{2\pi}
 \end{aligned}$$

soit une loi uniforme sur $[0, \pi[$.

- de même, pour $\tilde{\varphi} \in [-\pi, 0[$ où il faut prendre en compte les valeurs de $\delta\varphi_{QP} \in [-\pi, 0[$ et $\delta\varphi_{QP} \in [\pi, 2\pi[$:

$$\tilde{T}(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2\pi}$$

On a donc montré que, pour deux pixels ayant chacun une phase suivant une ddp uniforme, la différence de phase *repliée* suit elle aussi une ddp uniforme.

3.2.3 Cas de 3 pixels

Soient 3 pixels P , Q et R .

- On peut calculer la différence de phase *repliée* entre les phases de Q et de P : $\tilde{\varphi}_{QP}$. Cette différence suit la loi uniforme.
- On peut calculer la différence de phase *repliée* entre les phases de R et de Q : $\tilde{\varphi}_{RQ}$. Cette différence suit la loi uniforme.
- on peut faire la somme de ces deux variables : $\tilde{\varphi}_{QP} + \tilde{\varphi}_{RQ}$. Cette dernière variable est alors définie sur $] - 2\pi, 2\pi]$ et suit la loi triangle.
- on compare cette somme avec la différence de phase *repliée* entre les phases de R et de P : $\tilde{\varphi}_{RP}$, qui est uniforme sur $] - \pi, \pi]$.

Il y a donc deux manières d'aller du pixel P au pixel R . En passant par le point Q , on obtient des valeurs de phase dans $] - 2\pi, 2\pi]$ alors qu'en allant directement de P à R , on obtient des valeurs de phase dans $] - \pi, \pi]$. Il existe donc des *résidus* qui correspondent à des valeurs dans $] - 2\pi - \pi]$ ou dans $]\pi, 2\pi]$, donc des valeurs différentes du trajet "direct". On peut calculer la probabilité d'être dans ces cas :

$$P_{\text{residus}} = \int_{-2\pi}^{-\pi} T(\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} T(\varphi) d\varphi$$

On montre facilement que :

$$P_{residus} = \frac{1}{4}$$

3.2.4 Cas de 4 pixels

Soient 4 pixels P , Q , R et S .

– On connaît déjà la ddp que suit la somme des différences de phase entre P et R :

$$T(\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} (2\pi - |\varphi|) \quad \varphi \in] - 2\pi, 2\pi]$$

– si on rajoute la différence de phase entre S et R , qui est uniforme sur $] - \pi, \pi]$, la somme des différences de phase

$$\tilde{\varphi}_{QP} + \tilde{\varphi}_{RQ} + \tilde{\varphi}_{SR}$$

a pour ddp la convolution de la loi triangle (définie sur $] - 2\pi, 2\pi]$) et de la loi uniforme (définie sur $] - \pi, \pi]$).

Cette dernière loi a l'expression suivante (voir figure 9) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{16\pi^3} (3\pi + \varphi)^2 \quad \varphi \in [-3\pi, -\pi] \\ & \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{4} - \frac{\varphi^2}{4\pi^2} \right) \quad \varphi \in [-\pi, \pi] \\ & \frac{1}{16\pi^3} (3\pi - \varphi)^2 \quad \varphi \in [\pi, 3\pi] \end{aligned}$$

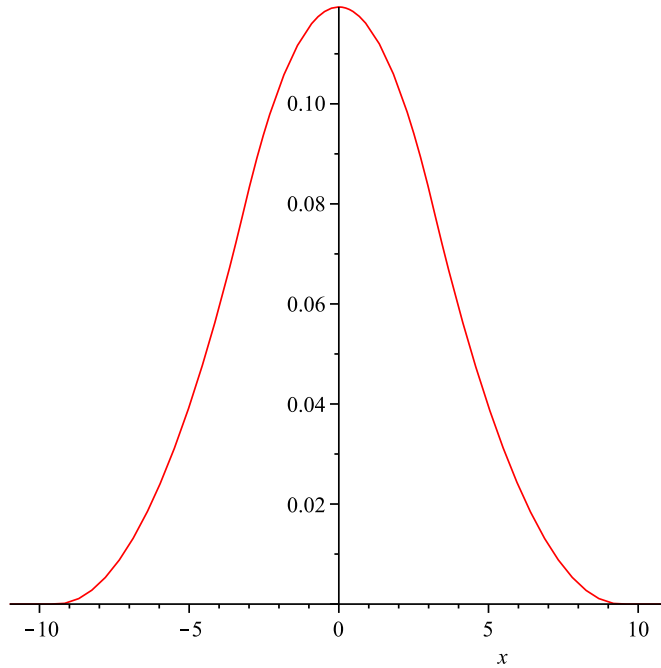


FIG. 9 – Loi de la distribution de phase (cas de 4 pixels) : la ddp ainsi tracée correspond à une convolution de trois lois uniformes entre $-\pi$ et π , ou à la convolution d'une loi triangle (entre -2π et 2π) par une loi uniforme (entre $-\pi$ et π).

En intégrant entre -3π et $-\pi$ et entre π et 3π , on obtient la probabilité d'avoir un résidu :

$$P_{residus} = \frac{1}{3}$$

Cette dernière valeur est en adéquation avec le résultat expérimental obtenu sur la simulation d'image complexe avec phase aléatoire (tableau 3.1).

Les autres cas nécessitent donc d'explorer d'autres pistes pour comprendre pourquoi on observe ainsi expérimentalement des valeurs aussi variées.

3.3 Modélisation analytique : loi équadistribuée sur $[-\alpha\pi, \alpha\pi[$, $\alpha \in]0, 1[$

Pour analyser le problème de l'existence des vortex de phase, nous allons maintenant nous pencher sur une analyse très théorique (il n'y a aucune raison qui permette de penser que ce cas puisse arriver en imagerie cohérente) qui est la variation du taux de vortex en fonction des bornes de l'intervalle dans lequel la phase est tirée par le processus aléatoire.

Nous venons de voir que si la valeur de phase est tirée dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$, le taux de vortex est égal à $1/3$. D'autre part, si la valeur de phase est tirée dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2[$, les différences sont alors dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$ et il n'y a pas de problème de déroulement : le taux de vortex est alors égal à 0.

Il peut donc être instructif d'essayer de mener les calculs précédents dans le cas où la phase suit une loi équadistribuée sur $[-\alpha\pi, \alpha\pi[$, $\alpha \in]0, 1[$, et plus précisément le cas $\alpha \in [0.5, 1[$, même si cela ne semble avoir aucune application en traitement d'images cohérentes.

3.3.1 Loi de différence de phases et loi de différence *repliée* de phases

Considérons deux pixels P et Q dont les phases φ_P et φ_Q suivent deux lois uniformes indépendantes $p(\varphi_P)$ et $q(\varphi_Q)$ sur $[-\alpha\pi, \alpha\pi[$:

$$\begin{aligned} p(\varphi_P) &= \frac{1}{2\alpha\pi} \quad \varphi_P \in]-\alpha\pi, \alpha\pi] \\ q(\varphi_Q) &= \frac{1}{2\alpha\pi} \quad \varphi_Q \in]-\alpha\pi, \alpha\pi] \end{aligned}$$

Considérons la différence de phase $\delta\varphi_Q$ entre la phase du pixel Q et la phase du pixel P :

$$\varphi_Q = \varphi_Q - \varphi_P$$

Un simple jeu d'écriture identique à celui utilisé dans le précédent paragraphe permet de poser

$$\varphi_Q = \varphi_Q + (-\varphi_P) \quad (2)$$

avec $(-\varphi_P)$ équadistribué sur $]-\alpha\pi, \alpha\pi]$, c'est à dire suivant la ddp $q(\varphi)$

$$q(\varphi) = \frac{1}{2\alpha\pi} \quad \varphi \in]-\alpha\pi, \alpha\pi]$$

Comme l'expression 2 représente une somme de variables aléatoires, on sait alors que la ddp de cette somme, $T(\varphi)$, est la convolution des ddp, ce qui donne la loi triangle :

$$p \star q = T(\varphi) = \frac{1}{4\alpha^2\pi^2} (2\alpha\pi - |\varphi|) \quad \varphi \in]-2\alpha\pi, 2\alpha\pi]$$

Considérons le cas où $\alpha \geq 0.5$: on a alors $2\alpha\pi \geq \pi$ et dans ce cas $T = p \star q$ sera non nul pour les valeurs de φ supérieures à π ou inférieures à $-\pi$. Pour ces valeurs, il faut appliquer un repliement de la phase :

- pour les valeurs $\varphi \in [\pi, 2\alpha\pi]$, le repliement va ramener ces valeurs sur l'intervalle $[-\pi, -2\pi(1-\alpha)]$. La ddp repliée \tilde{T} s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(\tilde{\varphi}) &= T(\varphi) + T(\varphi - 2\pi) \\
&= \frac{1}{4\alpha^2\pi^2} ((2\alpha\pi - |\varphi|) + (2\alpha\pi - |\varphi - 2\pi|)) \\
&= \frac{1}{4\alpha^2\pi^2} ((2\alpha\pi - \varphi) + (2\alpha\pi + \varphi - 2\pi)) \\
&= \frac{1}{4\alpha^2\pi^2} (2\pi(2\alpha - 1)) \\
&= \frac{1}{2\alpha^2\pi} (2\alpha - 1)
\end{aligned}$$

donc une loi constante sur l'intervalle $[-\pi, -2\pi(1 - \alpha)]$.

– On obtient bien évidemment un résultat identique pour l'intervalle $[2\pi(1 - \alpha), \pi]$.

La loi résultante a donc trois comportements différents :

– pour $\varphi \in [-\pi, -2\pi(1 - \alpha)]$, une loi constante :

$$\tilde{T} = \frac{1}{2\alpha^2\pi} (2\alpha - 1)$$

– pour $\varphi \in [-2\pi(1 - \alpha), 2\pi(1 - \alpha)]$, une loi triangle :

$$\frac{1}{4\alpha^2\pi^2} (2\alpha\pi - |\varphi|)$$

– pour $\varphi \in [2\pi(1 - \alpha), \pi]$, une loi constante :

$$\tilde{T} = \frac{1}{2\alpha^2\pi} (2\alpha - 1)$$

3.3.2 Validation sur simulations

Pour mieux appréhender ces résultats et en vérifier la forme analytique, il est possible d'analyser la distribution de la phase sur une image simulée. La figure 10 illustre quatre cas, correspondant à quatre valeurs de α . L'allure de la distribution de la phase repliée (ligne inférieure) vérifie donc bien le comportement en trois étapes démontré au paragraphe précédent.

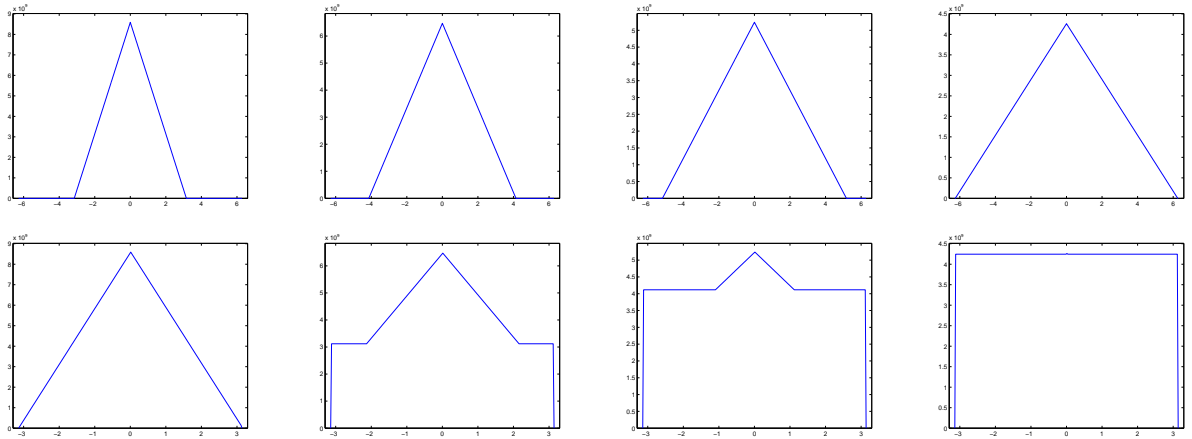


FIG. 10 – Lois de la distribution de la différence de phase entre deux pixels dans le cas où chaque pixel a une phase équidistribuée sur $-\alpha\pi$ et $\alpha\pi$. Première colonne : $\alpha = 0.50$. Seconde colonne : $\alpha = 0.66$. Troisième colonne : $\alpha = 0.82$. Quatrième colonne : $\alpha = 1$. La ligne supérieure correspond à l'histogramme de la phase "vraie" (entre -2π et 2π). La ligne inférieure correspond à l'histogramme de la phase repliée (entre $-\pi$ et π).

Toujours par simulation, on peut analyser la variation du taux de vortex en fonction du paramètre α (figure 11). On peut vérifier qu'il est nul pour $\alpha \leq 0.5$, égal à $1/3$ pour $\alpha = 1$ et croît de 0 à $1/3$ pour $\alpha \in [0.5; 1]$.

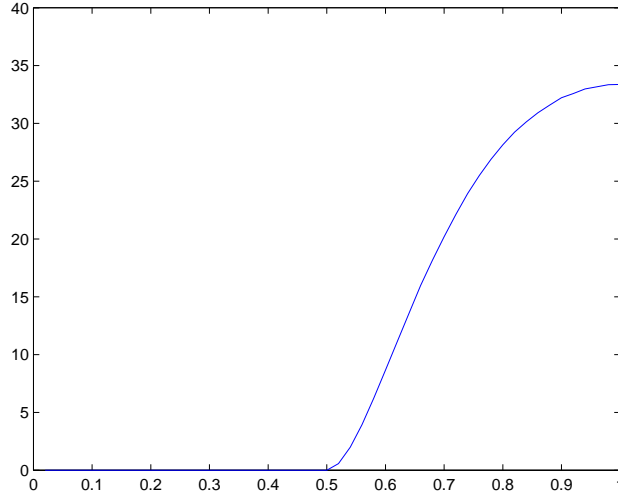


FIG. 11 – Variation du taux de vortex en fonction de α . On a bien un taux nul pour $\alpha < 0.5$ et un taux de $1/3$ pour $\alpha = 1$.

4 Etude du comportement de la phase

L’analyse théorique mené au paragraphe précédent a vite montré ses limites : hormis les résultats “phare” que sont, pour une phase aléatoire équadistribuée sur $[0; 2\pi[$, un taux de vortex de $1/4$ si l’on calcule sur 3 voisins, de $1/3$ si l’on calcule sur 4 voisins, il semble difficile de mener les calculs plus en avant. En revanche, les simulations menées au paragraphe 3.3.2 et qui avaient permis de valider les résultats analytiques peuvent s’envisager dans un contexte plus général et plus phénoménologique.

Dans ce paragraphe, nous allons donc analyser par simulation divers comportements possibles pour la phase ou pour le spectre de l’image analysée. Pour cela, nous allons utiliser aussi bien des images simulées que des images complexes utilisant des données réelles (image en amplitude, image complexe). L’objectif est de comprendre ce que la phase peut engendrer comme conséquence dans l’analyse des maxima locaux.

4.1 Simulation d’une image complexe avec une phase aléatoire

4.1.1 Analyse phénoménologique sur une image réelle “complexifiée”

Nous allons donc, grâce à la simulation, analyser le comportement des images complexes lors d’étapes de suréchantillonnage. Dans ce rapport, seule la méthode du *zero padding* sera utilisée, question de rester dans les hypothèses de Shannon².

Considérons une image classiquement utilisée en analyse d’image : l’image *lena*, ici en dimension 256×256 . A partir de cette image en amplitude, de moyenne 114 et d’écart type 41, on va créer une image complexe en gardant l’amplitude de l’image initiale et en définissant en chaque pixel une phase tirée aléatoirement entre 0 et 2π .

A partir de l’image d’origine en amplitude) et de l’image complexe, on va générer deux images rééchantillonnées d’un facteur 16 (donc de dimension 4096×4096) et en mener une analyse comparative (figure 12).

- l’image rééchantillonnée de l’image initiale (figure 12, à gauche) apparaît fortement lissée. Sa moyenne est de 118 et son écart type de 42. Les valeurs sont comprises entre 25 et 221.

²Il faut noter que ce genre d’opération requiert de travailler en double précision pour de forts taux de suréchantillonnage.

- l’amplitude de l’image complexe suréchantillonnée (figure 12, au milieu) a un tout autre aspect. On observe des sortes de blobs brillants entourés par des serpentins sombres. C’est dans ces structures serpentines que peuvent être observés de vrais zéros, valeur prise par un pixel pour lequel la phase n’est pas définie. Il n’est donc pas surprenant de noter que la valeur minimale observée sur cet exemple soit de 0.019. On note que la valeur maximale est de 482 : ceci montre que certaines valeurs initiales subissent un effet d’amplification que fait bien ressortir les structures en blobs. La moyenne est de 108 (assez proche de celle de l’image initiale) avec un écart type de 62, notablement plus grand que celui de l’image initiale.
- La phase de l’image complexe suréchantillonnée (figure 12, à droite) présente toutes les caractéristiques du speckle. Les opticiens reconnaîtront une image de speckle optique. Les radaristes noteront qu’il n’y a finalement que très peu d’information dans cette image suréchantillonnée d’un facteur 16 (16 en ligne et 16 en colonne) : la proportion du spectre utile dans le plan de Fourier n’est que de $\frac{1}{256}$ et l’information y est donc très redondante : tout se passe comme si on avait réduit la bande passante utile, alors qu’en pratique on a augmenté la bande passante acquise sans changer la bande passante du signal initial.

	Moyenne	écart-type	min	max
Image initiale	114	41	38	214
Image suréchantillonnée (x16)	118	42	25	221
Image complexe suréchantillonnée (x16)	108	62	0.01	482

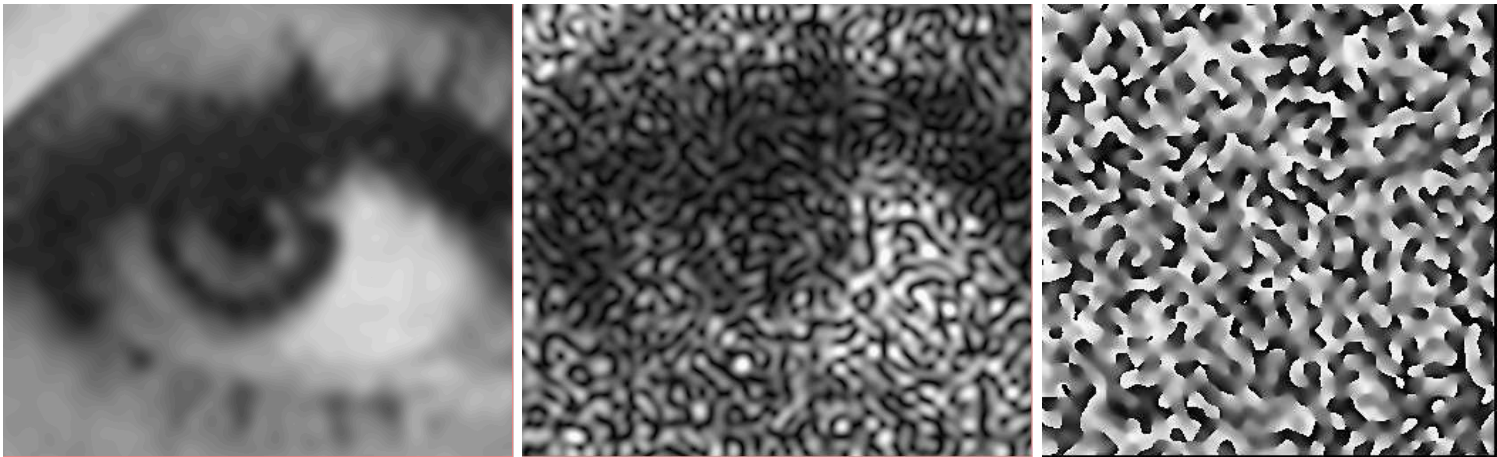


FIG. 12 – L’œil de Lena. A gauche : image d’amplitude rééchantillonnée d’un facteur 16. On note donc un fort effet de lissage. Au milieu : image complexe rééchantillonnée d’un facteur 16. On observe l’apparition de blobs d’intensité marquée ainsi que d’un réseau serpentiforme de valeurs faibles, voire nulles. A droite : phase de l’image complexe rééchantillonnée d’un facteur 16. On note un certain nombre de vortex de phase, c’est à dire de points où la phase ne peut être définie. Ce sont les points de phase non définie qui ont une amplitude nulle (voir un zoom figure 13).

Considérons tout d’abord la phase de l’image suréchantillonnée, en particulier sur le zoom figure 13. On peut y remarquer des points entourés de pixels dont la phase couvre toutes les valeurs entre 0 et 2π de sorte qu’il n’est pas possible de définir une valeur à la phase en ce point (comme dans les singularités décrites par Dennis, voir la figure 5, image de droite). Nous observons donc des vortex de phase pour lesquels l’amplitude est nulle.

Si l’on analyse la manière dont la phase varie autour d’un vortex, on peut remarquer que cette variation peut s’effectuer de deux manières différentes :

- la phase est croissante si l’on tourne autour du vortex selon le sens direct

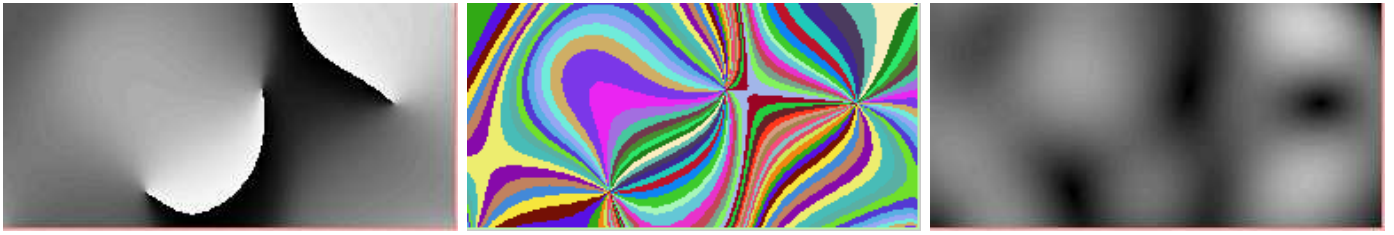


FIG. 13 – Vortex de phase. A gauche, image de phase en niveaux de gris : on observe les vortex de phase comme des pixels autour desquels on peut observer toutes les valeurs de phase entre 0 et 2π . Au milieu, la même image est représentée avec une colormap aléatoire, mettant en évidence la notion de vortex. A droite : image d’amplitude sur laquelle on observe des minima locaux de très faible valeur, puisque l’amplitude est nulle sur un vortex de phase.

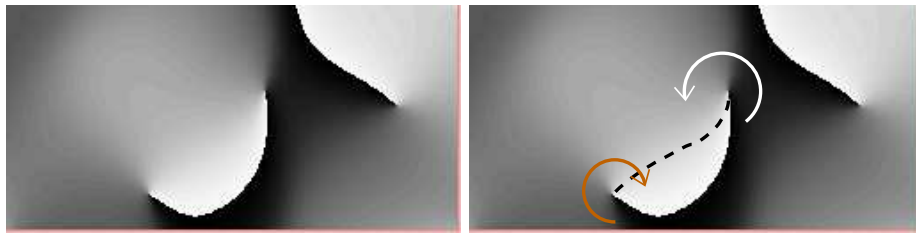


FIG. 14 – Vortex de phase : les deux types de vortex (dextrogyre et lévogyre). On peut ainsi très souvent associer deux vortex de types différents, de la même manière qu’en interférométrie on associe un résidu positif et un résidu négatif, ce qui définit des coupures (cuts). On peut noter que l’on peut associer ces deux vortex par la ligne iso-phase la plus courte (ici notée en pointillé).

– la phase est croissante si l’on tourne dans le sens des aiguilles d’une montre.

Il y a donc deux types de vortex : les lévogyres et les dextrogyres, ainsi qu’on peut l’observer sur la figure 14. Il est donc possible d’associer un vortex à un vortex dextrogyre de la même manière que l’on associe des résidus en interférométrie.

Il y a donc des pixels de valeurs très faibles, voire nulles sur une image complexe suréchantillonnée. Or, si l’on compare avec l’image suréchantillonnée de l’image initiale en niveaux de gris entiers (codés sur 8 bits), on en déduit que c’est l’étape de “complexification” par ajout d’une phase aléatoire entre 0 et 2π qui s’est d’abord traduite par l’apparition de vortex de phase sur l’image complexifiée, puis par l’apparition des “blobs” sur l’amplitude de l’image complexifiée suréchantillonnée. Il y a donc un lien entre vortex et blobs, que nous allons tenter d’analyser puisque, à première vue, il semble qu’il y ait un nombre à peu près identique de maxima locaux que de vortex de phase, ce qu’une analyse rapide expérimentale confirme.

Enfin, pour achever la comparaison, les histogrammes de ces trois images sont tracés sur la figure 15. Si ceux de l’image en amplitude et de l’image en amplitude suréchantillonnée se ressemblent fortement, on peut remarquer que celui de l’image complexe suréchantillonnée est fondamentalement différent.

4.1.2 Effets du taux de suréchantillonnage

Une première expérimentation facilement réalisable consiste à analyser l’évolution du nombre de vortex de phase et du nombre de maxima locaux en fonction du taux de suréchantillonnage.

Pour cela, on va comparer ces grandeurs pour des facteurs de suréchantillonnage en puissance de deux. On va aussi introduire le nombre de points selles³.

³Cette grandeur semble avoir un grand intérêt topologique, comme le souligne Dennis [2], et mériterait quelques travaux complémentaires en traitement d’images

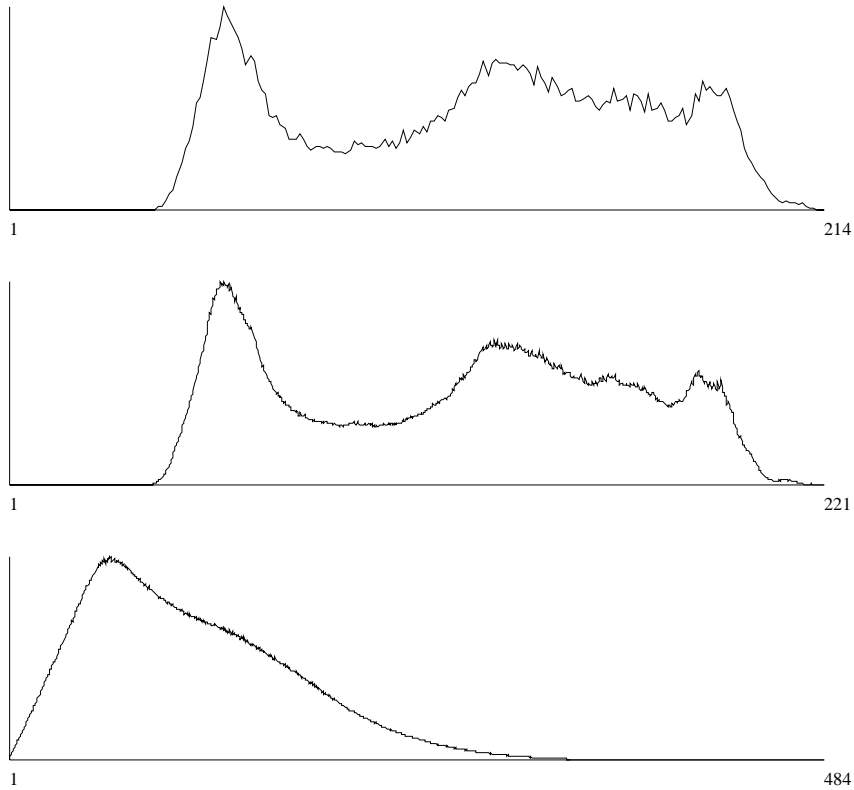


FIG. 15 – Histogrammes de l’image lena. En haut, l’histogramme de l’image initiale (moyenne 114, écart type 42 valeur max : 214). Au milieu, l’histogramme de l’image initiale rééchantillonnée d’un facteur 16 (moyenne 118, écart type 42 valeur max : 221). En bas, l’histogramme de l’image complexifiée rééchantillonnée d’un facteur 16 (moyenne 108, écart type 62, valeur max : 484).

	Taux de vortex (en %)	nombre de vortex	nombre de max	points selle
Image originale	33.3	21825	2737	1896
Suréchantillonnage X2	10.76	28199	23801	20982
Suréchantillonnage X4	2.86	29972	30605	22533
Suréchantillonnage X8	0.72	30405	32469	23004
Suréchantillonnage X16	0.18	30550	32954	22905

Sur l’image initiale, il faut bien souligner le fait que le nombre de maxima est lié aux caractéristiques intrinsèques de l’image (ici l’image lena) alors que le nombre de vortex de phase est le fait d’un tirage aléatoire de la phase entre 0 et 2π . On observe que le nombre de maxima locaux augmente énormément entre l’image initiale et l’image suréchantillonnée d’un facteur 2 : ce nombre s’approche du nombre de vortex, ce qui explique pourquoi l’apparition de blobs semblait lié à la présence de vortex. Ensuite, les valeurs semblent se stabiliser : on ne crée quasiment plus de vortex, ni de blobs.

Pour tenter une analyse plus fine, on va partir d’une autre image suréchantillonnée d’un facteur 16 et la décimer d’un facteur entier de 1 à 16 : on obtient ainsi un taux de suréchantillonnage non nécessairement égal à une puissance de 2. On effectue cette expérience aussi bien sur l’image complexifiée que sur l’image initiale.

Reech	Image complexe				Image amplitude
	nombre vortex	taux	nombre max	taux	nombre max
1.00	21335	0.333	2673	0.042	2673
1.07	25152	0.345	8008	0.110	4063
1.14	29132	0.349	9198	0.110	4368
1.23	33431	0.343	10979	0.113	4827
1.33	37198	0.326	13100	0.115	5193
1.45	39842	0.293	15468	0.114	5646
1.60	40328	0.245	18017	0.109	5983
1.78	39334	0.193	20931	0.102	6372
2.00	37340	0.144	23801	0.092	6767
2.29	34574	0.102	25996	0.077	7086
2.67	33010	0.072	27818	0.060	7355
3.20	31805	0.048	29360	0.044	7581
4.00	31108	0.030	30605	0.029	7769
5.33	30547	0.016	31712	0.017	7923
8.00	30308	0.007	32469	0.008	8047
16.00	30117	0.002	32954	0.002	7823

- Sur l’image complexifiée, on peut noter que le nombre de vortex (initialement le tiers des pixels) augmente (il y en a presque le double pour un taux de suréchantillonnage de 1.6) : cela correspond à la création de paires de vortex de types opposés. Ensuite le nombre de vortex semble se stabiliser. Il y a donc sur une image suréchantillonnée deux catégories de vortex : ceux qui existaient sur l’image initiale et les paires créées lors de l’étape de suréchantillonnage.

Dans le même temps, on passe d’un nombre de maxima locaux liés à l’image initiale d’amplitude (ici pour lena, 2673 maxima locaux) à un nombre de maxima locaux correspondant à des blobs (de l’ordre de 30000), donc liés aux vortex de phase : ce nombre de blobs semble se stabiliser autour du nombre de vortex.

- Sur l’image d’amplitude, on note une augmentation du nombre de maxima locaux (de 2673 à 8047 pour un suréchantillonnage d’un facteur 8). Une analyse plus précise montre que cette augmentation est principalement liée à des phénomènes d’oscillations locales de type Gibbs sur des zones quasi constantes. Intrinsèquement, ces maxima font partie des maxima observés sur l’image complexe, mais il y en a de l’ordre de 8000 alors qu’il y a environ 30000 blobs sur la donnée complexe.

On peut donc conclure que l’apparition des blobs est directement liée à l’existence de vortex.

4.1.3 La phase en fonction du facteur d’échantillonnage

Rappelons donc le résultat concernant le nombre de vortex en fonction du taux de suréchantillonnage :

	nombre de vortex
Image originale	21825
Suréchantillonnage X2	28199
Suréchantillonnage X4	29972
Suréchantillonnage X8	30405
Suréchantillonnage X16	30550

La figure 16 montre l’évolution des images de phase en fonction du taux de suréchantillonnage avec un affichage adapté (décimation ou réplification des pixels) pour permettre une comparaison réelle.

On note que l’allure semble peu modifiée. On peut donc penser que phase et blobs sur les images suréchantillonnées semblent stables : sur une image complexifiée (phase suivant une

distribution uniforme sur $[0, 2\pi[)$, les effets liés à l'apparition de paires de vortex ne sont donc probablement que marginaux et très locaux (la "coupure" est très petite).

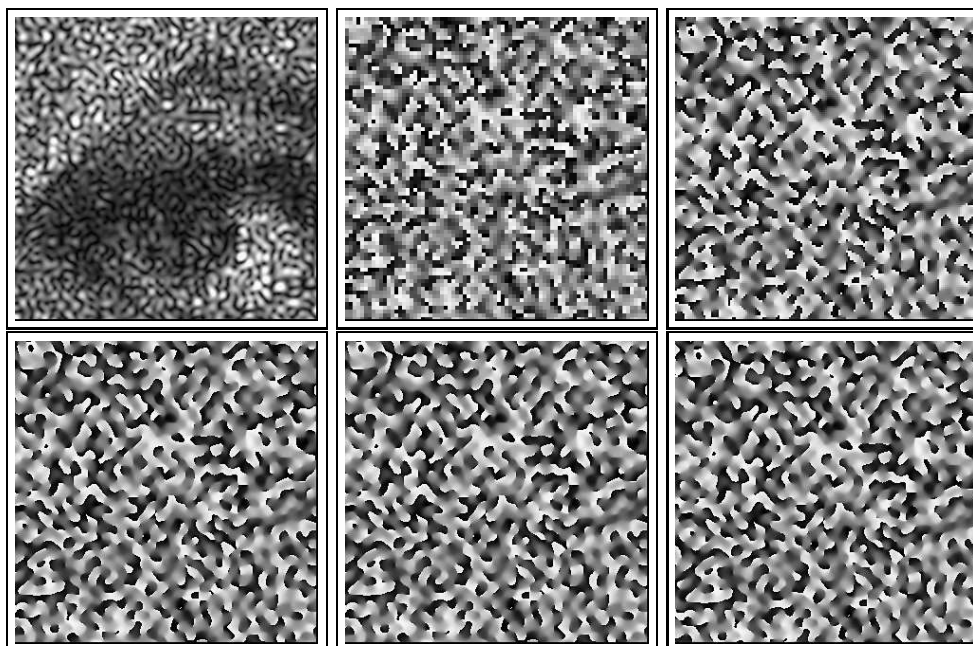


FIG. 16 – Extrait de l'image lena complexifiée, avec une phase équidistribuée entre $-\pi$ et π . A gauche, image complexifiée et représentée après un suréchantillonnage d'un facteur 16. La phase est représentée pour des suréchantillonnages de facteur 2, 4, 8 16 et 32. L'affichage a été adapté (zoom par réplication d'un facteur 4 et 2 ou décimation d'un facteur 2 et 4) pour permettre des comparaisons.

4.1.4 Les effets d'une rampe de phase (décentrage du spectre)

Dans nos précédents tests, le spectre des images était centré. Il est intéressant d'étudier les effets d'un décentrage du spectre, puisque nous avons vu que certaines données d'agences spatiales pouvaient présenter un décalage selon l'azimut (appelé *Doppler centroid*, que l'on peut aussi caractériser par l'angle de dépointage –squint–).

La figure 17 montre les modifications subies par la phase lors d'un décentrage du spectre (selon l'axe distance aussi bien que l'axe azimutal). Si ce décentrage n'est pas trop important, on peut penser que les vortex sont invariants : seule l'allure de la phase est modifiée. Il apparaît en effet des structures linéiques orientées selon le vecteur de décentrage. Cette simulation explique pourquoi l'allure de la phase de certaines images fournies par les agences spatiales peut être aussi différente.

4.1.5 Apodisation : fenêtrage du spectre par une fenêtre carrée

Nous observons donc que les spectres des images fournies par les agences spatiales n'occupent pas la totalité de l'espace de Fourier (voir par exemple la figure 18). Il est donc intéressant d'analyser les effets d'un fenêtrage dans le plan de Fourier.

Pour cela, on génère une image aléatoire (1024×1024), d'amplitude suivant une loi de Rayleigh et dont la phase est équidistribuée entre 0 et 2π . On a alors les résultats suivants :

- 321809 vortex, donc un taux de vortex de 33.24 % (donc très proche de la valeur théorique : $1/3$),
- 107008 maxima locaux, donc un taux de maxima de 11.06 %

On prend le spectre de cette image. Ce spectre est alors multiplié par une fenêtre carrée centrée, définissant ainsi un taux de spectre "utile" (c'est le ratio de la surface de cette fenêtre

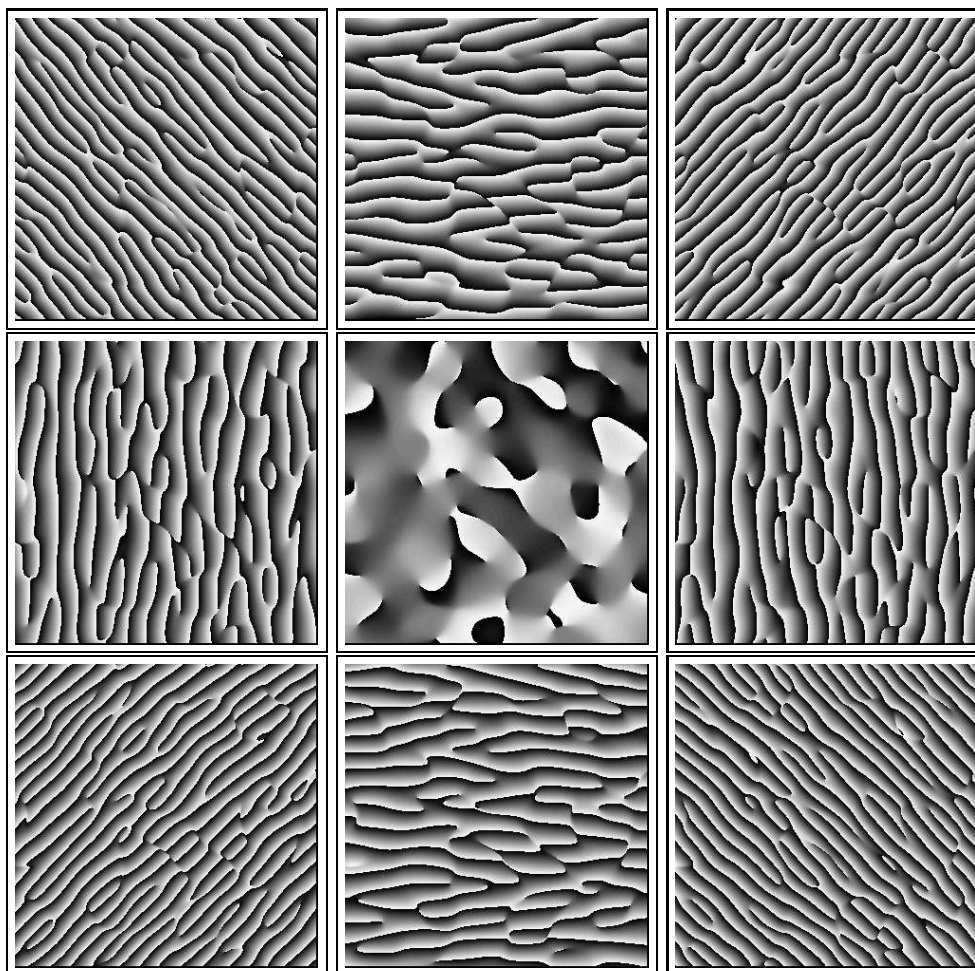


FIG. 17 – Allure de la phase en fonction d'un dépointage de spectre selon O_x (axe distance) et O_y (axe azimuth). On observe que les vortex semblent rester à peu près les mêmes : seule l'allure de la phase est modifiée par ce dépointage.

utile sur la surface du spectre possible –qui correspond à la “première zone de Brillouin–). La transformée inverse donne alors une image dont on analyse le taux de vortex.

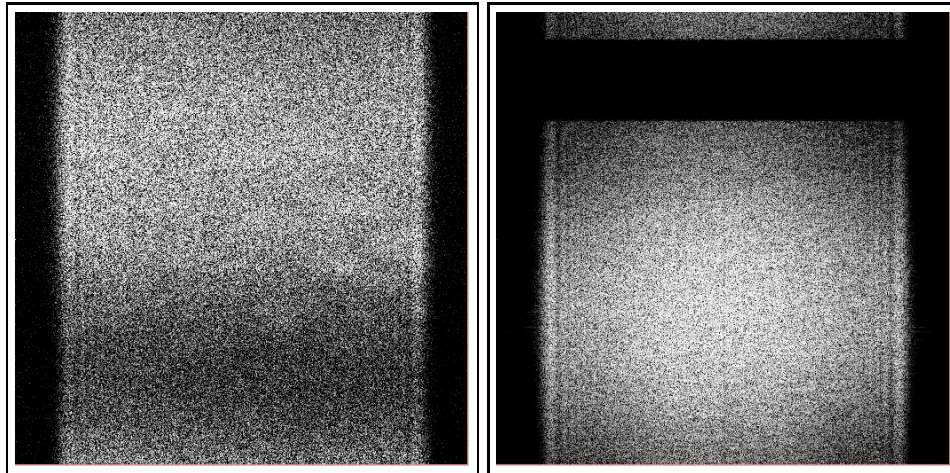


FIG. 18 – Spectres de données ERS. A gauche : spectre d’une image RAW sur Lausanne. A droite : spectre d’une image SLC sur le Mustang.

Spectre utile (en %)	Taux de vortex (en %)	Taux de maxima (en %)	Taux de points selle (en %)
0.05	2.57	2.09	1.52
0.10	5.02	3.88	2.93
0.15	7.46	5.51	4.15
0.20	9.66	6.82	5.12
0.25	11.93	7.90	5.96
0.30	13.95	8.76	6.57
0.35	15.89	9.45	6.96
0.40	17.82	9.95	7.18
0.45	19.65	10.35	7.34
0.50	21.38	10.61	7.33
0.55	22.90	10.78	7.33
0.60	24.42	10.89	7.23
0.65	25.86	10.94	7.08
0.70	27.10	11.01	6.97
0.75	28.36	11.05	6.88
0.80	29.41	11.04	6.76
0.85	30.57	11.08	6.71
0.90	31.40	11.06	6.69
0.95	32.42	11.08	6.63
1.00	33.25	11.07	6.63

On voit que le taux de vortex augmente en fonction du taux utile du spectre, pour atteindre la borne de 33,3%. Dans le même temps, le taux de maxima, donc de blocs, augmente. L’augmentation des maxima semble amener le nombre de maxima locaux du nombre de vortex (pour de faibles taux de spectre utile) à la valeur du nombre de maxima sur l’image initiale (résultat du tirage d’une loi de Rayleigh).

Cependant cette analyse n’est que partielle : en effet, en générant une image d’amplitude constante et de phase aléatoire (lois équidistribuée sur $[0, 2\pi[$), on observerait une évolution identique. Le taux de maxima présenterait la même croissance, excepté que pour le taux de spectre utile de 100%, on n’aurait aucun maximum local (puisque l’image initiale est constante). Ceci montre le rôle essentiel de la phase dans le processus d’apparition des blocs.

4.1.6 Apodisation : fenêtrage du spectre par un cosinus sur piédestal

Comme dans l'étape précédente, on génère une image aléatoire (1024×1024), d'amplitude suivant une loi de Rayleigh et dont la phase est équidistribuée entre 0 et 2π . On a alors les résultats suivants :

- 321809 vortex, donc un taux de vortex de 33.24 % (donc très proche de la valeur théorique : $1/3$),
- 107008 maxima locaux, donc un taux de maxima de 11.06 %

On prend le spectre de cette image. Ce spectre est alors multiplié par un cosinus sur piédestal centrée :

$$H(f_x, f_y) = ((1 - \alpha_x) + \alpha_x \cos(2\pi f_x)) ((1 - \alpha_y) + \alpha_y \cos(2\pi f_y))$$

les fréquences spatiales f_x et f_y étant normalisées ($f_x \in]-0.5, 0.5[$ et $f_y \in]-0.5, 0.5[$). On retrouve la fenêtre de Hann ($\alpha = 0.50$) ainsi que la fenêtre de Hamming ($\alpha = 0.46$). La transformée inverse donne alors une image dont on analyse le taux de vortex, ce qui donne le tableau suivant pour des valeurs de $\alpha \in [0, 0.5]$:

α	Taux de vortex (en %)	Taux de maxima (en %)	Taux de points selle (en %)
0.00	33.24	11.06	6.61
0.05	31.62	11.05	6.62
0.10	29.62	10.99	6.68
0.15	27.57	10.91	6.74
0.20	25.29	10.73	6.78
0.25	22.70	10.55	6.88
0.30	20.10	10.22	6.96
0.35	17.57	9.78	7.03
0.40	14.86	9.19	6.88
0.45	12.70	8.43	6.55
0.50	10.87	7.72	6.16

Remarquons que pour $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$, le taux utile du spectre est de 50%.

Dans cette opération, on voit que le nombre de vortex diminue beaucoup plus rapidement que dans le cas précédent. En revanche, le nombre de maxima varie moins rapidement.

4.1.7 Apodisation : simulation ERS et Terrasar-X

L'analyse des données fournies par l'ESA (capteur ERS) et le DLR (capteur Terrasar-X) permet, en première approximation, de modéliser leurs spectres comme étant d'une part soumis à un fenêtrage rectangulaire, et d'autre part à une pondération de type cosinus sur piédestal.

	ERS	TSX
fenêtre en distance 0x	0.82	0.92
fenêtre en azimuth 0y	0.82	0.72
α_x	0.25	0.41
α_y	0.36	0.39

Une simulation d'une image (1024×1024 , amplitude selon une loi de Rayleigh, phase équidistribuée entre 0 et 2π) donne alors les résultats suivants :

	Nombre de vortex	Taux de vortex	Nombre de maxima	Nombre de points selle
ERS	154899	14.8 %	95142	71259
TSX	111107	10.6 %	80546	64478

On retrouve globalement les valeurs du tableau 3.1 (16% de vortex pour l'image ERS-1 du Mustang, 12% pour l'image TSX stripmap d'Argentière).

Le tableau 2 donne les différents taux mesurés au cours des étapes de suréchantillonnage (calculées sur une imagette 256×256). Le nombre de vortex et de maxima locaux se stabilise

Reech	nombre vortex	taux	nombre max	taux
1.00	6840	0.107	4894	0.076
1.07	7035	0.097	5216	0.072
1.14	7116	0.085	5536	0.066
1.23	7343	0.075	5902	0.061
1.33	7395	0.065	6194	0.054
1.45	7540	0.055	6534	0.048
1.60	7662	0.046	6789	0.041
1.78	7805	0.038	7126	0.035
2.00	7879	0.030	7474	0.029
2.29	7999	0.024	7707	0.023
2.67	8060	0.017	7917	0.017
3.20	8143	0.012	8150	0.012
4.00	8235	0.008	8316	0.008
5.33	8308	0.004	8439	0.005
8.00	8381	0.002	8550	0.002
16.00	8413	0.001	8619	0.001

TAB. 2 – Simulation Terrasar-X à partir des paramètres d'apodisation des images réelles

pour un facteur de suréchantillonnage de l'ordre de 2. Si le nombre de vortex évolue peu, le nombre de maxima locaux passe du simple au double, pour se rapprocher du nombre de vortex de phase. Il semble qu'il y ait donc un lien entre blobs et vortex de phase.

Pour ERS, le tableau 3 donne les différents taux mesurés au cours des étapes de suréchantillonnage (calculées sur une imagette 256×256). Le nombre de maxima locaux varie peu et se stabilise

Reech	nombre vortex	taux	nombre max	taux
1.00	9556	0.149	5830	0.091
1.07	9888	0.136	6251	0.086
1.14	10072	0.121	6790	0.081
1.23	10303	0.106	7303	0.075
1.33	10487	0.092	7850	0.069
1.45	10780	0.079	8397	0.062
1.60	10918	0.066	8854	0.054
1.78	11094	0.054	9411	0.046
2.00	11313	0.044	9893	0.038
2.29	11477	0.034	10352	0.031
2.67	11615	0.025	10709	0.023
3.20	11737	0.018	11071	0.017
4.00	11888	0.011	11329	0.011
5.33	11951	0.006	11563	0.006
8.00	12051	0.003	11749	0.003
16.00	12107	0.001	11875	0.001

TAB. 3 – Simulation ERS à partir des paramètres d'apodisation des images réelles

dès un facteur de suréchantillonnage de l'ordre de 2. En revanche, il est curieux de noter que le nombre de vortex passe du simple au double.

Il est intéressant de noter que dans les deux cas, il semble qu'il y ait une stabilité dans le nombre de blobs et dans le nombre de vortex, atteinte dès un facteur 2 de rééchantillonnage. Le point important est le lien entre nombre de blobs et nombre de vortex de phase pour des facteurs de suréchantillonnage supérieurs à 2..

4.1.8 Conclusion sur les simulations

Dans ce paragraphe dédié aux simulations d'images complexes, on peut mieux comprendre les liens qui existent donc entre vortex de phase et "blobs" (cas du suréchantillonnage) ainsi que les liens qui existent entre le support du spectre et le taux de vortex.

Un point important est celui du suréchantillonnage. Il est intéressant de noter que, lors d'un processus de suréchantillonnage, le nombre absolu de vortex peut augmenter. Il y a donc sur les images suréchantillonnées deux catégories de vortex :

- ceux qui peuvent être associés à des vortex de phase de l'image initiale et qui reflètent une certaine topologie intrinsèque des données initiales. Suréchantillonner l'image permet alors d'en affiner la position exacte.
- ceux qui ont été rajouté lors du processus de rééchantillonnage. Il est à noter qu'ils se rajoutent par paire et que l'on peut les lier par des coupures iso-phases.

Ce sont les premiers qui semblent essentiels puisqu'ils se manifestent sous forme de blobs.

4.2 Analyse d'images RSO

4.2.1 Image Terrasar-X

Regardons maintenant ce qu'il advient sur des images réelles. Nous avons vu qu'une analyse sur les données Terrasar-X montre que le taux de vortex est aux alentours de 10%. Puisque l'on peut aussi observer sur ces images que la phase suit malgré tout une loi uniforme, on peut donc conclure que les phases ne sont pas indépendantes et qu'il existe alors une certaine corrélation interpixelique. Il est possible de vérifier cette hypothèse en analysant le spectre, qui d'une part n'occupe pas la totalité de la première zone de Brillouin et, d'autre part, est apodisé dans sa partie utile. Le taux de vortex est donc une indication facilement utilisable qui témoigne directement de l'indépendance de la phase.

Comme au paragraphe 4.1.2, nous allons étudier l'évolution du nombre de vortex et du nombre de maxima locaux en fonction du taux de suréchantillonnage sur une image Terrasar-X (image du 30 mai 2009). L'image initiale a un taux de vortex de 11.6%, du à l'apodisation du spectre (cosinus sur piédestal).

Reech	Image complexe initiale				Image amplitude
	nombre vortex	taux	nombre max	taux	nombre max
1.00	7431	0.116	4476	0.071	4476
1.07	7717	0.106	4929	0.068	5026
1.14	7850	0.094	5284	0.063	5279
1.23	8031	0.083	5709	0.059	5680
1.33	8260	0.072	6094	0.053	5954
1.45	8447	0.062	6507	0.048	6322
1.60	8523	0.052	6952	0.042	6638
1.78	8760	0.043	7333	0.036	7007
2.00	8873	0.034	7754	0.030	7294
2.29	9011	0.027	8073	0.024	7595
2.67	9139	0.020	8398	0.018	7851
3.20	9242	0.014	8663	0.013	8213
4.00	9344	0.009	8923	0.009	8583
5.33	9420	0.005	9092	0.005	9067
8.00	9482	0.002	9234	0.002	9443
16.00	9540	0.001	9332	0.001	9661

Ces valeurs ont une forte ressemblance avec celles obtenus par simulation [tableau 2)]. Il est intéressant de noter que, comme pour les simulations, le nombre de vortex évolue peu et que le nombre de maxima locaux (donc le nombre de blobs) évolue lentement dès que le facteur de suréchantillonnage est supérieur à 3. Si l'on compare avec le nombre de maxima locaux sur les images suréchantillonnées de l'image en amplitude, on observe que ce nombre est du même ordre de grandeur. Il semble donc qu'il y ait un lien entre blobs et maxima locaux, la phase renforçant cet effet de blob.

4.2.2 Image ERS

On considère une image ERS1 (zone de Serre Poncon, image du 17/04/1992). L'image initiale a un taux de vortex de 15.3%, du au fenêtrage du spectre (fenêtre carrée). Le spectre utile occupe environ 53 % de la première zone de Brillouin.

Reech	Image complexe				Image amplitude
	nombre vortex	taux	nombre max	taux	nombre max
1.00	9745	0.152	5278	0.082	5278
1.07	10004	0.137	5731	0.079	5802
1.14	10306	0.123	6220	0.074	6133
1.23	10443	0.107	6724	0.069	6651
1.33	10701	0.094	7259	0.064	6991
1.45	10890	0.080	7714	0.057	7367
1.60	11124	0.067	8218	0.050	7768
1.78	11308	0.055	8640	0.042	8148
2.00	11476	0.044	9119	0.035	8501
2.29	11615	0.034	9522	0.028	8828
2.67	11764	0.026	9859	0.021	9181
3.20	11897	0.018	10165	0.015	9659
4.00	12027	0.012	10404	0.010	10186
5.33	12131	0.007	10587	0.006	10777
8.00	12206	0.003	10725	0.003	11317
16.00	12268	0.001	10812	0.001	11595

Ces valeurs ont une forte ressemblance avec celles obtenus par simulation [tableau 3]. Comme pour l'image Terrasar-X, on voit que le nombre de maxima locaux augmente, puis se stabilise dès que le facteur de suréchantillonnage est supérieur à 2. Curieusement, on peut noter que le nombre de vortex reste à peu près constant.

5 XimaMagnicos : comment observer localement des “pixels brillants”

5.1 Le livrable Magnicos

L'outil logiciel Magnicos (Magnifying Coherent Scatterers) est un des livrables du projet EFIDIR (livrable WP1) : une première version de type beta-test est déjà disponible dans un environnement graphique : il s'agit de l'outil XimaMagnicos.

L'objectif est de proposer un moyen pour analyser finement une image RSO autour d'un pixel donné. Cette analyse s'effectue toujours par paire de données : on compare une image acquise à une date donnée avec une autre image acquise à une autre date. XimaMagnicos est principalement construit autour d'une procédure de suréchantillonnage, affiche des paires de vignettes suréchantillonnées à un taux donné (pour l'instant une puissance de 2), et permet d'évaluer dans une fenêtre donnée les taux de blobs, de vortex de phase et de points selles.

Dans ce rapport, nous allons l'utiliser pour étayer les principaux résultats obtenus sur simulation et pour comprendre ce que peut apporter à un thématicien un outil de ce type.

Pour être significative, l'analyse des vortex de phase doit être effectuée tout d'abord sur des zones d'image RSO sur lesquelles on s'attend à ce qu'il existe des objets fortement rétrodiffusant et stables dans le temps. Dans ce cas, on peut s'attendre à ce que l'image d'amplitude demeure à peu près identique sur une pile temporelle d'images et que l'image de phase présente des vortex localisés à peu près au même endroit. Nous mènerons cette analyse sur un bâtiment de la zone industrielle de Saint Gervais (entrepôt Métro).

Ensuite, nous étudierons une zone “mixte” où coexistent un milieu variant à l'échelle des onze jours du cycle Terrasar-X (présence de végétation) et des objets dont la rétrodiffusion est stable à l'échelle des onze jours. La moraine du glacier d'Argentière au voisinage du refuge d'Argentière sera cette zone test.

Enfin, nous analyserons l'allure des vortex de phase sur une zone dont la cohérence interférométrique est en théorie nulle : il s'agit du glacier d'Argentière dont la surface est profondément modifiée en onze jours à cause de la fonte estivale qui modifie totalement l'état de la surface (la glace perd 1 mm d'épaisseur par jour et par degré de température supérieure à 0°).

5.2 Analyse de pixels stables : étude d'un bâtiment industriel

Sur la zone industrielle de Saint Gervais les bains-Le Fayet, établie en zone pratiquement plate (bassin alluvial de l'Arve), on remarque la présence d'un bâtiment rectangulaire assez caractéristique : l'entrepôt Metro.

La figure 19 (image du haut) montre 12 imagerie extraites des acquisitions Terrasar-X de l'été 2010 (voir Annexe A). La figure 19 (image du bas) montre les mêmes imagerie une fois effectuée une étape de recalage subpixelique. Le recalage subpixelique effectué ici prend en compte la position des capteurs et supprime donc les franges orbitales. C'est ce que l'on observe sur la figure 20 représentant la phase du produit hermitien correspondant à l'interférogramme construit entre la première des données et chacune des autres imagerie : en haut, le produit hermitien sur images initiales ; en bas, le produit hermitien sur les images recalées. Vu les dimensions de l'imagerie et la valeur des bases orthogonales de la séquence d'images de l'été 2009, on peut noter que le principal effet de cette étape de recalage sera la suppression des rampes de phase orbitale et que les effets géométriques sont une simple translation.

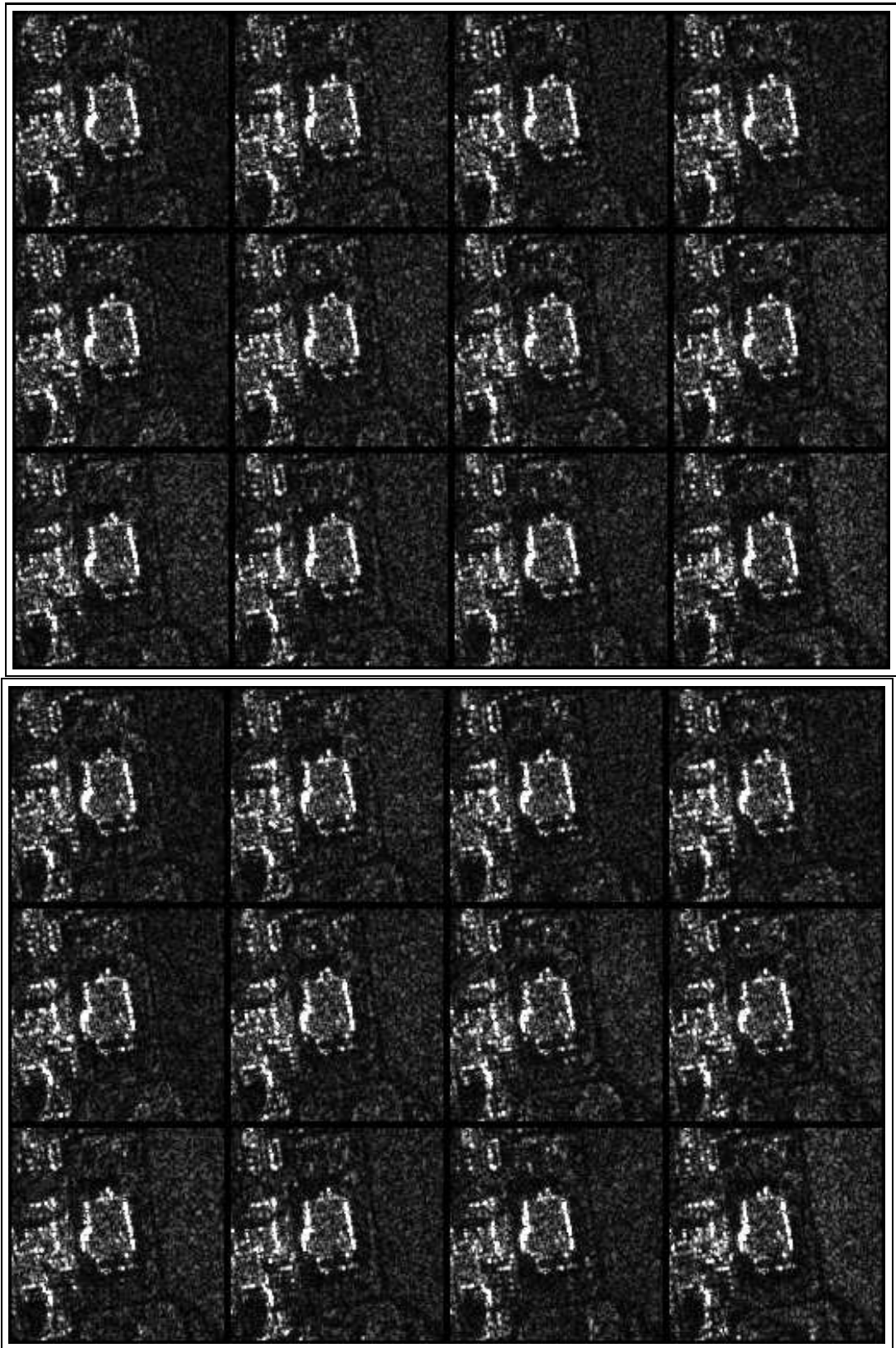


FIG. 19 – Entrepôt “Metro” de la zone industrielle de Saint Gervais le Fayet. Imagettes extraites d’une séquence de 12 acquisitions Terrasar-X (été 2009). En haut : les données fournies par le DLR. En bas, les imagettes recalées.

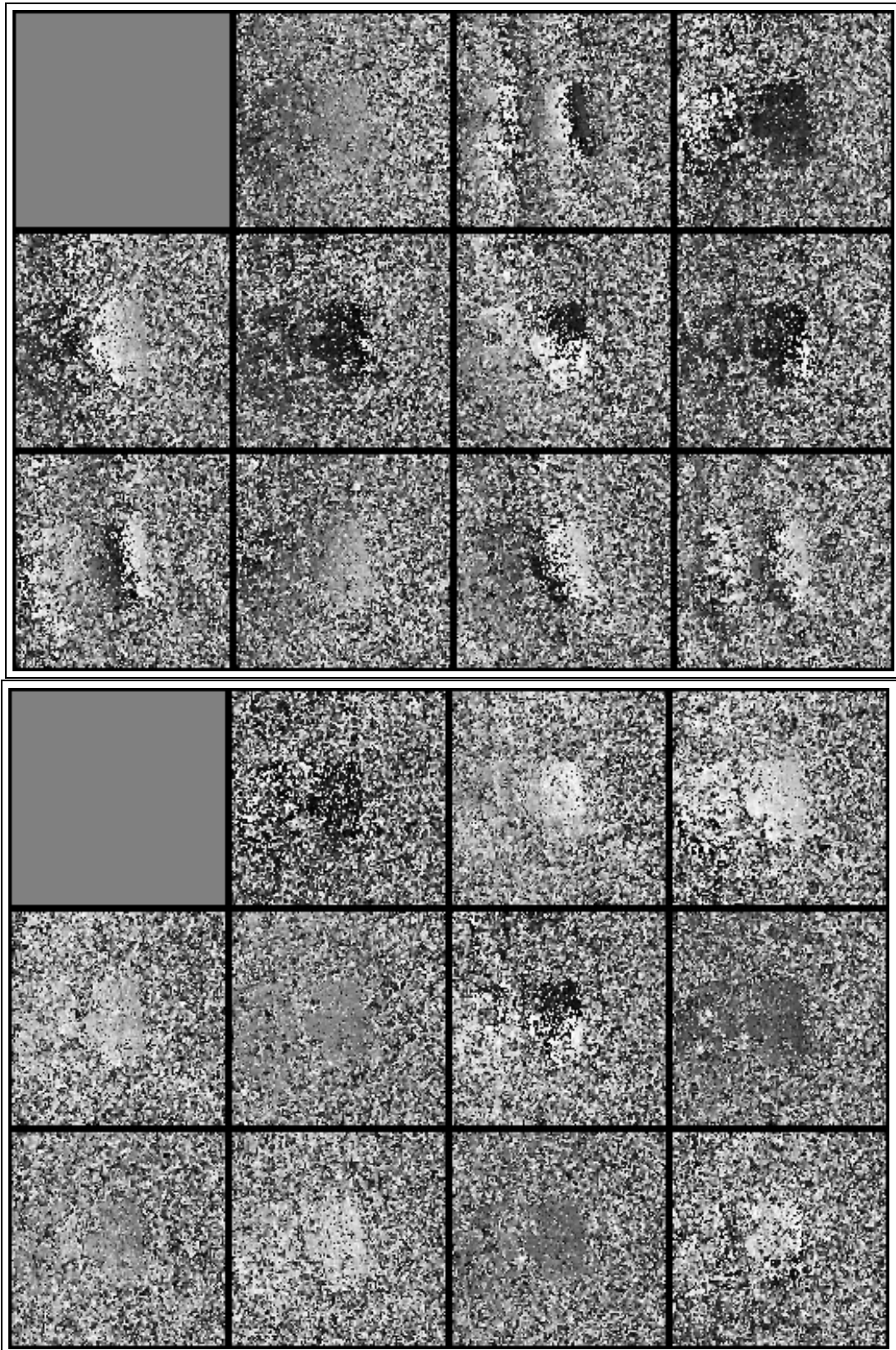


FIG. 20 – Entrepôt “Metro” de la zone industrielle de Saint Gervais le Fayet. Phase interférométrique sur imagettes extraites d’une séquence de 12 acquisitions Terrasar-X (été 2009). En haut : les données fournies par le DLR (on note la présence de franges orbitales). En bas, les imagettes recalées (on remarque des effets troposphériques).

Pour pouvoir mieux “suivre” les pixels brillants stables, nous allons donc effectuer un suréchantillonnage d’un facteur 8 sur l’image initiale

Sur ce bâtiment, on va analyser les points suivants :

- sur les deux images du 30 mai et du 11 juin fournies par le DLR, on note qu’il existe un certain nombre de pixels brillants, dont la forme et l’aspect peut varier.
- après un suréchantillonnage d’un facteur 8, on peut remarquer que ces pixels brillants apparaissent sous la formes de *blobs* caractéristiques (leur forme est liée bien évidemment à la PSF de TSX). Sur ces images, un thématicien peut très facilement apparier les blobs : il semble donc possible de construire un algorithme permettant de suivre des blobs sur des piles temporelles et de retenir les blobs temporellement les plus stables.

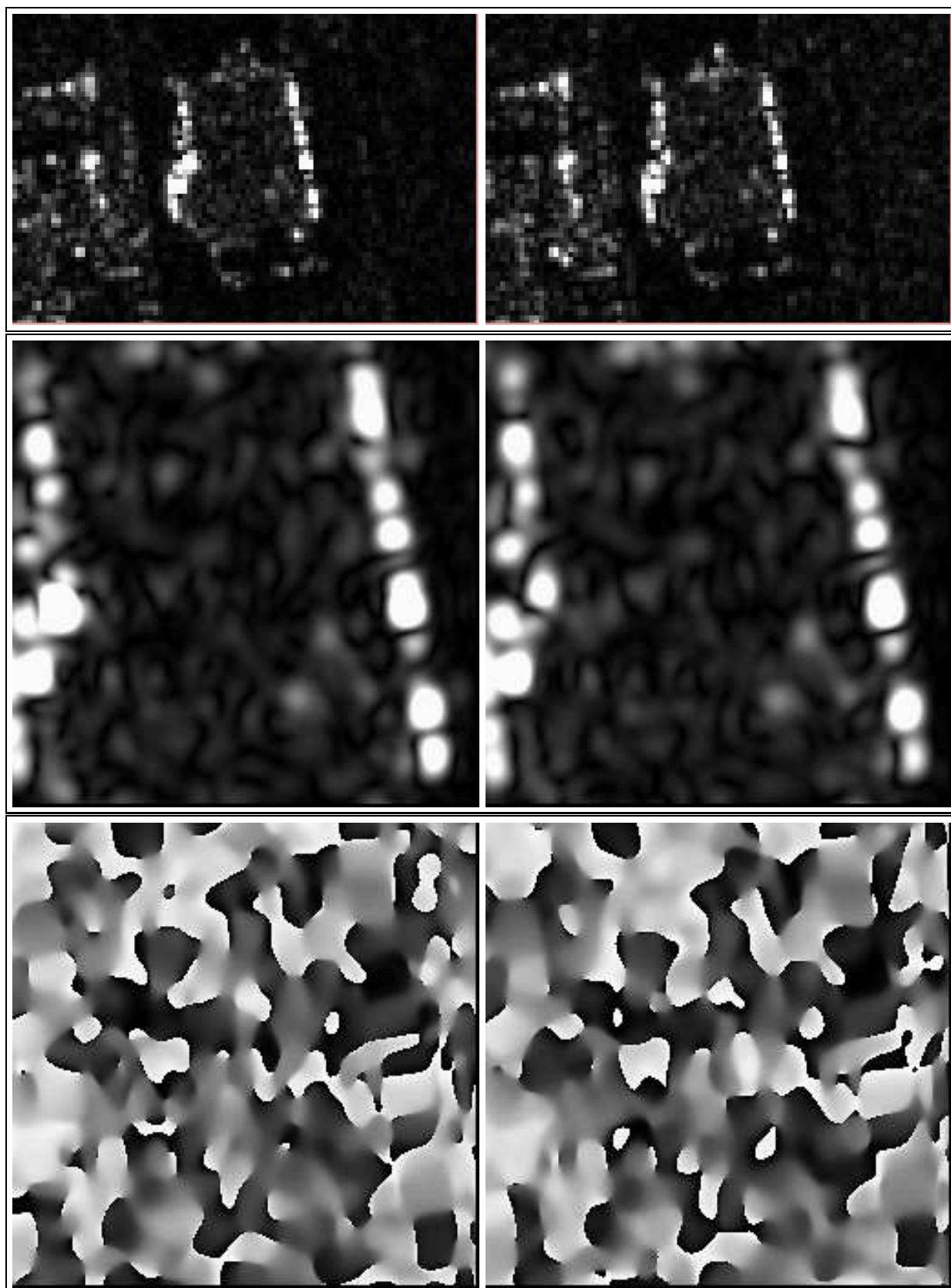


FIG. 21 – Entrepôt “Metro” de la zone industrielle de Saint Gervais le Fayet. Imagettes extraites d’une séquence de 12 acquisitions Terrasar-X (été 2009). En haut : les données fournies par le DLR (sans recalage subpixellique). Au milieu, les imagettes suréchantillonnées d’un facteur 8 (amplitude), affiché entre 0 et $moyenne + 7\sigma$. En bas, les imagettes suréchantillonnées d’un facteur 8 (phase).

5.3 Analyse de pixels stables en milieu naturel : zone cohérente

Les acquisitions Terrasar-X de l'été 2009 étaient dédiées principalement au suivi du glacier d'Argentière. Sur la moraine rive droite, une zone s'avère extrêmement intéressante puisqu'elle présente une forte cohérence sur les 5 mois d'acquisitions, et que d'autre part on y observe des cibles stables.

Le recalage subpixelique effectué ici prend en compte la position des capteurs et supprime donc les franges orbitales. Comme précédemment, on effectue 11 interférogrammes à partir de la première donnée et chacune des 11 autres imagerie. La figure 22 montre la cohérence (en haut) et la phase (en bas) de ces interférogrammes.

Ce recalage ne prenant pas en compte le relief, il demeure des franges topographiques qui dépendent des baselines (voir A).

La figure 23 montre le résultat d'un suréchantillonnage par un facteur 8 de l'image du 14 juillet 2009 et de celle du 25 juillet 2009. Il est possible visuellement d'apparier certains blobs. En revanche, on peut aussi noter qu'entre les deux dates, des blobs peuvent apparaître ou disparaître. L'image de phase est délicate à interpréter : en effet, même si la baseline est faible, le relief est très marqué, ce qui se traduit par quelques franges topographiques. Cet effet modifiera l'origine des phases : néanmoins, l'œil accorde sur certaines zones des motifs de phase identiques, généralement dictées par des vortex identiques.

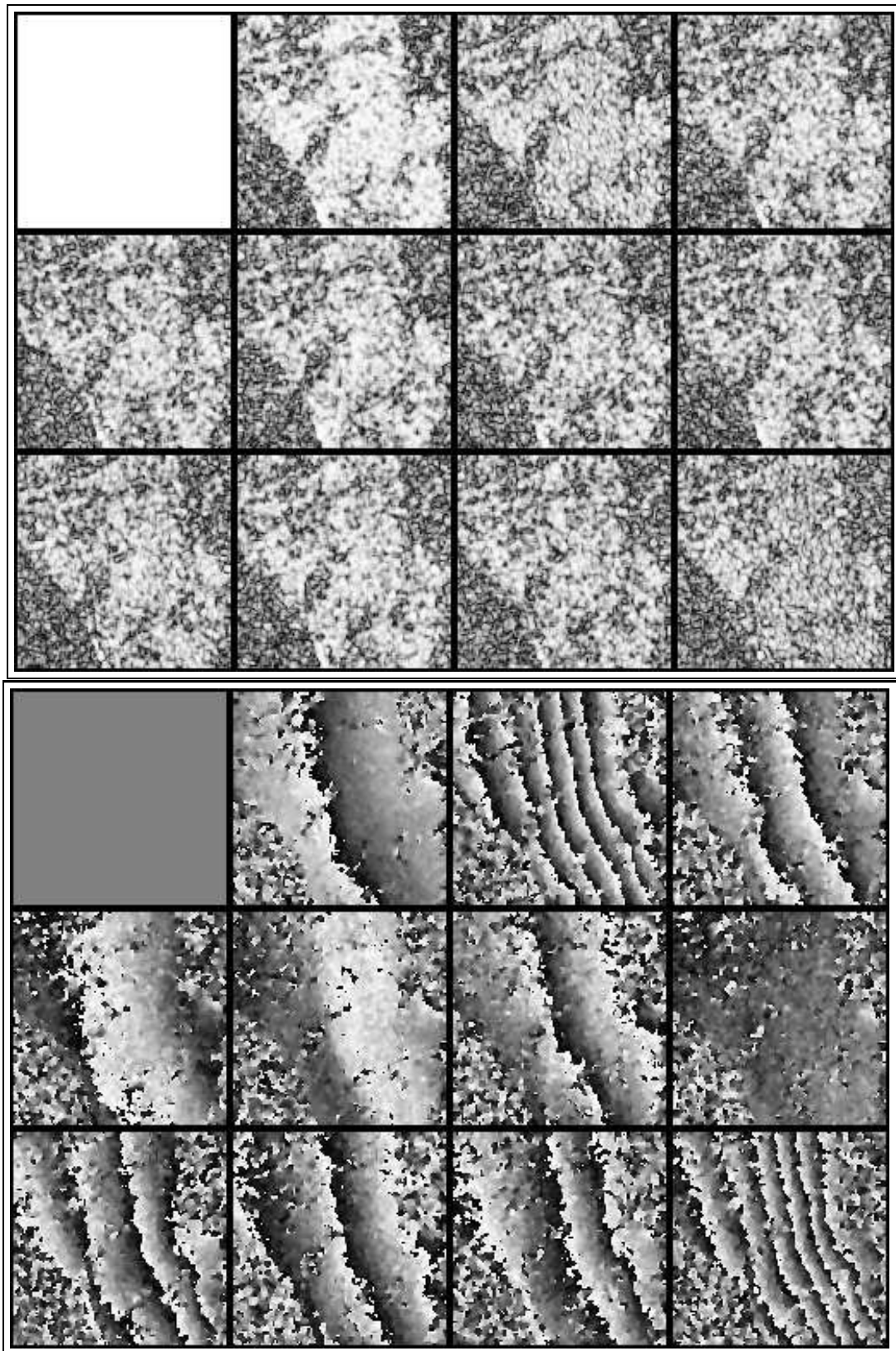


FIG. 22 – Moraine rive droite du glacier d’Argentière. Cohérence sur imagettes extraites d’une séquence de 12 acquisitions Terrasar-X (été 2009). En haut : la cohérence interférométrique (filtre 3×3). En bas, la phase interférométrique (filtre 3×3).

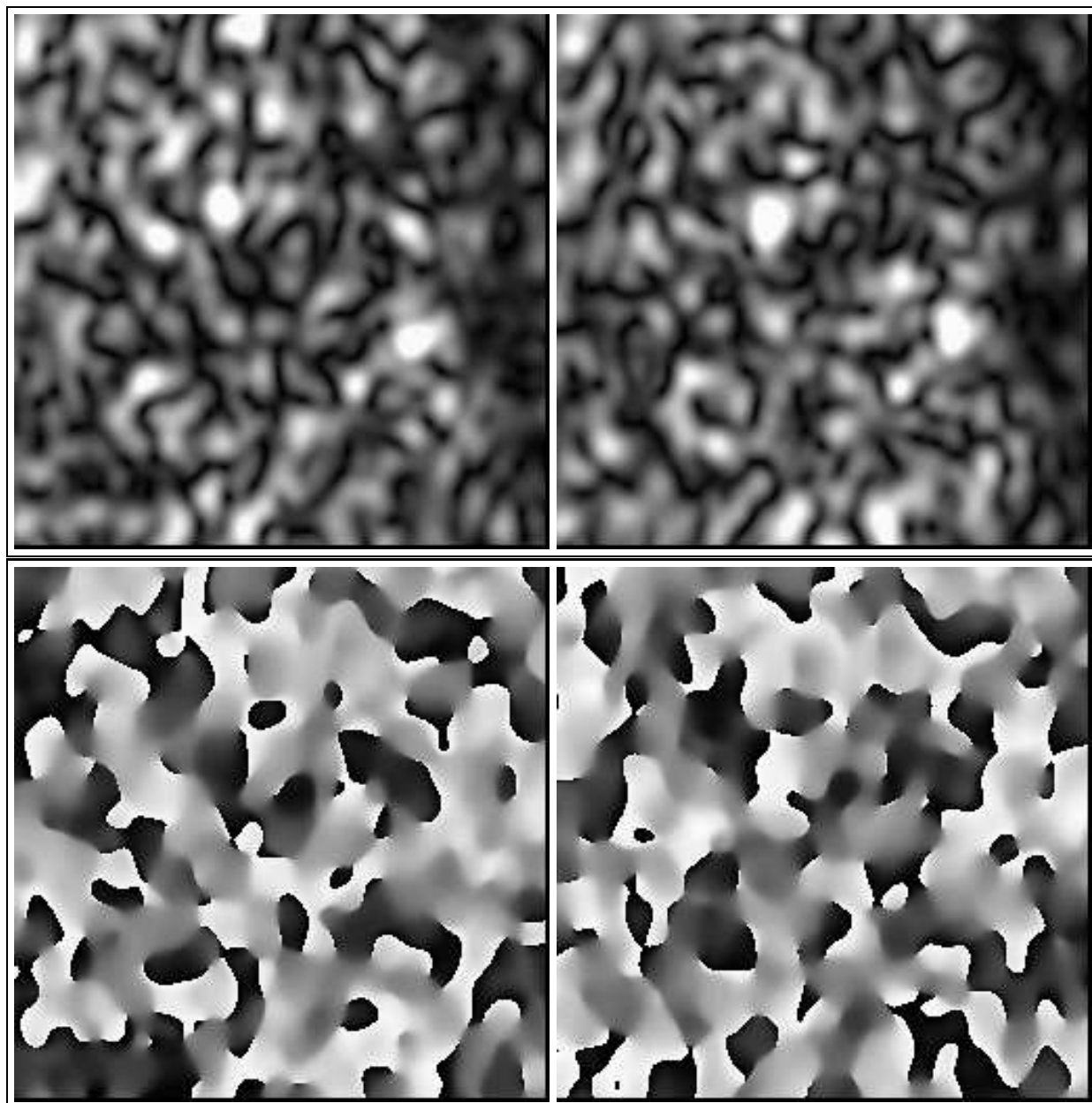


FIG. 23 – Moraine rive droite du glacier d’Argentière. En haut : les imagerie suréchantillonnées d’un facteur 8 (amplitude). En bas, les imagerie suréchantillonnées d’un facteur 8 (phase).

5.4 Analyse des vortex en milieu incohérent

Sur le glacier d'Argentière, au dessus des séracs de Lognan (vers 2000m d'altitude), la température est positive la majeure partie de l'été. Aussi, en l'espace d'un cycle (11 jours), la surface du glacier présente un aspect fondamentalement différent en terme de rétrodiffusion électromagnétique. La figure 24, correspondant à un rééchantillonnage d'un facteur 16, illustre cette instabilité temporelle. Le seul blob visuellement stable est en fait l'écho d'un réflecteur posé sur le glacier : entraîné par le glacier, sa position varie selon les dates :

date	pos Ox	pos Oy	amplitude
14 juillet	2046	2070	1833
25 juillet	2042	2058	1585

La zone étant totalement incohérente, il n'est donc pas étonnant que la phase ne présente aucun motif commun.

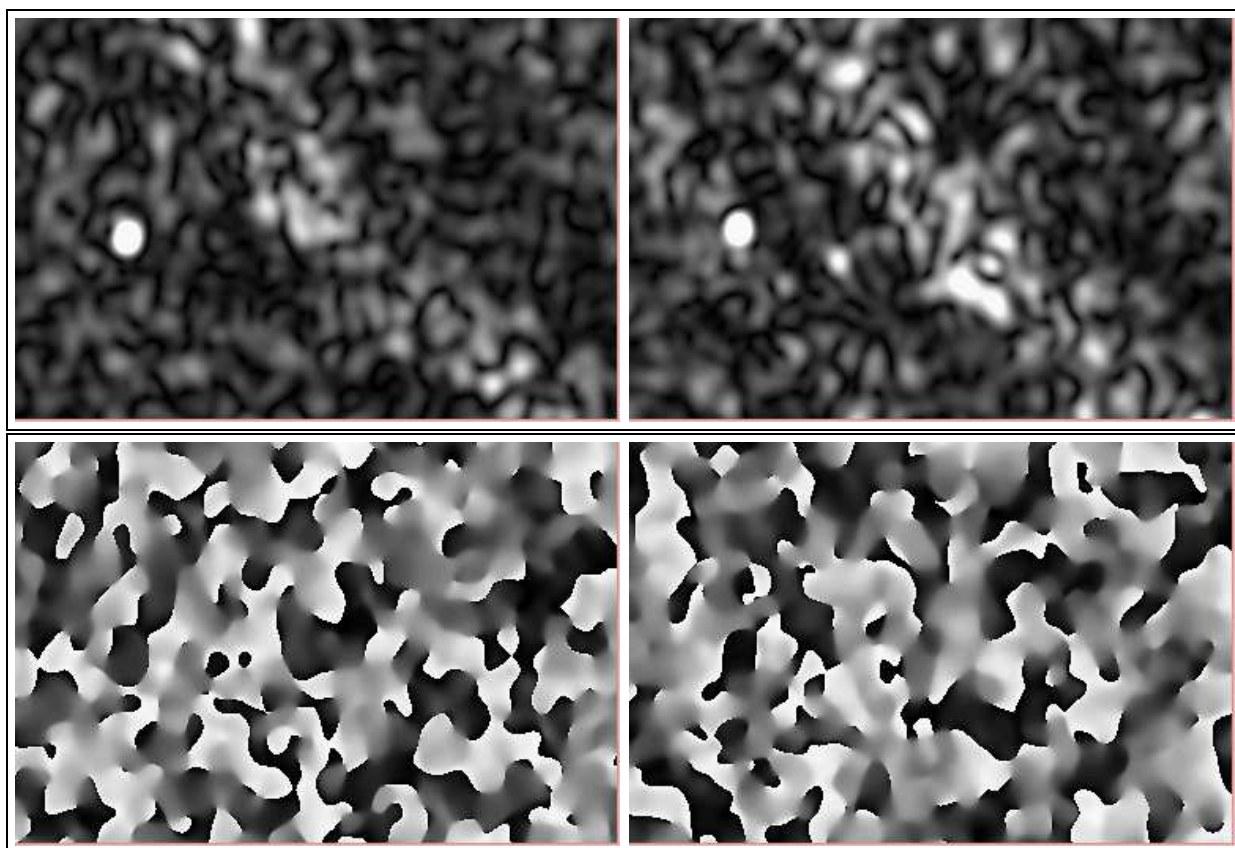


FIG. 24 – Moraine rive droite du glacier d'Argentière. En haut : les imagerie suréchantillonnées d'un facteur 8 (amplitude). En bas, les imagerie suréchantillonnées d'un facteur 8 (phase).

6 Conclusions

On voit ainsi que la notion de **vortex de phase** apporte un éclairage nouveau sur l'analyse et l'interprétation des images RSO (et, de manière plus générale, sur les images complexes en imagerie cohérente). En effet, il semble que les effets du suréchantillonnage sur des images complexes (apparition de **blobs**, structures serpentiformes sombres) sont des conséquences directes de l'existence d'une phase aléatoire et suivant une loi uniforme sur $[0; 2\pi[$, conditions vérifiées par les images fournies par exemple par l'ESA ou le DLR.

L'analyse de points brillants sur les images RSO, qui est l'un des objectifs du sous programme SP1 du projet EFIDIR, peut donc être envisagé sous l'angle du rééchantillonnage. En effet, dans une pile temporelle, un rétrodiffuseur stable dans le temps imposera sa phase et son amplitude de sorte que le **blob** correspondant aura un comportement temporel stable. En revanche, si en un pixel phase et amplitude diffèrent au cours du temps, on ne pourra alors observer de **blobs** stables, hormis exceptions bien évidemment.

Cette première analyse débouche sur plusieurs pistes utilisables en traitement des images, et qui ne sont ici qu'ébauchées :

- Le suivi multitemporel de blobs est une piste innovante pour caractériser des diffuseurs stables : cette recherche automatique fera partie des outils de Magnicos dans sa version finale (livrable 1.5, décembre 2010).
- Une image de cohérence (calculée à partir du produit interférométrique par exemple) est toujours difficile à interpréter car les lois de l'amplitude de la cohérence sont toujours redoutables à analyser correctement (ce sont des fonctions hypergéométriques sur lesquelles l'intuition est souvent prise en défaut). Or il semble qu'il existe des relations entre ce calcul du produit interférométrique et la mesure de la corrélation entre les données en amplitude d'images suréchantillonnées.
- Dans le cas d'un capteur à synthèse d'ouverture (RSO, Sonar, ...), on peut penser qu'en absence de "vrai" signal, le bruit thermique –dont la statistique est identique à celle du speckle– puisse être discriminé. En effet, puisqu'à chaque tir, il est fondamentalement différent, dans une telle zone sur l'image, la statistique des vortex devrait changer par rapport à des zones imagées pour lesquelles il existe toujours une corrélation interpixellique. Quelques premières expérimentations sur des données Terrasar-x (ombre de la chaîne des Fiz) semblent montrer que l'on obtient des résultats différentes en terme de taux de vortex qui semble plus élevé dans les zones d'ombre qu'ailleurs dans l'image. Cependant, il serait peut raisonnable, à ce stade de l'étude, d'en tirer une quelconque généralisation.
- Les points selles sont aussi une piste intéressante car ils caractérisent fortement l'image : on les observe par exemple dans des algorithmes de type "Ligne de Partage des Eaux". Dans ce rapport, quelques expérimentations ont été menées en évaluant le taux de points selles. Il pourrait être instructif d'approfondir cet aspect en recherchant si points selle et vortex de phase peuvent avoir des liens communs.

Des travaux sont en cours sur les images Terrasar-X pour illustrer ces différents aspects.

Ce travail a été effectué dans le cadre du projet EFIDIR (ANR/MDCO/2007).

Les données Terrasar-X ont été utilisées dans le cadre de l'AO MTH_0232.

A Les images Terrasar-X utilisées dans ce rapport

Les données Terrasar-X proviennent de la campagne d'acquisition de l'été 2009 (dans le cadre de l'AO MTH_0232) : 13 images sont ainsi disponibles (bande passante : 100 MHz).

	Base orthogonale
30 mai	0.
11 juin	28.
22 juin	157.
3 juillet	37.
14 juillet	-57.
25 juillet	-16.
5 août	41.
16 août	-12.
27 août	116.
18 septembre	55.
29 septembre	-73.
10 octobre	-178.
21 octobre	-18.

Dans ce rapport, pour de simples problèmes d'affichages (12 imageries seulement sur la figure 19 par exemple), seules les douze premières images ont été utilisées.

Références

- [1] H. Cartan *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, 1961
- [2] M. Dennis *Topological singularities in wave fields*. Phd, University of Bristol, 2001
- [3] J.W. Goodman *Speckle phenomena in optics : Theory and applications..* Roberts & Company, 2007.
- [4] C. Kittel *Introduction à la physique de l'état solide*. Dunod, 1972
- [5] L. Landau et E. Lifchitz *Mécanique des fluides* Mir, Moscou 1971
- [6] D. Massonnet & J.C. Souyris *Imaging with synthetic aperture radar* EPFL Press, 2008

Table des matières

1	Introduction	1
2	Phase et vortex de phase	3
2.1	La phase en imagerie cohérente	3
2.1.1	Principes fondamentaux	3
2.1.2	L'interférométrie	4
2.2	Vortex et résidus	5
2.2.1	Vortex en mécanique des fluides	5
2.2.2	Fonctions analytiques et résidus	6
2.2.3	La notion de dislocation en cristallographie	6
2.2.4	Les singularités topologiques de la phase	7
2.2.5	Phase et dimensionnalité	8
3	Etude des vortex de phase en imagerie cohérente	8
3.1	Vortex de phase en imagerie complexe	8
3.2	Modélisation analytique : phase équadistribuée sur $[0, 2\pi[$	9
3.2.1	Position du problème	9
3.2.2	Loi de différence de phases et loi de différence <i>repliée</i> de phases	10
3.2.3	Cas de 3 pixels	11
3.2.4	Cas de 4 pixels	12
3.3	Modélisation analytique : loi équadistribuée sur $[-\alpha\pi, \alpha\pi[, \alpha \in]0, 1[$	13
3.3.1	Loi de différence de phases et loi de différence <i>repliée</i> de phases	13
3.3.2	Validation sur simulations	14
4	Etude du comportement de la phase	15
4.1	Simulation d'une image complexe avec une phase aléatoire	15
4.1.1	Analyse phénoménologique sur une image réelle "complexifiée"	15
4.1.2	Effets du taux de suréchantillonnage	17
4.1.3	La phase en fonction du facteur d'échantillonnage	19
4.1.4	Les effets d'une rampe de phase (décentrage du spectre)	20
4.1.5	Apodisation : fenêtrage du spectre par une fenêtre carrée	20
4.1.6	Apodisation : fenêtrage du spectre par un cosinus sur piédestal	23
4.1.7	Apodisation : simulation ERS et Terrasar-X	23
4.1.8	Conclusion sur les simulations	25
4.2	Analyse d'images RSO	25
4.2.1	Image Terrasar-X	25
4.2.2	Image ERS	26
5	XimaMagnicos : comment observer localement des "pixels brillants"	27
5.1	Le livrable Magnicos	27
5.2	Analyse de pixels stables : étude d'un bâtiment industriel	27
5.3	Analyse de pixels stables en milieu naturel : zone cohérente	32
5.4	Analyse des vortex en milieu incohérent	35
6	Conclusions	36
A	Les images Terrasar-X utilisées dans ce rapport	37