

## Corrigé : Feuille de travaux dirigés 5

### Solution Exercice 1

1. Le rapport de vraisemblance s'écrivant

$$\phi(Y) = \sqrt{\frac{\det(\Sigma_0)}{\det(\Sigma_1)}} \exp\left(-\frac{1}{2} Y^t (\Sigma_1^{-1} - \Sigma_0^{-1}) Y\right),$$

le test de Neyman Pearson est

$$\mathbb{1}_{\{\phi(Y) \geq t_\alpha\}} = \mathbb{1}_{\left\{Y^t (\Sigma_1^{-1} - \Sigma_0^{-1}) Y \leq 2 \log\left(\sqrt{\frac{\det(\Sigma_0)}{\det(\Sigma_1)}} / t_\alpha\right)\right\}},$$

au niveau  $\alpha$  (le seuil  $t_\alpha$  étant choisi de façon tel que  $\mathbb{P}_{Y \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_0)}\{\phi(Y) \geq t_\alpha\} = \alpha$ ).

2. L'absence de signal correspondant au cas où  $\sigma_X^2 = 0$ , il s'agit de tester l'hypothèse nulle  $H_0 : \sigma_X^2 = 0$  contre l'alternative  $H_1 : \sigma_X^2 > 0$ . En désignant par  $I_n$  la matrice  $n \times n$  unité, on se trouve dans le cadre de la question précédente avec  $\Sigma_0 = \sigma_V^2 I_n$  et  $\Sigma_1 = (\sigma_V^2 + \sigma_X^2) I_n$  et le test de Neyman-Pearson au niveau  $\alpha$  s'écrit

$$\mathbb{1}_{\left\{\sum_{i=1}^n Y_i^2 \geq s_\alpha\right\}},$$

où le seuil  $s_\alpha$  est tel que  $\mathbb{P}_{Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_V^2)}\left\{\sum_{i=1}^n Y_i^2 \geq s_\alpha\right\} = \alpha$ .

3. Sous  $H_0$ , la loi de  $Y_i/\sigma_V$  étant  $\mathcal{N}(0, 1)$ , le seuil est donc  $s_\alpha = \sigma_V^2 q_{1-\alpha}$  où  $q_{1-\alpha}$  désigne le quantile de niveau  $1 - \alpha$  de la loi du chi-deux à  $n$  degrés de liberté.

**Solution Exercice 2** 1. Dans le cas général, la variable aléatoire  $T(X)$  est gaussienne, en tant que combinaison linéaire de gaussiennes. Son espérance est  $\mathbb{E}(\bar{X}_A) - \mathbb{E}(\bar{X}_B) = \mu_A - \mu_B = \Delta$ . Sa variance est (par indépendance) :

$$\text{Var}(T(X)) = \text{Var}(\bar{X}_A) + \text{Var}(\bar{X}_B) = \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) \sigma^2 := \sigma_T^2.$$

Sous l'hypothèse nulle, on a donc  $T(X) \sim \mathcal{N}\left(0, \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) \sigma^2\right) = \mathcal{N}(0, \sigma_T^2)$ .

2. L'argument de la question 1) montre que sous  $\tilde{H}_1$ , avec  $\Delta = \mu_A - \mu_B > 0$ ;  $T(X) \sim \mathcal{N}(\Delta, \sigma_T^2)$  et sous  $H_0$ ,  $T(X) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_T^2)$ . L'observation étant  $T(X)$ , le rapport de vraisemblance s'écrit donc

$$\begin{aligned} Z &= \frac{p_1(T(X))}{p_0(T(X))} = \frac{\exp\left(\frac{-(T(X) - \Delta)^2}{2\sigma_T^2}\right)}{\exp\left(\frac{-T(X)^2}{2\sigma_T^2}\right)} \\ &= \exp\left(\frac{-(T(X) - \Delta)^2 + T(X)^2}{2\sigma_T^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\Delta T(X) - 2\Delta^2}{2\sigma_T^2}\right) \\ &= \Psi(\Delta, T(X)) \end{aligned}$$

où  $t \mapsto \Psi(\Delta, t)$  est une fonction strictement croissante. Le test de Neyman-Pearson basé sur l'observation  $T(X)$  est, d'après le cours, de type

$$\delta(T(X)) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $c$  est tel que  $\mathbb{P}_{\Delta=0}(Z > c) = \alpha = 0.05$ . Or,  $t \mapsto \Psi(\Delta, t)$  étant strictement croissante, pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que

$$Z > c \iff \Psi(T(X), \Delta) > c \iff T(X) > C.$$

Le test de Neyman-Pearson revient donc à comparer  $T(X)$  à un seuil  $C$ . On détermine  $C$  en se souvenant que le test doit satisfaire, sous  $H_0$ ,  $\mathbb{P}(\delta(T(X)) = 1) = \alpha$ , c'est-à-dire  $\mathbb{P}(T(X) > C) = \alpha$ , avec  $T(X) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_T^2)$ ; ou encore  $\mathbb{P}\left(T(X)/\sqrt{\sigma_T^2} > C/\sigma_T\right) = \alpha$  avec  $T(X)/\sqrt{\sigma_T^2} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Cette dernière condition est équivalente à  $C/\sqrt{\sigma_T^2} = q_{\mathcal{N}}(1 - \alpha)$  avec  $q_{\mathcal{N}}(1 - \alpha)$  le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi normale, d'où

$$C = \sqrt{\sigma_T^2} q_{\mathcal{N}}(1 - \alpha) = \sqrt{\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right) \sigma^2} \times q_{\mathcal{N}}(1 - \alpha).$$

3. avec les données de l'énoncé,

$$C = \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right)} \times 1.645 = \sqrt{\frac{7}{12}} \times 1.645 > \sqrt{1/2} \times 1.645 \simeq 1.645/1.414 > 1.$$

D'autre part,

$$T(x) = 13 - 12 = 1,$$

d'où  $T(x) < C$ , et  $\delta(T(x)) = 0$ . On ne rejette pas  $H_0$  contre  $\tilde{H}_1$ .

4. On considère maintenant  $H_0 : \Delta = 0$  contre  $H_1 : \Delta > 0$ . Le modèle pour l'observation  $T(X)$  est  $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \geq 0\}$  avec  $\theta = \Delta$ , et  $P_\theta = \mathcal{N}(\theta, \sigma_T^2)$  avec  $\theta \geq 0$  inconnu,  $\sigma_T^2$  connu. On peut écrire les deux hypothèses :

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 = \{0\}$$

et

$$H_1 : \theta \in \Theta_1 = ]0, \infty[.$$

la région d'acceptation construite à la question 2) ne dépend pas de la valeur de  $\Delta$  et le risque de première espèce est

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(\delta(T(X)) = 1) = \mathbb{P}_{\theta=0}(\delta(T(X)) = 1) = \alpha$$

le test a donc un risque de première espèce égal à  $\alpha$  : c'est un test de niveau  $\alpha$  de  $H_0$  contre  $H_1$ .

5. Il reste à montrer que  $\delta$  est uniformément plus puissant, c'est-à-dire : pour tout autre test  $\delta'$  de niveau  $\alpha$ , pour tout  $\theta \in \Theta_1$ ,

$$R(\theta, \delta') \geq R(\theta, \delta).$$

Soit  $\delta'$  un autre test de niveau  $\alpha$ . Pour tout  $\theta \in \Theta_1$ , le test  $\delta$  construit au 2 est le test de Neyman-Pearson pour les hypothèses simples  $H_0, \tilde{H}_1 = \{\Delta = \theta\}$ . D'après le théorème de Neyman-Pearson, on a bien  $R(\theta, \delta') \geq R(\theta, \delta)$ , ce qu'il fallait démontrer.

### Solution Exercice 3

1. Puisque l'on donne  $s > u$ ,  $g(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X_1 > s) = 1 - F_\theta(s) = (u/s)^\theta$ .
2. d'après le point précédent

$$g(\theta) \leq \rho_0 \iff \theta \log(u/s) \leq \log \rho_0 \iff \theta \geq \theta_0 = \frac{\log \rho_0}{\log(u/s)}$$

(puisque  $\log(u/s) < 0$ )

A.N :  $\theta_0 = \log(1/1000)/\log(1/10) = 3/1 = 3$ .  $g(\theta) = 10^{-\theta}$ .

3. d'après la question 1, en notant  $p_1 = p_{\theta_1}^{\otimes n}$  et  $p_0 = p_{\theta_0}^{\otimes n}$ , le rapport de vraisemblance est

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta_0, \theta_1}(X) &= \frac{p_1(X)}{p_0(X)} = \exp(\log p_1(X) - \log p_0(X)) \\ &= \exp\left(C_n(\theta_0, \theta_1) + (\theta_0 - \theta_1) \sum_{i=1}^n \log(X_i/u)\right) \end{aligned}$$

où  $C_n(\theta_0, \theta_1)$  est une constante ne dépendant pas de  $X$ . Le test de Neyman-Pearson, d'après le cours, est de type  $\delta(X) = \mathbb{1}_{\Phi_{\theta_0, \theta_1}(X) \geq c'}$ . Or,  $\theta_0 > \theta_1$ , donc le rapport de vraisemblance est une fonction strictement croissante de  $W = \sum \log(X_i/u)$ . Il existe donc  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $\Phi_{\theta_0, \theta_1}(X) \geq c' \iff W \geq c$ , d'où le résultat.

4. D'après la question 3., sous  $\tilde{H}_0$ ,  $\theta_0 W \sim \mathcal{Gamma}(n, 1)$ . On a donc

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(\theta_0 W > q_n(1 - \alpha)) = \alpha.$$

*i.e.*

$$\mathbb{P}_{\theta_0}(W > \frac{q_n(1 - \alpha)}{\theta_0}) = \alpha.$$

d'où  $c = \frac{q_n(1 - \alpha)}{\theta_0}$ . Ce test est U.P.P. de niveau  $\alpha$  d'après le cours.

5. Pour  $t > \theta_0$ , on a, sous  $H_0(t)$ ,  $tW \sim \mathcal{Gamma}(n, 1)$ , d'où

$$\mathbb{P}_t(W > c) = \mathbb{P}_t(tW > \frac{t}{\theta_0} q_n(1 - \alpha)) < \mathbb{P}_t(tW > q_n(1 - \alpha))$$

car  $t/\theta_0 > 1$ , et car la densité de la loi Gamma ne s'annulant pas sur  $]0, \infty[$ ,  $\mathbb{P}_t(tW \in [q_n(1 - \alpha), \frac{t}{\theta_0} q_n(1 - \alpha)]) > 0$ .

6. D'après le point précédent, avec  $\Theta_0 = [\theta_0, \infty[$ , on a

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} R(\theta, \delta) = \sup_{\theta \geq \theta_0} \mathbb{P}_\theta(W > c) = \mathbb{P}_{\theta_0}(W > c) = \alpha.$$

Le niveau du test  $\delta$  pour l'hypothèse composite  $H_0$  est donc bien  $\alpha$ . Soit  $\delta'$  un autre test de niveau  $\alpha$  pour  $H_0$ . en particulier,  $R(\theta_0, \delta') \leq \alpha$  donc  $\delta'$  est de niveau  $\alpha$  pour  $\tilde{H}_0$ . Mais on sait que  $\delta$  est U.P.P. pour  $\tilde{H}_0$  donc  $\beta(\theta_1, \delta') \leq \beta(\theta_1, \delta)$ . Ceci étant vrai pour tout autre test  $\delta'$  de niveau  $\alpha$  pour  $H_0$ , le test  $\delta$  est bien U.P.P. pour  $H_0$  contre  $\tilde{H}_1$ .

7. Le raisonnement ci-dessus étant valide pour tout  $\theta_1 < \theta_0$ , on a bien, pour tout autre test  $\delta'$ , pour tout  $\theta_1 \in \Theta_1$ ,  $\beta(\theta_1, \delta') \leq \beta(\theta_1, \delta)$ . Le test  $\delta$  est donc U.P.P de niveau  $\alpha$  pour tester  $H_0$  contre  $H_1$ .