MOOC FLIRT.

2018

Rappels sur l'analyse des signaux.

G. Rodriguez-Guisantes.

I Représentation des signaux.

Les systèmes de communications traitent des signaux de type très différents. Pour bien comprendre le fonctionnement de ces systèmes il nous faut des outils d'analyse adaptés aux types de signaux. Les signaux de communication peuvent être classifiés en trois groupes selon leurs propriétés:

1. Signaux *périodiques* et *non-périodiques*. Un signal périodique vérifie la condition:

   $$x(t) = x(t + T_o)$$

   avec T_o la période du signal x(t). Exemple: $x(t) = cos(\omega t)$. Tout signal qui ne vérifie pas cette condition est *non-périodique*.

2. Signaux déterministes et aléatoires. Un signal déterministe est connu sans aucune ambiguïté (passé, présent et futur) et à partir de la connaissance du signal à un instant donné, on peut prédire parfaitement sont futur. Un signal aléatoire au contraire est caractérisé par une incertitude. Son histoire (passé-futur), ne peux pas être déterminer avec exactitude même avec une parfaite connaissance du présent.

3. Signaux à énergie finie et à puissance finie. Dans un système électrique un signal peut représenté une tension en Volts ou un courant en Ampères. Considérons une tension $v(t)$ appliquée aux bornes d'une résistance parfaite R par laquelle circule en conséquence un courant $i(t)$. La puissance instantanée, ou, selon certains auteurs, la *densité d'énergie* par unité de temps, dissipée par la résistance vaut:

   $$p(t) = \frac{|v(t)|^2}{R}$$

   ou de manière équivalente:

   $$p(t) = R|i(t)|^2$$

En général on normalise la résistance à 1Ω de telle façon que peut importe s'il s'agit d'un signal de tension ou courant. La puissance instantanée *normalisée* vaut:

$$p(t) = |x(t)|^2$$

À partir de cette puissance instantanée normalisée, on défini l'*énergie totale* du signal $x(t)$:

$$E = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \, dt$$

La *puissance moyenne* P du signal $x(t)$ vaut donc:

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \, dt$$

On dit que $x(t)$ est un signal à énergie finie si:

$$0 < \varepsilon < +\infty$$

On dit qu'il est à *puissance finie* si:

$$0 < P < +\infty$$

En principe il-y-a plusieurs façons de représenter les signaux dans les systèmes de télécommunications. En pratique la représentation basée sur l'analyse de Fourier s'avère la plus utile. La décomposition en différentes oscillations sinusoïdales superposées facilite la tâche de l'ingénieur en télécomms. Sa puissance est basée sur deux propriétés très importantes des systèmes de télécomms: la *linéarité* et l'*non variabilité dans le temps*.

II Analyse de Fourier.

Soit $g(t)$ déterministe non-périodique d'énergie finie.

A Transformation de Fourier.

$$G(f) = TF\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \mathrm{e}^{-j2\pi f t} \, dt$$

B Transformation Inverse de Fourier

$$g(t) = TF^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, \mathrm{e}^{j2\pi f t} \, df$$

C Paire transformée de Fourier

$$g(t) \rightleftharpoons G(f)$$

D Propriétés de la TF.

Soient $g(t) \rightleftharpoons G(f)$. Alors la TF vérifie les propriétés suivantes:

D.1 Linéarité.

a, b constantes.

$$ag_1(t) + bg_2(t) \rightleftharpoons aG_1(f) + bG_2(f)$$

D.2 Facteur temporel.

$a \neq 0$ une constante

$$g(at) \rightleftharpoons \frac{1}{|a|} G(\frac{f}{a})$$

D.3 Dualité.

$$g(t) \rightleftharpoons G(f) \Longleftrightarrow G(t) \rightleftharpoons g(-f)$$

D.4 Décalage temporel.

$$g(t - t_0) \rightleftharpoons G(f).\exp(-j2\pi f t_o)$$

D.5 Décalage fréquentiel.

$$\mathrm{e}^{-j2\pi f_c t}\, g(t) \rightleftharpoons G(f - f_c)$$

D.6 Intégrale de $g(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = G(0)$$

D.7 Intégrale de $G(f)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\, df = g(0)$$

D.8 Dérivée dans le temps.

$$\frac{d}{dt} g(t) \rightleftharpoons j2\pi f G(f)$$

D.9 Intégrale dans le temps.

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\, d\tau \rightleftharpoons \frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{G(0)}{2}\delta(f)$$

D.10 Conjugué.

$$g^*(t) \rightleftharpoons G^*(-f)$$

D.11 Produit dans le temps.

$$g_1(t).g_2(t) \rightleftharpoons \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda) G_2(f-\lambda)\, d\lambda = G_1(f) \star G_2(f)$$

L'opérateur $\star$ indique le produit de convolution.

D.12 Convolution dans le temps.

$$g_1(t) \star g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t-\tau)\, d\tau \rightleftharpoons G_1(f).G_2(f)$$

D.13 Théorème de Parseval.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|g(t)\right|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|G(f)\right|^2\, df$$

E Échantillonnage.

L'échantillonnage et ses applications, sont d'une importance capitale pour le traitement du signal et les systèmes de communications. La théorie du processus d'échantillonnage est traitée dans pratiquement tous les bouquins de traitement du signal. Nous nous limiterons ici à rappeler rapidement le *théorème de l'échantillonnage* et à donner une interprétation du point de vue des communications.

E.1 Le théorème de l'échantillonnage.

un signal $g(t)$ qui a un spectre $G(f)$ limité à B Hz. ($G(f) = 0\ \forall |f| > B$), peut être reconstruit exactement (ça veut dire "sans erreur") à partir d'une suite d' échantillons de $g(t)$ pris uniformément à une fréquence au moins égale à $2B$ échantillons par seconde.

On appelle f_S la fréquence d´ échantillonnage qui vérifie donc la contrainte:

$$f_S \geq 2B$$

L'intervalle entre deux échantillons vaut:

$$T_S = \frac{1}{f_S} \leq \frac{1}{2B}$$

La fréquence d' échantillonnage minimale $f_S^\star = 2B$ est appelée *fréquence de Nyquist* et l' intervalle d'échantillonnage correspondant $T_S^\star = \frac{1}{2B}$ est appelé *intervalle de Nyquist*.

E.2 La formule de reconstruction.

Le processus de reconstruction du signal $g(t)$ à partir des échantillons pris tous les T_S secondes est connu comme *interpolation*. La formule d'interpolation établi le lien entre $g(t)$ et les échantillons $g(kT_S)$ où k est un entier et T_S l' intervalle entre deux échantillons consécutifs qui vérifie les conditions du théorème de l'échantillonnage. Cette formule de reconstruction établi:

$$g(t) = \sum_k g(kT_S) sinc(2B(t - kT_S)),$$

avec

$$sinc(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

La mise en œuvre d'un tel re-constructeur peut être faite par filtrage linéaire.

F Systèmes linéaires.

Un **système** est un dispositif qui produit un signal de sortie en réponse à un signal d'entrée. Le signal d'entrée s'appelle en général **excitation**. Le signal de sortie s'appelle **réponse** du système. Un système qui vérifie le **principe de superposition** s'appelle **linéaire**. Selon le principe de superposition, la réponse d'un système à un ensemble d'excitations appliquées simultanément (superposées), est égale à la somme des réponses de chaque excitation appliquée individuellement. Des exemples de systèmes linéaires sont les **filtres** et les **canaux de communication**. On appelle **réponse impulsionnelle** d'un système la réponse lorsque un **delta de Dirac** $\delta(t)$ est appliqué à l'entrée du système. Un système est appelé invariant dans le temps, si la réponse impulsionnelle est la même indépendamment de l'instant d'application d'une excitation en delta de Dirac en entrée du système. Un système linéaire invariant dans le temps est défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. Si une excitation $x(t)$ est appliquée en entrée d'un système avec réponse impulsionnelle $h(t)$, alors la réponse $y(t)$ du système vaut:

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau$$

Un système est **causal** s'il ne répond pas avant que l'excitation soit appliquée. La condition de causalité se traduit par:

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

Un système est **stable** si la réponse est bornée pour une excitation bornée. La condition de stabilité peut s'exprimer de la façon suivante:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| \, d\tau < \infty$$

On appelle **fonction de transfert** d'un système la TF de sa réponse impulsionnelle.

$$H(f) = TF\{h(t)\}$$

On appelle **réponse en fréquence** d'un système la TF de la réponse $y(t)$ produite par une excitation $x(t)$. On peut facilement prouver la relation suivante:

$$Y(f) = TF\{y(t)\} = H(f)X(f) = TF\{h(t) \star x(t)\}$$

En général $H(f)$ est une fonction complexe qui peut s'exprimer en notation polaire sous la forme:

$$H(f) = \left|H(f)\right| \exp(j\,\beta(f))$$

$\left|H(f)\right|$ s'appelle **réponse en amplitude** (ou tout simplement **amplitude**) et $\beta(f)$ s'appelle **réponse de phase** (ou plus simplement **phase**) du système[1].

III Transformation de Hilbert.

Soit $g(t)$ un signal avec TF $G(f)$.

A Transformation de Hilbert.

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} \, d\tau$$

B Transformation Inverse de Hilbert.

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{g}(\tau)}{t-\tau} \, d\tau$$

C Paire transformée de Hilbert.

$$\widehat{g}(t) \overset{H}{\rightleftharpoons} g(t)$$

[1] Ces fonctions sont aussi appelées **caractéristique d'amplitude** et **caractéristique de phase**.

D Propriétés de la TH.

D.1 TF d'une paire de TH

$$\widehat{g}(t) \stackrel{H}{\rightleftharpoons} g(t)$$

La TH peut être interprétée comme la convolution de $g(t)$ avec le signal $\frac{1}{\pi t}$. La TF de $\frac{1}{\pi t}$; vaut:

$$\frac{1}{\pi t} \rightleftharpoons -j\ sig(f)$$

avec $sig(f)$ = fonction signe.

Donc la TF de $\widehat{g}(t)$ vaut:

$$\widehat{G}(f) = TF\{\widehat{g}(t)\} = -j\ sig(f)\ G(f)$$

D.2 Caractéristique d'amplitude.

Un signal $g(t)$ et sa $TH\{g(t)\} = \widehat{g}(t)$, ont la même caractéristique d'amplitude.

D.3 Involution de la TH.

$$TH\{TH\{g(t)\}\} = -g(t)$$

D.4 Orthogonalité.

$$g(t) \perp \widehat{g}(t)$$

ce qui est équivalent à:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widehat{g}(t)\,dt = 0$$

E Signal analytique.

Soit $x(t)$ un signal réel. On défini le *signal analytique* $z_x(t)$ associé à $x(t)$ comme étant le signal:

$$z_x(t) = x(t) + jTH\{x(t)\}$$

Commentaire trivial mais qui sera très utilisé pour représenter les signaux modulés linéairement (en particulier les signaux à *Bande Latérale Unique*, de la définition même de signal analytique on déduit:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z_x(t)\}$$

donc $z_x(t)$ contient la même information que $x(t)$. Il s'agit tout simplement d'une autre représentation du signal $x(t)$. L'importance d'une telle représentation peut être vue dans le domaine de la fréquence. Calculons la TF du signal analytique $z_x(t)$.

$$Z_x(f) = TF\{z_x(t)\} = x(t)\} = TF\{x(t)\} + jTF\{TH\{x(t)\}\}$$

Puisque

$$TF\{TH\{x(t)\}\} = -j\ sig(f)\ X(f)$$

on en déduit

$$Z_x(f) = X(f) + j(-jsig(f)X(f)) = (1 + sig(f))X(f)$$

Conséquence intéressante: pour les fréquences négatives $Z_x(f) = 0$ donc le signal analytique n'a pas de composantes à fréquences négatives! D'autre part pour les fréquences positives $Z_x(f) = 2X(f)$ et l'énergie totale de $z_x(t)$ et la même que celle de $x(t)$.

F Représentation canonique des signaux à bande étroite.

Un signal réel $x(t)$ est dit à *bande étroite* si sa TF est nulle au-delà de l'intervalle $f_1 < |f| < f_2$. Un tel signal peut être considéré comme un signal centré autour d'une fréquence f_0 dite *fréquence porteuse*. En général la largeur de bande de ce signal ($B = f_2 - f_1$) vérifie la condition B«f_0, d'où le nom *signaux à bande étroite*. On peut représenter le signal $x(t)$ centré autour de f_0 par un signal qui soit indépendant de la fréquence porteuse. Soit $z_x(t)$ le signal analityque associé à $x(t)$. À partir de $z_x(t)$ construisons un signal $\alpha_x(t)$ tel que la TF de $\alpha_x(t)$ soit une version translatée de $-f_0$ de $Z_x(f)$. $\alpha_x(t)$ a donc une TF qui vaut:

$$A_x(f) = Z_x(f + f_0)$$

$\alpha_x(t)$ a la même largeur de bande que $z_x(t)$ mais au lieu d'être centrée autour de la fréquence porteuse, elle est centrée autour de la fréquence 0, donc il s'agit d'un signal en bande de base. En appliquant la propriété de modulation de la TF, $\alpha_x(t)$ peut s'écrire de la façon suivante:

$$\alpha_x(t) = z_x(t)\ \mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t}$$

$\alpha_x(t)$ s'appelle *enveloppe complexe* du signal réel à bande étroite $x(t)$.

On peut écrire $x(t)$ en fonction de son enveloppe complexe grâce à la relation:

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z_x(t)\} = \mathrm{Re}\{\alpha_x(t)\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\}$$

À partir de la décomposition de $\alpha_x(t)$ en partie réelle et imaginaire on peut donner deux représentations des signaux à bande étroite, dites *représentation canonique*:

1. *Décomposition en phase et en quadrature.*

   Posons:

$$\alpha_x(t) = p(t) + jq(t)$$

   Alors $x(t)$ vaut:

$$x(t) = p(t) cos 2\pi f_0 t - q sin 2\pi f_0 t$$

   $p(t)$ et $q(t)$ sont appelés respectivement *composante en phase* et *composante en quadrature*. Il s'agit des signaux à basse fréquence et peuvent s'écrire en fonction de l'enveloppe complexe sous la forme suivante:

$$p(t) = \mathrm{Re}(\alpha_x(t)) = \frac{1}{2}\ ((\alpha_x(t) + (\alpha_x^*(t))$$
$$q(t) = \mathrm{Im}(\alpha_x(t)) = \frac{1}{2j}\ ((\alpha_x(t) - (\alpha_x^*(t))$$

   Leurs TF respectivent s'écrivent:

$$P(f) = TF\{p(t)\} = \frac{1}{2}\ (A_x(f) + A_x^*(-f))$$
$$Q(f) = TF\{q(t)\} = \frac{1}{2}\ (A_x(f) - A_x^*(-f))$$

2. *Décomposition en module et phase.*

   Posons:

$$\alpha_x(t) = a(t)\mathrm{e}^{j\phi(t)}$$

   Dans ce cas *a(t)* et appelé *enveloppe instantanée* et $\phi(t)$ *phase instantanée.* À partir de cette expression on peut représenter le signal $x(t)$ sous la forme suivante:

$$x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$$

   Les relations traditionnelles entre représentation cartésienne et polaires pouvant être appliquées, en obtient:

$$a(t) = \sqrt{p^2(t) + q^2(t)}$$

$$\phi(t) = \mathrm{atan}\frac{q(t)}{p(t)}$$

À partir de ces définitions on appelle *fréquence instantanée*:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

Cette définition sera particulièrement utile lors de l'étude de la modulation de fréquence.

IV Signaux aléatoires.

Les signaux que l'on retrouve dans les systèmes de télécommunications sont des signaux aléatoires. Ces signaux présentes deux propriétés: *i*) ils sont des fonctions du temps dans un intervalle de durée finie et *ii*) ces signaux sont aléatoires dans le sens ou on ne peut pas prédire exactement leur futur. Ces signaux sont appelés **processus aléatoires(PA)**. Ils pourront être caractérisés d'un point de vue statistique. Dans la suite on décrira un PA sous la forme:

$$X(t,s)$$

t étant la variable temps et s une variable aléatoire élément d'un ensemble S. Si l'on fixe la valeur de s, on obtient une fonction du temps appelée **réalisation** du PA. Si l'on fixe le temps on obtient une variable aléatoire avec une certaine distribution de probabilité. La description statistique du PA est basée sur la connaissance de la distribution de probabilité conjointe

$$F_{X(t_1),X(t_2),X(t_3),\ldots,X(t_k)}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_k)$$

On dit que le PA est **stationnaire** si sa distribution de probabilité conjointe est indépendante de $t_i, \forall i$. Les propriétés statistiques sont les mêmes à tout instant de temps. On dit que dans ce cas le PA est **stationnaire au sens strict**.

En général on ne peut pas connaître la distribution conjointe et on se contente d'avoir certains de ses moments (jusqu'à l'ordre 2 par exemple). Si certains de ces moments sont indépendants du temps, on dit que le PA est **stationnaire au sens large**.

Mais comment calculer la moyenne (moment d'ordre 1) d'un PA stationnaire au sens large sans connaître la distribution conjointe? La réponse a cette question s'appelle **ergodicité**. Pour comprendre cette idée supposons un PA $x(t)$ avec moyenne statistique μ_X connue, définie par:

$$\mu_x = E[x(t)]$$

Soit $\tilde{x}(t)$ une réalisation d'un PA $x(t)$. On appelle **moyenne temporelle** de $\tilde{x}(t)$ dans l'intervalle $[-T;T]$:

$$\mu(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \tilde{x}(t)\, dt$$

On peut considérer $\mu(T)$ comme une **estimation** de la moyenne statistique μ_X. On dit que le PA est **ergodique** si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1. $$\lim_{T\to\infty} \mu(T) = \mu_X$$

2. $$\lim_{T\to\infty} \mathrm{var}[\mu(T)] = 0$$

Dans ce cas les moyennes temporelles et statistiques coïncident et on peut connaître les caractéristiques statistiques en calculant les moyennes temporelles sur une réalisation du PA.

Dans le point suivant on verra une caractérisation énergétique des PA.

V Caractérisation énergétiques des signaux.

A Signaux à puissance finie.

On considère les signaux d'énergie finie dans un intervalle de durée finie 2T, mais d'énergie infinie dans un intervalle de durée infinie.

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt < +\infty$$

avec

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt \to +\infty$$

Par contre la puissance moyenne (énergie moyenne par unité de temps)

$$P \triangleq \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt < +\infty$$

est finie. Dans la suite on considérera que des signaux à puissance moyenne finie.

B Fonction d'auto-corrélation d'un signal déterministe.

On appelle *fonction d'auto-corrélation* d'un signal déterministe $x(t)$:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t).x(t-\tau)dt$$

Selon cette définition on peut conclure que la puissance du signal $x(t)$ vaut:

$$P = R_{xx}(0).$$

C Fonction d'auto-corrélation d'un processus aléatoire.

On appelle *fonction d'auto-corrélation* d'un processus aléatoire $x(t,s)$ stationnaire:

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t,s), x(t-\tau,s)]$$

La puissance du processus aléatoire $x(t)$ vaut donc:

$$P = R_{xx}(0) = E[x(t,s), x(t,s)] = \sigma^2_{xx}$$

D Densité Spectrale de Puissance.

On appelle *densité spectrale de puissance* $S_{xx}(f)$ (DSP) d'un signal (processus) $x(t)$ $(x(t,s))$ la transforma -tion de Fourier de sa fonction d'autocorrélation.

$$S_{xx}(f) = TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Selon cette définition la puissance P de $x(t)$ $(x(t,s))$ peut être calculée à partir de sa DSP de la façon suivante:

$$P = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

E PA et systèmes linéaires. Formule de Wiener-Kitchine.

Soit $y(t)$ la réponse d'un système linéaire invariant dans le temps avec caractéristique de transfert $H(f)$, à l'excitation produite par un PA $x(t,s)$ stationnaire avec DSP $S_{xx}(f)$. Alors la DSP de $y(t)$ (soit $S_{yy}(f)$) vaut:

$$S_{yy}(f) = \|H(f)\|^2 \, S_{xx}(f)$$

VI Bruit.

On appelle **bruit** les signaux non souhaités qui brouillent d'une façon générale les signaux émis dans un système de communication. On n'as pas de contrôle sur ce genre de signaux et les effets de cette perturbation réduisent la qualité de la transmission. Le bruit peut avoir des source différentes et très variées. En général on peut les classifier en deux catégories:

1. les sources externes, telles que le bruit galactique, le bruit atmosphérique ou le bruit généré par l'homme;

2. les sources internes produites par les fluctuations aléatoires du courant ou la tension dans les dispositifs électroniques qui font partie des émetteurs et des récepteurs. Dans ce type de bruit on trouve le bruit impulsif et le bruit thermique.

A Bruit thermique.

Le bruit thermique est le résultats du mouvement des électrons dans un conducteur. La valeur quadratique moyenne de la tension générée entre les bornes d'une résistance de R Ω, dans une largeur de bande Δf et qui se trouve à une température de T degrés Kelvin, est donnée par l'expression:

$$E[V_N^2] = 4kTR\Delta f \ volts^2$$

où $k = 1.38\ 10^{-23} Joules/kelvin$ est la constante de Boltzmann. En conditions d'adaptation, la puissance de bruit disponible vaut:

$$P = kT\Delta f$$

La densité spectrale de puissance S vaut dans ce cas:

$$S = \frac{P}{\Delta f} = kT$$

Dans ce cas la DSP est indépendante de la fréquence. On dit que le bruit est **blanc** (comme pour la lumière blanche toutes les composantes spectrales sont présentes avec la même puissance). On peut donc écrire pour le bruit blanc:

$$S_{NN}(f) = \frac{N_0}{2} \ \ \forall f \in [-\infty;\infty]$$

où $N_0 = kT$.