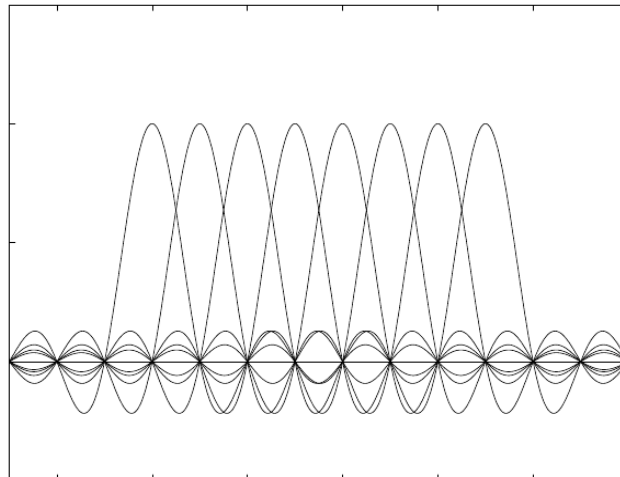




## L'OFDM. 2015<sup>1</sup>

Georges Rodriguez-Guisantes  
Dépt. COMELEC



---

<sup>1</sup>Dernière mise à jour : janvier 2015

## L'OFDM.

### I Introduction

**A**BANDONNÉES depuis très longtemps, à cause de la complexité de leur mise en oeuvre, les techniques multiporteuses (*Multi Carrier Modulation*, **MCM** dans la suite) sont devenues le choix stratégique de plusieurs systèmes numériques modernes. Les propriétés spectrales, ainsi que les débits de transmission très élevés, les rendent particulièrement intéressantes pour les systèmes de communication *wireless*.

À la base l'idée de la transmission multiporteuse est très simple : on divise le flux de bits de source en plusieurs sous-flux, et on envoie chaque sous-flux dans un canal différent. Les sous-canaux de transmission utilisent des signaux orthogonaux, lesquels, sous une condition de canal idéal, peuvent être facilement récupérés en réception. La largeur de bande de chaque sous-canal est beaucoup plus petite que la largeur de bande totale disponible et en conséquence le débit de transmission dans chaque sous-canal, est plus faible que le débit total. Le nombre de sous-canaux est choisi de sorte qu'il soit plus petit que la bande de cohérence du canal : chaque sous-canal est soumis à un *flat fading*. Ainsi l'interférence entre symboles dans chaque sous-canal est faible. Les sous-canaux ne sont pas nécessairement contigus, donc on peut récupérer des « bouts » de spectre éliminant le besoin d'une trop large bande. Aujourd'hui le **MCM** peut être totalement réalisé en numérique grâce aux algorithmes de transformée discrète de Fourier (**DFT**), qui sont à l'origine de l'**OFDM**.

Les techniques **MCM** ne sont pas nouvelles. Utilisées pour des applications militaires en HF à la fin des années 50, début des 60 (une référence). Début des années 90[?], on les retrouve dans plusieurs systèmes câblés et *wireless* : le **DAB** et le **DVB** en Europe[?][?], l'**ADSL**[?] et plus récemment dans les systèmes de réseaux locaux sans fil **WLAN**[?][?].

Résumé historique à suivre...

### II Transmission avec porteuses multiples

L'idée fondamentale d'un système **MCM** est de rendre le temps de symbole beaucoup plus grand que le *delay spread* du canal, de sorte de pouvoir éliminer l'IES :

$$T \gg T_m.$$

Soit un système de débit  $D$  b/s qui dispose d'une bande passante de  $B$  Hz. Supposons que

$$B > B_c,$$

c'est à dire que nous sommes en présence d'un *fading* sélectif en fréquence. Décomposons le système en  $N$  sous-systèmes en parallèle, chacun d'entre eux, linéairement modulés sur une bande passante,

$$B_N = \frac{B}{N},$$

transporte un débit,

$$D_N = \frac{D}{N}.$$

Pour un  $N$  suffisamment grand, on aura :

$$B_N \ll B_c,$$

et en conséquence chaque sous-canal "perçoit" un *flat fading* . On peut réaliser le même type de considération dans le temps :

$$T_N = \frac{1}{B_N}.$$

Si

$$T_N \gg \frac{1}{B_c} = T_m,$$

alors chaque sous-canal ne présente pas d'IES. La figure 1, représente cette situation.



Figure 1: Les effets de  $T_m$ .

La figure 2 représente un schéma du modulateur **MCM** .

Le flux binaire à taux  $R$  b/s est divisé en  $N$  sous-flux binaires de  $R/N$  b/s. Chaque flux est transformé par un modulateur  $\Pi_s$  à  $M$  états (typiquement une modulation **M-QAM**), pour créer des symboles complexes  $s_i$ . Une filtre de mise en forme en bande de base  $g(t)$ , typiquement un filtre de Nyquist, transforme les symboles en signal en bande de base. Chaque symbole  $s_i$  est transposé autour de la fréquence  $f_i$ . La séparation entre les  $N$  fréquences  $f_i$  est choisi pour que l'ensemble soit orthogonal. Le filtre de Nyquist a une largeur de bande  $B_N$ . Le temps de chaque symbole est donc :

$$T_N = \frac{(1 + \beta)}{B_N},$$

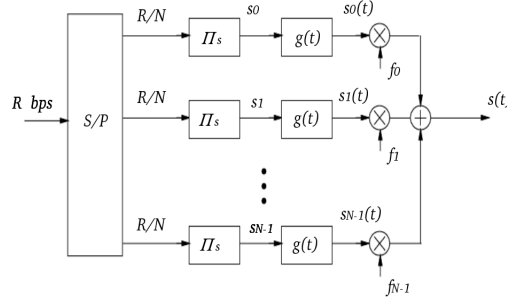


Figure 2: Modulateur **MCM** .

où  $\beta$  est le *roll-off* du filtre de Nyquist. Les spectres ne se chevauchent pas et en conséquence la largeur de bande totale du signal vaut :

$$B = N.B_N$$

Le signal transmis s'écrit donc sous la forme :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{N-1} s_i g(t) \cos(2\pi f_i t + \phi_i),$$

les fréquences  $f_i$  vérifient :

$$f_i = f_0 + iB_N.$$

La limitation en temps des impulsions en Nyquist  $g(t)$  imposent une pénalité en fréquence qui s'exprime généralement sous la forme d'un excès de *roll-off*,  $\xi$ . La largeur de bande ainsi occupée vaut:

$$B = N(1 + \beta + \xi)B_N.$$

La figure 3 représente le spectre du signal transmis et les effets du canal sélectif en fréquence (en pointillé) sur l'ensemble des porteuses. La condition  $B_N \ll B_c$ , assure la réduction de l'IES dans chaque sous-flux de symboles. Chaque sous-canal est soumis à un *flat fading* .

La figure 4 représente le receveur **MCM** correspondant.  $N$  filtres

Cette technique est spectralement très inefficace. On peut réduire la largeur de bande totale en "serrant" les porteuses entre elles. Dans la mesure où la condition d'orthogonalité est respectée, on peut réduire l'espacement entre porteuses sans compromettre la démodulation. Il est simple de prouver que l'ensemble

$$\left\{ \cos\left(2\pi\left(f_0 + \frac{i}{T_N}t + \phi_i\right)\right) \right\} \quad i = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

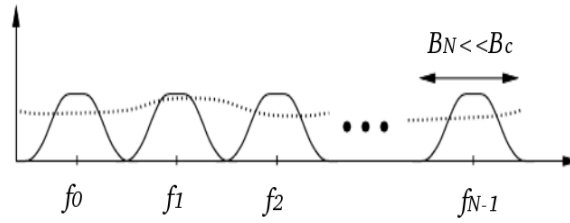


Figure 3: Spectre du signal **MCM** transmis et les effets du canal sélectif.

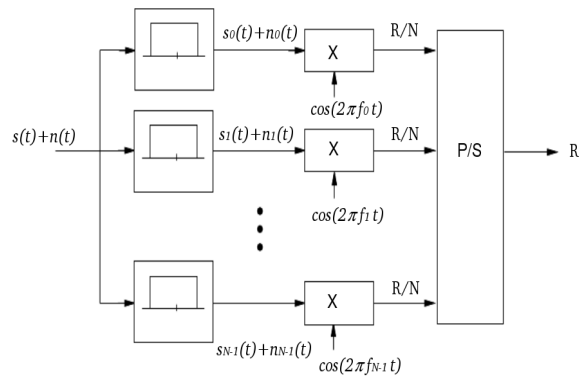


Figure 4: Démodulateur **MCM** .

est orthogonal dans l'intervalle  $[0, T_N]$ . En réalité on peut prouver que  $1/T_N$  est l'intervalle minimal de séparation des porteuses qui rend l'ensemble orthogonal.

Supposons  $g(t)$  un cosinus surélevé avec *roll-off*  $\beta$ , donc :

$$B_N = (1 + \beta) \frac{1}{T_N},$$

mais si on superpose les spectres, on peut séparer les porteuses de  $1/T_N$ . On a donc une largeur de bande totale du signal modulé qui vaut :

$$B = \frac{1}{2}(\beta + \xi) \frac{1}{T_N} + N \cdot \frac{1}{T_N} + \frac{1}{2}(\beta + \xi) \frac{1}{T_N} = \frac{N + \beta + \xi}{T_N} \approx \frac{N}{T_N}.$$

La superposition permet de réaliser des économies importantes de bande passante. L'exemple suivant illustre cette situation.

**Exemple 1** Soit un système MCM avec  $T_N = 0.1 \text{ ms}$ , qui fonctionne avec  $N = 256$ . On utilise un filtre de mise en forme en bande de base en cosinus surélevé avec  $\beta = 0.22$ . Pour assurer une impulsion limitée en temps on élargit la bande d'un excès de *rolloff*  $\xi = 0.05$ . La largeur de bande totale vaut :

$$B = \frac{N(1 + \beta + \epsilon)}{T_N} = \frac{256 \cdot (1 + 0.22 + 0.05)}{0.00001} = 3.136 \text{ MHz}.$$

Maintenant, si on utilise des canaux superposés :

$$B = \frac{N + \beta + \epsilon}{T_N} = \frac{256 + 0.22 + 0.05}{0.00001} = 2.562 \text{ MHz}.$$

Ceci représente une économie de l'ordre de 20%. La figure 5 montre la structure du récepteur dans le cas où les porteuses sont superposées (filtres adaptés à la place des filtres passe-bande).

### III Les effets du *fading* sur les systèmes multipor- teuses

Comme vu, chaque sous-porteuse est soumise à un *flat fading*. Chaque porteuse aura un taux d'erreur qui dépendra du coefficient d'atténuation  $\alpha_i$  et de la puissance  $P_i$  attribuée à cette porteuse. Le rapport signal sur bruit pour la porteuse  $i$  vaut :

$$\gamma_i \frac{\alpha_i^2 \cdot P_i}{N_0 \cdot B_N}.$$

Si  $\alpha_i$  est petit, alors le BER est grand. Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour corriger ce problème.

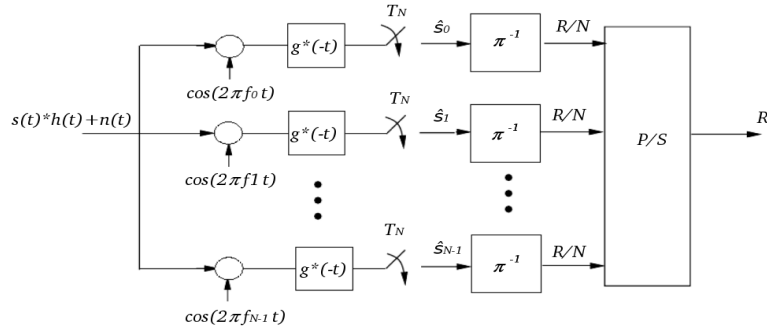


Figure 5: Démodulateur **MCM** avec porteuses superposées.

- Codage avec entrelacement
- Egalisation de fréquences
- Précodage
- Charge adaptive

On analysera dans la suite ces techniques.

## A Codage avec entrelacement

L'idée fondamentale du codage avec entrelacement consiste à utiliser un code correcteur pour coder les bits à l'entrée du système, entrelacer les mots de code, en temps et en fréquence, et finalement les envoyer sur différents sous-canaux de fréquence. Les bits sont alors soumis à des évanouissements indépendants. Si la majorité des canaux opèrent avec un bon rapport SNR, les erreurs induites par les "mauvais canaux" pourront être corrigées par le décodeur. Le codage exploite la diversité de fréquence propre du système **MCM**. Cette technique fonctionne très bien si on a suffisamment de diversité fréquentielle. Une bande de cohérence trop large, produit des corrélations importantes entre sous-canaux et l'efficacité du codage avec entrelacement devient moins efficace.

Compléter avec recherche bibliographique pour montrer des résultats.

## B Égalization de fréquences

L'égalisation de fréquences consiste tout simplement à inverser l'atténuation  $\alpha_i$  du  $i$ -ème sous-canal au récepteur. Cette technique nécessite la connaissance du canal au récepteur. Plus ponctuellement, si on estime l'atténuation du canal  $\alpha_i$ , alors on multiplie le signal reçu par  $1/\alpha_i$ . Ainsi on restitue la puissance du signal à sa valeur

$$\frac{\alpha_i^2 P_i}{\alpha_i^2} = P_i.$$

Malheureusement, le bruit en réception est aussi multiplié par le facteur  $1/\alpha_i$ , ce qui résulte :

$$\frac{N_0 B_n}{\alpha_i^2},$$

d'où le rapport SNR après égalisation,

$$SNR = \frac{\alpha_i P_i}{N_0 B_N},$$

et donc l'égalisation n'améliore pas la performance du système. Cette technique est à l'origine du précodage.

## C Précodage

Si on dispose de l'information de l'état du canal à l'émetteur, on peut inverser le canal avant transmission. Si l'atténuation du  $i$ -ème sous-canal est  $\alpha_i$ , alors on « amplifie » la puissance de ce sous-canal d'un facteur  $1/\alpha_i$ . Ceci assure que la puissance du signal après réception sera  $P_i$ . Puisque l'égalisation a eu lieu en émission, le bruit en réception reste  $N_0 B_N$ , d'où l'intérêt de la technique. Le précodage est utilisé régulièrement dans les systèmes **MCM** sur lignes filaires DSL. Cette technique présente des points faibles importants : le premier est la mauvaise gestion de l'énergie en émission, puisque la puissance totale émise peut être très importante pour compenser les évanouissements forts, et le deuxième point faible est qu'elle nécessite d'une bonne estimation du canal en transmission, estimation qui est très difficile d'obtenir en cas de dynamique rapide du canal.

## D Charge adaptive

L'idée de la charge adaptive, consiste à changer la puissance et le débit sur chaque sous-canal en fonction de l'état du canal. En utilisant plusieurs modulations de type **M-QAM** on pourra maximiser le débit total transmis en fonction des coefficients  $\alpha_i$  du canal. La capacité du canal d'un système **MCM** vaut :

$$C_{\text{MCM}} = \max_{P_i | \sum P_i = P} \sum_{i=0}^{N-1} B_N \log_2 \left( 1 + \frac{\alpha_i^2 P_i}{N_0 B_N} \right).$$



La distribution des puissances qui maximise cette capacité est la solution *waterfilling* :

$$\frac{P_i}{P} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_i} & \gamma_i \geq \gamma_0 \\ 0 & \gamma_i < \gamma_0 \end{cases}$$

où  $\gamma_0$  représente le SNR de « coupure », valeur du rapport signal à bruit en dessous de laquelle le sous-canal n'est pas utilisé. La valeur de coupure est calculée à partir de la contrainte :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \frac{P_i}{P} = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_i} \right) = 1$$

La capacité optimale devient donc :

$$C_{\text{MCM}} = \sum_{i|\gamma_i \geq \gamma_0} B_N \log_2 \left( \frac{\gamma_i}{\gamma_0} \right).$$

Dans le cas d'une modulation **M-QAM** à taux de transmission variable et puissance variable, le débit total peut être calculé à partir de :

$$R = \sum_{i=0}^{N-1} B_N \log_2 \left( 1 + \frac{K \gamma_i P_i}{P} \right),$$

où

$$K = \frac{-1.5}{\log(5P_b)},$$

$P_b$  étant la probabilité d'erreur par bit cible dans chaque sous-canal. Une optimisation par rapport à l'allocation des puissance donne un résultat semblable :

$$\frac{K P_i}{P} = \begin{cases} \frac{1}{\gamma_K} - \frac{1}{\gamma_i} & \gamma_i \geq \gamma_K \\ 0 & \gamma_i < \gamma_K \end{cases}$$

avec le taux de transmission correspondant :

$$R = \sum_{i|\gamma_i \geq \gamma_K} B_N \log_2 \left( \frac{\gamma_i}{\gamma_K} \right),$$

où, à nouveau  $\gamma_K$  peut être déterminé à partir de la contrainte de puissance totale.

## IV L'OFDM

Les techniques **MCM** furent découvertes en 1950, mais malheureusement la complexité des modulateurs/démodulateurs en parfaite orthogonalité pour chaque sous-canal, rendirent la méthode sans intérêt. Il faudra attendre

---

une vingtaine d'années pour que les circuits de traitement soient capables de réaliser des transformées discrètes de Fourier de façon efficace et à bas coût. L'usage de la DFT rendit les techniques **MCM** simples à engendrer et surtout à démoduler. La suite présente une approche constructive des **MCM** selon ce principe, ce qui depuis est connu sous le nom de *Orthogonal Frequency Division Multiplexing*, ou plus simplement **OFDM** .

## A Rappels sur la Transformée Discrète de Fourier - DFT

On rappelle la définition et les principales propriétés de la transformée discrète de Fourier. Le lecteur pourra consulter la référence [?] pour un traitement exhaustif du sujet.

Soit,  $x(n)$   $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N - 1$  une séquence d'échantillons complexes, temps discret. On définit la *fonction transformée discrète de Fourier* ou plus simplement la *transformée discrète de Fourier*, qui sera notée dans la suite **DFT** <sup>2</sup>, la fonction :

$$\mathbf{DFT} \{x(n)\} = X(i) \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi\frac{ni}{N}}, \quad 0 \leq i \leq N - 1.$$

On peut définir aussi la transformée inverse selon :

$$\mathbf{IDFT} \{X(i)\} = x(n) \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} X(i)e^{j2\pi\frac{in}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N - 1.$$

Un filtre de réponse impulsionnelle  $h(n)$  réagit à un signal  $x(n)$  selon :

$$y(n) = h(n) \odot x(n)$$

où  $\odot$  représente la convolution circulaire définie par :

$$y(n) = h(n) \odot x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k).x(n - k)_N,$$

où l'opérateur  $(n - k)_N$  indique

$$(n - k)_N = (n - k) \pmod{N}.$$

On peut démontrer qu'à partir de la définition de  $\odot$  et de **DFT** , la convolution circulaire dans un domaine correspond au produit de transformées dans l'autre :

$$\mathbf{DFT} \{y(n) = h(n) \odot x(n)\} = X(i).H(i).$$

Si  $h(n)$  a moins de  $N$  valeurs (disons  $K < N$ ), alors on complétera  $h(n)$  avec  $N - k$  zéros de sorte que les deux séquences à convoluer aient le même

---

<sup>2</sup>**DFT** = *Discrete Fourier Transform*

nombre d'échantillons. Cette expression est très intéressante, puisqu'elle prouve que si on connaît  $h(n)$  au récepteur, alors on peut récupérer  $x(n)$  par transformation inverse de Fourier, selon :

$$x(n) \rightarrow X(i) \rightarrow H(i) \rightarrow Y(i) = X(i).H(i) \rightarrow X(i) = \frac{Y(i)}{H(i)} \rightarrow x(n) = \mathbf{IDFT} \left\{ \frac{Y(i)}{X(i)} \right\}.$$

Malheureusement, la sortie du canal ne répond pas à la convolution circulaire sinon à la convolution linéaire :

$$y(n) = h(n) * x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k).x(n - k).$$

On verra dans la suite, que grâce à une astuce on peut transformer la convolution linéaire en convolution circulaire.

## B Le préfixe cyclique

Considérons une séquence  $x(n)$  d'échantillons à l'entrée du canal de longueur  $N$ . La réponse impulsionnelle du canal a une longueur  $\mu + 1$  échantillons où :

$$\mu + 1 = \frac{T_m}{T_e},$$

$T_m$  le *delay spread* du canal et  $T_e$  l'intervalle d'échantillonnage. La séquence,

$$h(0), h(1), h(2), \dots, h(\mu),$$

représente tout simplement la séquence de  $\mu + 1$  échantillons de la réponse impulsionnelle. Dans la suite on considérera que  $T_e \equiv T_s$ , le temps de symbole. On appelle « préfixe cyclique » de  $x(n)$ , les  $\mu$  derniers échantillons de  $x(n)$ ,

$$\mathbf{pc} = \{x(N - \mu) \ x(N - \mu + 1) \ x(N - \mu + 2) \ \dots \ x(N - 1)\}.$$

Pour chaque séquence  $x(n)$ , on construira une nouvelle séquence « étendue »  $\tilde{x}(n)$  résultat de la concaténation du  $\mathbf{pc}$  avec  $x(n)$ , selon :

$$\tilde{x}(n) = \{\mathbf{pc}|x(n)\} =$$

$$= \{x(N - \mu) \ x(N - \mu + 1) \ x(N - \mu + 2) \ \dots \ x(N - 1) \ ; \ x(0) \ x(1) \ x(2) \ \dots \ x(N - 1)\}.$$

Il résulte :

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}(-\mu) &= x(N - \mu) \\
 \tilde{x}(-\mu + 1) &= x(N - \mu + 1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 \tilde{x}(-1) &= x(N - 1) \\
 \tilde{x}(0) &= x(0) \\
 \tilde{x}(1) &= x(1) \\
 &\vdots = \vdots \\
 \tilde{x}(N - 1) &= x(N - 1)
 \end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer à partir de cette définition que :

$$\tilde{x}(n) = x(n)_N \quad -\mu \leq n \leq N - 1.$$

Cette propriété n'a rien de surprenant, elle résulte de la façon comment la séquence étendue a été construite. Le figure 6 représente la façon de construire cette séquence étendue.

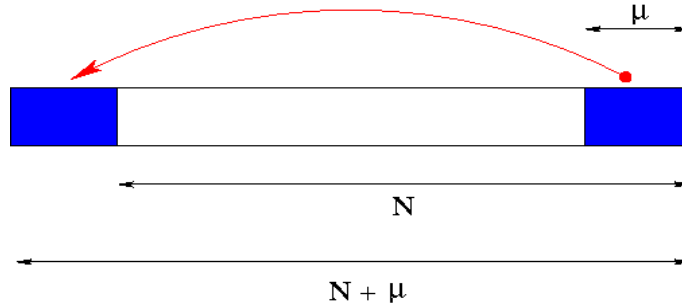


Figure 6: Le préfixe cyclique.

Soit maintenant  $\tilde{x}(n)$  l'entrée du canal de réponse impulsionnelle  $h(n)$ . La sortie du canal peut être calculée selon :

$$y(n) = h(n) * \tilde{x}(n) = \sum_{k=0}^{\mu} h(k) \cdot \tilde{x}(n-k) = \sum_{k=0}^{\mu} h(k) \cdot x(n-k)_N = h(n) \odot x(n).$$

Rajouter le préfixe cyclique transforme la convolution linéaire en convolution circulaire. On peut donc calculer,

$$Y(i) = H(i) \cdot X(i) \quad 0 \leq i \leq N - 1 \Rightarrow x(n) = \mathbf{IDFT} \left\{ \frac{Y(i)}{X(i)} \right\}.$$

A noter que les  $\mu$  premiers échantillons de  $y(n)$  ne sont pas nécessaires pour récupérer  $x(n)$ . Ceci est logique dû au fait de la redondance des  $\mu$  premiers échantillons.

Si l'on suppose que  $x(n)$  est divisé en blocs de longueur  $N$ , avec un préfixe cyclique de longueur  $\mu$  échantillons on construit  $\tilde{x}(n)$ . En sortie du canal, les  $\mu$  premiers échantillons de  $y(n)$  sont entâchés d'IES des  $\mu$  derniers échantillons du block précédent. Le préfixe cyclique permet de supprimer les effets d'IES entre blocs. Une réduction du taux de transmission sera le prix à payer. Le taux effectif sera :

$$\frac{N}{N + \mu}.$$

Il est intéressant de remarquer que n'importe quel préfixe cyclique fera l'affaire. On peut éventuellement remplacer les échantillons de  $x(n)$  par des zéros avec l'économie d'énergie transmise que cela implique. Le préfixe cyclique joue le rôle de « temps de garde » entre blocs. L'usage de ce préfixe motive l'usage de l'OFDM. En OFDM, les données sont divisées en blocs de taille  $N$  symboles. Chaque bloc s'appelle un "symbole OFDM". Un symbole OFDM est précédé d'un préfixe cyclique de longueur proportionnelle au *spread delay* du canal, pour induire la convolution circulaire et atténuer les effets d'IES entre blocs. En réception, les symboles entâchés d'IES sont supprimés et une transformation inverse assure la récupération des données.

### C L'OFDM

La figure 7 représente un modulateur OFDM.

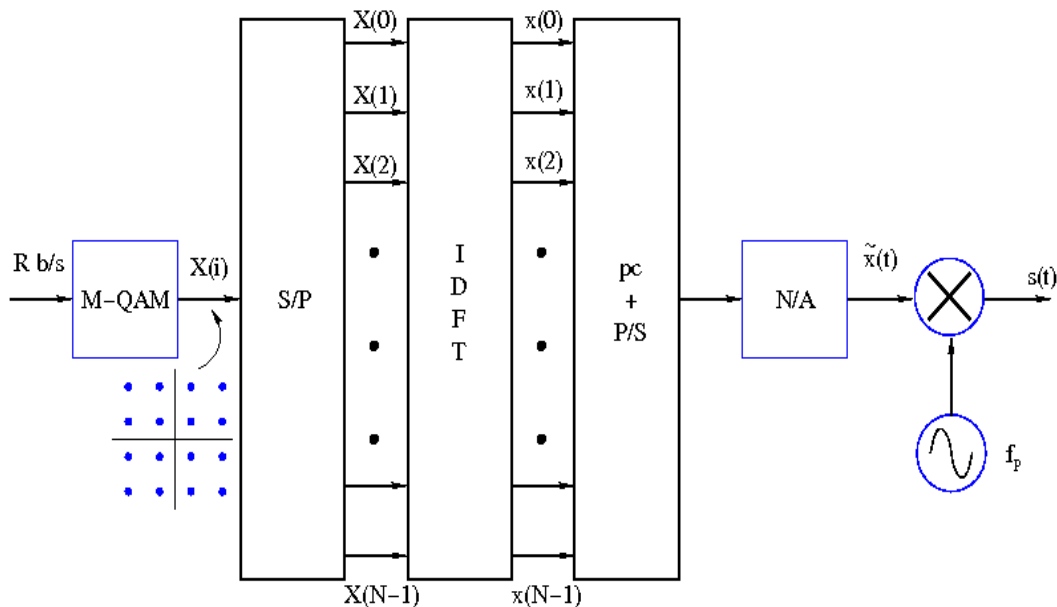


Figure 7: Le modulateur OFDM.

Le convertisseur série-parallèle (S/P), forme un bloc de  $N$  symboles modulés  $M - QAM$ . Le « vecteur »  $X(i)$  considéré une séquence complexe dans le domaine de la fréquence, est transformée dans le domaine du temps par une **IDFT**. Le « vecteur »  $x(n)$  dans le temps, se voit concaténé par le préfixe cyclique et convertit en série. La séquence ainsi formée, passe par un convertisseur numérique-analogique pour construire le signal analogique en bande de base  $\tilde{x}(t)$ . Un modulateur à  $f_p$  transpose le spectre du signal en bande de base autour de la fréquence porteuse. Soit  $s(t)$  le signal transmis. Chaque symbole complexe  $X(i)$  est modulé par la **IDFT** sur la fréquence,

$$e^{j\frac{2\pi in}{N}}.$$

Le signal reçu s'écrit sous la forme :

$$r(t) = y(t) + n(t) = h(t) * s(t) + n(t).$$

Le figure 8 représente le démodulateur **OFDM**.

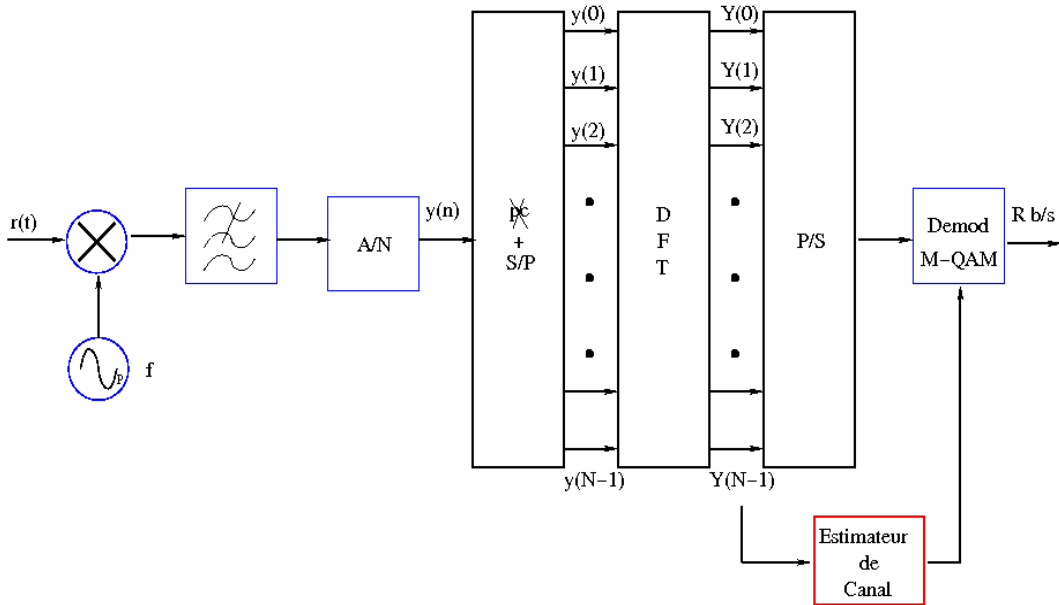


Figure 8: Le démodulateur **OFDM**.

Après transposition à la bande de base, un filtre passe-bas récupère le signal. Un convertisseur analogique-numérique transforme le signal en séquence  $y(n)$ . Après extraction du préfixe cyclique, un convertisseur série-parallèle crée des « vecteurs » d'échantillons dans le temps. L'application directe de la **DFT** transforme les symboles dans le domaine de la fréquence. Un convertisseur série-parallèle alimente finalement le démodulateur **M-QAM** engendre le flux à  $R b/s$ . L'information sur l'état du canal ( $H(i)$ ) agit

directement sur le démodulateur **M-QAM**, pour reconstruire par égalisation fréquentielle les symboles  $X(i)$  selon :

$$X(i) = \frac{Y(i)}{H(i)}.$$

## D Le PAPR

L'**OFDM** impose des contraintes de linéarité très strictes au modulateur. La figure 9 représente une fonction de transfert "classique" d'un amplificateur de puissance radio. On distingue deux régions de fonctionnement :

1. la zone de linéarité entre l'entrée (In) et la sortie (Out) ;
2. une zone de régime non-linéaire au delà d'un seuil de transition (connu comme seuil de linéarité de l'amplificateur).

En régime linéaire, le principe de superposition reste valable et le contenu harmonique de la sortie de l'amplificateur est le même que celui de l'entrée. Dès qu'on atteint le seuil de linéarité, le signal en entrée subit une distorsion susceptible de modifier de façon très significative le contenu harmonique de la sortie. Rappelons que l'information associée à chaque symbole à transmettre est contenue dans chacune des sous-bandes de fréquence **OFDM** et la condition d'orthogonalité reste une hypothèse majeure pour le processus de démodulation. Tout signal **OFDM** amplifié en régime non-linéaire verra son spectre modifié avec une conséquente perte d'information due à la distorsion harmonique induite par l'amplificateur. Ainsi on pourra déterminer la moyenne de l'amplitude du signal **OFDM** de sorte que l'amplification se réalise en plein régime linéaire, comme c'est indiqué dans la figure 9.

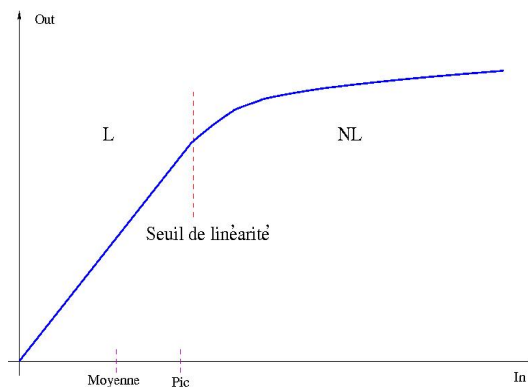


Figure 9: Fonction de transfert en puissance d'un amplificateur radio.

Malheureusement, le signal **OFDM** a un rang dynamique très important et il faut s'attendre à des fluctuations importantes entre la valeur moyenne et

la valeur de pic. Dans la mesure où l'amplitude de pic n'atteint pas le seuil de linéarité, la distortion non-linéaire n'est pas à craindre. Si la différence entre valeur moyenne et valeur de pic est importante, en moyenne on aura une amplitude faible à la sortie de l'amplificateur. Il faut donc trouver un bon compromis entre valeur moyenne du signal à la sortie de l'amplificateur et distortion non-linéaire due aux pics du signal. Ainsi on définit le rapport *pic-moyenne* (*Peak to Average Power Ratio* ou **PAPR**) :

$$\mathbf{PAPR} \triangleq \frac{\max_t |x(t)|^2}{\mathbb{E}[|x(t)|^2]}.$$

Ainsi un signal de continu a un **PAPR** = 1 (0dB) et une sinusoïde un **PAPR** = 2 (3dB).

Le signal **OFDM** s'écrit sous la forme :

$$x(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} X(i)e^{j2\pi \frac{ni}{N}}, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Si  $N \rightarrow \infty$ , alors les  $x(n)$  deviennent des variables aléatoires gaussiennes de moyenne nulle et variance  $\sigma^2$ . L'enveloppe de  $x(n)$  est Rayleigh de variance  $\sigma^2$ . La probabilité que le PAPR dépasse un seuil  $P_0$  peut être calculée selon :

$$\text{Prob}[PAR \geq P_0] = 1 - (1 - e^{-P_0})^N.$$

Considérons  $N$  variables  $x(n)$  gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et puissance 1.

$$\mathbb{E}_N[|x(n)|^2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |x(i)|^2\right].$$

Ceci revient à calculer :

$$\mathbb{E}_N[|x(n)|^2] = \frac{1}{N} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} |x(i)|^2\right] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbb{E}[|x(i)|^2] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{N} = 1.$$

La valeur maximale de l'enveloppe on l'obtient quand tous les  $x(i)$  s'ajoutent en phase (somme cohérente). Dans ce cas :

$$\max_n [|x(n)|^2] = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=0}^{N-1} 1\right)^2 = \frac{N^2}{N} = N.$$

On déduit :

$$\mathbf{PAR} \triangleq \frac{\max_t |x(t)|^2}{\mathbb{E}[|x(t)|^2]} = \frac{N}{1} = N.$$


---



Le **PAPR** augmente avec le nombre de sous-porteuses. Clairement, la probabilité de retrouver  $N$  sous-porteuses en phase est un événement extrêmement improbable, d'où le calcul fait précédemment est une limite supérieure en terme de **PAPR**. En général, le **PAPR** sera inférieur de quelques  $Db$  de cette valeur, mais il est très intéressant de remarquer, à titre de "règle du pouce", que le **PAPR** augmente plus ou moins linéairement avec le nombre de sous-porteuses. Il existe des méthodes très variées pour réduire significativement le **PAPR**. La référence [?], présente des techniques pour construire de bons codes dans ce but.

## E Le *offset* de fréquence et de temps

L'hypothèse de base de l'orthogonalité entre porteuses impose :

$$\Delta f = \frac{1}{T_N}.$$

Malheureusement, cette condition est difficilement vérifiée dans un système réel. Ceci est dû aux oscillateurs mal adaptés, à l'effet Doppler ou à des erreurs de synchronisation fréquence. Par exemple, un crystal avec une erreur de fréquence de 1 ppm, on peut estimer l'erreur de fréquence selon,

$$\Delta f_\epsilon \simeq \left(\frac{1}{10} \text{ppm}\right) f_0,$$

valeur qui devient pour une porteuse à 5 GHz de l'ordre de 500 kHz. Cette petite erreur induit une erreur dans la **IFFT** et la **FFT**.

Pour une impulsion NRZ, la  $i^{\text{ième}}$  porteuse vaut :

$$x_i(t) = e^{j2\pi i \frac{t}{T_N}}.$$

Le  $m^{\text{ième}}$  canal s'écrit sous la forme :

$$x_{i+m}(t) = e^{j2\pi(i+m) \frac{t}{T_N}}.$$

Introduisons un *offset* de fréquence  $\delta$  dans le démodulation de ce canal fréquentiel :

$$x_{i+m}(t) = e^{j2\pi(i+m+\delta) \frac{t}{T_N}}.$$

L'interférence entre ces deux canaux peut être évaluée selon :

$$I_m = \int_0^{T_N} x_i(t) \cdot x_{i+m}^*(t) dt = \frac{T_N(1 - e^{-j2\pi(\delta+m)})}{j2\pi(m + \delta)}.$$

Clairement, si  $\delta = 0$ , alors  $I_m = 0$ . L'interférence totale sur le  $i^{\text{ième}}$  canal sera :

$$ICI_i = \sum_{m \neq i} |I_m|^2 \simeq k \cdot (T_N \delta)^2,$$

où, on a défini, *ICI* l'interférence entre porteuses (*Inter Carrier Interference*), et  $k$  une constante de proportionnalité. Pas toutes les porteuses participent à cette somme. Cette estimation devient donc le pire cas d'interférence. Elle nous donne une bonne idée des paramètres qui déterminent la performance du système. Au fur et à mesure que  $T_N$  augmente, l'espacement entre porteuses diminue, et en conséquence l'*ICI*, augmente. La croissance de l'*ICI* est quadratique en fonction de l'*offset*. Il faudra donc choisir  $N$  le plus petit possible. Un compromis entre capacité à gérer l'IES et les erreurs d'*offset* devra donc s'établir. Dans les cas pratiques, le contrôle d'*offset* prévaut par rapport au nombre de porteuses. Référence à ce sujet....

## F Analyse de la norme IEEE 802.11a

## V Analyse matricielle de l'OFDM

Le produit de convolution discret sur  $N + \mu$  points qui définit la sortie du canal,

$$y(n) = h(n) * \tilde{x}(n) + \nu(n), \quad 0 \leq n \leq N - 1,$$

peut être développé sous forme matricielle selon :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_{N-1} \\ y_{N-2} \\ \vdots \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}}_{\bar{y} \ (N \times 1)} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-1} & h_{\mu} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-1} & h_{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-1} & h_{\mu} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{H}} \ ((N+\mu) \times N)} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_{N-2} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \\ x_0 \\ x_{N-1} \\ \vdots \\ x_{N-\mu} \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{x}} \ (N+\mu) \times 1} + \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_{N-1} \\ \nu_{N-2} \\ \vdots \\ \nu_2 \\ \nu_1 \\ \nu_0 \end{pmatrix}}_{\bar{\nu} \ N \times 1}$$

Dans cette expression, le préfixe cyclique de  $\bar{y}$  n'a pas été utilisé. La sortie du canal peut donc être résumée sous la forme :

$$\bar{y} = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{x}} + \bar{\nu},$$

avec dimensions respectives :

$$\bar{y} = N \times 1,$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = (N + \mu) \times N,$$

$$\bar{\mathbf{x}} = (N + \mu) \times 1,$$

et

$$\bar{\mathbf{v}} = N \times 1.$$

Vu que les  $\mu$  dernières composantes de  $\bar{\mathbf{x}}$  sont “redondantes”, la matrice  $\tilde{\mathbf{H}}$ , peut être écrite sous une forme plus compacte :

$$\mathbf{H} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-1} & h_{\mu} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-1} & h_{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-1} & h_{\mu} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu} \\ h_{\mu} & 0 & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-1} \\ h_{\mu-1} & h_{\mu} & \dots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \dots & h_{\mu-2} \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & \vdots \\ h_1 & h_2 & \dots & 0 & h_0 & 0 & 0 & \dots & h_0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{H} (N \times N)}$$

et la sortie s'écrit sous une forme plus compacte selon :

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{H} \bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{v}},$$

cette fois-ci avec dimensions respectives :

$$\bar{\mathbf{y}} = N \times 1,$$

$$\mathbf{H} = N \times N,$$

$$\bar{\mathbf{x}} = N \times 1,$$

et

$$\bar{\mathbf{v}} = N \times 1.$$

L'insertion du préfixe cyclique transforme la matrice  $\mathbf{H}$  du canal en matrice carré qui a la propriété d'être circulante sur les  $N$  échantillons de  $\bar{\mathbf{x}}$ . Issue de la réponse du canal,  $\mathbf{H}$  est normale :

$$\mathbf{H}^H \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{H}^H,$$

où  $^H$  représente l'opérateur conjugué-transposé (opérateur hermitien).

On peut décomposer  $\mathbf{H}$  en SVD :

$$\mathbf{H} = \mathbf{M} \mathbf{\Lambda} \mathbf{M}^H,$$

où  $\Lambda$  est une matrice diagonale contenant toutes les valeurs propres de  $\mathbf{H}$ , et  $\mathbf{M}$  contient les vecteurs propres associés à chaque valeur propre de  $\Lambda$ . La matrice  $\mathbf{M}$  est unitaire :

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^H = \mathbf{I}.$$

La **DFT** est une transformation orthogonale qui peut être représentée par :

$$\bar{X} = \mathbf{Q} \cdot \bar{x},$$

avec

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

où on a défini :

$$W_N = e^{-j \frac{2\pi}{N}}.$$

$\mathbf{Q}$  vérifie la propriété :

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^H$$

En vu de cette propriété, on conclut que :

$$\bar{x} = \mathbf{Q}^{-1} \bar{X} = \mathbf{Q}^H \bar{X}.$$

Ces propriétés de la **DFT** conduisent à la conclusion suivante : soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathbf{H}$  et soit  $\bar{v}$  le vecteur propre associé.

$$\mathbf{H} \cdot \bar{v} = \lambda \cdot \bar{v}.$$

La matrice unitaire  $\mathbf{M}$  est formée par les valeurs propres de  $\mathbf{H}$ . Si  $\bar{m}_i$  est la  $i$ ème colonne de  $\mathbf{M}$ , alors,

$$\mathbf{H} \cdot \bar{m}_i = \lambda_i \cdot \bar{m}_i.$$

En annexe on démontre que les colonnes de  $\mathbf{Q}^H$  sont les vecteurs propres de  $\mathbf{H}$ , d'où :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}^H \quad (\mathbf{Q}^H = \mathbf{M}).$$

La transformation discrète de Fourier représente une base propre d'un système linéaire et en conséquence on peut établir :

$$\bar{Y} = \mathbf{Q} \cdot \bar{y} = \mathbf{M}^H \cdot \bar{y}.$$

Vu que,

$$\bar{y} = \mathbf{H} \bar{x} + \bar{v} = \bar{y} = \mathbf{H} \mathbf{Q}^H \bar{X} + \bar{v},$$

il résulte :

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \mathbf{M}^H \{ \mathbf{H} \mathbf{Q}^H \bar{X} + \bar{v} \} \\ &= \mathbf{M}^H \{ \mathbf{M} \Lambda \mathbf{M}^H \mathbf{Q}^H \bar{X} + \bar{v} \} \\ &= \mathbf{M}^H \mathbf{M} \Lambda \mathbf{M}^H \mathbf{M} \bar{X} + \mathbf{M}^H \bar{v} \\ &= \Lambda \bar{X} + \mathbf{M}^H \bar{v} \\ &= \Lambda \bar{X} + \bar{v}_Q, \end{aligned}$$

où on a défini,

$$\bar{v}_Q = \mathbf{M}^H \bar{v}.$$

Puisque  $\mathbf{M}^H$  est une matrice unitaire, alors  $\bar{v}_Q = \mathbf{M}^H \bar{v} = \mathbf{Q} \bar{v}$ , a la même corrélation que  $\bar{v}$ .

Ceci permet d'aboutir à la conclusion suivante (très importante) :

Grâce à l'usage du préfixe cyclique, la **IDFT** et la **DFT**, l'**OFDM** décompose un canal à interférence entre symboles en  $N$  sous-canaux sans IES, et ce qui est remarquable est que cette décomposition ne nécessite pas la connaissance de **H** !

En annexe B on présente une généralisation de cette idée de décomposition de **H** qui conduit à la technique connue sous le nom de *codage vectoriel*.



## Annexes

### A Base propre de la DFT

- Ici la preuve des VP de la dft

### B Codage vectoriel

Les propriétés de la **DFT** ont induit la décomposition en valeurs singulières dans le domaine transformé. On aurait pu directement décomposer la matrice **H** du canal en **SVD** pour obtenir :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^H,$$

où **U** et **V** sont des matrices unitaires, et  $\Sigma$  est une matrice diagonale contenant les valeurs propres de **H**. Les valeurs de la diagonale de  $\Sigma$  dépendent de ceux de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$  selon :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i},$$

avec  $\lambda_i$  la  $i$ ème valeur propre de  $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ . Vu que **H** est de rang  $N$ , il y a donc  $N$  valeurs propres  $\sigma_i$ . Cette décomposition suggère le traitement suivant au vecteur de données  $\bar{X}$  :

$$\bar{X} = (X_0 \ X_1 \ X_2 \ \dots \ X_{N-1} \ \underbrace{X_N \ X_{N+1} \ \dots \ X_{N-1+\mu}}_{\mu \text{ '0'}}).$$

Si on applique la transformation **V** au vecteur  $\bar{X}$ , on obtient :

$$\bar{x} = \mathbf{V}.\bar{X}.$$

En définissant,

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \mathbf{U}^H.\bar{y}, \\ \bar{Y} &= \mathbf{U}^H.\bar{y} \\ &= \mathbf{U}^H.(\mathbf{H}.\bar{x} + \nu) \\ &= \mathbf{U}^H.(\mathbf{U}.\Sigma.\mathbf{V}^H.\bar{x} + \nu) \\ &= \mathbf{U}^H.(\mathbf{U}.\Sigma.\mathbf{V}^H.\mathbf{V}\bar{X} + \nu) \\ &= \Sigma \bar{X} + \mathbf{U}^H\bar{\nu} \\ \bar{Y} &= \Sigma \bar{X} + \bar{\nu}_U, \end{aligned}$$

où on a défini,

$$\bar{\nu}_U = \mathbf{U}^H\bar{\nu}.$$

Cette technique de transmission s'appelle *technique de codage vectoriel*. On peut montrer que cette décomposition du canal  $\mathbf{H}$  est optimale. Malgré cela, plusieurs inconvénients limitent l'usage de cette méthode de modulation : la complexité est considérable et elle nécessite la connaissance du canal ( $\mathbf{H}$ ).

## Exercices

### Exercice N° 1 -