

## Communications Numériques et Théorie de l'Information 2A AST - TDs et Exercices - 2013

•

Les solutions seront disponibles sur le site :  
[http://perso.telecom-paristech.fr/~rodrigez/ens/cycle\\_harm\\_2A/cnti\\_com201/devoirs/](http://perso.telecom-paristech.fr/~rodrigez/ens/cycle_harm_2A/cnti_com201/devoirs/)

### I. Étude d'une chaîne de transmission numérique★

Nous allons étudier les fonctions d'une chaîne de transmission numérique. La figure 1 représente la partie « émetteur » de la chaîne.

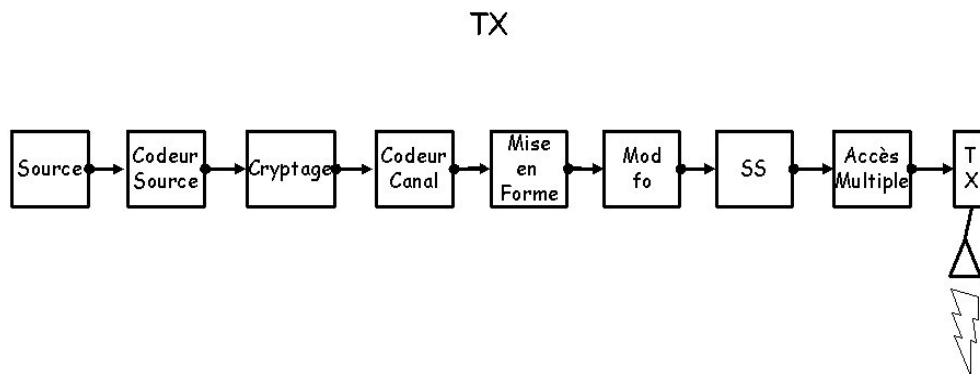


FIGURE 1 – Schéma d'un émetteur numérique.

Les questions suivantes vous permettront de revoir quelques idées fondamentales.

1. Définir une source numérique et donner quelques exemples.
2. Une source numérique peut être engendrée à partir d'une source analogique par conversion analogique/numérique (A/N) : la parole numérisée, par exemple. Estimer le débit binaire d'information d'un convertisseur A/N pour la parole.
3. Quel est le rôle d'un codeur de source ?
4. Apparemment l'unité de chiffrement de la figure 1 joue un rôle très important dans un système numérique. Pourquoi ?

5. En rajoutant de la redondance, le codeur de canal protège l'information des effets du canal. Quelle est la différence par rapport au chiffrement ?
  6. Paradoxalement, le codeur de source élimine la redondance alors que le codeur de canal en rajoute. Bizarre, non ? Expliquer.
  7. Expliquer le rôle de l'unité de mise en forme et du modulateur. Pourquoi doit-on faire appel à ces unités ?
  8. Indiquer clairement dans quelles unités de la figure 1, l'information est traitée sous forme « numérique » et dans quelles sous forme « analogique ».
  9. Quelles unités de traitement, du schéma de la figure 1, sont optionnelles ?
  10. Représenter le schéma d'un récepteur adapté à cette chaîne de transmission. Expliquer le fonctionnement de chaque unité en faisant référence à la chaîne d'émission.
- 

## II. Débit binaire et rapidité de modulation

1. Définir *Débit Binaire* et *Rapidité de Modulation*.
  2. Une source  $S$  engendre des messages appartenant à un alphabet  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ , toutes les  $T$  secondes. On décide de transmettre ces messages en les groupant par paquets de 4. Chaque paquet sera représenté par un signal différent de durée finie  $4T$ . Combien de signaux différents faudra-t-il choisir pour représenter tous les paquets ?
  3. On considère, deux sources numériques différentes  $S_A$  et  $S_B$ .  $S_A$  engendre des messages d'un alphabet  $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$  à la vitesse d'un message toutes les  $T_A \mu s$ .  $S_B$  pour sa part engendre des messages issus d'un alphabet  $B = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$  à la vitesse  $T_B = T_A$ .
    - a) Calculer la rapidité de modulation de  $S_A$  et  $S_B$ .
    - b) En supposant un choix de représentation binaire pour les messages issus de  $S_A$  et de  $S_B$ , calculer le débit binaire  $D_A$  et  $D_B$  de chaque source.

On construit à partir de  $S_A$  et de  $S_B$  une nouvelle source  $S$  formée par tous les couples  $(x_i, y_j)$  avec  $x_i \in S_A$  et  $y_j \in S_B$ .
    - c) Calculer la rapidité de modulation et le débit binaire de cette nouvelle source.
-

### III. Spectre d'un signal modulé RZ/AMI★

On considère un message binaire dont les symboles  $a_k$  sont i.i.d. et équiprobables. Ce message est modulé linéairement à l'aide d'une forme d'onde RZ (« Retour à Zéro »)

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où  $T$  est la période symbole.

1. Calculer le spectre du signal modulé dans les deux cas suivants:

- a)  $a_k = \pm a$ .
- b)  $a_k = 0$  ou  $2a$ .

2. Commenter la présence éventuelle de raies spectrales.

Les symboles binaires sont maintenant préalablement transformés par « codage bipolaire » (AMI, *Alternate Marked Inversion*) avant d'être modulés:

$$\begin{cases} \alpha_k = 0 \implies a_k = 0 \\ \alpha_k = 1 \implies a_k = \pm a \text{ alternativement} \end{cases}$$

de sorte que les  $a_k$  ne sont plus i.i.d.

3. Calculer le spectre du signal modulé AMI.

### IV. Analyse d'un système d'accès multiple réparti dans le temps

On doit concevoir un système de transmission basé sur la technique d'accès multiple réparti dans le temps (TDMA). Le système est prévu pour multiplexer 4 voies de communication (ordre 4) avec une possible évolution vers l'ordre 8. Chaque voie de communication transporte 64 bits d'information. La durée d'un cycle complet TDMA (trame TDMA) est  $T_{TDMA} = 128 \mu\text{sec}$ .

1. Calculer le débit binaire par utilisateur ( $D_U$ ) et le débit net de canal ( $D_C$ ).

Le canal a une largeur de bande  $B_C = 75\% D_C$ . On utilise une mise en forme globale en cosinus surélevé avec un *rolloff*  $\alpha$ .

2. Peut-on réaliser cette transmission sans Interférence entre Symboles (IES) ? Si c'est le cas, déterminer le *rolloff* maximal. Dans le cas contraire, déterminer la taille minimale de l'alphabet  $S_4$  qui garantit une transmission sans IES.

On veut analyser maintenant l'évolution vers l'ordre 8. Chaque voie de communication transporte toujours 64 bits d'information.

3. Peut-on réaliser cette transmission sans IES en utilisant le même filtre de mise en forme que celui utilisé pour l'ordre 4 ? Si c'est le cas, déterminer le *rolloff* maximal. Dans le cas contraire, déterminer la taille minimale de l'alphabet  $S_8$  qui garantit une transmission sans IES.
- 

## V. Deux serveurs INTERNET

On veut relier deux serveurs INTERNET **A** et **B** grâce à une liaison numérique à haut débit utilisant une signalisation bipolaire. Le débit minimum est de 100 Mb/s. Pour cela on utilise un filtre de mise en forme en émission en racine de cosinus surélevé avec *rolloff*  $\alpha$  et un filtre adapté en réception. Le canal a une largeur de bande  $B_c = 90$  MHz.

1. Déterminer la plus grande valeur du paramètre  $\alpha$  pour avoir une transmission sans IES.

Supposons dans la suite que le serveur **A** double le nombre de clients. Cela représente un nouveau débit net entre serveurs de 200 Mbit s<sup>-1</sup>.

2. Déterminer la plus grande valeur du paramètre  $\alpha$  pour avoir une transmission sans IES.
- 

## VI. Transmission sans IES

Un système de transmission numérique en bande de base à 20 kbit s<sup>-1</sup> utilise un filtre global de mise en forme en cosinus surélevé avec un *roll-off*  $\alpha$ . La largeur de bande du canal  $B_C = 15$  kHz.

1. La valeur maximale de  $\alpha$  qui garantit une transmission sans Interférence Entre Symboles vaut :
    - $\alpha = 100\%$  ;
    - $\alpha = 20\%$  ;
    - $\alpha = 15 \text{ kHz}/20 \text{ kHz}$  ;
    - $\alpha = 0.5$  ;
    - $\alpha = +\infty$  ;
    - aucune des valeurs précédentes.
-

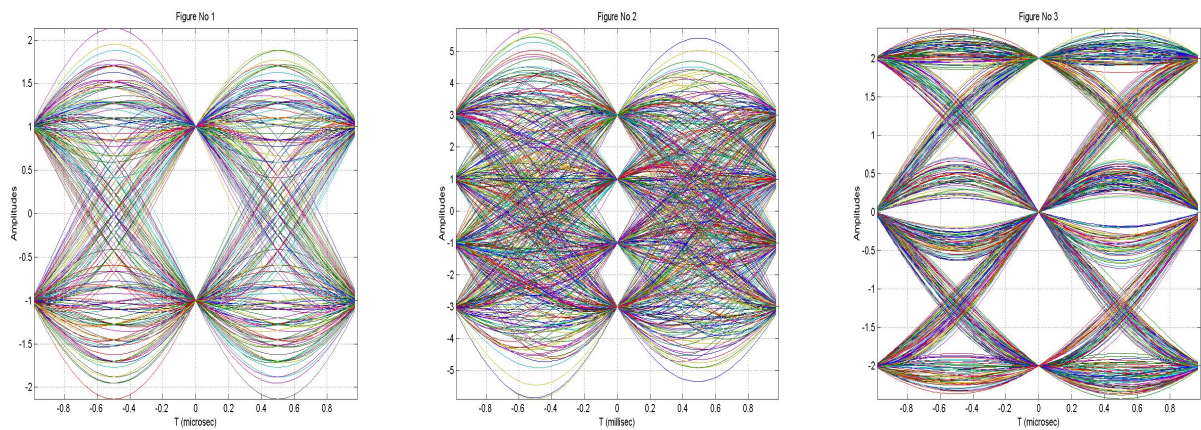


FIGURE 2 – Diagrammes de l'œil.

## VII. Les yeux en action

Pour les diagrammes de l'œil de la figure 2, déterminer :

1. rapidité de modulation ;
2. l'ordre de la modulation ;
3. la résistance à une erreur de synchronisation.

## VIII. Répéteur numérique

Une transmission numérique est réalisée sur le réseau téléphonique fixe, entre deux villes séparées de 600 km. Pour augmenter la qualité de la transmission, un répéteur numérique est installé tous les 50 km. Chaque répéteur détecte la séquence binaire reçue et retransmet le signal après amplification. Le fil électrique est supposé avec une largeur de bande de 3 kHz, et chaque répéteur travaille avec un rapport  $E_b/N_0 = 15dB$ .

1. Déterminer le débit binaire net auquel on peut réaliser cette transmission sans IES.
2. Quelle est la performance globale du système?

## IX. Le multiplex numérique du RTC★

On se propose d'étudier le fonctionnement du multiplex téléphonique pour la parole. Chaque conversation téléphonique est numérisée par un convertisseur analogique numérique à 8 kéch/s et 8 bits/éch, soit un débit net de 64 kbits/s. Le commutateur numérique multiplexe dans le temps 24 voies de parole,  $U_1, U_2, \dots, U_{24}$  avec un canal de signalisation  $S$  à 8 kbits/s pour le contrôle de la communication, sur le même canal de largeur de bande  $B_c$ . Le système de multiplexage est représenté dans la figure 3.

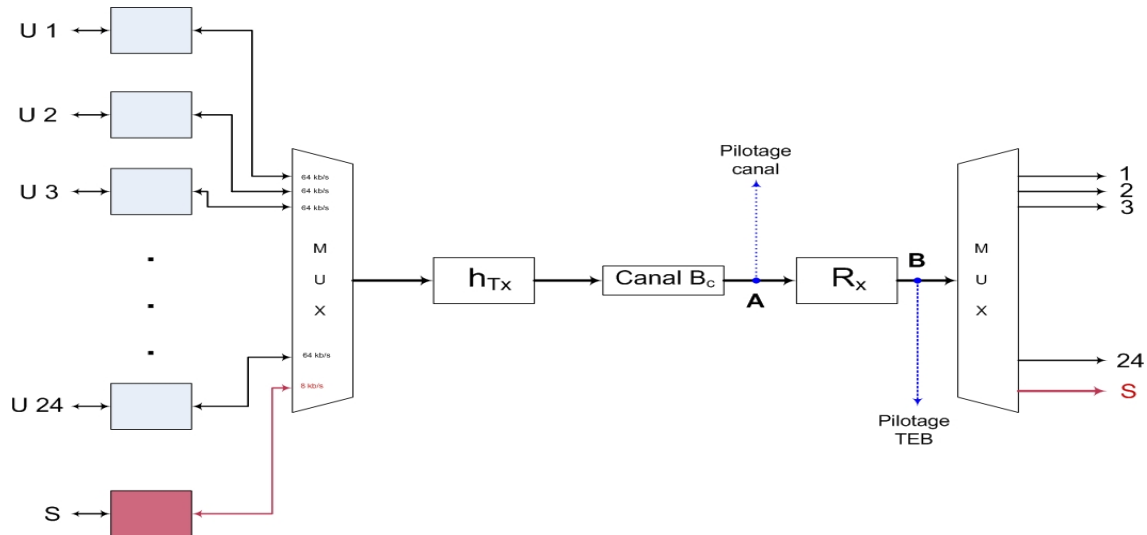
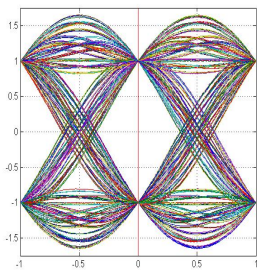
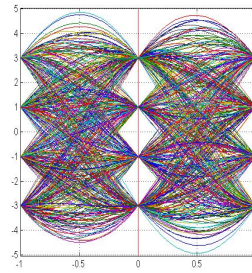


FIGURE 3 – Schéma de multiplexage temporel du RTC.

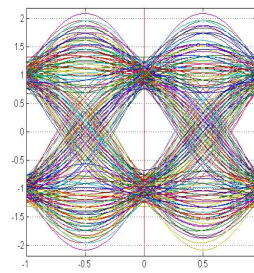
Le système de transmission utilise un filtre de mise en forme globale en cosinus surélevé avec facteur de *roll-off*  $\alpha$ . L'alphabet d'émission est  $\mathcal{A} = \{+1; -1\}$ . Le canal est supposé à bruit additif, blanc et gaussien avec densité spectrale de puissance  $N_0 = 10 \times 10^{-10} \text{ W Hz}^{-1}$ . Pour surveiller le fonctionnement du système, on observe le comportement de la transmission en deux points de pilotage, le premier à la sortie du canal et le deuxième à la sortie du récepteur. Ces deux points sont indiqués **A** et **B** sur la figure 3.



(a)



(b)



(c)

1. Déterminer le débit  $D$  global du système.
2. Déterminer la structure du récepteur  $\mathbf{R}_x$  qui minimise la probabilité d'erreur au point  $\mathbf{B}$ .
3. Sachant que la largeur de bande du canal  $B_C = 1$  MHz, déterminer la valeur  $\alpha$  du *roll-off*, qui garantit une transmission sans IES.
4. On contrôle la performance du système en construisant le diagramme de l'oeil au point  $\mathbf{A}$ . Lequel de ces diagrammes vous semble correct ? Justifiez votre réponse.
5. Calculer la puissance requise pour garantir une  $P_b = 10^{-7}$  au point  $\mathbf{B}$ .
6. Tout d'un coup, la probabilité d'erreur au point  $\mathbf{B}$  augmente à  $P_b = 10^{-5}$ , alors qu'aucun changement a été détecté au point de pilotage  $\mathbf{A}$ . On construit le diagramme de l'oeil au point  $\mathbf{B}$  et on s'aperçoit qu'il n'a pas changé. Qui peut être responsable de cette perte dans la qualité de service ? Justifier votre réponse.

Une panne du canal, exige son remplacement en urgence. Malheureusement, les secours disponibles sont de qualité inférieure et la largeur de bande du canal passe de  $B_c \rightarrow B_c/2$ .

7. Déterminer l'ordre de la modulation et le nouveau facteur de *roll-off* qui garantit une transmission sans IES pour ce nouveau scénario de fonctionnement.
8. Calculer la pénalité en énergie par bit d'information pour ce nouveau scénario de fonctionnement, si on souhaite entretenir la même qualité de service.

---

## X. Quelques questions de compréhension

1. Pourquoi c'est si important de pouvoir disposer des raies spectrales dans le spectre d'un signal modulé numériquement ?

- 
2. Le GSM utilise un filtre de mise en forme à l'émission avec paramètres  $B.T = 0.3$ . A-t-on de l'IES dans ce cas ? Expliquer.
  3. Vrai ou faux ?
    - a) le filtre adapté est un filtre de Nyquist ;
    - b) le filtre adapté engendre de l'IES ;
    - c) le filtre adapté annule l'IES du bruit ;
    - d) un filtre adapté peut supprimer l'IES ;
    - e) un filtre de Nyquist est nécessairement adapté ;
    - f) si le filtre d'émission est en Nyquist le filtre adapté l'est aussi ;
    - g) le filtre adapté minimise le probabilité d'erreur à la sortie du démodulateur ;
    - h) le filtre adapté minimise le rapport signal sur bruit ;
    - i) le filtre adapté supprime le bruit.
  4. Un système de transmission binaire utilise un filtre de mise en forme à l'émission en racine de Nyquist. Le filtre de réception est adapté au filtre d'émission. Le bruit de canal est additif, gaussien et blanc.
    - a) Quelle es la nature spectrale du bruit après le filtre de réception ?
    - b) Quelle est la nature spectrale des échantillons du bruit filtré ?
- 

## XI. Encore des questions de compréhension

1. Un codeur de source enlève la redondance de la source, alors qu'un code correcteur d'erreur en rajoute. A quoi bon d'enlever la redondance si après on la rajoute ?
  2. Expliquer en quoi consiste la règle de Maximum de Vraisemblance pour décoder un code binaire.
  3. La distance minimale d'un code correcteur binaire  $(n, k)$  est :
    - a) la distance qui minimise la probabilité d'erreur ;
    - b) la plus grande distance entre les deux mots de code le plus fréquemment utilisés ;
    - c) la plus petite distance entre deux mots de code ;
    - d) le nombre de mots de code de poids de Hamming  $> 1$  ;
    - e)  $\log_2(n - k)$  ;
    - f)  $2^{n-k}$ .
    - g)  $2^n - 2^k$ .
-



## XII. Check de parité paire ou impaire

Un code de *check* de parité, consiste à rajouter un bit de plus au mot de donnée de telle façon que la somme **XOR** des bits du mot de code soit toujours nulle. Ainsi pour un mot de donnée, avec  $k = 5$  :

$$d = 01011,$$

le mot de code correspondant est :

$$c = 010111.$$

D'ailleurs, dans cet exemple on a respecté la forme « systématique » du mot de code, bien qu'on aurait pu insérer le bit de parité dans n'importe quelle position du mot de code, par exemple :

$$c = 011011.$$

La vérification de la parité se réalise par :

$$\sum_i d_i = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \checkmark.$$

Cette condition de parité revient à avoir un nombre pair de bits dans chaque mot de code. Pour cette raison on parle de *parité paire*. Il est tout à fait envisageable, de rajouter un bit de parité de telle façon que la somme **XOR** des bits du mot de code soit toujours 1. On parle dans ce cas de *parité impaire*. En revenant sur l'exemple précédent :

$$d = 01011, \rightarrow c = 010110.$$

1. Construire un code de *check* parité paire  $C(3,2)$ . Lister tous les mots de code. Déterminer la distance minimale du code ainsi construit.
2. Id., mais avec parité impaire.
3. Lequel des deux codes vous choisiriez ?

## XIII. Étude d'un code correcteur★

On considère le code en bloc linéaire  $\mathcal{C}$ , de matrice génératrice  $G$  :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les paramètres  $n$ , longueur du mot de code, et  $k$ , longueur du mot d'information, de  $\mathcal{C}$ .

2. Lister tous les mots de  $\mathcal{C}$  et trouver la distribution des poids. Déterminer la capacité de détection et de correction de  $\mathcal{C}$ .
3. Pour améliorer les performances du code  $\mathcal{C}$ , on décide de construire un nouveau code  $\mathcal{C}'$ , en supprimant tous les mots de  $\mathcal{C}$  de poids impair. Lister les mots de  $\mathcal{C}'$ . Déterminer les nouveaux paramètres  $n'$  et  $k'$  de ce nouveau code.
4. Le code  $\mathcal{C}'$ , est-il linéaire ? Déterminer la capacité de détection et de correction de  $\mathcal{C}'$ .
5. Si le code  $\mathcal{C}'$  est linéaire, trouver une matrice génératrice  $G'$ .

#### XIV. Code et matrice $H$ de parité

Soit un code  $C$ , avec matrice de check de parité  $H$ , de la forme :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les paramètres  $(n, k)$  de  $C$ .
2. Est-ce que les messages suivants sont des mots de code de  $C$  ?

$$m = (111001)$$

$$m^* = (100110)$$

3. Déterminer une matrice génératrice  $G$  de  $C$ .
4. Lister tous les mots de  $C$ .
5. Déterminer la distance minimale de  $C$ .

#### XV. Analyse de la performance du code de Hamming (7,4)

On se propose d'étudier la performance du code de Hamming (7,4). Les colonnes de la matrice de check de parité  $H$  de ce code est constituée de tous les triplets de bits non nuls. Il y en a 7 triplets non nuls :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Sous forme systématique, on obtient :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice génératrice  $G$  de ce code
2. Calculer tous les mots de code de  $G$ .
3. Calculer les poids des mots de codes. Déduire sa distance minimale. Trouver le spectre des poids.
4. Calculer la probabilité de détecter une erreur.
5. Si la probabilité de transition du canal  $p < 1/2$ , proposer un algorithme de décodage simple et calculer la probabilité d'erreur. Comparer cette probabilité pour  $n = 3$  et  $n = 7$ .

## XVI. Contrôle de connaissances - Mardi 22 Juin 2010 ★

### A. Étude de la couche physique de l'UMTS

Le système UMTS utilise, pour la liaison montante, une technique de transmission binaire bipolaire, constitué par deux voies de communication en quadrature. Le principe est très simple : une voie de parole numérisée module en amplitude un filtre de mise en forme à l'émission  $h(t)$  en racine cosinus surélevé avec un *roll-off* de 22%<sup>1</sup>. La durée d'un symbole binaire est :

$$T \sim 0.26042\mu\text{s}.$$

Cette voie engendre un signal modulé  $s_p(t)$ . Au même temps, le terminal utilisateur engendre une voie de signalisation numérique qui module en amplitude le même filtre de mise en forme à l'émission  $h(t)$ . Cette voie est à l'origine d'un deuxième signal modulé  $s_{sig}(t)$ . Ces deux signaux vont être multiplexés en fréquence, sur le même signal porteur, dans la bande de 1.92 à 1.98MHz selon :

$$s(t) = s_p(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + s_{sig}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t).$$

Dans la suite on supposera que le système UMTS fonctionne en présence d'un bruit additif, blanc et gaussien de densité spectrale de puissance  $N_0 = 10^{-10} \text{ W Hz}^{-1}$ . En réception, le démultiplexage est réalisé à l'aide de deux multiplicateurs synchrones ( $\cos(2\pi f_0 t)$  ou bien  $\sin(2\pi f_0 t)$ ) suivis d'un filtre passe-bas comme l'indique la figure 1 :

1. Déterminer le débit binaire par voie de communication.
2. Montrer que le démodulateur de la figure 1, avec  $\cos(2\pi f_0 t)$  permet de récupérer le canal de parole en bande de base, alors que  $\sin(2\pi f_0 t)$  permet de récupérer le canal de signalisation.

<sup>1</sup>Voir la réf ETSI TS 125 104 V9.3.9 (2010-04) - <http://www.etsi.org>

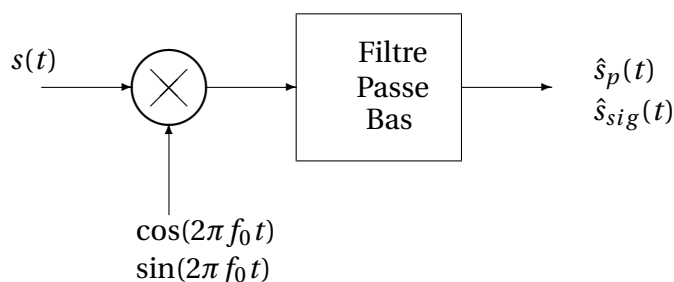


FIGURE 1 – Démodulateur

On peut traiter la liaison montante de l'UMTS comme un système de transmission en bande de base, en « oubliant » la modulation sur fréquence  $f_0$ .

3. Proposer un schéma de transmission point à point pour la parole et pour la signalisation. Indiquer très clairement quel est le rôle de chaque entité de traitement.
4. Calculer la largeur de bande requise pour transmettre parole et signalisation sans interférence entre symboles.
5. Déterminer l'efficacité spectrale du signal émis.
6. Calculer la puissance moyenne requise pour assurer une probabilité d'erreur bit sur le canal de parole,  $P_b \leq 10^{-3}$

Un événement important dans l'environnement radio du téléphone portable, nécessite l'émission de deux fois plus de données de signalisation vers la station de base. Deux solutions sont possibles :

- on fait préemption du canal de parole (c'est à dire on « vole » littéralement la voie de parole) ;
- on double le débit de la voie de signalisation.

7. En supposant que la largeur de bande disponible reste inchangée, déterminer l'ordre de modulation ainsi que l'énergie par bit requis pour la même qualité de service, si la deuxième solution est retenue.

On décide de protéger le voie de parole grâce à un code en bloc linéaire de matrice de check de parité  $H$  définie par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Déterminer les paramètres  $(n, k)$  ce code, ainsi que sa capacité de détection et de correction.

