

Communications Numériques et Théorie de l'Information

Contrôle de Connaissances avec documents¹

Lundi 22 juin - 13h30 à 15h00

Questions de compréhension

1. Définir le débit binaire et la rapidité de modulation d'une source numérique. Pourquoi c'est si important de distinguer ces deux paramètres ?
2. Définir et interpréter l'efficacité spectrale d'une modulation numérique. Comment peut-on estimer l'efficacité spectrale dans le cas d'une modulation linéaire d'amplitude ? De quels paramètres dépend cette efficacité ?
3. Pourquoi la condition de Nyquist est si importante pour la conception du démodulateur ?
4. Le diagramme de l'œil de la figure 1, correspond à une modulation linéaire d'amplitude.

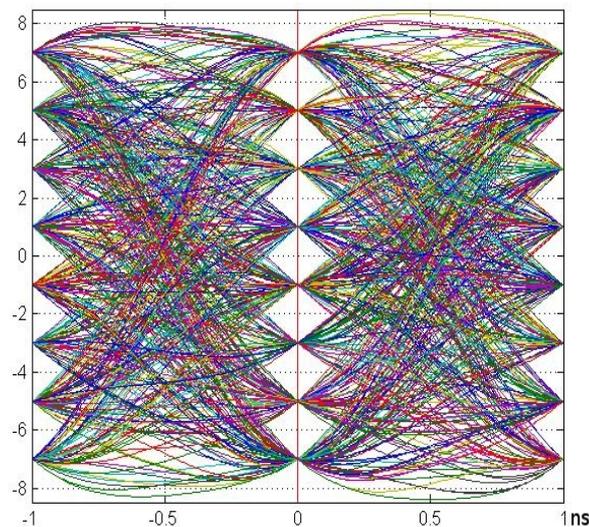


FIGURE 1: Diagramme de l'œil.

¹Solution disponible sur la site de CNTI

Déterminer :

- l'ordre de modulation,
 - le débit binaire,
 - la rapidité de modulation ,
 - s'il s'agit d'une transmission sans IES.
5. Le GSM utilise un filtre de mise en forme à l'émission avec paramètres $B.T = 0.3$. A-t-on de l'IES dans ce cas ? Expliquer.
6. Vrai ou faux ?
- a) le filtre adapté est un filtre de Nyquist ;
 - b) le filtre adapté engendre de l'IES ;
 - c) le filtre adapté annule l'IES du bruit ;
 - d) un filtre adapté peut supprimer l'IES ;
 - e) un filtre de Nyquist est nécessairement adapté ;
 - f) si le filtre d'émission est en Nyquist le filtre adapté l'est aussi ;
 - g) le filtre adapté minimise le probabilité d'erreur à la sortie du démodulateur ;
 - h) le filtre adapté minimise le rapport signal sur bruit ;
 - i) le filtre adapté supprime le bruit.
7. Un système de transmission binaire utilise un filtre de mise en forme à l'émission en racine de Nyquist. Le filtre de réception est adapté au filtre d'émission. Le bruit de canal est additif, gaussien et blanc.
- a) Quelle es la nature spectrale du bruit après le filtre de réception ?
 - b) Quelle est la nature spectrale des échantillons du bruit filtré ?
8. Un codeur de source enlève la redondance de la source, alors qu'un code correcteur d'erreur en rajoute. A quoi bon d'enlever la redondance si après on la rajoute ?
9. Expliquer en quoi consiste la règle de Maximum de Vraisemblance pour décoder un code binaire.
10. La distance minimale d'un code correcteur binaire (n, k) est :
- a) la distance qui minimise la probabilité d'erreur ;
 - b) la plus grande distance entre les deux mots de code le plus fréquemment utilisés ;
 - c) la plus petite distance entre deux mots de code ;
 - d) le nombre de mots de code de poids de Hamming > 1 ;
 - e) $\log_2(n - k)$;

f) 2^{n-k} .

g) $2^n - 2^k$.

Le téléphone de James Bond



Il y a quelques années, à l'issu d'une mission périlleuse, l'agent de sa majesté s'est retrouvé abandonné au milieu du désert du Sahara, sans le moindre espoir de trouver âme qui vive dans plusieurs centaines de kilomètres à la ronde. Après quelques minutes de marche, il a eu la chance de tomber sur une cabine téléphonique en parfait état de marche, qui lui a permis de passer un coup de fil à Londres. Nous avons marché pendant quelques semaines au milieu du désert et nous avons finalement trouvé ladite cabine téléphonique. Elle fonctionne toujours et, en plus, elle permet un accès à l'INTERNET à 10 Mb/s en utilisant une liaison

satellite dédiée. Le système fonctionne autour d'une porteuse à 32GHz dans la bande **Ka**, et dispose d'une largeur de bande en bande de base $B_w = 5.5\text{ MHz}$ pour transmettre l'information (le coût estimé de la ressource largeur de bande utile dans la bande **Ka** est de l'ordre de $100\text{ M}\text{€}/\text{MHz}$).

La liaison descendante du satellite peut être modélisée comme une liaison numérique point à point représentée dans la figure 2.

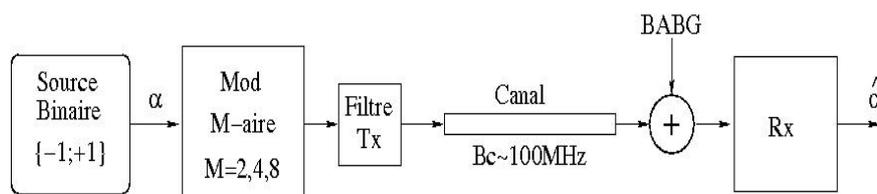


FIGURE 2: Modèle de la liaison descendante de la cabine téléphonique

Le transpondeur du satellite dispose d'un modulateur linéaire d'amplitude avec trois modes de fonctionnement : $M = 2, 4$ et 8 , que l'on peut programmer selon les besoins. Le filtre global du système est en cosinus surélevé avec un *roll-off* α . Le bruit perturbateur, engendré par l'électronique du récepteur, est supposé additif, blanc et gaussien avec densité spectrale de puissance $N_0 = k.T$, où $k = 1.38 \cdot 10^{-23}\text{ J/K}$, est la constante de Boltzman, et T est la température de régime du récepteur (en K), soumise aux fluctuations journalières indiquées dans la figure 3.

1. Déterminer les rapidités de modulation des différents modes de fonctionnement du transpondeur.
2. Déterminer la plus grande valeur de *roll-off* qui permet, dans tous les cas, une transmission sans IES.

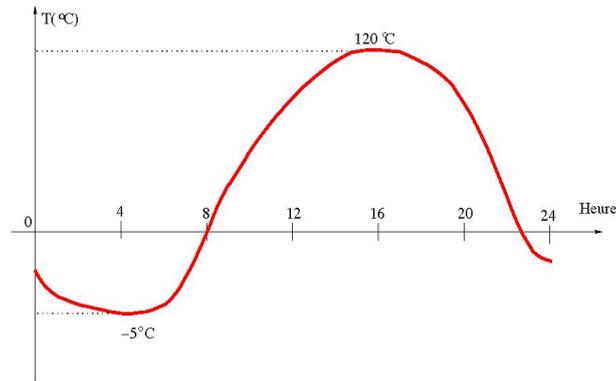


FIGURE 3: Variations de température du récepteur.

3. Calculer l'efficacité spectrale du transpondeur.
4. Proposer une architecture optimale pour le récepteur en expliquant le fonctionnement de chaque entité de traitement.
5. Déterminer le rapport E_b/N_0 pour garantir, dans le pire cas, une qualité de service $P_b \leq 10^{-4}$.
6. Calculer, pour cette qualité de service, l'énergie par bit d'information transmis pour tous les modes de fonctionnement du modulateur.
7. Estimer les gains en qualité de service, pour les trois modes de fonctionnement, entre le jour et la nuit. Quel est l'intérêt d'augmenter l'ordre de modulation pendant la nuit ?
8. Proposer un modèle « canal binaire symétrique » pour le cas $M = 2$ dans la meilleure condition de transmission et déterminer la probabilité de transition du canal.

Pour améliorer les performances du système de transmission, le transpondeur utilise un code correcteur d'erreur. Ce code est composé des mots suivants :

$$C = \{000001, 001011, 010101, 011111, 100111, 101101, 110011, 111001\}$$

Ce code est appelé « code à mots séparés » .

9. Déterminer les paramètres (n, k) de ce code.
10. Selon le règle de décodage à maximum de vraisemblance, déterminer la capacité de détection et de correction de ce code.
11. Expliquer l'appellation « code à mots séparés » , pour ce code et proposer un protocole de décodage.

Bonne chance !



Corrigés

- 1) Selon la définition :

$$R = \frac{1}{T_s},$$

où T_s représente le temps de symbole. On a ainsi :

$$M = 2 \longrightarrow D = 10 \text{ Mb/s} \quad T_s = T_b = \frac{1}{10^7} = 0.1 \text{ } \mu\text{s};$$

$$M = 4 \longrightarrow T_s = 2T_b = 2 \cdot 10^{-7} = 0.2 \text{ } \mu\text{s} \quad R = \frac{1}{0.2 \text{ } \mu\text{s}} = 5 \text{ MBauds};$$

$$M = 8 \longrightarrow T_s = 3T_b = 3 \cdot 10^{-7} = 0.3 \text{ } \mu\text{s} \quad R = \frac{1}{0.3 \text{ } \mu\text{s}} = 3.33 \text{ MBauds}.$$

- 2) Déterminons la largeur de bande minimale requise pour le cas le plus contraignant en terme de largeur de bande :

$$B_{\min} = \frac{1}{2T_b} = 5 \text{ MHz},$$

La largeur de bande disponible étant $B_w = 5.5 \text{ MHz}$, on vérifie facilement que $B_{\min} < B_w$. La transmission binaire est donc possible sur ce canal. Le *roll-off* vaut donc :

$$\frac{1 + \alpha}{2T_b} = B_w;$$

$$\alpha = 10\%.$$

Ce filtre pourra donc être utilisé pour les trois modulateurs.

- 3)

$$\eta = \frac{2 \cdot \log_2 M}{1 + \alpha}.$$

Donc

$$\eta_2 = \frac{2}{1 + \alpha} = \frac{2}{1.1} = 1.81 \text{ b/s/Hz};$$

$$\eta_4 = \frac{4}{1 + \alpha} = \frac{4}{1.1} = 3.63 \text{ b/s/Hz};$$

$$\eta_8 = \frac{6}{1 + \alpha} = \frac{6}{1.1} = 5.45 \text{ b/s/Hz};$$

- 4) Le schéma classique **Filtre adapté** \rightarrow **échantillonneur** \rightarrow **seuil de décision**, sans oublier le synchronisateur et le rôle qu'il joue.

- 5) Le pire cas est celui qui résulte de :

- le rapport E_b/N_0 le plus petit ;

- l'ordre de modulation le plus élevé.

La journée étant bien plus chaude que la nuit, la DSP N_0 peut être calculée selon :

$$N_{0J} = k.T_J,$$

où $T_J = 120^\circ C = 393 K$. D'où :

$$N_{0J} = 1.38.10^{-23}.393 = 5.4.10^{-21} W/Hz.$$

Il résulte intéressant de comparer cette DSP avec celle produite pendant la nuit :

$$N_{0N} = 1.38.10^{-23}.263 = 3.63.10^{-21} W/Hz.$$

En supposant un fort rapport E_b/N_0 et un code de Gray pour le codage des symboles, on obtient :

$$P_b \simeq 2 \cdot \frac{M-1}{M \cdot \log_2 M} \cdot Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1}} \right);$$

$$P_b \simeq 2 \cdot \frac{7}{8.3} \cdot Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0} \frac{9}{63}} \right) = \frac{7}{12} \cdot Q \left(\sqrt{\frac{18 E_b}{63 N_0}} \right).$$

De la table du Formulaire :

$$\sqrt{\frac{18 E_b}{63 N_0}} \simeq 3,$$

d'où,

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{63}{2} = 31.5.$$

Donc

$$E_b = 31.5.5.4.10^{-21} W/Hz = 1.7.10^{-19} J.$$

- 6) Même formule pour $M = 4$ et $M = 2$:

$$M = 4 \rightarrow P_b \simeq \frac{3}{4} \cdot Q \left(\sqrt{\frac{12 E_b}{15 N_0}} \right).$$

$$\sqrt{\frac{12 E_b}{15 N_0}} \simeq 2.4,$$

d'où,

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{63}{2} = 7.2.$$

Donc

$$E_b = 7.2.5.4.10^{-21} W/Hz = 3.8.10^{-20} J.$$

Finalement, pour :

$$M = 2 \rightarrow P_b = Q \left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}} \right).$$

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \simeq 3.7,$$

Donc

$$E_b = 6.8.5.4.10^{-21} \text{ W/Hz} = 3.7.10^{-20} \text{ J.}$$

- 7) Le rapport entre bruit de jour et bruit de nuit et de l'ordre de :

$$\frac{5.4}{3.63} \simeq 1.5$$

En dB ,

$$\frac{5.4}{3.63}(dB) \simeq 1.7 \text{ dB}$$

. Des courbes de performance du Formulaire, on voit clairement, qu'un gain de l'ordre de $1.7dB$, implique un gain de plus d'un facteur 10 pour $M = 2$, de l'ordre d'un facteur 7 pour $M = 4$ et inférieur à un facteur 4 pour $M = 8$. Donc, au delà d'un argument d'efficacité spectrale, les gains en QoS obtenus par le refroidissement de l'ambiance, ne justifient pas le passage à l'ordre supérieur.

- 8)

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_{0N}}}\right),$$

avec l'énergie E_b pour $M = 2$ pendant la journée. Il résulte :

$$p = Q\left(\sqrt{\frac{7.4 \cdot 10^{-20}}{3.63 \cdot 10^{-21}}}\right) = 3.4 \cdot 10^{-6}.$$

- 9) Pour ce code nous avons $|C| = 8 = 2^k \rightarrow k = 3$. En ce qui concerne le nombre de bits du mot de code, à priori $n = 6$, mais... le dernier bit de tous les mots de code est toujours à 1, donc il ne véhicule pas d'info. Il peut être utilisé pour séparer les mots de 5 bits entre eux. On a donc $n = 5$. Il s'agit donc d'un code $(5, 3)$

- 10) Il faut calculer la distance minimale du code :

$$d_H(00000; 00101) = 2$$

$$d_H(00000; 01010) = 2$$

$$d_H(00000; 01111) = 4$$

$$d_H(00000; 10011) = 3$$

$$d_H(00000; 10110) = 3$$

$$d_H(00000; 11001) = 3$$

$$d_H(00000; 11100) = 3$$

$$d_H(00101; 01010) = 4$$

$$d_H(00101; 01111) = 2$$

$$d_H(00101; 10011) = 3$$

$$d_H(00101; 10110) = 3$$

$$d_H(00101; 11001) = 3$$

$$d_H(00101; 11100) = 3$$

$$d_H(01010; 01111) = 2$$

$$d_H(01010, 10011) = 3$$

$$d_H(01010, 10110) = 3$$

$$d_H(01010, 11001) = 3$$

$$d_H(01010, 11100) = 2$$

$$d_H(01111; 10011) = 2$$

$$d_H(01111; 10110) = 3$$

$$d_H(01111; 11001) = 3$$

$$d_H(01111; 11100) = 3$$

$$d_H(10011; 10110) = 2$$

$$d_H(10011; 11001) = 2$$

$$d_H(10011; 11100) = 4$$

$$d_H(0110; 11001) = 3$$

$$d_H(0110; 11001) = 3$$

$$d_H(11001; 11100) = 2$$

Donc, $d_{min} = 2$. Ce code détecte au moins $d_{min} - 1 = 1$ erreur, et ne corrige aucune.

- 11) Parce que le dernier bit est toujours à 1, il peut être utilisé comme délimiteur des mots de code. On décode à MV les 5 premiers bits de chaque pot reçu.