Communications Numériques et Théorie de l'Information

Contrôle de Connaissances avec documents

Jeudi 28 juin - 10h15 à 11h045

I Le multiplex numérique du RTC

On se propose d'étudier le fonctionnement du multiplex téléphonique pour la parole. Chaque conversation téléphonique est numérisée par un convertisseur analogique numérique à 8 kéch/s et 8 bits/éch, soit un débit net de 64 kbits/s. Le commutateur numérique multiplexe dans le temps 24 voies de parole, $U_1, U_2, \ldots U_{24}$ avec un canal de signalisation S à 8 kbits/s pour le contrôle de la communication, sur le même canal de communication de largeur de bande B_C. Le système de multiplexage est représenté dans la figure 1.

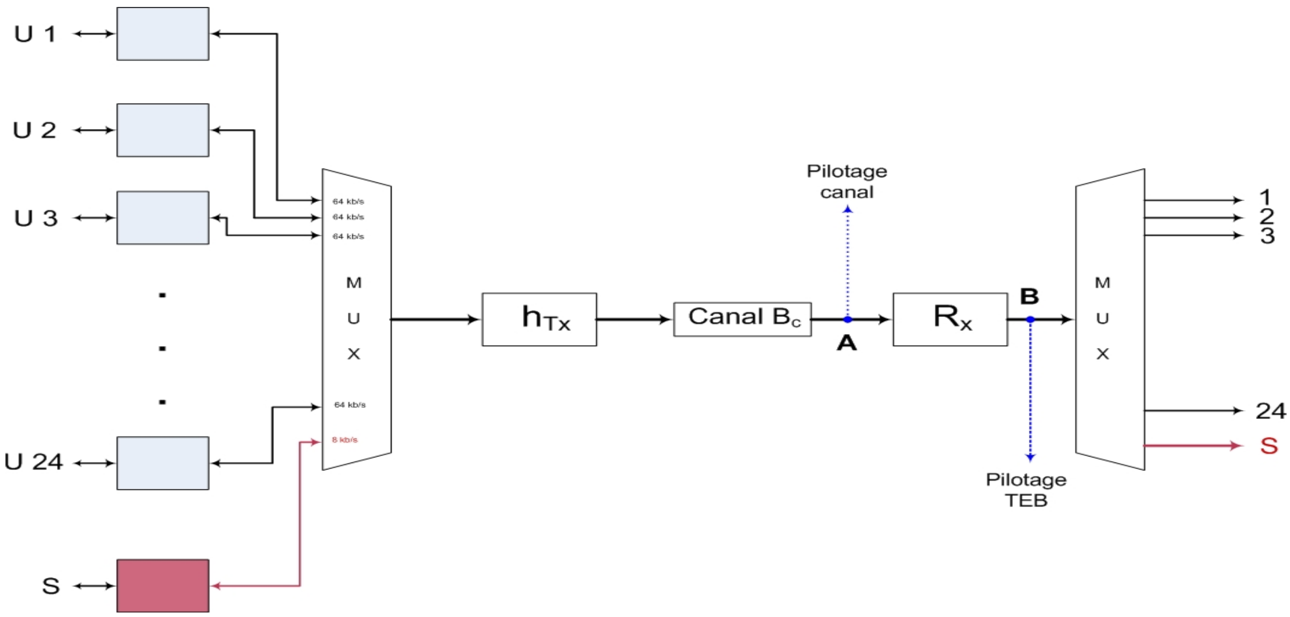

FIG. 1 – Schéma de multiplexage temporel du RTC.

Le système de transmission utilise un filtre de mise en forme globale en cosinus surélevé avec facteur de *roll-off* α. L'alphabet d'émission est $A = \{+1; -1\}$. Le canal est supposé à bruit additif, blanc et gaussien avec densité spectrale de puissance $N_0 = 10^{-10}\ W/Hz$. Pour surveiller le fonctionnement du système, on observe le comportement de la transmission en deux points de pilotage, le premier à la sortie du canal et le deuxième à la sortie du récepteur. Ces deux points sont indiqués **A** et **B** sur la figure 1.

1. Déterminer le débit D global du système. **[0.5 point]**
2. Déterminer la structure du récepteur **Rx** qui minimise la probabilité d'erreur au point **B**. **[2 points]**

3. Sachant que la largeur de bande du canal $B_C = 1MHz$, déterminer la valeur α du *roll-off*, qui garantit une transmission sans IES. **[2 points]**
4. On contrôle la performance du système en construisant le diagramme de l'oeil au point **A** pour un rapport signal sur bruit de 50 dB à la sortie du canal. Lequel de ces cinq diagrammes vous semble correct ? Justifiez votre réponse. **[2 points]**

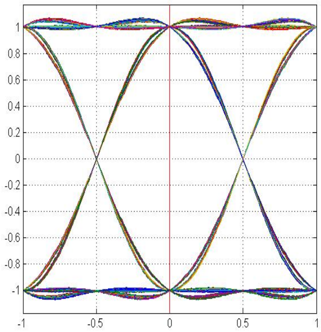

FIG. 1 – DO **A**

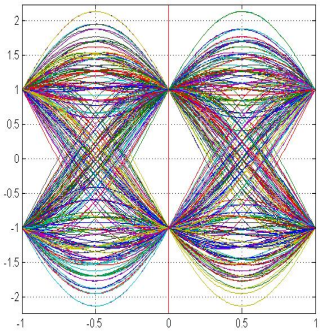

FIG. 2 – DO **B**

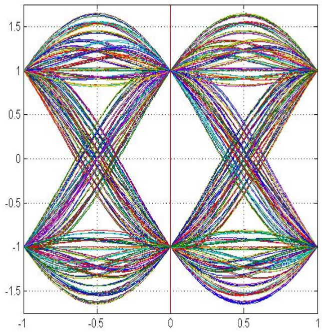

FIG. 3 – DO **C**

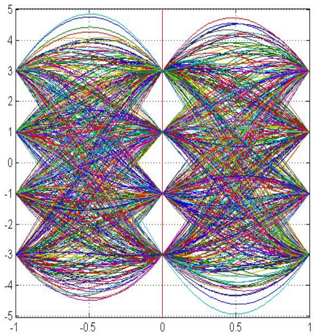

FIG. 4 – DO **D**

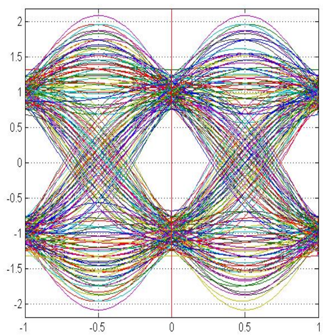

FIG. 5 – DO **E**

5. Calculer la puissance requise pour garantir une $P_b = 10^{-7}$ au point **B**. **[2 points]**
6. Tout d'un coup, la probabilité d'erreur au point **B** augmente à $P_b = 10^{-5}$, alors qu'aucun changement a été détecté au point de pilotage **A**. On construit le diagramme de l'oeil au point **B** et on s'aperçoit qu'il n'a pas changé. Qui peut être responsable de cette perte dans la qualité de service ? Justifier votre réponse. **[3 points]**

Une panne du canal, exige son remplacement en urgence. Malheureusement, les secours disponibles sont de qualité inférieure et la largeur de bande du canal passe de $B_c \rightarrow B_c/2$.

7. Déterminer l'ordre de la modulation et le nouveau facteur de *roll-off* qui garantit une transmission sans IES pour ce nouveau scénario de fonctionnement. **[2 points]**
8. Calculer la pénalité en énergie par bit d'information pour ce nouveau scénario de fonctionnement, si on souhaite entretenir la même qualité de service. **[2 points]**

Ayant constaté la pénalité imposée par la dégradation du canal, on décide d'investir le nécessaire pour revenir aux conditions de transmission d'un canal avec une largeur de bande $B_c = 1\ MHz$.

9. Représenter le modèle discret équivalent du système de transmission, on indiquant clairement la valeur de la probabilité de transition p. Calculer la capacité C de ce canal. **[0.5 points]**

Pour améliorer la qualité de service on utilise un code correcteur d'erreur binaire $(6, 3)$. Si on appelle $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ le mot de données, les bits de redondance p_1, p_2, p_3 sont calculés selon les équations de check de parité suivantes :

$$p_1 = u_1 \oplus u_3,$$

$$p_2 = u_1 \oplus u_2,$$

$$p_3 = u_2 \oplus u_3.$$

Les mots de code $\mathbf{v}$ seront mis sous forme systématique.

10. Lister tous les mots de ce code correcteur. **[0.5 point]**
11. Déterminer sa distance minimale. **[1 point]**
12. Combien d'erreurs détecte-t-il ? Combien il en corrige ? **[0.5 point]**
13. Le message $\mathbf{u} = 011$ est transmis et on observe à la sortie du canal le message $\mathbf{r} = 011010$. Proposer une stratégie de décodage basée sur le critère de Maximum de Vraisemblance pour décoder ce message reçu. **[2 points]**

Bonne chance !

Solutions

I-1)

$$D = 24 \times 64 + 8 = 1.544Mb/s$$

I-2) Filtre de réception avec réponse impulsionnelle $h_{R_x} = h_{T_x}(-t)$, suivi d'un échantillonneur et d'un seuil de décision.

I-3) La largeur de bande minimale qui garantit une transmission sans IES est :

$$B = D/2 = 1.544Mb/S/2 = 772kHz.$$

Le canal a une largeur de bande $B_C = 1MHz > 772MHz$, donc on peut déterminer un *roll-off* > 0.

$$B_C = (1+\alpha)\frac{D}{2} \quad \rightarrow \quad 1\ MHz = (1+\alpha)\ 772\ kHz;$$

$$\alpha = 0.295,$$

roll-off de $\sim 30\%$.

I-4) Le filtre global étant en cosinus surélevé, au point **A** on retrouve un filtre en racine de Nyquist. Il y a donc de l'IES au point **A**. C'est donc le diagramme de l'oeil **E**.

I-5) Au point **B** la proba d'erreur bit vaut :

$$P_b = \mathrm{Q}(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}).$$

Le formulaire des Comms. Nums. indique :

$$Q(x) = 10^{-7} \rightarrow x \sim 5.15.$$

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 5.15 \rightarrow \frac{E_b}{N_0} \cong 13.26.$$

$$P = E_b \times D = 13.26 \times N_0 \times 1.544.10^6 \cong 2\mu W.$$

I-6) Le point **A** n'ayant pas changé de point de fonctionnement, la dégradation ne peut pas venir du canal. Le diagramme de l'oeil en **B** étant le même, la perte de qualité de service n'est pas générée par désadaptation du filtre récepteur. La possible source d'erreur est une perte de synchronisation de l'échantillonneur. Puisqu'il y a de l'IES en dehors des instants idéaux d'échantillonnage, c'est l'interférence entre symboles qui dégrade la performance du système.

I-7) La nouvelle largeur de bande du canal étant $B'_c = 500kHz$, le débit binaire est excessif par rapport à la largeur de bande disponible. Il faut donc ralentir la transmission. On propose une modulation d'amplitude à $M = 4$ état (2 $bits/symb$). Le taux symbole devient :

$$R = \frac{D}{2} = 722\ symb/s.$$

La largeur de bande minimale requise pour assurer une transmission sans IES vaut :

$$B = \frac{R}{2} = 361\ kHz.$$

$B'_c > B$, on peut assurer une transmission sans IES à cette rapidité de modulation. On a donc :

$$B'_c = (1+\alpha)\frac{R}{2} = (1+\alpha)\frac{D}{4} \quad \rightarrow \quad 500\ kHz = (1+\alpha)\frac{1.544.10^6}{4} \quad \rightarrow \alpha = 0,295\ (29,5\%).$$

I-8) Pour le cas M=4 et l'alphabet $A' = \{-3, -1, 1, +3\}$, le formulaire des Comms. Nums. prédit une Probabilité d'erreur en symbole qui vaut :

$$P_{e_s} \;=\; 2\frac{M-1}{M}\;Q(\sqrt{\frac{2E'_b}{N_o}\frac{3\log_2 M}{M^2-1}}),$$

où E'_b représente la nouvelle énergie par bit d'information requise pour assurer la P_{e_s}. Si on utilise un code de Gray pour coder les bits sur les symboles et à fort rapport signal sur bruit, la probabilité d'erreur en symbole est reliée à la probabilité d'erreur en bit par :

$$P_b \cong \frac{P_{e_s}}{\log_2 M},$$

d'où on déduit la P_{e_s} cible :

$$P_{e_s} = 2.10^{-7}.$$

Un peu d'algèbre aboutit à :

$$\mathrm{Q}(x) = 1.33\ 10^{-7}.$$

Du formulaire :

$$x \cong 5.15 \;\rightarrow\; E'_b \cong 33.N_0.$$

On a donc :
- cas binaire : $M = 2 \;\rightarrow\; E_b \cong 13.26 \times N_0$;
- cas quaternaire : $M = 4 \;\rightarrow\; E'_b \cong 33 \times N_0$.

$$E'_b \cong 2.5E_b,$$

c'est à dire une pénalité de l'ordre de 4 dB en plus d'énergie !

I-9) Il s'agit d'un modèle BSC.

$$C_{CBS} = 1 - H_2(p)$$

.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[r] \arrow[dr] & 0 & \\ X & & & Y \\ & 1 \arrow[r] \arrow[ur] & 1 & \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} P(y=0|x=0) &= 1-p; \\ P(y=1|x=0) &= p; \end{aligned}$$

avec $p = P_b = 10^{-7}$. La capacité de ce canal vaut :

$$C_{CBS} = 1 - H_2(p) = 1 - 2.5.10^{-6} \cong 1\ bit$$

.

I-10)

v_1	0	0	0	0	0	0
v_2	0	0	1	1	0	1
v_3	0	1	0	0	1	1
v_4	0	1	1	1	1	0
v_5	1	0	0	1	1	0
v_6	1	0	1	0	1	1
v_7	1	1	0	1	0	1
v_8	1	1	1	0	0	0

I-11)

$$d_{min} = 3$$

I-12)

$$DET = d_{min} - 1 = 2.$$

$$CORR = \lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \rfloor = 1.$$

I-13) Le message transmis est :

$$\mathbf{v} = 011110.$$

Le message reçu est :

$$\mathbf{r} = (011010),$$

lequel n'appartient pas à l'ensemble des mots de code, donc erreur, de transmission. Puisque ce code corrige une erreur, on fera l'hypothèse qu'une seule erreur de transmission c'est produite, et selon le critère MV, il faudra chercher le mot de code le plus proche. On peut ainsi calculer la distance de Hamming du mot reçu à **tous** les mots de code.

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^1) = d_H(011010, 000000) = 3$$

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^2) = d_H(011010, 001101) = 4$$

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^3) = d_H(011010, 010011) = 2$$

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^4) = d_H(011010, 011110) = 1 \star$$

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^5) = d_H(011010, 100110) = 4$$

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^6) = d_H(011010, 101011) = 3$$

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^7) = d_H(011010, 110101) = 5$$

$$d_H(\mathbf{r}; \mathbf{v}^8) = d_H(011010, 111000) = 2,$$

D'où le mot qui se trouve à la plus petite distance du mot reçu est :

$$\hat{\mathbf{v}} = 011110 \;\rightarrow\; \hat{\mathbf{u}} = 011,$$

et l'erreur de transmission est corrigée.