

Communications Numériques et Théorie de l'Information Complément d'Exercices - 2013

•

I. Étude d'une chaîne de transmission numérique

Nous allons étudier les fonctions d'une chaîne de transmission numérique. La figure 1 représente la partie « émetteur » de la chaîne.

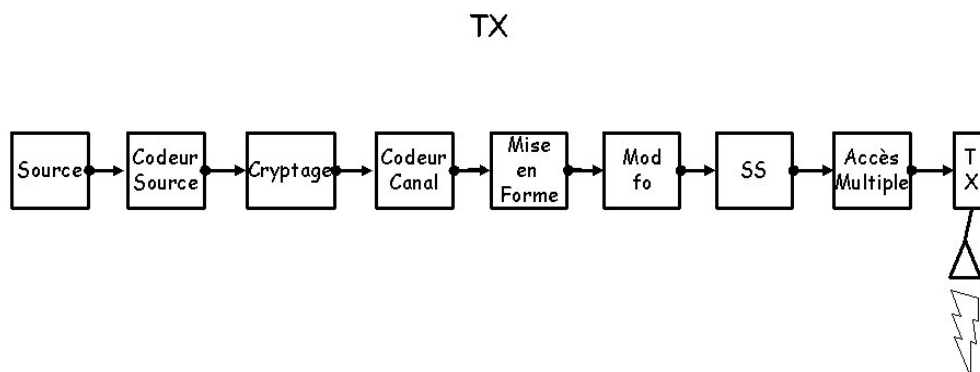


FIGURE 1: Schéma d'un émetteur numérique.

Les questions suivantes vous permettront de revoir quelques idées fondamentales.

1. Définir une source numérique et donner quelques exemples.
2. Une source numérique peut être engendrée à partir d'une source analogique par conversion analogique / numérique (A/N) : la parole numérisée par exemple. Estimer le débit binaire d'information d'un convertisseur A/N pour la parole.
3. Quel est le rôle d'un codeur de source ?
4. Apparemment l'unité de chiffrement de la figure 1 joue un rôle très important dans un système numérique. Pourquoi ?
5. En rajoutant de la redondance, le codeur de canal protège l'information des effets du canal. Quelle est la différence par rapport au chiffrement ?

6. Paradoxalement, le codeur de source élimine la redondance alors que le codeur de canal en rajoute. Bizarre, non ? Expliquer.
7. Expliquer le rôle de l'unité de mise en forme et du modulateur. Pourquoi doit-on faire appel à ces unités ?
8. Indiquer clairement dans quelles unités de la figure 1, l'information est traitée sous forme « numérique » et dans quelles sous forme « analogique ».
9. Quelles unités de traitement, du schéma de la figure 1, sont optionnelles ?
10. Représenter le schéma d'un récepteur adapté à cette chaîne de transmission. Expliquer le fonctionnement de chaque unité en faisant référence à la chaîne d'émission.

II. Débit binaire et rapidité de modulation

1. Définir *Débit Binaire* et *Rapidité de Modulation*.
2. Une source S engendre des messages appartenant à un alphabet $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, toutes les T secondes. On décide de transmettre ces messages en les groupant par paquets de 4. Chaque paquet sera représenté par un signal différent de durée finie $4T$. Combien de signaux différents faudra-t-il choisir pour représenter tous les paquets ?
3. On considère, deux sources numériques différentes S_A et S_B . S_A engendre des messages d'un alphabet $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$ à la vitesse d'un message toutes les $T_A \mu s$. S_B pour sa part engendre des messages issus d'un alphabet $B = \{\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ à la vitesse $T_B = T_A$.
 - a) Calculer la rapidité de modulation de S_A et S_B .
 - b) En supposant un choix de représentation binaire pour les messages issus de S_A et de S_B , calculer le débit binaire D_A et D_B de chaque source.
On construit à partir de S_A et de S_B une nouvelle source S formée par tous les couples (x_i, y_j) avec $x_i \in S_A$ et $y_j \in S_B$.
 - c) Calculer la rapidité de modulation et le débit binaire de cette nouvelle source.

III. Étude de $s(t)$

1. Écrire l'expression d'un signal $s(t)$ modulé numériquement en amplitude par une source S , M-aire. Rappeler les hypothèses réalisées.
2. Calculer la fonction d'autocorrélation de $s(t)$.
3. Montrer de $R_{ss}(t; \tau)$, n'est pas stationnaire .

4. Montrer de $R_{ss}(t; \tau)$, est périodique en t de période T .

Complément - La formule de Bennett

Il est bien connu qu'on peut calculer la densité spectrale de puissance $S_{ss}(f)$ grâce au théorème de Wiener-Kintchine étendu aux processus cyclostationnaires (voir le poly sur la DSP disponible sur le site)

La fonction d'autocorrélation \mathbf{R}_{ss} définie comme la moyenne sur une période, vaut :

$$\mathbf{R}_{ss}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T E[s(t) \cdot s^*(t - \tau)] dt.$$

Ceci revient à calculer :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ss}(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) \cdot \sum_n \int_0^T h(t - nT) \cdot h^*(t - nT + kT - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) \cdot \sum_n \int_{-nT}^{-(n-1)T} h(t) \cdot h^*(t - \tau + kT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot h^*(t - (\tau - kT)) dt. \end{aligned}$$

Soit $\hat{h}(t) = h(-t)$, dont sa transformée de Fourier vaut $\text{TF}\{H^*(f)\}$, alors on obtient :

$$\mathbf{R}_{ss}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) \cdot (h * \hat{h})(\tau - kT).$$

D'après le théorème de Wiener-Kintchine étendu, le spectre $S_{ss}(f) = \text{TF}\{\mathbf{R}_{ss}(\tau)\}$, d'où :

$$\begin{aligned} S_{ss}(f) &= \int \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) \cdot (h * \hat{h})(\tau - kT) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) e^{-2j\pi kfT} \cdot \int (h * \hat{h})(\tau - kT) e^{-2j\pi f(\tau - kT)} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) e^{-2j\pi kfT} \cdot \int (h * \hat{h})(t) e^{-2j\pi ft} dt \end{aligned}$$

Vu que le premier facteur,

$$\sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) e^{-2j\pi kfT},$$

est la densité spectrale de puissance des symboles, $S_{aa}(f)$, et que le deuxième facteur :

$$\text{TF}\{h * \hat{h}\} = H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2,$$

le spectre de $s(t)$ est donné par :

$$S_{ss}(f) = \frac{1}{T} |H(f)|^2 S_{aa}(f).$$

Cette expression est connue sous le nom de **Formule de Bennett**.

IV. Spectre d'un signal modulé RZ/AMI

On considère un message binaire dont les symboles a_k sont i.i.d. et équiprobables. Ce message est modulé linéairement à l'aide d'une forme d'onde RZ (« Retour à Zéro »)

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où T est la période symbole.

1. Calculer le spectre du signal modulé dans les deux cas suivants:

- a) $a_k = \pm a$.
- b) $a_k = 0$ ou $2a$.

2. Commenter la présence éventuelle de raies spectrales.

Les symboles binaires sont maintenant préalablement transformés par « codage bipolaire » (AMI, *Alternate Marked Inversion*) avant d'être modulés:

$$\begin{cases} \alpha_k = 0 \implies a_k = 0 \\ \alpha_k = 1 \implies a_k = \pm a \text{ alternativement} \end{cases}$$

de sorte que les a_k ne sont plus i.i.d.

3. Calculer le spectre du signal modulé AMI.

V. Analyse d'un système d'accès multiple réparti dans le temps

On doit concevoir un système de transmission basé sur la technique d'accès multiple réparti dans le temps (TDMA). Le système est prévu pour multiplexer 4 voies de communication (ordre 4) avec une possible évolution vers l'ordre 8. Chaque voie de communication transporte 64 bits d'information. La durée d'un cycle complet TDMA (trame TDMA) est $T_{TDMA} = 128 \mu\text{sec}$.

1. Calculer le débit binaire par utilisateur (D_U) et le débit net de canal (D_C).

Le canal a une largeur de bande $B_C = 75\% D_C$. On utilise une mise en forme globale en cosinus surélevé avec un *rolloff* α .

2. Peut-on réaliser cette transmission sans Interférence entre Symboles (IES) ? Si c'est le cas, déterminer le *rolloff* maximal. Dans le cas contraire, déterminer la taille minimale de l'alphabet S_4 qui garantit une transmission sans IES.

On veut analyser maintenant l'évolution vers l'ordre 8. Chaque voie de communication transporte toujours 64 bits d'information.

3. Peut-on réaliser cette transmission sans IES en utilisant le même filtre de mise en forme que celui utilisé pour l'ordre 4 ? Si c'est le cas, déterminer le *rolloff* maximal. Dans le cas contraire, déterminer la taille minimale de l'alphabet S_8 qui garantit une transmission sans IES.
-

VI. Deux serveurs INTERNET

On veut relier deux serveurs INTERNET **A** et **B** grâce à une liaison numérique à haut débit utilisant une signalisation bipolaire. Le débit minimum est de 100 Mb/s. Pour cela on utilise un filtre de mise en forme en émission en racine de cosinus surélevé avec *rolloff* α et un filtre adapté en réception. Le canal a une largeur de bande $B_c = 90\text{MHz}$.

1. Déterminer la plus grande valeur du paramètre α pour avoir une transmission sans IES.

Supposons dans la suite que le serveur **A** double le nombre de clients. Cela représente un nouveau débit net entre serveurs de 200 Mb/s.

2. Déterminer la plus grande valeur du paramètre α pour avoir une transmission sans IES.
-

VII. Transmission sans IES

Un système de transmission numérique en bande de base à 20 kb/s utilise un filtre global de mise en forme en cosinus surélevé avec un *roll-off* α . La largeur de bande du canal $B_C = 15\text{kHz}$.

1. La valeur maximale de α qui garantit une transmission sans Interférence Entre Symboles vaut :
 - $\alpha = 100\%$;
 - $\alpha = 20\%$;
 - $\alpha = 15\text{kHz}/20\text{kHz}$;
 - $\alpha = 0.5$;
 - $\alpha = +\infty$;
 - aucune des valeurs précédentes.
-

VIII. Codage différentiel

On souhaite mettre en œuvre un système numérique adapté à une source binaire de 1 Mb/s, sans mémoire avec des états équiprobables. Le système proposé module l'amplitude d'un filtre de mise en forme en bande de base avec réponse impulsionnelle $h(t)$, selon la règle suivante :

- si « 0 », alors $a_k = +1$,
- si « 1 », alors $a_k = -1$.

La réponse impulsionnelle choisie s'écrit sous la forme :

$$h(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right) - \text{sinc}\left(\frac{t-T}{T}\right).$$

Le signal émis $s(t)$ vaut :

$$s(t) = \sum_k a_k h(t - kT),$$

1. Combien vaut le temps de symbole T ?
2. Calculer $|H(f)| = |\text{TF}\{h(t)\}|$.
3. Estimer la largeur de bande B_W de $s(t)$.
4. Est-ce que cette mise en forme en bande de base vérifie le critère de Nyquist ? Conclure s'il y a ou non de l'IES.
5. Proposez un algorithme de décodage pour cette mise en forme.
6. Pour tester la validité de la mise en forme on a construit le DO de $s(t)$. Parmi les DO de la figure 2, quel est celui qui correspond à ce système ?

IX. Les yeux en action

Pour les diagrammes de l'oeil de la figure 3, déterminer :

1. rapidité de modulation ;
2. l'ordre de la modulation ;
3. la résistance à une erreur de synchronisation.

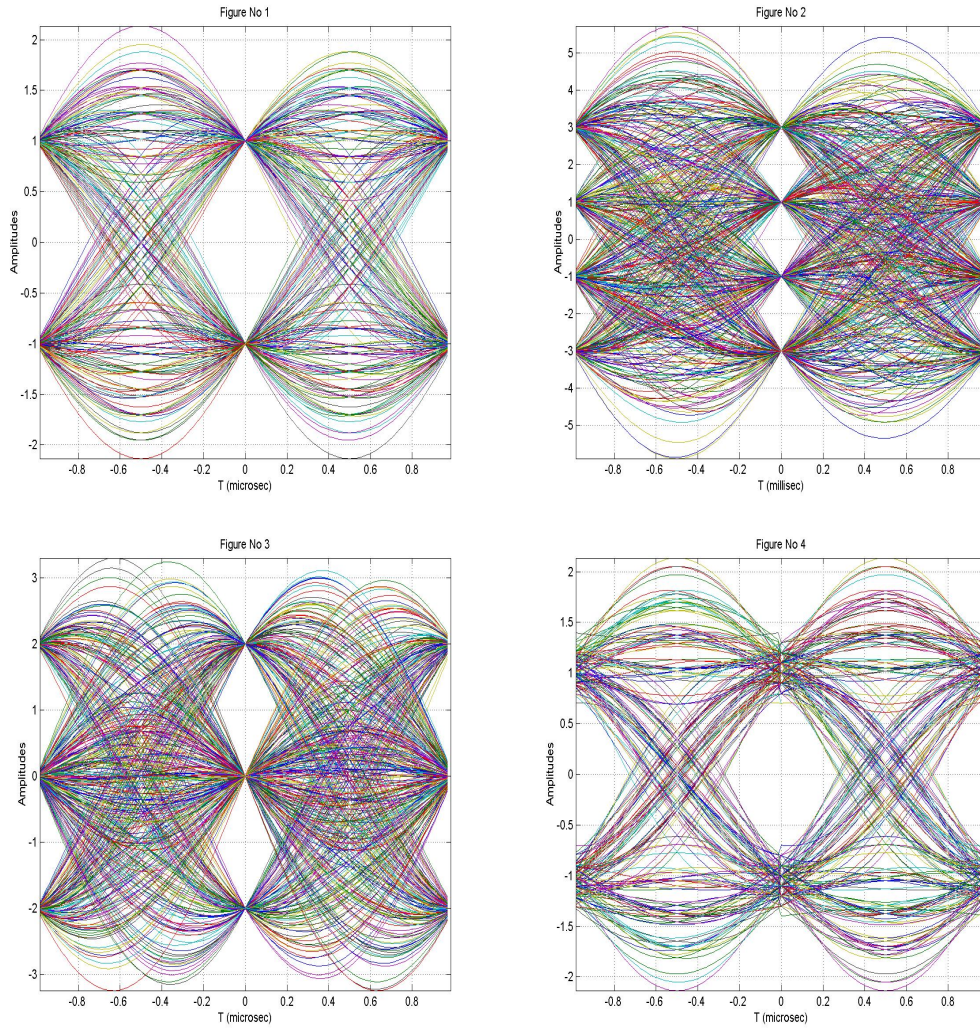


FIGURE 2: Diagrammes de l'œil

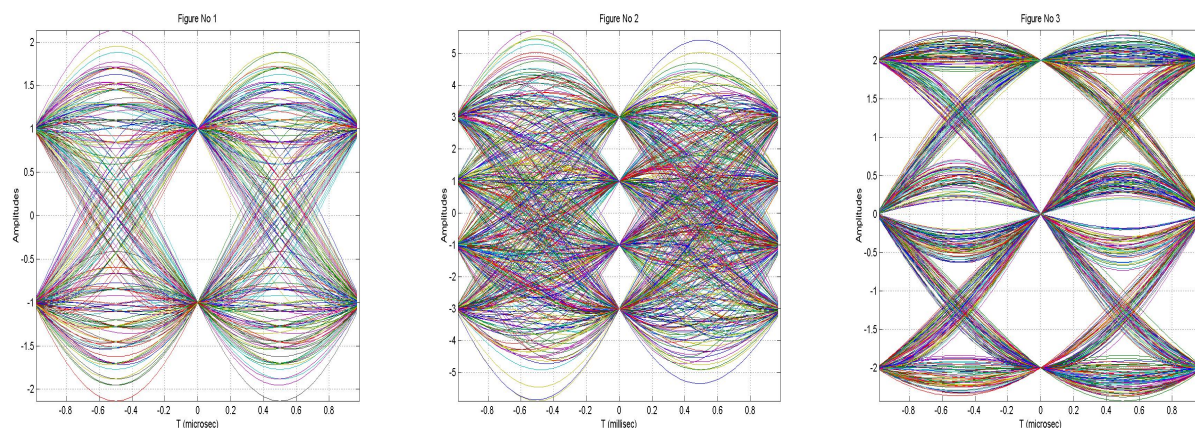


FIGURE 3: Diagrammes de l'œil.

X. Répéteur numérique

Une transmission numérique est réalisée sur le réseau téléphonique fixe, entre deux villes séparées de 600 km. Pour augmenter la qualité de la transmission, un répéteur numérique est installé tous les 50 km. Chaque répéteur détecte la séquence binaire reçue et retransmet le signal après amplification. Le fil électrique est supposé avec une largeur de bande de 3 kHz, et chaque répéteur travaille avec un rapport $E_b/N_0 = 15dB$.

1. Déterminer le débit binaire net auquel on peut réaliser cette transmission sans IES.
2. Quelle est la performance globale du système?

XI. Performances d'un système numérique

1. Une transmission numérique est réalisée sur un canal à BABG. En sortie de l'échantillonneur on obtient une séquence de variables aléatoires $y_k \forall k$ qui contient la séquence des messages émis par la source. Quelle est la loi de probabilité d'un échantillon y_k à la sortie du filtre adapté? Le bruit est-il blanc à la sortie du filtre adapté?
2. Dans un système de modulation BPSK optimisé pour un canal stationnaire, le canal se met tout à coup à se dégrader, produisant un IES de distorsion maximale $D_{\max} = 0.5$. Évaluer la perte maximale en rapport signal-à-bruit qui en résulte sur les performances du démodulateur.
3. On considère une modulation binaire $a_k \in \{A_0, A_1\}$ avec des symboles i.i.d., **non-équiprobables**.
 - a) Écrire le critère (MAP) de détection optimale.
 - b) Montrer que le détecteur optimal est un détecteur à seuil et calculer le seuil optimal en fonction des probabilités des symboles.

c) Retrouver le cas équiprobable.

XII. Le multiplex numérique du RTC

On se propose d'étudier le fonctionnement du multiplex téléphonique pour la parole. Chaque conversation téléphonique est numérisée par un convertisseur analogique numérique à 8 kéch/s et 8 bits/éch, soit un débit net de 64 kbits/s. Le commutateur numérique multiplexe dans le temps 24 voies de parole, U_1, U_2, \dots, U_{24} avec un canal de signalisation S à 8 kbits/s pour le contrôle de la communication, sur le même canal de largeur de bande B_c . Le système de multiplexage est représenté dans la figure 4.

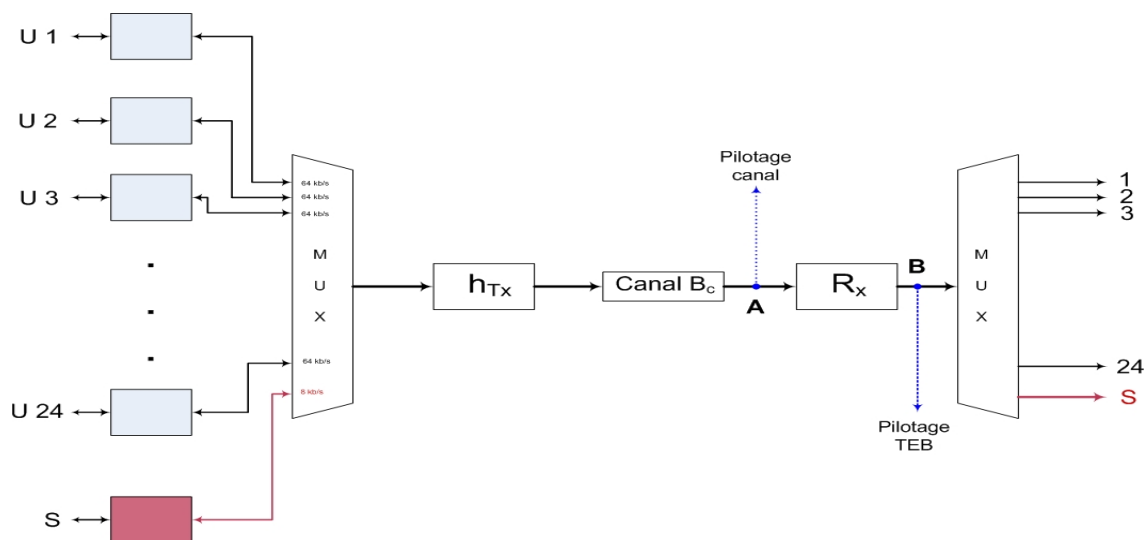
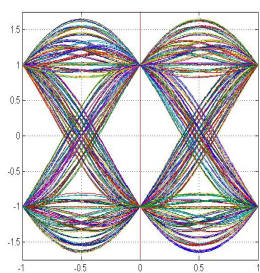
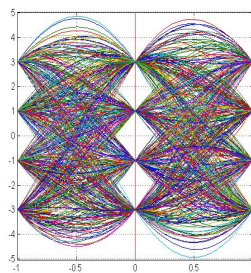


FIGURE 4: Schéma de multiplexage temporel du RTC.

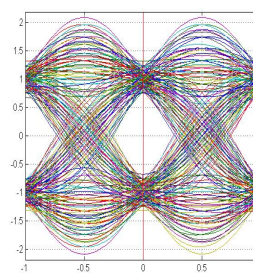
Le système de transmission utilise un filtre de mise en forme globale en cosinus surélevé avec facteur de *roll-off* α . L'alphabet d'émission est $\mathcal{A} = \{+1; -1\}$. Le canal est supposé à bruit additif, blanc et gaussien avec densité spectrale de puissance $N_0 = 10^{-10} \text{ W/Hz}$. Pour surveiller le fonctionnement du système, on observe le comportement de la transmission en deux points de pilotage, le premier à la sortie du canal et le deuxième à la sortie du récepteur. Ces deux points sont indiqués **A** et **B** sur la figure 4.



(a)



(b)



(c)

1. Déterminer le débit D global du système.
2. Déterminer la structure du récepteur \mathbf{R}_x qui minimise la probabilité d'erreur au point **B**.
3. Sachant que la largeur de bande du canal $B_C = 1\text{MHz}$, déterminer la valeur α du *roll-off*, qui garantit une transmission sans IES.
4. On contrôle la performance du système en construisant le diagramme de l'oeil au point **A**. Lequel de ces diagrammes vous semble correct ? Justifiez votre réponse.
5. Calculer la puissance requise pour garantir une $P_b = 10^{-7}$ au point **B**.
6. Tout d'un coup, la probabilité d'erreur au point **B** augmente à $P_b = 10^{-5}$, alors qu'aucun changement a été détecté au point de pilotage **A**. On construit le diagramme de l'oeil au point **B** et on s'aperçoit qu'il n'a pas changé. Qui peut être responsable de cette perte dans la qualité de service ? Justifier votre réponse.

Une panne du canal, exige son remplacement en urgence. Malheureusement, les secours disponibles sont de qualité inférieure et la largeur de bande du canal passe de $B_C \rightarrow B_C/2$.

7. Déterminer l'ordre de la modulation et le nouveau facteur de *roll-off* qui garantit une transmission sans IES pour ce nouveau scénario de fonctionnement.
8. Calculer la pénalité en énergie par bit d'information pour ce nouveau scénario de fonctionnement, si on souhaite entretenir la même qualité de service.

XIII. Quelques questions de compréhension

1. Pourquoi c'est si important de pouvoir disposer des raies spectrales dans le spectre d'un signal modulé numériquement ?

-
2. Le GSM utilise un filtre de mise en forme à l'émission avec paramètres $B.T = 0.3$. A-t-on de l'IES dans ce cas ? Expliquer.
 3. Vrai ou faux ?
 - a) le filtre adapté est un filtre de Nyquist ;
 - b) le filtre adapté engendre de l'IES ;
 - c) le filtre adapté annule l'IES du bruit ;
 - d) un filtre adapté peut supprimer l'IES ;
 - e) un filtre de Nyquist est nécessairement adapté ;
 - f) si le filtre d'émission est en Nyquist le filtre adapté l'est aussi ;
 - g) le filtre adapté minimise la probabilité d'erreur à la sortie du démodulateur ;
 - h) le filtre adapté minimise le rapport signal sur bruit ;
 - i) le filtre adapté supprime le bruit.
 4. Un système de transmission binaire utilise un filtre de mise en forme à l'émission en racine de Nyquist. Le filtre de réception est adapté au filtre d'émission. Le bruit de canal est additif, gaussien et blanc.
 - a) Quelle est la nature spectrale du bruit après le filtre de réception ?
 - b) Quelle est la nature spectrale des échantillons du bruit filtré ?
-

XIV. Quelques questions de compréhension

1. Un codeur de source enlève la redondance de la source, alors qu'un code correcteur d'erreur en rajoute. A quoi bon d'enlever la redondance si après on la rajoute ?
 2. Expliquer en quoi consiste la règle de Maximum de Vraisemblance pour décoder un code binaire.
 3. La distance minimale d'un code correcteur binaire (n, k) est :
 - a) la distance qui minimise la probabilité d'erreur ;
 - b) la plus grande distance entre les deux mots de code le plus fréquemment utilisés ;
 - c) la plus petite distance entre deux mots de code ;
 - d) le nombre de mots de code de poids de Hamming > 1 ;
 - e) $\log_2(n - k)$;
 - f) 2^{n-k} .
 - g) $2^n - 2^k$.
-

XV. Check de parité paire ou impaire

Un code de *check* de parité, consiste à rajouter un bit de plus au mot de donnée de telle façon que la somme **XOR** des bits du mot de code soit toujours nulle. Ainsi pour un mot de donnée, avec $k = 5$:

$$d = 01011,$$

le mot de code correspondant est :

$$c = 010111.$$

D'ailleurs, dans cet exemple on a respecté la forme « systématique » du mot de code, bien qu'on aurait pu insérer le bit de parité dans n'importe quelle position du mot de code, par exemple :

$$c = 011011.$$

La vérification de la parité se réalise par :

$$\sum_i d_i = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0 \checkmark.$$

Cette condition de parité revient à avoir un nombre pair de bits dans chaque mot de code. Pour cette raison on parle de *parité paire*. Il est tout à fait envisageable, de rajouter un bit de parité de telle façon que la somme **XOR** des bits du mot de code soit toujours 1. On parle dans ce cas de *parité impaire*. En revenant sur l'exemple précédent :

$$d = 01011, \rightarrow c = 010110.$$

1. Construire un code de *check* parité paire $C(3,2)$. Lister tous les mots de code. Déterminer la distance minimale du code ainsi construit.
2. Id., mais avec parité impaire.
3. Lequel des deux codes vous choisiriez ?

XVI. Étude d'un code correcteur

On considère le code en bloc linéaire \mathcal{C} , de matrice génératrice G :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les paramètres n , longueur du mot de code, et k , longueur du mot d'information, de \mathcal{C} .

2. Lister tous les mots de \mathcal{C} et trouver la distribution des poids. Déterminer la capacité de détection et de correction de \mathcal{C} .
3. Pour améliorer les performances du code \mathcal{C} , on décide de construire un nouveau code \mathcal{C}' , en supprimant tous les mots de \mathcal{C} de poids impair. Lister les mots de \mathcal{C}' . Déterminer les nouveaux paramètres n' et k' de ce nouveau code.
4. Le code \mathcal{C}' , est-il linéaire ? Déterminer la capacité de détection et de correction de \mathcal{C}' .
5. Si le code \mathcal{C}' est linéaire, trouver une matrice génératrice G' .

XVII. Code et matrice H de parité

Soit un code C , avec matrice de check de parité H , de la forme :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les paramètres (n, k) de C .
2. Est-ce que les messages suivants sont des mots de code de C ?

$$m = (111001)$$

$$m^* = (100110)$$

3. Déterminer une matrice génératrice G de C .
4. Lister tous les mots de C .
5. Déterminer la distance minimale de C .

XVIII. Analyse de la performance du code de Hamming (7,4)

On se propose d'étudier la performance du code de Hamming (7,4). Les colonnes de la matrice de check de parité H de ce code est constituée de tous les triplets de bits non nuls. Il y en a 7 triplets non nuls :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Sous forme systématique, on obtient :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice génératrice G de ce code
2. Calculer tous les mots de code de G .
3. Calculer les poids des mots de codes. Déduire sa distance minimale. Trouver le spectre des poids.
4. Calculer la probabilité de détecter une erreur.
5. Si la probabilité de transition du canal $p < 1/2$, proposer un algorithme de décodage simple et calculer la probabilité d'erreur. Comparer cette probabilité pour $n = 3$ et $n = 7$.
6. Dans le cas où $p = 10^{-2}$, calculer la capacité du canal.
7. Enoncer, pour cet exemple, le théorème de codage de canal de Shannon.
8. Comparer, pour les codes à répétition, $n = 3$ et $n = 7$, la performance par rapport à la limite préconisée par le théorème de Shannon.

XIX. Contrôle de connaissances - 2010 ★

A. Questions de compréhension

1. L'entropie d'une source binaire avec $Pr\{0\} = p$, est déterminée par la fonction $H_2(p)$, définie en cours selon :

$$H_2(p) = -p \log_2(p) - (1-p) \log_2(1-p).$$

Bien connue depuis le XVIII^e siècle, l'approximation de Stirling, établit :

$$x! \simeq x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}.$$

En utilisant les deux premiers termes de l'approximation de Stirling prouvez que les coefficients binomiaux $\binom{N}{n}$, vérifient :

$$\binom{N}{n} \simeq 2^{N \cdot H_2(n/N)}.$$

2. Un système de transmission numérique, binaire, bipolaire, utilise un signal modulé en amplitude du type :

$$s(t) = \sum_k a_k h(t - kT),$$

où $a_k = \pm 1$, T est la durée d'un symbole binaire, et $h(t)$ est le filtre réel de mise en forme en bande de base.

Vrai ou faux(Justifier vos réponses.)

« La densité spectrale de puissance de $s(t)$ dépend » :

- du débit binaire ;
- l'atténuation du canal ;
- de la corrélation entre les symboles de source et les amplitudes a_k ;
- du filtre de mise en forme $h(t)$;
- de la corrélation des amplitudes a_k ;
- du filtre « inverse » $1/h(t)$;
- de la densité spectrale de puissance du bruit.

- Énoncer le critère de Nyquist appliqué à un système de transmission numérique modulé en amplitude, qui utilise un filtre global de mise en forme $R(f)$. Pourquoi ce critère est si important ?
- Un système de transmission numérique utilise un filtre global en cosinus surélevé avec *roll-off* α sur un canal à bruit gaussien de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Ce système peut fonctionner avec plusieurs ordres de modulation : $M = 2, 4, 8, 16$.
 - Définir et calculer l'efficacité spectrale η en fonction de M ;
 - calculer le rapport E_b/N_0 requis pour atteindre une $P_b = 10^{-5}$;
 - évaluer la pénalité en énergie en fonction de l'efficacité spectrale.
- Prouvez que pour tout code en bloc linéaire de paramètres (n, k) , la distance de Hamming minimale de C , est le plus petit poids de Hamming des mots de code.
- Soit un code en bloc linéaire de matrice génératrice G :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Est-il systématique ? Déterminer une borne supérieure de la distance minimale de ce code.

B. Étude de la couche physique de l'UMTS

Le système UMTS utilise, pour la liaison montante, une technique de transmission binaire bipolaire, constitué par deux voies de communication en quadrature. Le principe est très simple : une voie de parole numérisée module en amplitude un filtre de mise en forme à l'émission $h(t)$ en racine cosinus surélevé avec un *roll-off* de 22%¹. La durée d'un symbole binaire est :

$$T \sim 0.26042 \text{ sec.}$$

Cette voie engendre un signal modulé $s_p(t)$. Au même temps, le terminal utilisateur engendre une voie de signalisation numérique qui module en amplitude le même filtre de mise en forme à l'émission $h(t)$. Cette voie est à l'origine d'un deuxième signal modulé $s_{sig}(t)$. Ces deux signaux vont être multiplexés en fréquence, sur le même signal porteur, dans la bande de 1.92 à 1.98 selon :

$$s(t) = s_p(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + s_{sig}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t).$$

Dans la suite on supposera que le système UMTS fonctionne en présence d'un bruit additif, blanc et gaussien de densité spectrale de puissance $N_0 = 10^{-10}$ / . En réception, le démultiplexage est réalisé à l'aide de deux multiplicateurs synchrones ($\cos(2\pi f_0 t)$ ou bien $\sin(2\pi f_0 t)$) suivis d'un filtre passe-bas comme l'indique la figure 1 :

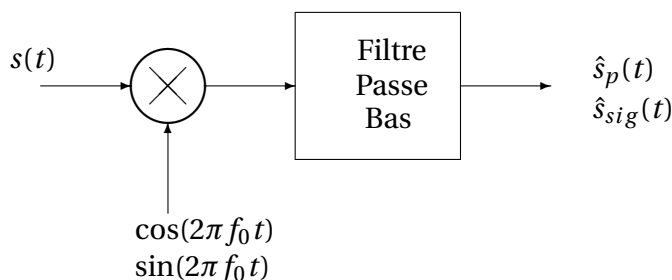


FIGURE 1: Démodulateur

1. Déterminer le débit binaire par voie de communication.
2. Montrer que le démodulateur de la figure 1, avec $\cos(2\pi f_0 t)$ permet de récupérer le canal de parole en bande de base, alors que $\sin(2\pi f_0 t)$ permet de récupérer le canal de signalisation.

On peut traiter la liaison montante de l'UMTS comme un système de transmission en bande de base, en « oubliant » la modulation sur fréquence f_0 .

3. Proposer un schéma de transmission point à point pour la parole et pour la signalisation. Indiquer très clairement quel est le rôle de chaque entité de traitement.
4. Calculer la largeur de bande requise pour transmettre parole et signalisation sans interférence entre symboles.

¹Voir la réf ETSI TS 125 104 V9.3.9 (2010-04) - <http://www.etsi.org>

5. Déterminer l'efficacité spectrale du signal émis.
6. Calculer la puissance moyenne requise pour assurer une probabilité d'erreur bit sur le canal de parole, $P_b \leq 10^{-3}$

Un événement important dans l'environnement radio du téléphone portable, nécessite l'émission de deux fois plus de données de signalisation vers la station de base. Deux solutions sont possibles :

- on fait préemption du canal de parole (c'est à dire on « vole » littéralement la voie de parole) ;
 - on double le débit de la voie de signalisation.
7. En supposant que la largeur de bande disponible reste inchangée, déterminer l'ordre de modulation ainsi que l'énergie par bit requis pour la même qualité de service, si la deuxième solution est retenue.

On décide de protéger le voie de parole grâce à un code en bloc linéaire de matrice de check de parité H définie par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Déterminer les paramètres (n, k) ce code, ainsi que sa capacité de détection et de correction.



Corrigés

I - 1) Une source numérique génère des messages appartenant à un alphabet discret et fini à des instants particuliers (temps discret). La notion de temps discret - amplitude discrète permet de caractériser une source numérique. À titre d'exemple, les messages issus d'un ordinateur vers le réseau INTERNET ou la musique enregistrée sur un CDROM.

I - 2) Le processus de conversion A/N se réalise en deux étapes :

1. l'échantillonnage ;
2. la quantification.

Le processus d'échantillonnage est un traitement sans perte d'information dans la mesure où les hypothèses du théorème de l'échantillonnage sont respectées. Le processus de quantification est un traitement avec pertes. Pour la parole humaine on peut estimer la largeur de bande à 4 kHz et pour minimiser la distorsion due à la quantification on utilise, en général, des quantificateurs avec une résolution de 8 bits/échantillon, ce qui génère un débit binaire net de :

$$D = 2 \times 4 \text{ kech/s} \times 8 \text{ bits/ech} = 64 \text{ kb/s.}$$

I - 3) Le rôle fondamental d'un codeur de source est de trouver une représentation plus « économique » de l'information de source. En général, les sources d'information sont extrêmement redondantes dans le temps et dans l'espace. L'idée du codage de source consiste à exploiter cette redondance pour réduire de façon significative le débit binaire généré par la source. Comme critère d'économie on peut choisir, le débit binaire, la quantité de mémoire requise pour enregistrer l'information ou la distorsion admissible dans le processus de codage.

I - 4) L'information numérique sera transmise sur un support de transmission qui est partagé entre un très grand nombre d'utilisateurs. Ces voies de communication sont publiques. N'importe qui est capable de recevoir les messages issus d'une source. Ceci est particulièrement vrai dans le cas de l'INTERNET, d'où la célèbre phrase : « lorsque votre ordinateur se connecte à l'INTERNET, tout l'INTERNET est connecté à votre ordinateur ». Les messages transmis sont donc « interceptables » par d'autres utilisateurs du réseau. Pour protéger vos messages, il suffit de les chiffrer avec un code secret, connu seulement par l'émetteur et le récepteur.

I - 5) Le codage de canal protège les messages des distorsions générées par le « bruit » du canal. De ce point de vue, le processus de codage et la crypto ont des rôles similaires. Dans le cas du bruit il n'y a pas d'interception du message, mais simplement du « brouillage » des messages. Les messages reçus peuvent être interprétés en erreur. Le but fondamental du codeur de canal, consiste à réduire la probabilité d'erreur.

I - 6) Il n'y a rien de bizarre ! La redondance de source est générée par la nature. On ne sait pas comment elle est produite et en conséquence comment l'exploiter efficacement. La redondance de canal est créée par l'ingénieur : on sait comment elle a été générée et comment la supprimer (bien que dans certains cas cette tâche sera extrêmement complexe !).

I - 7) Le vecteur de l'information est un signal analogique : un courant, une tension ou une onde électromagnétique. Le rôle du modulateur consiste tout simplement à adapter la nature numérique de l'information à une représentation analogique. Le signal porteur est analogique, l'information qu'il véhicule est numérique !

I - 8) Dans l'ordre :

- Codeur de source, cryptage et codeur de canal → représentation numérique de l'information ;
- unité de mise en forme → conversion N/A ;
- modulateur, unité d'étalement de spectre(SS), gestionnaire d'accès multiple et l'émetteur(TX) → représentation analogique.

I - 9) Le codeur de source, l'unité de chiffrement, le codeur de canal, le modulateur(on parle dans ce cas d'une transmission en bande de base), l'unité d'étalement et le gestionnaire d'accès multiple, peuvent être optionnels dans un système numérique.

I - 10) Chaque unité de la chaîne de réception réalise le traitement « inverse » de celui qui est réalisé par l'émetteur :

1. récepteur(RX) transforme le signal en sortie du canal en signal de traitement(typiquement une tension ou un courant dans un circuit électronique) ;
2. le contrôleur d'accès va extraire un message particulier de l'ensemble des messages reçus ;
3. l'unité de désétalement transforme la représentation large bande du signal en représentation à bande étroite ;
4. le démodulateur ramène le signal à une représentation en bande de base ;
5. le détecteur transforme le signal analogique en signal numérique ;
6. le décodeur de canal corrige les erreurs induites par le bruit dans le canal(il fait de son mieux !);
7. l'unité de décryptage remet le message en clair(il connaît la clé secrète utilisée par l'unité de crypto) ;
8. le décodeur de source reconstitue le message sous une forme compréhensible par le destinataire du message.

II - 1) Pour une source binaire le débit binaire est le nombre de bits émis en chaque seconde. Pour une source M-aire(=alphabet à M symboles), la rapidité de modulation est le nombre de symboles émis par seconde. On peut dire que le débit binaire est la rapidité de modulation d'une source à 2 états.

II - 2) On forme des messages par paquets de 4 symboles selon :

$$m_j = [\alpha_i^j] \text{ pour } j = 1, 2, 3, 4.$$

C'est à dire qu'on peut représenter chaque paquet par un vecteur à 4 coordonnées, chaque coordonnée $\in A$.

$$m_j = (\alpha_i^1 \alpha_i^2 \alpha_i^3 \alpha_i^4).$$

Puisque $|A| = 3$ il y a donc 3^4 combinaisons différentes de m_j . Il y aura donc 81 signaux différents.

II - 3a)

$$R_A = \frac{1}{T_A} \text{ bauds} \quad R_B = \frac{1}{T_B} \text{ bauds.}$$

II - 3b) Nombre de bits requis pour représenter l'alphabet S_A ;

$$N_A = \lceil \log_2 |S_A| \rceil = \lceil \log_2(6) \rceil = 3 \text{ bits.}$$

Nombre de bits requis pour représenter l'alphabet S_B ;

$$N_B = \lceil \log_2 |S_B| \rceil = \lceil \log_2(4) \rceil = 2 \text{ bits.}$$

On en déduit :

$$D_A = \frac{3}{T_A} \quad D_B = \frac{2}{T_B}.$$

II - 3c) Puisque $|S_A| = 6$ et $|S_B| = 4$, $|S_A \times S_B| = 24$. Chaque paire de symboles est engendrée en $T_A = T_B = T$ secondes, donc la rapidité de modulation est :

$$R_{S_A \times S_B} = \frac{1}{T}.$$

Le débit binaire de cette source composée vaut :

$$D_{S_A \times S_B} = \frac{\lceil \log_2 |S_A \times S_B| \rceil}{T} = \frac{\lceil \log_2(24) \rceil}{T} = \frac{5}{T} \text{ bits/s.}$$

III - 1) Selon le cours :

$$s(t) = \sum_k a_k h(t - kT)$$

III - 2) Une application directe de la définition de fonction d'autocorrélation, nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ss}(\tau; t) &= E[s(t) \cdot s^*(t - \tau)] \\ &= E\left(\sum_n a_n \cdot h(t - nT) \cdot \sum_m a_m^* \cdot h^m(t - mT - \tau)\right) \\ &= \sum_n \sum_m E[a_n \cdot a_m^*] h(t - nT) \cdot h^*(t - mT - \tau) \\ &= \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) \cdot \sum_n h(t - nT) \cdot h^*(t - (n - k)T - \tau). \end{aligned}$$

III - 3) L'expression précédente, nous indique clairement que la fonction d'autocorrélation est dépendante de τ et du temps t . Donc le processus $s(t)$ n'est pas stationnaire.

III - 4)

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ss}(\tau; t-T) &= \mathbb{E} \left(\sum_n a_n \cdot h(t-T-nT) \cdot \sum_m a_m \cdot h^*(t-T-mT-\tau) \right) \\ &= \sum_n \sum_m \mathbb{E}[a_n \cdot a_m^*] h(t-T-nT) \cdot h^*(t-T-mT-\tau) \\ &= \sum_k \mathbf{R}_{aa}(k) \cdot \sum_n h(t-(n+1)T) \cdot h^*(t-(n+1-k)T-\tau) \\ &= \mathbf{R}_{ss}(\tau; t), \end{aligned}$$

IV - 1)

Formule de Bennett avec moyenne des symboles nulle. On trouve

$$S_{xx}(f) = \frac{a^2 T}{4} \text{sinc}^2(fT/2).$$

Formule de Bennett avec moyenne des symboles non nulle. On trouve

$$S_{xx}(f) = \frac{a^2 T}{4} \text{sinc}^2\left(\frac{fT}{2}\right) + \frac{a^2}{4} \sum_n \text{sinc}^2\left(\frac{n}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

IV - 2) Dans le cas non centré, raies spectrales en 0 et les multiples impairs de $\frac{1}{T}$.

IV - 3) La figure 2 représente le signal modulé AMI pour une séquence d'information :

$$\alpha_n = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0.$$

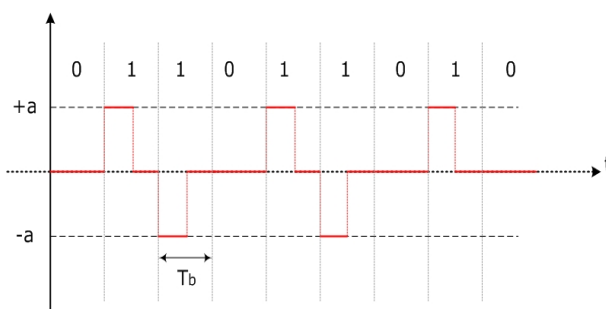


FIGURE 2: Signal AMI pour la séquence $\alpha_n = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$.

Il s'agit d'une modulation avec mémoire. On peut donc la décrire, selon le modèle de Mealy, avec une variable d'état S_n :

$$\begin{cases} a_n = \varphi(\alpha_n; S_n) & \text{équation de sortie} \\ S_{n+1} = \Phi(\alpha_n; S_n) & \text{évolution des états} \end{cases}$$

Dans cas de la modulation AMI on propose :

$$\begin{cases} a_n = a \alpha_n S_n & \text{avec } \alpha_n \in \{0, 1\} \\ & a_n \in \{-a, 0, a\} \\ S_{n+1} = (1 - 2\alpha_n) S_n & S_n \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

a_n appartient à un alphabet *ternaire*. En supposant que l'état initial $S_1 = +1$, on obtient assez facilement, pour la séquence $\alpha_n = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0$, la signal modulé représenté dans la figure 2. En supposant la séquence d'information α_n i.i.d., nous avons :

$$E[\alpha_n] = 0 P(0) + 1 P(1) = 0 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$E[\alpha_n^2] = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} E[\alpha_n \alpha_m]_{n \neq m} &= (0.0) P(0;0) + (0.1) P(0;1) + (1.0) P(1;0) + (1.1) P(1;1) \\ &= 0 \frac{1}{4} + 0 \frac{1}{4} + 0 \frac{1}{4} + 1 \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$E[1 - 2\alpha_n] = E[1] - 2E[\alpha_n] = 0;$$

$$E[(1 - 2\alpha_n)^2] = E[1] - 4E[\alpha_n] + 4E[\alpha_n^2] = 1.$$

Les équations de Mealy, nous permettent d'écrire l'équation récurrente de a_n en fonction de α_n , selon :

$$a_n = a \alpha_n S_n = a \alpha_n (1 - 2\alpha_{n-1}) S_{n-1} = \alpha_n (1 - 2\alpha_{n-1}) (1 - 2\alpha_{n-2}) (1 - 2\alpha_{n-3}) \dots$$

Cette expression de récurrence, va nous permettre de calculer, moyenne, variance et autocorrélation des symboles a_n . En exploitant l'indépendance statistique des α_n , on obtient :

$$E[a_n] = a E[\alpha_n (1 - 2\alpha_{n-1}) (1 - 2\alpha_{n-2}) \dots] = a E[\alpha_n] E[1 - 2\alpha_{n-1}] E[1 - 2\alpha_{n-2}] \dots$$

$$E[a_n] = a \underbrace{E[\alpha_n]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{E[1 - 2\alpha_{n-1}]}_0 \underbrace{E[1 - 2\alpha_{n-2}]}_0 \dots$$

D'où

$$E[a_n] = 0.$$

Calculons maintenant maintenant l'autocorrélation $E[a_n a_{n-k}]$

Pour $k = 0$, on obtient la variance $E[a_n^2]$:

$$E[a_n^2] = a^2 E[\alpha_n^2 (1 - 2\alpha_{n-1})^2 (1 - 2\alpha_{n-2})^2 \dots] = a^2 E[\alpha_n^2] E[(1 - 2\alpha_{n-1})^2] E[(1 - 2\alpha_{n-2})^2] \dots$$

$$E[a_n^2] = a^2 \underbrace{E[\alpha_n^2]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{E[(1 - 2\alpha_{n-1})^2]}_1 \underbrace{E[(1 - 2\alpha_{n-2})^2]}_1 \dots$$

$$E[a_n^2] = a^2 \frac{1}{2}.$$

Pour $k = 1$, on obtient $E[a_n a_{n-1}]$:

$$\begin{aligned} E[a_n a_{n-1}] &= a^2 E[\alpha_n \alpha_{n-1} (1 - 2\alpha_{n-1}) (1 - 2\alpha_{n-2})^2 (1 - 2\alpha_{n-3})^2 \dots] \\ &= a^2 E[\alpha_n] E[\alpha_{n-1} (1 - 2\alpha_{n-1})] E[(1 - 2\alpha_{n-2})^2] \dots \\ &= a^2 \underbrace{E[\alpha_n]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{E[\alpha_{n-1} (1 - 2\alpha_{n-1})]}_{-\frac{1}{2}} \underbrace{E[(1 - 2\alpha_{n-2})^2]}_1 \underbrace{E[(1 - 2\alpha_{n-3})^2]}_1 \dots \\ &= -a^2 \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

La fonction d'autocorrélation étant symétrique : $E[a_n a_{n-1}] = E[a_n a_{n+1}]$.

Finalement pour $k > 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} E[a_n a_{n-k}] &= a^2 E[\alpha_n (1 - 2\alpha_{n-1}) (1 - 2\alpha_{n-2}) \dots (1 - 2\alpha_{n-k}) (1 - 2\alpha_{n-k-1}) \dots \\ &\quad \dots \alpha_{n-k} (1 - 2\alpha_{n-k-1}) (1 - 2\alpha_{n-k-2}) \dots] \\ &= a^2 E[\alpha_n (1 - 2\alpha_{n-1}) (1 - 2\alpha_{n-2}) \dots \alpha_{n-k} (1 - 2\alpha_{n-k}) (1 - 2\alpha_{n-k-1})^2 \dots] \\ &= a^2 E[\alpha_n] E[(1 - 2\alpha_{n-1})] E[(1 - 2\alpha_{n-2})] \dots E[\alpha_{n-k} (1 - 2\alpha_{n-k})] E[(1 - 2\alpha_{n-k-1})^2] \dots \\ &= a^2 \underbrace{E[\alpha_n]}_{\frac{1}{2}} \underbrace{E[(1 - 2\alpha_{n-1})]}_0 \dots \underbrace{E[\alpha_{n-k} (1 - 2\alpha_{n-k})]}_{-\frac{1}{2}} \underbrace{E[(1 - 2\alpha_{n-k-1})^2]}_1 \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut résumer la fonction d'autocorrélation $r^{aa}(k)$:

$$r^{aa}(k) = \begin{cases} a^2 \frac{1}{2} & k = 0 \\ -a^2 \frac{1}{4} & k = \pm 1 \\ 0 & \forall k \end{cases}$$

La figure 3 représente la fonction d'autocorrélation normalisée par rapport à a^2 , en fonction de l'indice k .

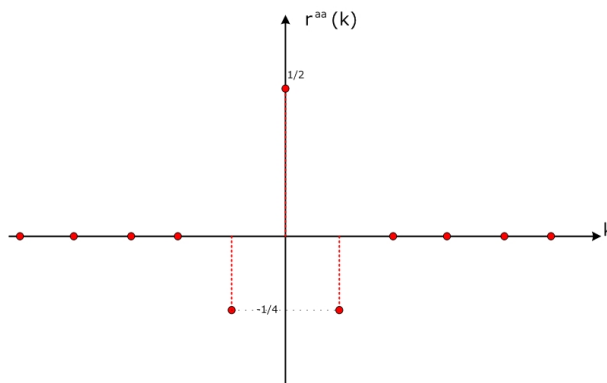


FIGURE 3: Fonction d'autocorrélation normalisée $\frac{1}{a^2} r^{aa}(k)$.

La DSP des a_n vaut :

$$S_{aa}(f) = \text{TDF}\{r^{aa}(k)\} = \sum_k r^{aa}(k) e^{-j2\pi k T f} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} (2 \cos 2\pi f T) = a^2 \sin^2(\pi f T).$$

En appliquant la formule de filtrage :

$$S_{xx}(f) = |H(f)|^2 S_{aa}(f) = \frac{a^2 T}{4} \sin^2(\pi T f) \text{sinc}^2\left(\frac{T f}{2}\right).$$

La figure 4 représente la DSP $S_{xx}(f)$ normalisée par rapport à a^2 en fonction de $T f$.

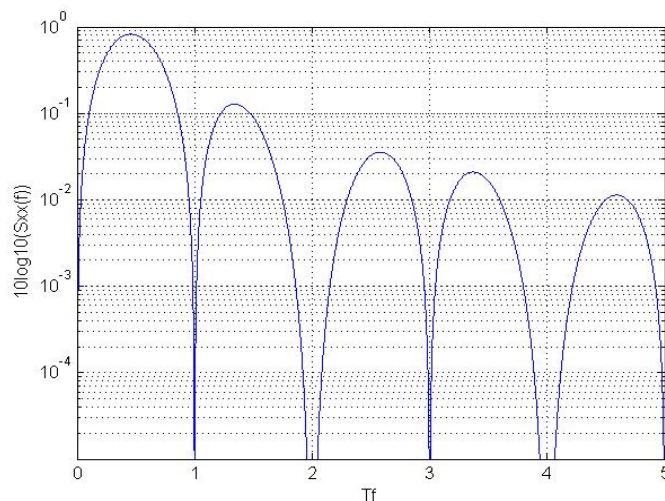


FIGURE 4: DSP $S_{xx}(f)$ de la AMI.

Noter que c'est un code en ligne à somme bornée et que $S_{aa}(0) = 0$.

V - 1) TDMA d'ordre 4, alors il y a 4 utilisateurs en $128 \mu s$: Puisqu'il y a 64 bits par voie, alors la débit binaire par utilisateur vaut :

$$D_U = \frac{64}{128 \mu s} = 0.5 \text{ bits/s}.$$

D'où le débit net de canal :

$$D_C = 4 \times D_U = 2 \text{ bits/s}.$$

V - 2) La plus petite largeur de bande requise pour assurer une transmission sans IES vaut :

$$B_{\min} = \frac{D_C}{2} = 1.$$

Nous disposons d'un canal avec une largeur de bande :

$$B_C = 0.75 \times D_C = 0.75 \times 1 = 0.75.$$

Nous avons donc l'égalité suivante :

$$\frac{D_c}{2}(1 + \alpha) = B_c,$$

$$0.5(1 + \alpha) = 0.75 \rightarrow \alpha = 0.5(50%).$$

V - 3) Le passage à l'ordre 8 implique qu'on double le débit net de canal :

$$D'_C = 4 \text{ bits/s.}$$

La plus petite largeur de bande requise pour assurer une Tx sans IES vaut maintenant :

$$B_{\min} = \frac{D'_C}{2} = 2.$$

Le canal étant de 0.75, on ne peut donc pas assurer une transmission binaire en BB. Il suffit de passer à l'ordre $M = 8$ dans la modulation, pour retomber dans les conditions de l'exercice précédent. Nous retrouvons donc $\alpha = 0.125(12.5\%)$.

VI - 1) Toujours le même raisonnement :

$$\frac{D_c}{2}(1 + \alpha) = B_c,$$

$$50(1 + \alpha) = 90 \rightarrow \alpha = 0.8(80%).$$

VI - 2) Avec une modulation d'ordre 4 on obtient le même α .

VII - 1)

$$\frac{D_c}{2}(1 + \alpha) = B_c,$$

$$10(1 + \alpha) = 15 \rightarrow \alpha = 0.5(50%).$$

VIII - 1)

$$T = \frac{1}{D} = 1 \mu\text{sec.}$$

VIII - 2) A partir de l'aide mémoire de traitement du signal pour les communications numériques (Disponible sur le site de CNTI), nous avons :

$$\text{TF}\{\text{sinc}(\frac{t}{T})\} = \Pi_{T, \frac{1}{T}}(f),$$

avec :

$$\Pi_{T, \frac{1}{T}}(f) = \begin{cases} T & -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T}; \\ 0 & |f| > \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

d'où

$$\text{TF}\{\text{sinc}(\frac{t-T}{T})\} = \Pi_{T;\frac{1}{T}}(f) e^{-j2\pi T f}.$$

On conclut donc que :

$$H(f) = \Pi_{T;\frac{1}{T}}(f) (1 - e^{-j2\pi T f}) = 2j \cdot \Pi_{T;\frac{1}{T}}(f) \cdot e^{-j\pi f} \cdot \sin(\pi T f),$$

$$|H(f)| = 2 \cdot \Pi_{T;\frac{1}{T}}(f) \cdot \sin(\pi T f).$$

VIII - 3) A partir de la formule de Bennett,

$$S_{ss}(t) = |H(f)|^2 \cdot S_{aa}(f),$$

pour des amplitudes de source i.i.d., $S_{aa}(f) = 1$, donc le spectre de $s(t)$ est contrôlé par $|H(f)|^2$.

$$|H(f)|^2 = 4T^2 \cdot \Pi_{1;\frac{1}{T}}(f) \cdot \sin^2(\pi T f).$$

La largeur de bande de cette mise en forme est :

$$B_w = \frac{1}{2T}.$$

VIII - 4) Très clairement, cette mise en forme ne vérifie pas la condition de Nyquist. Il y aura donc de l'IES.

VIII - 5) Cette mise en forme correspond à un pré-codage des amplitudes établie par un retard d'un temps de symbole :

$$(1 - e^{-j2\pi T f}).$$

On peut donc établir que l'amplitude c_k d'un symbole vaut :

$$c_k = a_k - a_{k-1}. \quad (2)$$

Il s'agit d'un codage différentiel entre deux amplitudes consécutives. L'alphabet ainsi codé a trois états possibles : $-2, 0$ et $+2$. Il s'agit d'un alphabet ternaire. Un possible codeur consiste à appliquer l'équation (2), selon :

$$c_k = a_k - a_{k-1} \rightarrow \hat{a}_k = c_k + a_{k-1}.$$

VIII - 6) Vu qu'il s'agit d'un alphabet ternaire, c'est la figure 3.

IX - 1) À partir de la durée d'un symbole, affichée sur l'axe des abscisses, nous lisons :

- Fig. 1, $D = 1 \text{ b/s}$;
- Fig.2, $R = 1 \text{ Baud}$;
- Fig.3, $R = 1 \text{ Baud}$.

IX - 2) Les points fixes, déterminent directement l'ordre de la modulation :

- Fig. 1, $M = 2$;
- Fig.2, $M = 4$;
- Fig.3, $M = 3$.

IX - 3) Par ordre décroissant de robustesse à une erreur de synchro : Fig. 3, Fig. 2 et Fig. 1.

X - 1)

$$B = 3 \text{ kHz} \Rightarrow D_{max} = 2.B = 6 \text{ kb/s.}$$

X - 2) On a $600 \text{ km} / 50 \text{ km} = 12$ répéteurs. Chaque répéteur fonctionne avec un rapport $\frac{E_b}{N_0} = 15 \text{ dB}$.
Pour $a_k = \pm 1$,

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

Donc la probabilité d'erreur entre deux répéteurs vaut :

$$P_e \approx 3.10^{-16}.$$

Pour calculer la performance globale, on calculera la probabilité de décision correcte. Si les erreurs entre répéteurs sont indépendantes, alors :

$$P_C = (P_{C_i})^N,$$

où N est le nombre de répéteurs et P_{C_i} , est la probabilité de décision correcte dans la i -ème liaison. Si la $P_e \ll 1$ alors,

$$P_C = (P_{C_i})^N \approx 1 - NP_{e_i} \Rightarrow P_e \approx 3.6 \cdot 10^{-15}.$$

XI - 1) Gaussien. Non, il est coloré !

XI - 2) La distance au seuil est au pire moitié moins que sans IES, et dans ce cas la probabilité d'erreur vaut $Q(\frac{a/2}{\sigma})$ au lieu de $Q(\frac{a}{\sigma})$, soit une perte d'un facteur 4 en rapport signal à bruit (-6 dB).

XI - 3a) Trouver $\hat{a}_k = a$ qui minimise $(y_k - a)^2 - N_0 \log(p_k)$ où $p_k = p(a_k)$.

XI - 3b) La décision est $\hat{a}_k = 0$ si $(y_k - A_0)^2 - N_0 \log p(0) < (y_k - A_1)^2 - N_0 \log p(1)$ c'est à dire (pour $A_1 > A_0$) y_k inférieur au seuil

$$s = \frac{A_0 + A_1}{2} + \frac{N_0/2}{A_1 - A_0} \log \frac{p(0)}{p(1)}.$$

XI - 3c) Pour des symboles équiprobables $p(0) = p(1)$ et $s = \frac{A_0 + A_1}{2}$ est à mi-distance des deux valeurs de symbole.

XII - 1)

$$D = 24 \times 64 + 8 = 1.544 \text{ Mb/s}$$

XII - 2) Filtre de réception avec réponse impulsionnelle $h_{R_x} = h_{T_x}(-t)$, suivi d'un échantillonneur et d'un seuil de décision.

XII - 3)

$$B = D/2 = 1.544 \text{ Mb/s} / 2 = 772 \text{ kHz.}$$

$$B_C = (1 + \alpha) \frac{D}{2} \rightarrow 1 \text{ MHz} = (1 + \alpha) 772 \text{ kHz;}$$

$$\alpha = 0.295,$$

XII - 4) Le filtre global étant en cosinus surélevé, c'est donc le diagramme de l'oeil A.

XII - 5) Au point B la proba d'erreur bit vaut :

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right).$$

Le formulaire des Comms. Nums. indique :

$$Q(x) = 10^{-7} \rightarrow x \sim 5.15.$$

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} = 5.15 \rightarrow \frac{E_b}{N_0} \cong 13.26.$$

$$P = E_b \times D = 13.26 \times N_0 \times 1.544 \cdot 10^6 \cong 2 \mu W.$$

XII - 6) Expliqué en séance de TD.

XII - 7) $B'_c = 500 \text{ kHz}$, on propose $M = 4$ états.

$$R = \frac{D}{2} = 772 \text{ symb/s.}$$

La largeur de bande minimale requise pour assurer une transmission sans IES vaut :

$$B = \frac{R}{2} = 386 \text{ kHz.}$$

$B'_c > B$, donc :

$$B'_c = (1 + \alpha) \frac{R}{2} = (1 + \alpha) \frac{D}{4} \rightarrow 500 \text{ kHz} = (1 + \alpha) \frac{1.544 \cdot 10^6}{4} \rightarrow \alpha = 0,295.$$

XII - 8) Pour le cas $M=4$ et l'alphabet $A' = \{-3, -1, 1, +3\}$, le formulaire des Comms. Num. prédit une Probabilité d'erreur en symbole qui vaut :

$$P_{e_s} = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E'_b}{N_0} \frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1}}\right),$$

où E'_b représente la nouvelle énergie par bit d'information requise pour assurer la P_{e_s} . Si on utilise un code de Gray pour coder les bits sur les symboles et à fort rapport signal sur bruit, la probabilité d'erreur en symbole est reliée à la probabilité d'erreur en bit par :

$$P_b \cong \frac{P_{e_s}}{\log_2 M},$$

d'où on déduit la P_{e_s} cible :

$$P_{e_s} = 2 \cdot 10^{-7}.$$

Un peu d'algèbre aboutit à :

$$Q(x) = 1.33 \cdot 10^{-7}.$$

Du formulaire :

$$x \cong 5.15 \rightarrow E'_b \cong 33 \cdot N_0.$$

On a donc :

- cas binaire : $M = 2 \rightarrow E_b \cong 13.26 \times N_0$;
- cas quaternaire : $M = 4 \rightarrow E'_b \cong 33 \times N_0$.

$$E'_b \cong 2.5 E_b,$$

c'est à dire une pénalité de l'ordre de 4 dB en plus d'énergie !

XV - 1) $C(3,2)$, implique, $k = 2$ et $n = 3$. $|C| = 2^2 = 4$ mots de code (sous forme systématique) :

$$\begin{array}{l} 0 \ 0 \rightarrow 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 1 \rightarrow 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \rightarrow 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \rightarrow 1 \ 1 \ 0 \end{array}$$

Déterminons la distance minimale du code, par simple énumération :

$$d_H(000, 011) = 2,$$

$$d_H(000, 101) = 2,$$

$$d_H(000, 110) = 2,$$

$$d_H(011, 101) = 2,$$

$$d_H(011, 110) = 2,$$

$$d_H(101, 110) = 2.$$

On déduit :

$$d_{min} = 2.$$

La figure 5, représente l'espace de Hamming de dimensions 2 et 3 avec la position des mots de donnée (en dimension 2) et des mots de codes (en dimension 3).

XV - 2) Dans le cas de parité impaire on a :

$$0 \ 0 \rightarrow 0 \ 0 \ 1$$

$$0 \ 1 \rightarrow 0 \ 1 \ 0$$

$$1 \ 0 \rightarrow 1 \ 0 \ 0$$

$$1 \ 1 \rightarrow 1 \ 1 \ 1$$

Déterminons la distance minimale du code, par simple énumération :

$$d_H(001, 010) = 2,$$

$$d_H(001, 100) = 2,$$

$$d_H(001, 111) = 2,$$

$$d_H(010, 100) = 2,$$

$$d_H(010, 111) = 2,$$

$$d_H(100, 111) = 2.$$

On déduit :

$$d_{min} = 2.$$

Ce code a aussi une $d_{min} = 2$.

XV - 3) Il est intéressant de noter que le code à parité paire est **linéaire**, alors que le code à parité impaire ne l'est pas ! On choisirait le code à parité paire.

XVI - 1) La matrice génératrice est une matrice de $n = 7$ colonnes et $k = 4$ lignes, de rang 4. Il s'agit donc d'un code (7, 4).

XVI - 2) Si on utilise la notation,

$$c = i.G$$

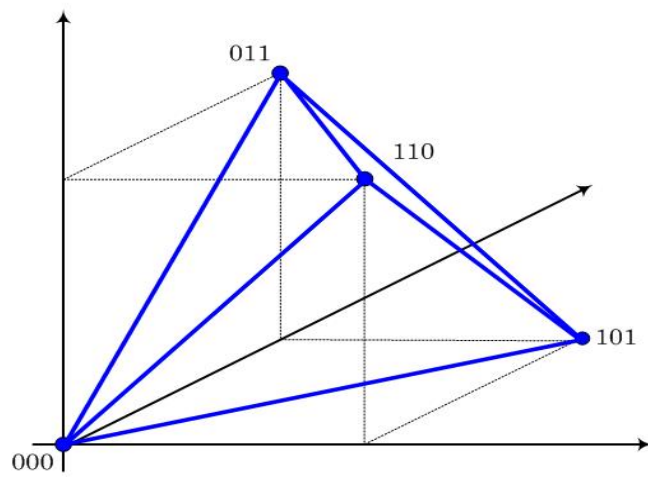
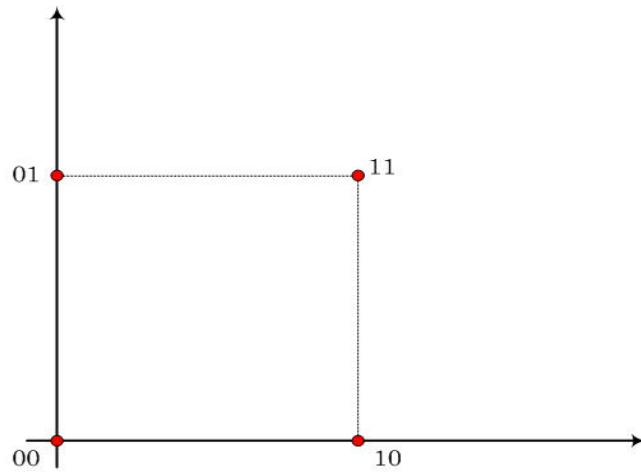


FIGURE 5: Géométrie dans l'espace de Hamming pour $C(3,2)$.

alors voici toute l'information relative aux mots de code :

$G =$	1 1 0 1 0 0 0	
	0 1 1 0 1 0 0	
	0 0 1 1 0 1 0	
	0 0 0 1 1 0 1	w_H
0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	0
0 0 0 1	0 0 0 1 1 0 1	3
0 0 1 0	0 0 1 1 0 1 0	3
0 0 1 1	0 0 1 0 1 1 1	4
0 1 0 0	0 1 1 0 1 0 0	3
0 1 0 1	0 1 1 1 0 0 1	4
0 1 1 0	0 1 0 1 1 1 0	4
0 1 1 1	0 1 0 0 0 1 1	3
1 0 0 0	1 1 0 1 0 0 0	3
1 0 0 1	1 1 0 0 1 0 1	4
1 0 1 0	1 1 1 0 0 1 0	4
1 0 1 1	1 1 1 1 1 1 1	7
1 1 0 0	1 0 1 1 1 0 0	4
1 1 0 1	1 0 1 0 0 0 1	3
1 1 1 0	1 0 0 0 1 1 0	3
1 1 1 1	1 0 0 1 0 1 1	4

Nous avons donc :

- 1 mot de poids 0 ($A_0 = 1$);
- 7 mots de poids 3 ($A_3 = 7$);
- 7 mots de poids 3 ($A_4 = 7$);
- 1 mots de poids 7 ($A_7 = 1$);

Donc voici la distribution des poids du code :

$$A_0 = 1; A_1 = A_2 = 0; A_3 = A_4 = 7; A_5 = A_6 = 0; A_7 = 1.$$

La distance minimale de ce code est :

$$d_{min} = 3,$$

donc, il détecte 2 erreurs et il corrige 1.

XVI - 3) Le nouveau code a 8 mots de codes, que voici :

0 0 0 0 0 0 0	0
0 0 1 0 1 1 1	4
0 1 1 1 0 0 1	4
0 1 0 1 1 1 0	4
1 1 0 0 1 0 1	4
1 1 1 0 0 1 0	4
1 0 1 1 1 0 0	4
1 0 0 1 0 1 1	4

Donc $n' = n = 7$ et $k' = k - 1 = 3$. On dit que \mathcal{C} a été **expurgé**.

XVI - 4) Par simple test, il est très facile de trouver que la somme de deux mots de \mathcal{C}' est un autre mot de \mathcal{C}' (il y a $\binom{8}{2} = 28$ tests à réaliser !) Ce nouveau code a une $d_{min} = 4$. Il corrige toujours une erreur mais il détecte 3.

XVI - 5) Vu que la dimension de \mathcal{C}' est 3, on choisit trois mots de \mathcal{C}' linéairement indépendants, par exemple :

$$0010111, 0111001, 1110010.$$

Il est très simple à prouver que ces trois mots sont linéairement indépendants, calculons leurs respectifs produits scalaires :

$$\langle 0010111; 0111001 \rangle = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$

$$\langle 0010111; 1110010 \rangle = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$

$$\langle 0111001; 1110010 \rangle = 0 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 = 0.$$

Ces trois vecteurs forment bien une base de dimension 3 dans l'espace de Hamming. Une matrice génératrice est donc :

$$G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

XVII - 1) H est la matrice de *check* de parité de C qui a comme dimensions $(n, n - k)$. Dans ce cas $n = 5$ (observer que la dimension de l'espace engendré par H est 5 et en conséquence le dernier bit est toujours 0, il transporte pas d'information) et $n - k = 2$, donc le code C est un code $(5, 3)$.

XVII - 2) m ne peut pas être un mot de code puisque le dernier bit $\neq 0$. On calcule, pour m^* , le produit :

$$Hm^{*T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0};$$

d'où $m \in C$.

XVII - 3) Puisque H est sous forme systématique, une matrice G est :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

XVII - 4)

$$\begin{array}{l} 0 \ 0 \ 0 \ \rightarrow \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ \rightarrow \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ \rightarrow \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 1 \ \rightarrow \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ \rightarrow \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ \rightarrow \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ \rightarrow \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 1 \ \rightarrow \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array}$$

XVII - 5)

$$\begin{array}{l} 0 \ 0 \ 0 \ \rightarrow \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 1 \ \rightarrow \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \ 0 \ \rightarrow \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \\ 0 \ 1 \ 1 \ \rightarrow \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 0 \ \rightarrow \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \ 1 \ \rightarrow \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\ 1 \ 1 \ 0 \ \rightarrow \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\ 1 \ 1 \ 1 \ \rightarrow \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{3} \end{array} \right.$$

On déduit, $d_{min} = 2$.

XVIII - 1)

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

XVIII - 2) Si on utilise la notation,

$$c = u.G$$

alors on obtient les $2^4 = 16$ mots de code suivants

$(u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4)$	\rightarrow	$(u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ p_1 \ p_2 \ p_3)$
(0 0 0 0)	\rightarrow	(0 0 0 0 0 0 0)
(0 0 0 1)	\rightarrow	(1 0 1 0 0 0 1)
(0 0 1 0)	\rightarrow	(1 1 1 0 0 1 0)
(0 0 1 1)	\rightarrow	(0 1 0 0 0 1 1)
(0 1 0 0)	\rightarrow	(0 1 1 0 1 0 0)
(0 1 0 1)	\rightarrow	(1 1 0 0 1 0 1)
(0 1 1 0)	\rightarrow	(1 0 0 0 1 1 0)
(0 1 1 1)	\rightarrow	(0 0 1 0 1 1 1)
(1 0 0 0)	\rightarrow	(1 1 0 1 0 0 0)
(1 0 0 1)	\rightarrow	(0 1 1 1 0 0 1)
(1 0 1 0)	\rightarrow	(0 0 1 1 0 1 0)
(1 0 1 1)	\rightarrow	(1 0 0 1 0 1 1)
(1 1 0 0)	\rightarrow	(1 0 1 1 1 0 0)
(1 1 0 1)	\rightarrow	(0 0 0 1 1 0 1)
(1 1 1 0)	\rightarrow	(0 1 0 1 1 1 0)
(1 1 1 1)	\rightarrow	(1 1 1 1 1 1 1)

XVIII - 3)

$(u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ p_1 \ p_2 \ p_3)$	\rightarrow	w_H
(0 0 0 0 0 0 0)	\rightarrow	0
(1 0 1 0 0 0 1)	\rightarrow	3
(1 1 1 0 0 1 0)	\rightarrow	4
(0 1 0 0 0 1 1)	\rightarrow	3
(0 1 1 0 1 0 0)	\rightarrow	3
(1 1 0 0 1 0 1)	\rightarrow	4
(1 0 0 0 1 1 0)	\rightarrow	3
(0 0 1 0 1 1 1)	\rightarrow	3
(1 1 0 1 0 0 0)	\rightarrow	3
(0 1 1 1 0 0 1)	\rightarrow	4
(0 0 1 1 0 1 0)	\rightarrow	3
(1 0 0 1 0 1 1)	\rightarrow	4
(1 0 1 1 1 0 0)	\rightarrow	4
(0 0 0 1 1 0 1)	\rightarrow	3
(0 1 0 1 1 1 0)	\rightarrow	4
(1 1 1 1 1 1 1)	\rightarrow	7

On déduit :

$$d_{\min} = 3.$$

Ce code corrige :

$$\left\lceil \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rceil = 1$$

erreur et détecte :

$$d_{\min} - 1 = 2$$

erreurs. Il y a 1 seul mot de poids nul, aucun mot de poids 1, 2, 5 ou 6, 8 mots de poids 8, 6 mots de poids 4 et 1 seul mot de poids 7. Le spectre des poids est donc le suivant :

$$A_0 = 1,$$

$$A_1 = 0,$$

$$A_2 = 0,$$

$$A_3 = 8,$$

$$A_4 = 6,$$

$$A_5 = 0,$$

$$A_6 = 0,$$

$$A_7 = 1.$$

XVIII - 4) Supposons qu'on transmet un mot de code c , et qu'on reçoit le message $r = c + e$, où e est un motif d'erreur. Cette erreur ne sera pas détectée si e est l'un de $2^4 - 1$ mots de code non nuls, la somme de deux mots de code de Hamming étant un autre mot de code. La probabilité de non détection est donc :

$$P_{nd} = P((e = c_1) \cup (e = c_2) \cup (e = c_3) \cup \dots \cup (e = c_{2^k-1})) = \sum_{j=1}^{2^k-1} P((e = c_j)).$$

Tous les motifs d'erreurs n'ont pas la même probabilité d'être des mots de code. Tout dépend du nombre de « 1 » dans le motif, soit le nombre de « 1 » dans le mot de code. Considérons les mots de code de poids m non nul. Ils ont, chacun, vocation à devenir un motif d'erreur de poids m , c'est à dire m bits à « 1 ». La probabilité d'un tel événement, suit une loi Bernoulli, qui vaut :

$$p^m (1-p)^{n-m}$$

XVIII - 5) Les erreurs étant supposées statistiquement indépendantes, la probabilité de décoder en erreur un mot transmis vaut :

$$P_e^n = \sum_{i>n/2} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

Pour $n = 3, 7$, cette proba vaut :

$$P_e^3 = 3p^2(1-p) + p^3,$$

$$P_e^7 = 35p^4(1-p)^3 + 21p^5(1-p)^2 + 7p^6(1-p) + p^7.$$

La figure suivante représente P_e^3 et P_e^7 en fonction de p , d'où on conclut :

$$p > P_e^3 > P_e^7.$$

XVIII - 6) La capa du CBS vaut :

$$C_{CBS} = 1 - H_2(p) = 0.9192 \text{ bits/usage.}$$

XVIII - 7) Pour $\epsilon > 0$ et $r \leq 0.9192$ alors il existe un code de taux r , tel que $P_e < \epsilon$.

XVIII - 8) Supposons $\epsilon = 10^{-8}$, alors le code $n = 3$ ($r = 0.33333 < 0.9192$) atteint une proba d'erreur $P_e \cong 3 \times 10^{-4}$ et pour $n = 7$ ($r = 0.143 < 0.9192$), $P_e \cong 4 \times 10^{-7}$. Le code à répétition à des efforts à faire !!

XIX - 1) L'approximation de Stirling établit :

$$x! \simeq x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x},$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\log(x!) \simeq x \cdot \log(x) - x + \frac{1}{2} \log(2\pi x).$$

Par définition :

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)! n!},$$

ou ce qui est équivalent :

$$\log \binom{N}{n} = \log \frac{N!}{(N-n)! n!} = \log(N!) - \log((N-n)!) - \log n!.$$

En utilisant Stirling (les deux premiers termes seulement) :

$$\log \binom{N}{n} \simeq \underbrace{N \log N - N}_{\text{Stirling}} - \underbrace{(N-n) \log(N-n) + (N-n)}_{\text{Stirling}} - \underbrace{n \log n + n}_{\text{Stirling}};$$

$$\log \binom{N}{n} \simeq N \log N - N - (N-n) \log(N-n) + N - n - n \log n + n = N \log N - (N-n) \log(N-n) - n \log n.$$

En ajoutant le terme $n \log N - n \log N$ on obtient :

$$\begin{aligned} \log \binom{N}{n} &\simeq N \log N - (N-n) \log(N-n) - n \log n + n \log N - n \log N = \\ &= (N-n) \log N - (N-n) \log(N-n) + n \log N - n \log n = \\ &= (N-n) \log \frac{N}{N-n} + n \log \frac{N}{n} = N \frac{N-n}{N} \log \frac{N}{N-n} + N \frac{n}{N} \log \frac{N}{n}, \end{aligned}$$

d'où

$$\log \binom{N}{n} \simeq N \frac{N-n}{N} \log \frac{N}{N-n} + N \frac{n}{N} \log \frac{N}{n}.$$

Cette expression en logarithme, est valable en n'importe quelle base, en particulier :

$$\log_2 \binom{N}{n} \simeq N \frac{N-n}{N} \log_2 \frac{N}{N-n} + N \frac{n}{N} \log_2 \frac{N}{n}.$$

Si on appelle,

$$p = \frac{n}{N},$$

alors

$$\log_2 \binom{N}{n} \simeq N \left((1-p) \log_2 \frac{1}{1-p} + p \log_2 \frac{1}{p} \right) = N.H_2(n/N),$$

ce qui est équivalent à :

$$\binom{N}{n} \simeq 2^{N.H_2(n/N)}.$$

XIX - 2) Une application directe de la formule de Bennett :

$$S_{ss}(t) = \frac{1}{T} \cdot |H(f)|^2 \cdot S_{aa}(f),$$

D'où les bonnes réponses : a), d) et e).

XIX - 3) Nyquist établit les conditions nécessaire pour la suppression de l'interférence entre symboles à la sortie du filtre récepteur. Si $r(t)$ et le réponse globale du système, alors le critère de Nyquist établi :

$$r(nT) = \begin{cases} r(0) & n = 0 \\ 0 & \forall n \end{cases}$$

Dans ce cas nous aurons, en utilisant la notation du cours :

$$y(nT) = a_n \cdot r(0) + \sum_{m \neq 0} a_{n-m} \cdot r(mT) = a_n \cdot r(0).$$

Dans le domaine de la fréquence :

$$\sum_n R(f - \frac{n}{T}) = T \cdot r(0).$$

XIX - 4) L'efficacité spectrale vaut :

$$\eta = \frac{D}{B} = \frac{2}{1 + \alpha},$$

por le cas binaire, et :

$$\eta = \frac{D}{B} = 2 \frac{\log_2 M}{1 + \alpha},$$

dans le cas M-aire. On voit donc clairement le gain en efficacité spectrale (de l'ordre de $\log_2 M$).

La probabilité d'erreur bit, en supposant IES=0 (vu qu'il s'agit d'un filtre global en cosinus surélevé), pour le cas M-aire, vaut :

$$P_b \approx \frac{M-1}{M \cdot \log_2 M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right),$$

Cette expression, donne une idée précise du compromis en rapport E_b/N_0 à réaliser dans le cas où on fait appel à une modulation à M états. Le tableau suivant, représente, l'efficacité spectrale, le rapport E_b/N_0 requis pour $P_b = 10^{-5}$ et le différentiel Δ en énergie, requis pour atteindre cette performance.

M	2	4	8	16
η	2	4	6	8
E_b/N_{0dB}	9.6	13.6	18	22.9
Δ_{dB}	0	4	8.4	13.3

XIX - 5) Par définition, la distance minimale de C vaut :

$$d_{min} = \min_{\forall i \neq j} d_H(c^{(i)}; c^{(j)}) \quad c^{(i)}, c^{(j)} \in C$$

La métrique de Hamming étant invariante par translation des axes coordonnées, nous avons :

$$d_{min} = \min_{\forall i \neq j} d_H(c^{(i)}; c^{(j)}) = \min_{\forall i \neq j} d_H(c^{(i)} + c^{(i)}; c^{(j)} + c^{(i)}).$$

Le code C est linéaire, donc :

$$c^{(j)} + c^{(i)} = c^{(k)} \text{ un autre mot de code.}$$

Nous avons donc le résultat suivant :

$$d_{min} = \min_{\forall k} d_H(0; c^{(k)}) = \min_{\forall k} w_H(c^{(k)}) = w_{min}(C).$$

XIX - 6) La matrice génératrice G a la forme $G = (P|I)$, donc ce code est systématique. Le code étant linéaire, en vertu de la question précédente, la distance minimale du code est le plus petit poids de Hamming de mots de code. Il s'agit d'un code (23, 11), donc il y a $2^{11} = 2048$ mots dans ce code. Il faut calculer le poids de tous ces mots et choisir le plus petit. Les 11 lignes de la génératrice sont des mots de code donc, déjà, on peut établir une borne supérieure à la distance minimale en évaluant le poids minimal des lignes de G . Une analyse rapide donne :

1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	w_h
1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	8
0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	8
1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	8
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	8
0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	8
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	8
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	8
0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	8

donc on peut établir :

$$d_{min} \leq 8.$$

XIX - 1)

$$D = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.26042 \cdot 10^{-6}} = 3.84 \text{ bits/s}$$

XIX - 2) Du calcul direct du produit, il résulte :

$$\begin{aligned} s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) &= (s_p(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) + s_{sig}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &= s_p(t) \cdot \cos^2(2\pi f_0 t) + s_{sig}(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \\ &= s_p(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t) \right\} + s_{sig}(t) \cdot \frac{1}{2} \sin(4\pi f_0 t) \\ &= s_p(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 t) \right\} + s_{sig}(t) \cdot \frac{1}{2} \sin(4\pi f_0 t) \\ &= \frac{1}{2} s_p(t) + \frac{1}{2} s_p(t) \cos(4\pi f_0 t) + \frac{1}{2} s_{sig}(t) \cdot \sin(4\pi f_0 t) \end{aligned}$$

Le filtre passe-bas supprime toutes les composantes de fréquence à $2f_0$. Donc nous avons :

$$\hat{s}(t) = \text{FPB}\{s(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} s_p(t).$$

Avec le même type d'argument, on aboutit à :

$$\tilde{s}(t) = \text{FPB}\{s(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} s_{sig}(t).$$

XIX - 3) Schéma de transmission traité à plusieurs reprises en cours.

XIX - 4) Selon Nyquist (racine de cosinus surélevé), la largeur de bande occupée vaut :

$$B_w = D \frac{(1 + \alpha)}{2} = 3.84 \times \frac{1.22}{2} = 2.34.$$

XIX - 5)

$$\eta = 2 \cdot \frac{2}{1 + \alpha} = 3.28 \text{ b/s}.$$

Il ne faut pas oublier que le signal $s(t)$ véhicule **2 voies de communications multiplexées !**

XIX - 6) La proba d'erreur bit dans le cas binaire vaut :

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-3}.$$

Du formulaire, on conclut :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} &\geq 3, \\ E_b &\geq 4.5 \cdot N_0 = 4.5 \times 10^{-10} \text{ J} \end{aligned}$$

XIX - 7) Si on double le débit, la solution immédiate consiste à doubler l'efficacité spectrale, donc on passe d'une transmission binaire à une transmission quaternaire sur la voie de signalisation. En supposant un code de Gray entre bits et symboles quaternaires, alors la probabilité d'erreur bit peut être estimée selon :

$$P_b \approx \frac{M-1}{M \cdot \log_2 M} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3 \log_2 M}{M^2 - 1} \cdot \frac{E_b}{N_0}} \right),$$

d'où

$$P_b \approx \frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{E'_b}{N_0}} \right) \leq 10^{-3},$$

d'où,

$$\sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{E'_b}{N_0}} \geq 2.2$$

On déduit :

$$E'_b \geq 5.5 \times 10^{-10},$$

soit 22% de plus d'énergie que dans le cas binaire.

XIX - 8)

$$n = 6, k = 3$$

Vue que la matrice H est sous la forme systématique, on obtient pour G

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les mots de code sont :

$$\begin{array}{cccc} 000000 & 010101 & 100110 & 110011 \\ 001111 & 011010 & 101001 & 111100 \end{array}$$

Avec les poids de Hamming respectifs :

$$\begin{array}{cccc} 000000|0 & 010101|3 & 100110|3 & 110011|4 \\ 001111|4 & 011010|3 & 101001|3 & 111100|4 \end{array}$$

d'où

$$d_{min} = 3$$

Ce code détecte 2 erreurs et en corrige une.

