Département COMELEC UE COM105

Corrigé du TD 3

1.1 Comme les symboles d'une même voie sont indépendants et que le bruit est i.i.d, on peut travailler échantillon par échantillon et donc le maximum de vraisemblance s'écrit comme suit pour la voie $\#n$

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\max_a \, p\left(r_k^{(n)}|a\right)$$

avec la maximisation qui est sur l'ensemble des $M^{(n)}$ symboles possibles.

Il nous suffit donc d'écrire la densité de probabilité conditionnelle $p(r_k^{(n)}|a)$. Comme le bruit est gaussien de moyenne nulle et de variance $N_0/2$, on a

$$p(r_k^{(n)}|a) \propto e^{-\frac{(r_k^{(n)}-h^{(n)}a)^2}{N_0}}$$

où $h^{(n)}$ est un paramètre connu et donc déterministe.

Par conséquent, on a

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\min_a \, (r_k^{(n)} - h^{(n)}a)^2$$

qui est équivalent à

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\min_a \, (z_k^{(n)} - a)^2$$

avec

$$z_k^{(n)} = \frac{r_k^{(n)}}{h^{(n)}}.$$

Donc le ML consiste à appliquer le détecteur à seuil de la modulation $M^{(n)}$-PAM sur le signal reçu divisé par la réponse du canal.

1.2 On note m_1 le nombre de bits émis par utilisation de canal (c'est-à-dire, à chaque fois que un symbole est émis sur chaque voie. En reprenant la formule donnée à la question **7.** du TD2, on a

$$m_1 = \left\lfloor \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\cdot\frac{|h^{(1)}|^2 E_s}{N_0}\right)\right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{1}{\Gamma_1}\cdot\frac{|h^{(2)}|^2 E_s}{N_0}\right)\right\rfloor$$

avec, pour rappel, $\Gamma_1 = \left(Q^{(-1)}(P_e^{(0)}/2)\right)^2/6$.

2.1 Maintenant, le même symbole est émis sur les deux voies. Par conséquent, le ML ne peut plus travailler voie par voie. Par contre, il peut encore s'écrire instant par instant car les symboles émis à des instants différents sont indépendants et les bruits sont indépendants temporellement. Ainsi le ML s'écrit génériquement de la manière suivante

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\max_a \, p\left(r_k^{(1)}, r_k^{(2)}|a\right)$$

Comme les bruits sont indépendants sur les deux voies, on a

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\max_a \, p\left(r_k^{(1)}|a\right).p\left(r_k^{(2)}|a\right)$$

d'où

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\min_a \, (r_k^{(1)} - h^{(1)}a)^2 + (r_k^{(2)} - h^{(2)}a)^2$$

En développant les carrés et en omettant les termes qui ne dépendent pas de a, on obtient que

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\min_a \; f_1(a)$$

avec

$$f_1(a) = 2\frac{h^{(1)}r_k^{(1)} + h^{(2)}r_k^{(2)}}{|h^{(1)}|^2 + |h^{(2)}|^2}a + a^2 = 2r_k a + a^2$$

Il est clair que ce problème est équivalent au problème suivant

$$\hat{a}_k^{(n)} = \arg\min_a \ f_2(a)$$

avec

$$f_2(a) = (r_k - a)^2 = 2r_k a + a^2 + \text{constante}$$

Par conséquent, le ML conduit juste à appliquer le détecteur à seuil de la modulation $M^{(n)}$-PAM sur le signal r_k. On dit que le signal r_k est la combinaison linéaire à maximum de SNR (en anglais, *Maximum Ratio Combiner - MRC*). On observe que le signal r_k est un barycentre des signaux reçus et le poids est d'autant plus fort sur une voie que cette voie est bonne. Ce principe est notamment utilisé dans les récepteurs de téléphonies mobiles 3G lorsque les voies correspondent aux échos du canal de propagation. Le récepteur s'appele alors le *Rake receiver* et date de 1956.

2.2 On a facilement que

$$r_k = a_k + w_k$$

avec

$$w_k = \frac{h^{(1)}w_k^{(1)} + h^{(2)}w_k^{(2)}}{|h^{(1)}|^2 + |h^{(2)}|^2}.$$

Comme les bruits sont indépendants sur chaque voie, la variance de w_k est égale à la somme des variances des deux bruits le constituant. Ainsi

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0/2}{|h^{(1)}|^2 + |h^{(2)}|^2}.$$

Il suffit donc de reprendre la formule donnée à la question **6** du TD2 en remplaçant $N_0/2$ par σ_w^2. On a alors

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6(|h^{(1)}|^2 + |h^{(2)}|^2)\log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

avec E_b l'énergie consommée pour émettre un bit sur une des voies.

2.3 Comme dans le TD2, on néglige le terme $1/M$ extérieur à la fonction Q et en remplaçant E_b par son expression en fonction de E_s, on a

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{6(|h^{(1)}|^2 + |h^{(2)}|^2)}{M^2-1}\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

d'où

$$m_2 = \left\lfloor \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{1}{\Gamma_2}\cdot\frac{E_s}{N_0}\right)\right\rfloor$$

avec

$$\Gamma_2 = \frac{\left(Q^{(-1)}(P_e^{(0)}/2)\right)^2}{6(|h^{(1)}|^2 + |h^{(2)}|^2)}.$$

3 En supposant que $h^{(1)} = h^{(2)} = 1$, on a

$$m_1 = 2\left\lfloor \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{E_s}{N_0}\right)\right\rfloor$$

et

$$m_2 = \left\lfloor \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{2}{\Gamma}\cdot\frac{E_s}{N_0}\right)\right\rfloor$$

avec $\Gamma = \left(Q^{(-1)}(P_e^{(0)}/2)\right)^2/6$.

Hors, on peut montrer[1] facilement que $\log_2(1+x) > (1/2)\log_2(1+2x)$ pour x strictement positif, ce qui implique que la première approche est plus efficace que la seconde approche en terme de débit (sauf à des SNR trop bas où la présence de la partie entière - non prise en compte dans la note de bas de page- inverse le résultat temporairement). Sur la Fig. 1, on présente en fonction du terme $E_s/(\Gamma N_0)$ exprimé en dB les débits atteints par les deux techniques. Clairement, l'approche 1 est meilleure que l'approche 2 sauf à bas SNR.

1. soit $f(x) = \log_2(1+x) - (1/2)\log_2(1+2x)$. On a $f'(x) = 1/(1+x) - 1/(1+2x) > 0$ pour x strictement positif. Donc f est strictement croissante et comme $f(0) = 0$, on a $f(x) > 0$.

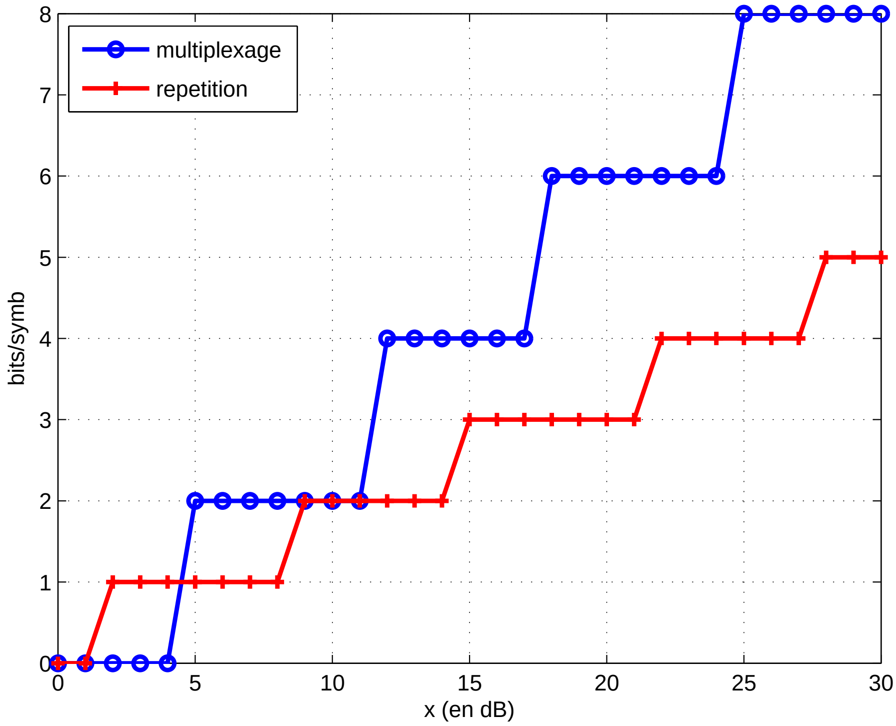

FIGURE 1 – m_1 et m_2 en fonction de $E_s/(\Gamma N_0)$