Département COMELEC | UE COM105

Corrigé du TD 2

1. Le nombre de bits par symbole est :

$$\log_2(M) = \log_2\left(2^{N_b}\right) = N_b$$

Si le signal a été mis en forme par un filtre de Nyquist de facteur d'excès de bande α, alors l'efficacité spectrale η vaut

$$\eta = \frac{2N_b}{1+\alpha}.$$

Ainsi, plus le nombre de bits par symbole augmente, plus l'efficacité spectrale sera grande. On va voir dans la suite du TD que cela se fait au détriment de la probabilité d'erreur.

2. Pour les symboles aux extrémités de la constellation, la probabilité d'erreur est :

$$P_e^{bord} = \text{Prob}\{w_k > A\} = \text{Prob}\{w_k < -A\}.$$

Or

$$\begin{aligned}\text{Prob}\{w_k > A\} &= \int_A^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{t^2}{N_0}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{A}{\sqrt{N_0/2}}}^{\infty} e^{-t'^2/2}\, dt' \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right).\end{aligned}$$

D'où le résultat final :

$$P_e^{bord} = Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right).$$

3. Pour un symbole au cœur de la constellation, il y a erreur si r_k passe à gauche ou à droite de la médiatrice séparant le symbole transmis avec ses symboles adjacents. Ceci est possible si le bruit est inférieur à $-A$ ou supérieur à A. Ainsi la probabilité d'erreur est :

$$P_e^{coeur} = 2\text{Prob}\{w_k > A\}$$

On obtient donc :

$$P_e^{coeur} = 2Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right).$$

4. Les symboles étant équiprobables, la probabilité d'erreur moyenne par symbole est :

$$P_e = \frac{1}{M}(M-2)P_e^{coeur} + \frac{2}{M}P_e^{bord}$$

Ceci donne

$$P_e = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{2A^2}{N_0}}\right).$$

5. Calcul de l'énergie E_s des symboles :

$$\begin{aligned}
E_s &= \frac{A^2}{M}\sum_{m=1}^{M}(2m-M-1)^2 \\
&= \frac{4A^2}{M}\sum_{m=1}^{M}m^2 + A^2(M+1)^2 - \frac{4A^2}{M}(M+1)\sum_{m=1}^{M}m \\
&= \frac{4A^2}{M}\frac{M(M+1)(2M+1)}{6} + A^2(M+1)^2 - \frac{4A^2}{M}(M+1)\frac{M(M+1)}{2} \\
&= A^2(M+1)\left[\frac{2}{3}(2M+1)-(M+1)\right] \\
&= \frac{A^2}{3}(M+1)(M-1)
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient :

$$E_s = \frac{A^2}{3}(M^2-1)$$

Remarque : On rappelle les formules suivantes (à démontrer par récurrence) :

$$\sum_{m=1}^{M}m^2 = \frac{M(M+1)(2M+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{m=1}^{M}m = \frac{M(M+1)}{2}$$

6. L'énergie par bit reçu vaut naturellement :

$$E_b = \frac{E_s}{N_b} = \frac{E_s}{\log_2(M)} = \frac{A^2(M^2-1)}{3\log_2(M)}$$

Donc

$$P_e = 2\frac{M-1}{M}Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right). \tag{1}$$

7. Au lieu d'écrire l'Eq. (1) en fonction de E_b mais en fonction de E_s, on a

$$P_e^{(0)} = 2Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\frac{E_s}{N_0}}\right).$$

En posant

$$\Gamma = \left(Q^{(-1)}(P_e^{(0)}/2)\right)^2/6,$$

on a

$$\Gamma = \frac{1}{M^2-1}\frac{E_s}{N_0}$$

ce qui implique que

$$M^2 = 1 + \frac{1}{\Gamma}\frac{E_s}{N_0}.$$

Or $N_b^{(0)} = \log_2(M)$, donc on a

$$N_b^{(0)} = \left\lfloor \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{1}{\Gamma}\cdot\frac{E_s}{N_0}\right)\right\rfloor$$

Ainsi, en négligeant l'opérateur de partie entière de l'équation précédente, on a, pour une probabilité d'erreur cible de 10^{-3} (resp. 10^{-7}), une marge en SNR par rapport à la capacité de Shannon (cf. polycopié de M. Charbit - [7.2 CHAR]) de 2.56dB (resp. de 6.75dB).