| | | |
|---|---|---|
| TELECOM ParisTech | Département COMELEC | UE COM105 |

# Corrigé du TD 1

## Exercice 1

1. Il est clair que
$$T_b = \frac{1}{D}$$
avec $D$ le débit binaire. On obtient donc
$$T_b = 1\mu\text{s}.$$

2. On rappelle qu'un sinus cardinal a pour Transformée de Fourier une fonction rectangulaire. Ainsi, on a
$$\text{TF}\left[t \mapsto \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)\right] = \Pi_{\frac{1}{T_s}}(f),$$
avec
$$\Pi_{\frac{1}{T_s}}(f) = \begin{cases} T_s & \text{si } |f| \leq \frac{1}{2T_s} \\ 0 & \text{si } |f| > \frac{1}{2T_s}. \end{cases}$$
d'où
$$\text{TF}\left[t \mapsto \text{sinc}\left(\frac{t-T_s}{T_s}\right)\right] = \Pi_{\frac{1}{T_s}}(f)\, e^{-2i\pi T_s f}.$$
On en conclut que
$$H(f) = \Pi_{\frac{1}{T_s}}(f)\,(1 - e^{-2i\pi T_s f}) = 2i.\Pi_{\frac{1}{T_s}}(f).e^{-i\pi T_s f}.\sin(\pi T_s f),$$
ce qui implique que
$$|H(f)| = 2.\Pi_{\frac{1}{T_s}}(f).|\sin(\pi T_s f)|.$$

3. D'après la formule de Bennet, la largeur de bande de $s(t)$ est donnée par celle de $|H(f)|$. Par conséquent, on a
$$B = \frac{1}{2T_s}.$$

4. Parce que $h(T_s) \neq 1$, cette mise en forme ne vérifie pas la condition de Nyquist pour le temps-symbole $T_s$. Il y aura donc de l'IES.

5. En ré-écrivant le signal par rapport aux sinus cardinaux, on obtient facilement que
$$s(t) = \sum_k c_k g(t - kT_s)$$
avec
$$g(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$
et
$$c_k = a_k - a_{k-1}. \tag{1}$$
Par conséquent, aux instants d'échantillonnage multiples de $T_s$, le signal $s(t)$ est représenté par la "nouvelle constellation" $c_k$ qui admet 3 valeurs possibles $-2$, 0, et 2. Par conséquent, le diagramme de l'œil est celui en bas à gauche (Quadrant Sud-Ouest).

6. Finalement, on peut décoder directement $c_k$ et donc obtenir $\hat{c}_k$. Ensuite, on retrouve les détections $\hat{a}_k$ sur $a_k$ en supposant que l'Eq. (1) est encore valable pour les décisions, c'est-à-dire, que

$$\hat{c}_k = \hat{a}_k - \hat{a}_{k-1}. \tag{2}$$

On pratique donc un codage différentiel entre deux amplitudes consécutives. Le système est initialisé par $a_{-1} = \hat{a}_{-1} = 0$, et on en déduit donc les $\hat{a}_k$ suivant l'Eq. (2).
Vous verrez en COM223 que cette manière de procéder ne correspond pas au maximum de vraisemblance et n'est donc pas optimale. En fait, l'algorithme optimal est l'algortihme de Viterbi qui a été découvert en 1973 et qui est implémenté notamment dans les téléphones mobiles 2G pour gérer ce problème d'IES (induit par des échos du canal de propagation).

# Exercice 2

1. On rappelle que

$$B = \frac{1+\alpha}{2T_s} = \frac{D}{2\log_2(M)}(1+\alpha)$$

Comme $\alpha \geq 0$, on a

$$0 \leq \frac{2B\log_2(M)}{D} - 1$$

et donc

$$\frac{D}{2B} \leq \log_2(M)$$

L'application numérique de l'exercice conduit à $\log_2(M) \geq 3,6$ d'où l'utilisation minimale d'une 16-PAM.

2. Si $M = 16$, alors

$$1+\alpha = \frac{2B\log_2(M)}{D} = 1.1111$$

ce qui induit que

$$\alpha = 11.11\%$$

3. Comme nous fournissons les spectres des filtres, il faut vérifier si l'équation suivante est valide

$$\sum_k \left| R\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \right| = \text{constante.}$$

Clairement le spectre **a** ne vérifie pas le critère de Nyquist (fréquentiel). En revanche les spectres **b** et **c** vérifient le critère. Pour le spectre **b**, cela se voit en sommant deux spectres décalés entre eux. Pour le spectre **c**, il faut sommer trois spectres décalés entre eux pour s'en apercevoir.

4. Pour le spectre **a**, si le temps-symbole vaut $(4/3)T$, c'est-à-dire, une rapidité de modulation $3/(4T)$, alors il n'y a pas d'IES.