

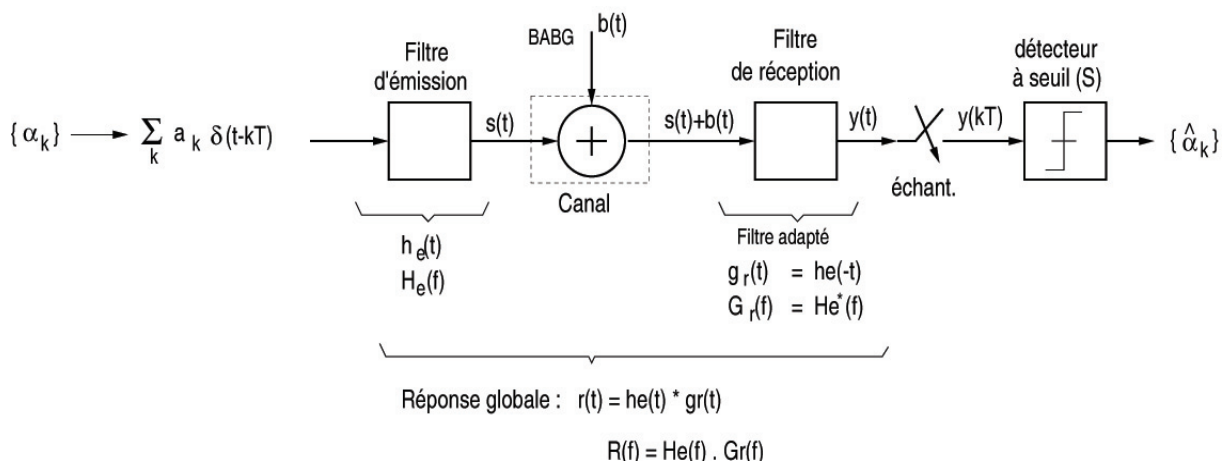


Communications Numériques et Théorie de l'Information  
**CNTI**

Formulaire de Communications Numériques.  <sup>1</sup>

Septembre 2011.

Chaîne de transmission (Modulation M-aire en Bande de Base).



<sup>1</sup>Contexte académique sans modifications

**Paramètres de la transmission. Modulation M-aire.**

- **Taux de modulation** =  $\log_2 M$  *bits/symbole*. («Modulation Rate»)
- **Période de symbole**  $\triangleq T$  *secondes* («Symbol period»)
- **Période de bit**  $\triangleq T_b = \frac{T}{\log_2 M}$  *secondes*
- **Rapidité de modulation**  $\triangleq R = \frac{1}{T}$  *bauds (symboles/sec)*
- **Débit binaire**  $\triangleq D = \frac{\log_2 M}{T} = \frac{1}{T_b}$  (*bits/sec*) («Bit Rate»)
- **Formule de Bennett.**

$$s(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT) \quad \text{Signal émis.}$$

La formule de Bennett permet de calculer le spectre de  $s(t)$ ;

$$S_{ss}(f) = |H_e(f)|^2 S_{aa}(f),$$

où  $S_{aa}(f)$  est la Densité Spectrale de Puissance (DSP) des symboles  $a_k$  :

$$S_{aa}(f) = \frac{1}{T} \sum_k r_k^{aa} e^{-j2\pi kTf}$$

$$r_k^{aa} = \mathbf{E}[a_m \cdot a_{m-k}]$$

Cette formule peut être exprimée de la façon suivante :

$$S_{aa}(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{k}{T}),$$

avec les définitions suivantes :

$$m_a = \mathbf{E}[a_k]$$

$$\sigma_a^2 = \mathbf{E}[(a_k - m_a)^2]$$

- **Interférence Entre Symboles (IES).**

$$y(kT) = \underbrace{a_k \cdot r(0)}_{\text{symbole } k} + \underbrace{\sum_{n \neq k} a_n \cdot r((k-n)T)}_{\text{IES}} + \underbrace{b_r(kT)}_{\text{bruit}}$$

Distorsion maximale :

$$D_{max} = \frac{\sum_{k \neq 0} |r(kT)|}{|r(0)|}$$

Dans le cas M-aire :

$$D_{max} = (M - 1) \frac{\sum_{k \neq 0} |r(kT)|}{|r(0)|}$$

L'œil est ouvert verticalement si  $D_{max} < 1$ .

• **Critère de Nyquist.**

L'IES est nulle si :

$$r(kT) = 0 \quad \forall k \neq 0$$

Condition de Nyquist :

$$\sum_k R(f - \frac{k}{T}) = Tr(0)$$

• **Cosinus surélevé.**

$$P(f) = \begin{cases} T & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{T}{2} \{1 - \sin[\frac{\pi T}{\alpha} (|f| - \frac{1}{2T})]\} & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

$$p(t) = \text{sinc}(\frac{t}{T}) \frac{\cos \alpha \pi \frac{t}{T}}{1 - (2\alpha \frac{t}{T})^2}$$

• **Filtre Adapté.**

Pour minimiser la  $P_e$  le filtre de réception  $g_r(t)$  doit vérifier :

$$g_r(t) = K.h_e(-t)$$

avec  $K$  une constante multiplicative.

Dans le domaine de la fréquence cette condition devient :

$$G_r(f) = H_e^*(f)$$

- Nyquist et Filtre Adapté.

$$R(f) \geq 0 \text{ et } |G_r(f)| = |H_e(f)| = \sqrt{R(f)}$$

*Filtres en Racine de Nyquist*

---

- Facteur de retombée  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) («Roll off»)
- Largeur de bande ( $f > 0$ )  $B \triangleq \frac{1+\alpha}{2T}$  Hz. («Bandwidth»)

$$\Gamma'_a(k) = \frac{\mathbf{E}[(a_n - m_a)(a_{n-k} - m_a)]}{\sigma_a^2}$$

- Efficacité spectrale  $\triangleq \eta = \frac{D}{B}$  (bits/sec/Hz) («Spectral efficiency»)
- 

Paramètres de performance.

- Bruit Additif Blanc et Gaussien - BABG («AWGN»)
- DSP Bilatérale du bruit  $\triangleq \frac{N_o}{2}$  (Watts/Hz) («Spectral Density»)
- Energie Moyenne par Symbole  $\triangleq E_s = \mathbf{E}[\int a_k^2 h_c^2(t) dt] = \mathbf{E}[a_k^2] \int h_c^2(t) dt$  (Joules/Symbole)
- Energie Moyenne par Bit  $\triangleq E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$  Joules/bit
- Puissance Moyenne d'émission  $P = \frac{E_s}{T} = \frac{E_b}{T_b}$  Watts («Average Power»)
- Rapport Signal à Bruit par symbole  $\triangleq \frac{E_s}{N_o} = (\log_2 M) \frac{E_b}{N_o}$  («Signal to Noise Ratio - SNR»)
- Rapport Signal à Bruit par bit  $\triangleq \frac{E_b}{N_o} = \frac{P}{D \cdot N_o}$
- Probabilité d'erreur par symbole  $\triangleq P_{e_s} = Pr[\hat{\alpha}_k \neq \alpha_k]$
- Probabilité d'erreur par bit  $\triangleq P_{e_b}$

$$\frac{P_{e_s}}{\log_2 M} \leq P_{e_b} \leq P_{e_s}$$

$$\mathbf{M=2} \quad P_{e_b} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right)$$

$$\mathbf{M=2^m} \quad P_{e_s} = 2\frac{M-1}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_o} \frac{3\log_2 M}{M^2-1}}\right)$$

- Fonction  $Q(x)$

$$Q(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Fonction  $\operatorname{erfc}(x)$

$$\operatorname{erfc}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-x^2}$$

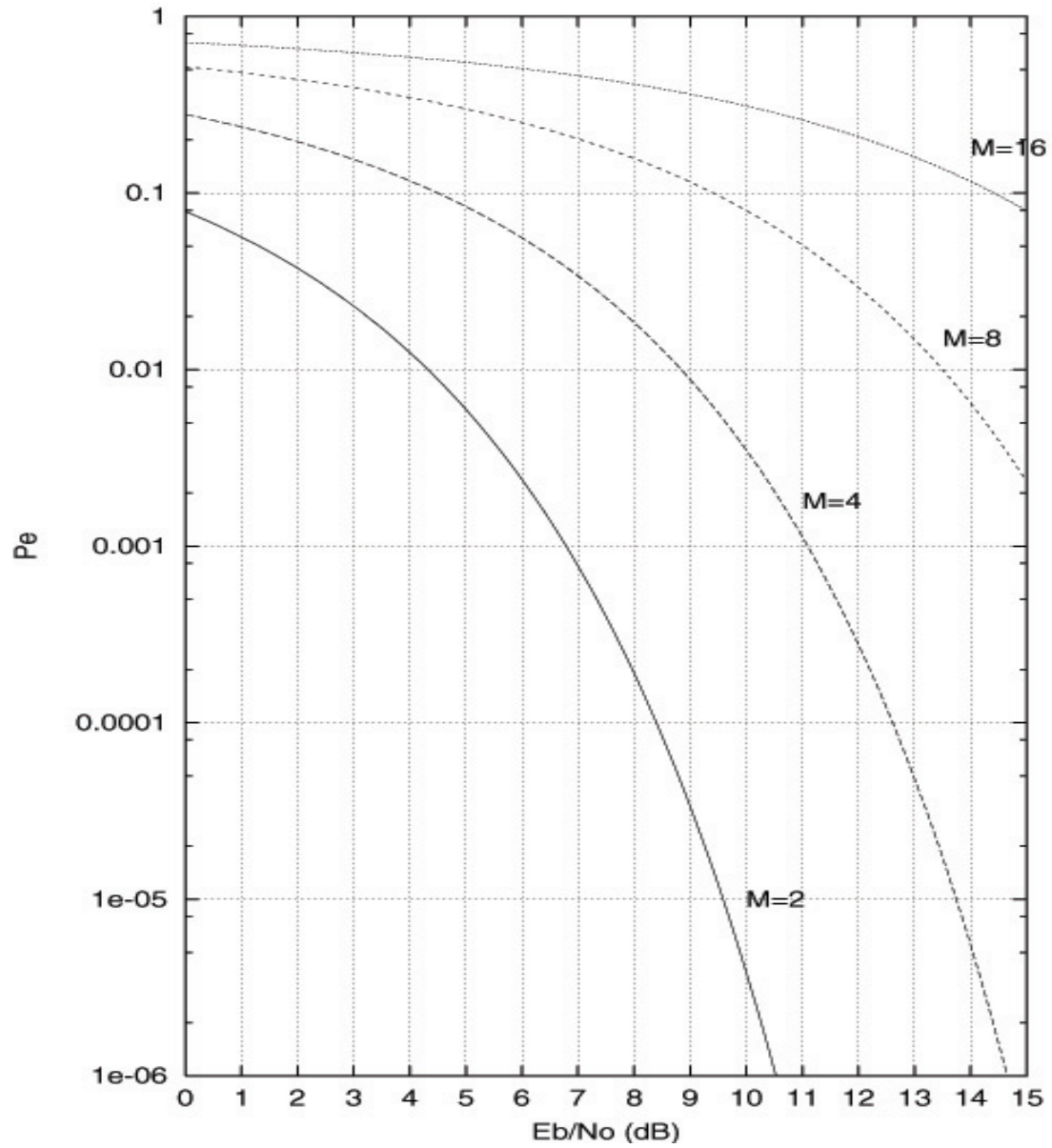
$$\operatorname{erfc}(x) = 2Q(\sqrt{2}x)$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

- Approximation de la fonction  $Q(x)$  ( $x \geq 2$ ) :

$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

Probabilité d'erreur pour les modulations M-aires.



Fonction  $Q(x)$  et fonction  $\text{erfc}(x)$ 

x	Q(x)	erfc(x)	x	Q(x)	erfc(x)
0.0	0.5	1.0			
0.1	0.460172	0.887537	4	3.16715e-05	1.54178e-08
0.2	0.42074	0.777298	4.1	2.06577e-05	6.70025e-09
0.3	0.382089	0.671373	4.2	1.33459e-05	2.85559e-09
0.4	0.344578	0.571608	4.3	8.54001e-06	1.1935e-09
0.5	0.308538	0.4795	4.4	5.41262e-06	4.89182e-10
0.6	0.274253	0.396144	4.5	3.39773e-06	1.9662e-10
0.7	0.241964	0.322199	4.6	2.11249e-06	7.74974e-11
0.8	0.211855	0.257899	4.7	1.30083e-06	2.99531e-11
0.9	0.18406	0.203092	4.8	7.93345e-07	1.13523e-11
1	0.158655	0.157299	4.9	4.79194e-07	4.21899e-12
1.1	0.135666	0.119795	5	2.86659e-07	1.53748e-12
1.2	0.11507	0.089686	5.1	1.69831e-07	5.49388e-13
1.3	0.0968006	0.0659919	5.2	9.9647e-08	1.92492e-13
1.4	0.0807567	0.0477147	5.3	5.7903e-08	6.61314e-14
1.5	0.0668072	0.0338947	5.4	3.33214e-08	2.2277e-14
1.6	0.0547993	0.0236515	5.5	1.89901e-08	7.3579e-15
1.7	0.0445654	0.0162095	5.6	1.07179e-08	2.38285e-15
1.8	0.0359303	0.0109095	5.7	5.99057e-09	7.56625e-16
1.9	0.0287165	0.00720967	5.8	3.31586e-09	2.3556e-16
2	0.0227501	0.00467786	5.9	1.81757e-09	7.19044e-17
2.1	0.0178644	0.0029796	6	9.86622e-10	2.15198e-17
2.2	0.0139034	0.0018629	6.1	5.30356e-10	6.31463e-18
2.3	0.0107241	0.0011432	6.2	2.82322e-10	1.81668e-18
2.4	0.00819753	0.000688521	6.3	1.48826e-10	5.12424e-19
2.5	0.00620968	0.000406955	6.4	7.769e-11	1.41708e-19
2.6	0.00466122	0.000236036	6.5	4.01607e-11	3.84216e-20
2.7	0.00346702	0.000134333	6.6	2.05582e-11	1.02133e-20
2.8	0.00255519	7.50137e-05	6.7	1.04211e-11	2.66172e-21
2.9	0.00186588	4.10983e-05	6.8	5.23103e-12	6.80087e-22
3	0.00134996	2.20908e-05	6.9	2.60016e-12	1.70361e-22
3.1	0.000967633	1.16488e-05	7	1.27983e-12	4.18383e-23
3.2	0.000687153	6.02586e-06	7.1	6.23791e-13	1.00734e-23
3.3	0.000483431	3.05777e-06	7.2	3.01066e-13	2.3778e-24
3.4	0.000336933	1.52203e-06	7.3	1.43885e-13	5.50258e-25
3.5	0.000232631	7.43116e-07	7.4	6.80929e-14	1.24839e-25
3.6	0.00015911	3.55872e-07	7.5	3.19092e-14	2.77665e-26
3.7	0.0001078	1.67156e-07	7.6	1.48067e-14	6.05454e-27
3.8	7.23484e-05	7.70062e-08	7.7	6.80336e-15	1.29428e-27
3.9	4.80967e-05	3.47933e-08	7.8	3.09538e-15	2.71241e-28

dB	x	dB	x
0.0	1	5.0	3.16228
0.1	1.02329	5.1	3.23594
0.2	1.04713	5.2	3.31131
0.3	1.07152	5.3	3.38844
0.4	1.09648	5.4	3.46737
0.5	1.12202	5.5	3.54813
0.6	1.14815	5.6	3.63078
0.7	1.1749	5.7	3.71535
0.8	1.20226	5.8	3.80189
0.9	1.23027	5.9	3.89045
1.0	1.25893	6.0	3.98107
1.1	1.28825	6.1	4.0738
1.2	1.31826	6.2	4.16869
1.3	1.34896	6.3	4.2658
1.4	1.38038	6.4	4.36516
1.5	1.41254	6.5	4.46684
1.6	1.44544	6.6	4.57088
1.7	1.47911	6.7	4.67735
1.8	1.51356	6.8	4.7863
1.9	1.54882	6.9	4.89779
2.0	1.58489	7.0	5.01187
2.1	1.62181	7.1	5.12861
2.2	1.65959	7.2	5.24807
2.3	1.69824	7.3	5.37032
2.4	1.7378	7.4	5.49541
2.5	1.77828	7.5	5.62341
2.6	1.8197	7.6	5.7544
2.7	1.86209	7.7	5.88844
2.8	1.90546	7.8	6.0256
2.9	1.94984	7.9	6.16595
3.0	1.99526	8.0	6.30957
3.1	2.04174	8.1	6.45654
3.2	2.0893	8.2	6.60693
3.3	2.13796	8.3	6.76083
3.4	2.18776	8.4	6.91831
3.5	2.23872	8.5	7.07946
3.6	2.29087	8.6	7.24436
3.7	2.34423	8.7	7.4131
3.8	2.39883	8.8	7.58578
3.9	2.45471	8.9	7.76247
4.0	2.51189	9.0	7.94328
4.1	2.5704	9.1	8.12831
4.2	2.63027	9.2	8.31764
4.3	2.69153	9.3	8.51138
4.4	2.75423	9.4	8.70964
4.5	2.81838	9.5	8.91251
4.6	2.88403	9.6	9.12011
4.7	2.95121	9.7	9.33254
4.8	3.01995	9.8	9.54993
4.9	3.0903	9.9	9.77237
5.0	3.16228	10.0	10.0