



Communications Numériques et Théorie de l'Information

Contrôle de Connaissances avec documents¹

Jeudi 23 juin 2011 - 8h30 à 10h00

Questions de compréhension

1. Une source binaire i.i.d. maxentropique d'alphabet $A = \{0, 1\}$ est codée par un modulateur quaternaire d'alphabet $Q = \{a, b, c, d\}$. Quelle est l'entropie à la sortie du modulateur ?
2. Pourquoi c'est si important de pouvoir disposer des raies spectrales dans le spectre d'un signal modulé numériquement ?
3. Vrai ou faux ?
 - a) le filtre adapté est un filtre de Nyquist ;
 - b) le filtre adapté annule l'IES du bruit ;
 - c) le filtre adapté minimise le probabilité d'erreur à la sortie du démodulateur ;
 - d) le filtre adapté minimise le rapport signal sur bruit ;
 - e) le filtre adapté supprime le bruit.
4. Un système de transmission binaire utilise un filtre de mise en forme à l'émission en racine de Nyquist. Le filtre de réception est adapté au filtre d'émission. Le bruit de canal est additif, gaussien et blanc.
 - a) Quelle es la nature spectrale du bruit après le filtre de réception ?
 - b) Quelle est la nature spectrale des échantillons du bruit filtré ?
5. On utilise un code C un code correcteur d'erreurs de paramètres (n, k) pour coder les bits d'une source binaire i.i.d. maxentropique. Vérifiez la validité des questions suivantes en justifiant vos réponses :
 - a) C a 2^k mots de code ;
 - b) C a $2^n - 2^k$ mots de code ;
 - c) C a une distance minimale $d_{min} = \log_2(n - k)$;
 - d) C a $2^n/2^k$ mots de code ;
 - e) chaque mot de code véhicule en moyenne 1 bit d'information ;
 - f) C a 2^n mots d'information ;

¹Solution disponible sur la site de CNTI

- g) chaque mot de code véhicule en moyenne $n - k$ bits d'information ;
- h) C a une distance minimale $d_{min} = k$;
- i) C corrige $n - k$ erreurs ;
- j) C a une distance minimale $d_{min} = 2^{n-k}$.



Services d'un système radio-mobile

Un système de téléphonie radio-mobile urbain, offre à ses abonnés, en liaison descendante, deux types de services :

- un service de parole ;
- un service d'accès INTERNET haut débit.

La station de base (BTS) communique avec un utilisateur sur une bande passante de 350 kHz. Le débit du service de parole est de 64 kb/s. Le débit maximal du service d'accès INTERNET est de 600 kb/s. La BTS utilise une modulation linéaire d'amplitude, avec un filtre d'émission en racine de cosinus surélevé de *roll-off* α .

1. Proposer un schéma pour le récepteur embarqué dans le téléphone portable. Expliquer clairement le rôle de chaque unité de traitement.
2. Déterminer le *roll-off* α à la sortie du récepteur, compatible avec les paramètres de transmission.
3. Le canal radio est à bruit additif blanc et gaussien de densité spectrale de puissance $N_0 = 10^{-9}$ W/Hz. Déterminer la puissance requise pour assurer une probabilité d'erreur bit $P_b \sim 10^{-3}$ pour le service de parole.
4. Idem pour atteindre une $P_b \sim 10^{-7}$ pour le service d'accès INTERNET. Quel devra être le rang dynamique de l'amplificateur de puissance du portable ?

Le téléphone portable est soumis à l'interférence des autres communications qui se réalisent simultanément sur le même canal de fréquence dans des cellules voisines. Ainsi, en supposant que le nombre d'interféreurs est important, le bruit d'interférence est un processus additif, gaussien et blanc de densité spectrale de puissance $N_I = n.N_{iu}$ où n représente le nombre total d'interféreurs et N_{iu} représente la densité spectrale de puissance d'interférence par utilisateur. La figure 1 représente le modèle d'interférence proposé. N_{iu} peut être estimé à partir de la puissance émise par chaque interféreur, atténuée d'un facteur $\beta = 30$ dB. En présence d'interférence multi-utilisateur, le système accepte un mode dégradé avec une $P_b \sim 10^{-6}$ pour le service INTERNET.

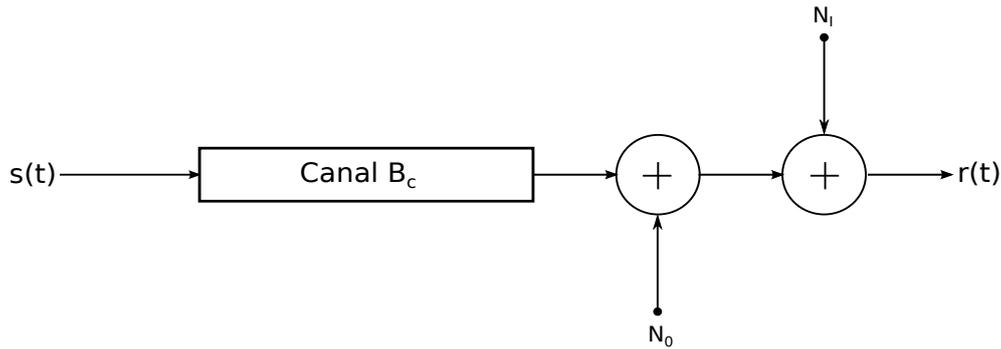


FIGURE 1: Modèle d'interférence.

5. Calculer N_{iu} et le nombre d'interféreurs maximal pour atteindre la performance dégradée².

Évidemment, 600 kb/s pour une liaison descendante INTERNET, ce n'est pas très intéressant. On décide de doubler ce débit.

6. En supposant le même *roll-off* α , calculer la probabilité d'erreur bit P_b si on utilise la même énergie par bit d'information E_b que celle utilisée pour le service à 600 kb/s ³.
7. Pour améliorer la performance du service à 1.2 Mb/s , on utilise le code correcteur d'erreur \mathcal{C} suivant :

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}$$

Déterminer les paramètres (n, k) de ce code, ainsi que sa capacité à détecter et corriger des erreurs.

Bonne chance !



²On supposera que **TOUS** les interféreurs sont en mode « service INTERNET ».

³On supposera qu'il n'y a pas d'interféreurs.

Corrigés

- 1) Schéma largement expliqué en cours : filtre adapté en racine de cosinus surélevé avec *roll-off* α (le même *roll-off* qu'à l'émission) ; échantillonneur ; détecteur à seuil. Ne pas oublier, le sous-système de synchronisation.

- 2) La contrainte en bande passante est imposée par le service à plus haut débit, soit l'accès INTERNET à 600 kb/s. La plus petite largeur de bande requise pour assurer une transmission sans IES après l'échantillonnage vaut :

$$B_{\min} = \frac{D}{2} = \frac{600}{2} = 300 \text{ kHz}.$$

La largeur de bande disponible du canal :

$$B_c = 350 \text{ kHz} \geq B_{\min} = 300 \text{ kHz}.$$

On peut donc introduire un excès de bande α selon :

$$\frac{(1 + \alpha).D}{2} = B_c,$$

soit :

$$(1 + \alpha).300 \text{ kHz} = 350 \text{ kHz} \Rightarrow \alpha = \frac{350}{300} - 1 = 0.166$$

$$\alpha = 16.6\%.$$

- 3) Application directe de la probabilité d'erreur bit dans le cas binaire :

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2.E_b}{N_0}}\right) = 10^{-3}.$$

A partir du tableau de la page 7 du Formulaire de Com Num, on déduit :

$$\sqrt{\frac{2.E_b}{N_0}} = 3.1 \rightarrow E_b = \frac{3.1^2}{2} \times 10^{-9} = 4.8 \times 10^{-9} \text{ J},$$

$$P_{\text{parole}} = E_b \times D_p = 4.8 \times 10^{-9} \times 64 \times 10^3 = 0.31 \text{ mW}.$$

- 4) Même calcul :

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2.E_b}{N_0}}\right) = 10^{-7}.$$

A partir du tableau de la page 7 du Formulaire de Com Num, on déduit :

$$\sqrt{\frac{2.E_b}{N_0}} = 5.2 \rightarrow E_b = \frac{5.2^2}{2} \times 10^{-9} = 13.5 \times 10^{-9} \text{ J},$$

$$P_{\text{INTERNET}} = E_b \times D_{\text{INTERNET}} = 13.5 \times 10^{-9} \times 600 \times 10^3 = 8.1 \text{ mW}.$$

- 5) Calculons la D.S.P. d'interférence, par utilisateur :

$$N_{iu} = \frac{\text{Puissance Interf}}{\text{Largeur de bande}} = \frac{\beta \cdot P_{\text{INTERNET}}}{\frac{(1+\alpha)}{2} \cdot D_{\text{INTERNET}}},$$

avec,

$$\beta = -30 \text{ dB} = 0.001,$$

$$P_{\text{INTERNET}} = 8.1 \text{ mW},$$

$$\frac{(1+\alpha)}{2} = \frac{(1+166)}{2} = 0.58,$$

$$D_{\text{INTERNET}} = 600 \text{ kb/s},$$

$$N_{iu} = \frac{0.001 \times 8.1 \cdot 10^{-3}}{0.58 \times 600 \cdot 10^3} = 2.35 \cdot 10^{-11} \text{ W/Hz},$$

Calculons maintenant le rapport signal sur bruit avec interférence :

$$N'_0 = N_0 + N_I,$$

avec

$$N_I = n \cdot N_{iu} = n \cdot 2.35 \cdot 10^{-11} \text{ W/Hz},$$

$$N'_0 = 10^{-9} + n \cdot 2.35 \cdot 10^{-11} \text{ W/Hz}.$$

En reprenant le calcul de la P_b de la question 4),

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{N'_0}}\right) = 10^{-6}.$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{N'_0}} = 4.8 \rightarrow N'_0 = \frac{2 \cdot E_b}{4.8^2} = \frac{2 \times 13.5 \cdot 10^{-9}}{4.8^2} = 1.17 \cdot 10^{-9} \text{ W/Hz},$$

on déduit,

$$1.17 \cdot 10^{-9} - 10^{-9} = n \cdot 2.35 \cdot 10^{-11} \text{ W/Hz}.$$

$$n = \frac{0.17 \cdot 10^{-9}}{2.35 \cdot 10^{-11}} = 7 \text{ interférences}.$$

- 6) La bande requise pour faire passer $2 \cdot D_{\text{INTERNET}} = 1.2 \text{ Mb/s}$, vaut :

$$B' = \frac{1.2}{2} = 600 \text{ kHz}.$$

Très clairement, la largeur de bande disponible $B_c = 350 \text{ kHz}$, ne suffit pas. On augmente l'ordre de la modulation à $M = 4$. Dans ce cas la rapidité de modulation vaut :

$$R = 600 \text{ kSymb/s},$$

