Contrôle de connaissances - CNTI[1]
Mardi 22 juin 2010
DOCUMENTS AUTORISÉS

I. Questions de compréhension

1. L'entropie d'une source binaire avec $Proba(0) = p$, est déterminée par la fonction $H_2(p)$, définie en cours selon :

$$H_2(p) = -p\log_2(p) - (1-p)\log_2(1-p).$$

Bien connue depuis le XVIII$^{\text{e}}$ siècle, l'approximation de Stirling, établit :

$$x! \simeq x^x\, e^{-x}\, \sqrt{2\pi x}.$$

En utilisant les deux premiers termes de l'approximation de Stirling prouvez que les coefficients binomiaux $\binom{N}{n}$, vérifient :

$$\binom{N}{n} \simeq 2^{N.H_2(n/N)}.$$

2. Un système de transmission numérique, binaire, bipolaire, utilise un signal modulé en amplitude du type :

$$s(t) = \sum_k a_k h(t-kT),$$

où $a_k = \pm 1$, T et le durée d'un symbole binaire, et $h(t)$ et le filtre réel de mise en forme en bande de base.

Vrai ou faux[2] : « La densité spectrale de puissance de $s(t)$ dépend » :

a) du débit binaire ;

b) l'atténuation du canal ;

c) de la corrélation entre les symboles de source et les amplitudes a_k ;

d) du filtre de mise en forme $h(t)$;

e) de la corrélation des amplitudes a_k ;

[1] Corrigé disponible sur le site de CNTI.
[2] Justifier toutes les réponses.

f) du filtre « inverse » $1/h(t)$;

g) de la densité spectrale de puissance du bruit.

3. Énoncer le critère de Nyquist appliqué à un système de transmission numérique modulé en amplitude, qui utilise un filtre global de mise en forme $R(f)$. Pourquoi ce critère est si important ?

4. Un système de transmission numérique utilise un filtre global en cosinus surélevé avec *roll-off* α sur un canal à bruit gaussien de densité spectrale de puissance $N_0/2$. Ce système peut fonctionner avec plusieurs ordres de modulation : $M = 2, 4, 8, 16$.
   - Définir et calculer l'efficacité spectrale η en fonction de M ;
   - calculer le rapport E_b/N_0 requis pour atteindre une $P_b = 10^{-5}$;
   - évaluer la pénalité en énergie en fonction de l'efficacité spectrale.

5. Prouvez que pour tout code en bloc linéaire de paramètres (n, k), la distance de Hamming minimale de C, est le plus petit poids de Hamming des mots de code.

6. Soit un code en bloc linéaire de matrice génératrice G :

$$G = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

   Est-il systématique ? Déterminer une borne supérieure de la distance minimale de ce code.

♣

II. Étude de la couche physique de l'UMTS

Le système UMTS utilise, pour la liaison montante, une technique de transmission binaire bipolaire, constitué par deux voies de communication en quadrature. Le principe est très simple : une voie de parole numérisée module en amplitude un filtre de mise en forme à l'émission $h(t)$ en racine cosinus surélevé avec un *roll-off* de 22% [3]. La durée d'un symbole binaire est :

$$T \sim 0.26042 \mu\,\mathrm{sec}\,.$$

Cette voie engendre un signal modulé $s_p(t)$. Au même temps, le terminal utilisateur engendre une voie de signalisation numérique qui module en amplitude le même filtre de mise en forme à l'émission $h(t)$. Cette voie est à l'origine d'un deuxième signal modulé $s_{sig}(t)$. Ces deux signaux vont être multiplexés en fréquence, sur le même signal porteur, dans la bande de 1.92 à $1.98 M$Hz selon :

$$s(t) = s_p(t).\cos(2\pi f_0 t) + s_{sig}(t).\sin(2\pi f_0 t).$$

Dans la suite on supposera que le système UMTS fonctionne en présence d'un bruit additif, blanc et gaussien de densité spectrale de puissance $N_0 = 10^{-10}$ W/Hz. En réception, le démutiplexage est réalisé à l'aide de deux multiplicateurs synchrones ($\cos(2\pi f_0 t)$ ou bien $\sin(2\pi f_0 t)$) suivis d'un filtre passe-bas comme l'indique la figure 1 :

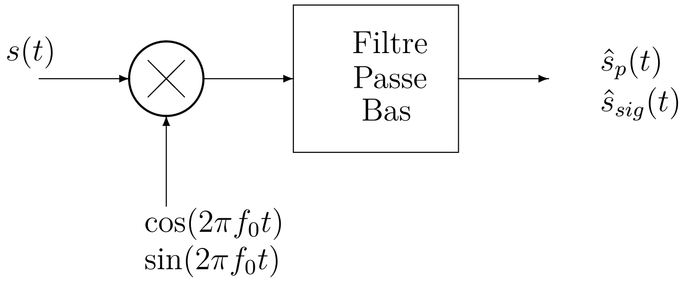

Figure 1: Démodulateur

1. Déterminer le débit binaire par voie de communication.

2. Montrer que le démodulateur de la figure 1, avec $\cos(2\pi f_0 t)$ permet de récupérer le canal de parole en bande de base, alors que $\sin(2\pi f_0 t)$ permet de récupérer le canal de signalisation.

On peut traiter la liaison montante de l'UMTS comme un système de transmission en bande de base, en « oubliant » la modulation sur fréquence f_0.

3. Proposer un schéma de transmission point à point pour la parole et pour la signalisation. Indiquer très clairement quel est le rôle de chaque entité de traitement.

[3] Voir la réf ETSI TS 125 104 V9.3.9 (2010-04) - http://www.etsi.org

4. Calculer la largeur de bande requise pour transmettre parole et signalisation sans interférence entre symboles.

5. Déterminer l'efficacité spectrale du signal émis.

6. Calculer la puissance moyenne requise pour assurer une probabilité d'erreur bit sur le canal de parole, $P_b \leq 10^-3$

Un événement important dans l'environnement radio du téléphone portable, nécessite l'émission de deux fois plus de données de signalisation vers la station de base. Deux solutions sont possibles :

- on fait préemption du canal de parole (c'est à dire on « vole » littéralement la voie de parole) ;
- on double le débit de la voie de signalisation.

7. En supposant que la largeur de bande disponible reste inchangée, déterminer l'ordre de modulation ainsi que l'énergie par bit requis pour la même qualité de service, si la deuxième solution est retenue.

On décide de protéger le voie de parole grâce à un code en bloc linéaire de matrice de check de parité H définie par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Déterminer les paramètres (n, k) ce code, ainsi que sa capacité de détection et de correction.

Corrigés

I - 1) L'approximation de Stirling établit :

$$x! \simeq x^x \; e^{-x} \; \sqrt{2\pi x},$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\log(x!) \simeq x.\log(x) - x + \frac{1}{2}\log(2\pi x).$$

Par définition :

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!\; n!},$$

ou ce qui est équivalent :

$$\log\binom{N}{n} = \log \; \frac{N!}{(N-n)!\; n!} = \log(N!) - \log((N-n)!) - \log n!.$$

En utilisant Stirling (les deux premiers termes seulement) :

$$\log\binom{N}{n} \simeq \underbrace{N\log N - N} \; - \; \underbrace{(N-n)\log(N-n) + (N-n)} \; - \; \underbrace{n\log n + n};$$

$$\log\binom{N}{n} \simeq N\log N - N - (N-n)\log(N-n) + N - n - n\log n + n = N\log N - (N-n)\log(N-n) - n\log n.$$

En ajoutant le terme $n\log N - n\log N$ on obtient :

$$\log\binom{N}{n} \simeq N\log N - (N-n)\log(N-n) - n\log n + n\log N - n\log N =$$

$$= (N-n)\log N - (N-n)\log(N-n) + n\log N - n\log n =$$

$$= (N-n)\log\frac{N}{N-n} + n\log\frac{N}{n} = N\;\frac{N-n}{N}\log\frac{N}{N-n} + N\;\frac{n}{N}\log\frac{N}{n},$$

d'où

$$\log\binom{N}{n} \simeq N\;\frac{N-n}{N}\log\frac{N}{N-n} + N\;\frac{n}{N}\log\frac{N}{n}.$$

Cette expression en logarithme, est valable en n'importe quelle base, en particulier :

$$\log_2\binom{N}{n} \simeq N\;\frac{N-n}{N}\log_2\frac{N}{N-n} + N\;\frac{n}{N}\log_2\frac{N}{n}.$$

Si on appelle,

$$p = \frac{n}{N},$$

alors

$$\log_2 \binom{N}{n} \simeq N \ \left((1-p)\log_2 \frac{1}{1-p} + p\log_2 \frac{1}{p} \right) = N.H_2(n/N),$$

ce qui est équivalent à :

$$\binom{N}{n} \simeq 2^{N.H_2(n/N)}.$$

I - 2) Une application directe de la formule de Bennett :

$$S_{ss}(t) = \frac{1}{T}.|H(f)|^2.S_{aa}(f),$$

D'où les bonnes réponses : a), d) et e).

I - 3) Nyquist établit les conditions nécessaire pour la suppression de l'interférence entre symboles à la sortie du filtre récepteur. Si $r(t)$ et le réponse globale du système, alors le critère de Nyquist établit :

$$r(nT) = \begin{cases} r(0) & n = 0 \\ 0 & \forall n \end{cases}$$

Dans ce cas nous aurons[4] :

$$y(nT) = a_n.r(0) + \sum_{m \neq 0} a_{n-m}.r(mT) = a_n.r(0).$$

Dans le domaine de la fréquence :

$$\sum_n R(f - \frac{n}{T}) = T.r(0).$$

I - 4) L'efficacité spectrale vaut :

$$\eta = \frac{D}{B} = \frac{2}{1+\alpha},$$

por le cas binaire, et :

$$\eta = \frac{D}{B} = 2\frac{\log_2 M}{1+\alpha},$$

dans le cas M-aire. On voit donc clairement le gain en efficacité spectrale (de l'ordre de $\log_2 M$).

La probabilité d'erreur bit, en supposant IES=0 (vu qu'il s'agit d'un filtre global en cosinus surélevé), pour le cas M-aire, vaut :

$$P_b \approx \frac{M-1}{M.\log_2 M}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}.\frac{\mathrm{E}_b}{N_0}}\right),$$

[4]utilisant la notation du cours.

Cette expression, donne une idée précise du compromis en rapport E_b/N_0 à réaliser dans le cas où on fait appel à une modulation à M états. Le tableau suivant, représente, l'éfficacité spectrale, le rapport E_b/N_0 requis pour $P_b = 10^{-5}$ et le différentiel Δ en énergie, requis pour atteindre cette performance.

M	2	4	8	16
η	2	4	6	8
E_b/N_{0dB}	9.6	13.6	18	22.9
Δ_{dB}	0	4	8.4	13.3

I - 5) Par définition, la distance minimale de C vaut :

$$d_{min} = \min_{\forall\, i \neq j} \; d_H(c^{(i)}; c^{(j)}) \qquad c^{(i)}, c^{(j)} \in C$$

La métrique de Hamming étant invariante par translation des axes coordonnées, nous avons :

$$d_{min} = \min_{\forall\, i \neq j} \; d_H(c^{(i)}; c^{(j)}) = \min_{\forall\, i \neq j} \; d_H(c^{(i)} + c^{(i)}; c^{(j)} + c^{(i)}).$$

Le code C est linéaire, donc :

$$c^{(j)} + c^{(i)} = c^{(k)} \text{ un autre mot de code.}$$

Nous avons donc le résultat suivant :

$$d_{min} = \min_{\forall\, k} \; d_H(0; c^{(k)}) = \min_{\forall\, k} \; w_H(c^{(k)}) = w_{min}(C).$$

I - 6) La matrice génératrice G a la forme $G = (P|I)$, donc ce code est systématique. Le code étant linéaire, en vertu de la question précédente, la distance minimale du code est le plus petit poids de Hamming de mots de code. Il s'agit d'un code $(23, 11)$, donc il y a $2^{11} = 2048$ mots dans ce code. Il faut calculer le poids de tous ces mots et choisir le plus petit. Le 11 lignes de la génératrice sont des mots de code donc, déjà, on peut établir une borne supérieure à la distance minimale en évaluant le poids minimal des ligne de G. Une analyse rapide donne :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccccc|c}
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & w_h \\
1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8\\
1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&8\\
0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&8\\
1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&8\\
1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&8\\
1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&8\\
0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&8\\
0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&8\\
0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&8\\
1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&8\\
0&1&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&8
\end{array}$$

donc on peut établir :

$$d_{min} \leq 8.$$

II - 1)

$$D = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.26042.10^{-6}} = 3.84\ M\ bits/s$$

II - 2) Du calcul direct du produit, il résulte :

$$\begin{aligned}
s(t).\cos(2\pi f_0 t) &= (s_p(t).\cos(2\pi f_0 t) + s_{sig}(t).\sin(2\pi f_0 t)).\cos(2\pi f_0 t) \\
&= s_p(t).\cos^2(2\pi f_0 t) + s_{sig}(t).\sin(2\pi f_0 t).\cos(2\pi f_0 t) \\
&= s_p(t).\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right\} + s_{sig}(t).\frac{1}{2}\sin(4\pi f_0 t) \\
&= s_p(t).\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4\pi f_0 t)\right\} + s_{sig}(t).\frac{1}{2}\sin(4\pi f_0 t) \\
&= \frac{1}{2}s_p(t) + \frac{1}{2}s_p(t)\cos(4\pi f_0 t) + \frac{1}{2}s_{sig}(t).\sin(4\pi f_0 t)
\end{aligned}$$

Le filtre passe-bas suprime toutes les composantes de fréquence à $2f_0$. Donc nous avons :

$$\hat{s}(t) = \text{FPB}\{s(t).\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}s_p(t).$$

Avec le même type d'argument, on aboutit à :

$$\tilde{s}(t) = \text{FPB}\{s(t).\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}s_{sig}(t).$$

II - 3) Schéma de transmission traité à plusieurs reprises en cours.

II - 4) Selon Nyquist (racine de cosinus surélevé), la largeur de bande occupée vaut :

$$B_w = D\frac{(1+\alpha)}{2} = 3.84 \times \frac{1.22}{2} = 2.34M\text{Hz}.$$

II - 5)

$$\eta = 2.\frac{2}{1+\alpha} = 3.28\ b/s\text{Hz}.$$

Il ne faut pas oublier que le signal $s(t)$ véhicule **2 voies de communications multiplexées !**

II - 6) La proba d'erreur bit dans le cas binaire vaut :

$$P_b = \mathrm{Q}\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-3}.$$

Du formulaire, on conclut :

$$\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \geq 3,$$

$$E_b \geq 4.5.N_0 = 4.5 \times 10^{-10} J$$

II - 7) Si on double le débit, la solution immédiate consiste à doubler l'efficacité spectrale, donc on passe d'une transmission binaire à une transmission quaternaire sur la voie de siganlisation. En supposant un code de Gray entre bits et symboles quaternaires, alors la probabilité d'erreur bit peut être estimée selon :

$$P_b \approx \frac{M-1}{M.\log_2 M}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{3\log_2 M}{M^2-1}.\frac{\mathrm{E}_b}{N_0}}\right),$$

d'où

$$P_b \approx \frac{3}{8}\text{erfc}\left(\sqrt{\frac{2}{5}.\frac{\mathrm{E'}_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-3},$$

d'où,

$$\sqrt{\frac{2}{5}.\frac{\mathrm{E'}_b}{N_0}} \geq 2.2$$

On déduit :

$$\mathrm{E'}_b \geq 5.5 \times 10^{-10},$$

soit 22% de plus d'énergie que dans le cas binaire.

II - 8)

$$n = 6, k = 3$$

Vue que la matrice H est sous la forme systématique, on obtient pour G

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Les mots de code sont :

000000	010101	100110	110011
001111	011010	101001	111100

Avec les poids de Hamming respectifs :

000000|0	010101|3	100110|3	110011|4
001111|4	011010|3	101001|3	111100|4

d'où

$$d_{min} = 3$$

Ce code détecte 2 erreurs et en corrige une.