Communications Numériques et Théorie de l'Information

Contrôle de Connaissances avec documents

Mardi 24 juin - 13h30 à 15h00

Système de télérelevage par satellite

On se propose d'étudier le fonctionnement d'un système de télérelevage de la consommation électrique domiciliaire, par satellite. La figure 1 représente un tel système. Une liaison descendante (**LD**) établit un lien entre satellite et le compteur électrique domiciliaire. D'autre part, une liaison montante (**LM**) établit un lien de communication entre le compteur et le satellite.

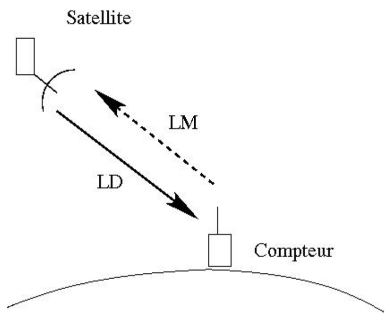

FIG. 1 – Schéma de télérelevage par satellite.

Le système fonctionne autour d'une porteuse à 32GHz dans la bande Ka, et dispose d'une bande passante totale de $50MHz$ pour assurer les communications dans les deux voies (LM et LD) en mode *half-duplex*. Le satellite émet avec $400mW$ de puissance. Chaque fois qu'il passe sur le compteur, un message de requête est envoyé en LD. Le compteur dispose d'un récepteur-émetteur numérique intégré, qui lui permet de décoder ce message. Comme il est très poli, il répond à la question posée par le satellite, en émettant, en liaison montante, un message de réponse.

Il y a donc deux liaisons numériques qui s'établissent lors du passage du satellite : la liaison numérique descendante (la question posée par le satellite) et la liaison numérique montante (la réponse du compteur). Nous allons étudier dans la suite ces deux liaisons de communication.

A Analyse de la liaison descendante

Une requête «type» émise par le satellite est formée par la concatenation des données suivantes : l'**identité du compteur** codée sur 2 octets ; la **date** codée sur 1 octet ; l'**heure** codée sur 1 octet et les **actions** à réaliser, codées sur 4 octets. Cette concaténation constitue un paquet d'information en liaison descendante (dans la suite un *paquet LD*). Un paquet LD est transmis en $1\mu s$ par le satellite.

1. Déterminer le débit D_{LD} de la liaison descendante.[**0.5 point**]

La satellite utilise une modulation d'amplitude M-aire à 4 états avec un filtrage global $p(t)$ en cosinus surélevé avec facteur de roll-off $\alpha = 0.6$. Le canal de transmission peut être modélisé par un canal à bruit additif blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance $N_0 = 10^{-9}\ W/Hz$.

2. Représenter le système de transmission complet en LD, en expliquant le rôle de chaque organe de traitement.[**1 point**]
3. Calculer la rapidité de modulation du système en LD.[**0.5 point**]
4. Peut-on garantir, avec ce système, une transmission sans interférence entre symboles ?[**2 points**]

5. Lequel de ces trois diagrammes de l'oeil, construit en sortie du filtre récepteur, vous semble correspondre au système LD ? (justifier le choix)[**1 point**]

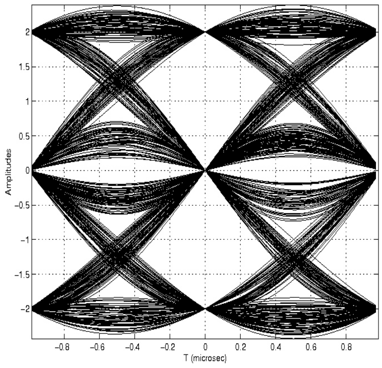

FIG. 1 – DO **A**

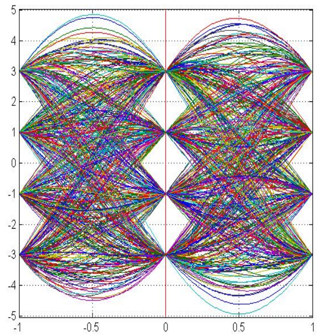

FIG. 2 – DO **B**

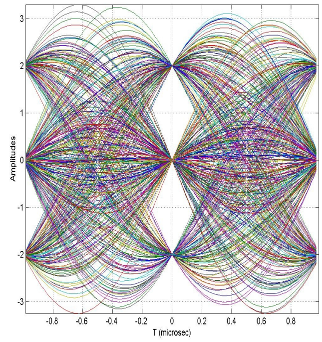

FIG. 3 – DO **C**

6. Calculer l'efficacité spectrale de la LD.[**1 point**]
7. Calculer la probabilité d'erreur binaire pour la LD. Estimer, en moyenne, le nombre de paquets en erreur par rapport au nombre de paquets émis.[**1 point**]
8. On souhaite améliorer la qualité de la LD, sans modifier, l'efficacité spectrale. Comment atteindre une $P_b \sim 2.10^{-4}$? Déterminer, dans ce cas, la valeur du paramètre de transmission à modifier.[**2 points**]
9. Si maintenant on autorise une modification minimale de l'efficacité spectrale, montrer si c'est possible d'atteindre la $P_b \simeq 2.10^{-4}$, sans pénalité d'énergie. Dans le cas affirmatif, calculer la nouvelle efficacité spectrale.[**2 points**]

B Analyse de la liaison montante

Une réponse «type» émise par le compteur, en réponse à la requête du satellite, est formée par la concatenation des données suivantes : l'**identité du compteur** codée sur 2 octets ; la **date** codée sur 1 octet ; l'**heure** codée sur 1 octet ; les **réponses aux actions** codées sur 4 octets, un **rapport sur l'état de fonctionnement** du compteur, codé sur 1 octet. Cette concaténation constitue un paquet d'information en liaison montante (dans la suite un *paquet LM*). Un paquet LM est aussi transmis en $1\mu s$ par le compteur.

Le compteur utilise une modulation binaire avec un filtrage global $p(t)$ en cosinus surélevé avec facteur de roll-off $\alpha = 0.2$ et dispose d'une puissance d'émission $\mathcal{P} = 100mW$. Le canal montant est aussi un canal à bruit additif blanc et gaussien de même densité spectrale de puissance que la LD.

10. Peut-on assurer cette transmission en LM sans IES ? Si c'est possible, calculer l'efficacité spectrale de la LM.[**2 points**]
11. Calculer la probabilité d'erreur par bit d'information, de la LM.[**1 point**]
12. Représenter le modèle discret équivalent de la LM et calculer sa capacité $C_{LM}^{discret}$.[**1 point**]

Pour améliorer la qualité de service on décide de protéger chaque demi-octet par un code correcteur d'erreur binaire. Chaque mot d'information $\mathbf{i} = (i_1, i_2, i_3, i_4)$, se verra protégé par deux bits de redondance p_1 et p_2 calculés selon :

$$p_1 = i_1 \oplus i_3,$$

$$p_2 = i_2 \oplus i_4.$$

Les mots $\mathbf{v}$ de ce code, appelé $\mathcal{V}$ ($\mathbf{v} \in \mathcal{V}$), seront écrits selon :

$$\mathbf{v} = (p_1, p_2, i_1, i_2, i_3, i_4).$$

On rajoutera, à chaque mot de code $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, un bit de check de parité pp, calculé selon :

$$pp = \sum_k \oplus\, v_k,$$

où $\sum \oplus$, indique la somme XOR des bits de $\mathbf{v}$. Ce bit sera concaténé avec les mots $\mathbf{v}$, pour engendrer les mots de $\mathcal{C}$ selon la concaténation :

$$\mathbf{c} = (\mathbf{v}\ pp).$$

13. Déterminer les paramètres (n, k, d_{min}), du code $\mathcal{C}$. Est-il systématique ?[**2 points**]
14. Quelle est la capacité de détection et de correction de ce code.[**1 point**]
15. On reçoit $\mathbf{r} = 0111101$. Quel est le mot d'information émis ?[**1 point**]

Solutions

-1)

$$D_{LD} = \frac{8 \text{ octets} \times 8 \text{ bits/octet}}{10^{-6}s} = 64Mb/s.$$

-2) Série-parallèle par paire de bits pour créer les 4 états du modulateur - filtre d'émission en racine de Nyquist avec roll-off 0.6 - canal AWGN - filtre de réception adapté au filtre d'émission en racine de Nyquist avec roll-off 0.6- échantillonneur - détecteur à seuil de 4 états - sous-système de synchro.

-3) Le débit binaire vaut $D_{DL} = 64\ Mb/s$, dans ce cas, $T_S = 2.T_b$ d'où :

$$R = \frac{1}{T_S} = \frac{1}{2T_b} = \frac{D}{2} = 32\ MSymb/s$$

-4) Oui, puisque la largeur de bande du signal transmis est plus petite que la largeur de bande du canal et qu'un filtre global en Nyquist est utilisé.

-5) Il s'agit d'une modulation quaternaire, donc le DO de la figure 2.

-6) Par définition,

$$\eta = \frac{D}{B}$$

Dans ce cas de cette modulation, la largeur de bande occupée par la modulation quaternaire vaut :

$$B = \frac{(1+\alpha).R}{2},$$

avec

$$R = \frac{1}{T_S} = \frac{1}{2T_b} = \frac{D}{2}.$$

On a donc,

$$B = \frac{(1+\alpha).D}{4} = \frac{(1+0.6).64}{4} = 25.6\ MHz,$$

d'où l'efficacité spectrale,

$$\eta = \frac{64}{25.6} = 2.5\ \frac{b/s}{Hz}.$$

-7) La proba d'erreur bit pour une modulation quaternaire, en supposant qu'on utilise un code de Gray, vaut :

$$P_b = \frac{P_{es}}{\log_2(M)} = \frac{P_{es}}{2},$$

avec, selon le formulaire des Comms. Nums., :

$$P_{e_s} \ = \ 2\frac{M-1}{M}\ Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}\frac{3\log_2 M}{M^2-1}}).$$

Calculons d'abord l'énergie par bit d'information disponible :

$$\mathcal{P} = 400\ mW = E_b.D\ \Rightarrow E_b = \frac{\mathcal{P}}{D} = \frac{400.10^{-3}}{64.10^6} = 6.25 \times 10^{-9}\ J.$$

Le rapport E_b/N_0 vaut donc :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{6.25.10^{-9}}{10^{-9}} = 6.25.$$

On déduit,

$$P_{e_b} = \frac{P_{e_s}}{2} \;=\; \frac{3}{4}\,Q(\sqrt{\frac{4.E_b}{5.N_0}}) \sim 10^{-2}.$$

Cela veut dire, qu'il y a, en moyenne statistique, 1 bit érroné tous les 100 bits émis. Puisque chaque paquet est composé de 64 bits, on a en moyenne, un paquet en erreur tous les $100/64 \sim 1.5$ paquets émis, soit en moyenne, un paquet en erreur sur 2 paquets émis.

-8) Puisqu'on a pas le droit de changer l'efficacité spectrale, on ne peut pas changer la largeur de bande requise pour la transmission. Le seul moyen d'améliorer la QoS consiste à augmenter l'énergie par bit d'info transmis. Calculons la pénalité en énergie pour atteindre $P_b \sim 2.10^{-4}$. Soit E_b' l'énergie requise our atteindre la nouvelle P_b cible. Alors,

$$P_b = \frac{P_{es}}{\log_2(M)} \;=\; \frac{M-1}{M}\,Q(\sqrt{\frac{2E_b'}{N_0}\frac{3\log_2 M}{M^2-1}}) = \frac{3}{4}.Q(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b'}{N_0}}) = 2.10^{-4}.$$

Des tables du formulaire de comms. Numms. on déduit :

$$\frac{E_b'}{N_0} = \frac{5}{4}.3.45^2 \;\Rightarrow\; E_b' \simeq 15.10^{-9}\ J,$$

d'où,

$$\mathcal{P}' = 952\ mW.$$

On a plus que doublé la puissance exigée à l'émetteur satellitaire !

-9) Calculons la plus petite largeur de bande requise pour une transmission binaire sur la LD. Clairement, dans ce cas, il faudra changer de modulateur, mais l'avantage en économie énergétique peut justifier l'investissement. Pour le cas binaire, la plus petite largeur de bande requise pour assurer une transmission binaire sans IES, vaut :

$$B_{min} = \frac{D}{2} = 32\ MHz.$$

Puisque la largeur de bande du canal est de 50 MHz, on peut transmettre ce débit binaire sans IES. Dans ce cas la probabilité d'erreur par bit transmis vaut :

$$P_b = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}) = Q(\sqrt{2.6.25}) \simeq 2.10^{-4}.$$

Donc avec la même énergie par bit d'info, on peut atteindre la cible de QoS ! La nouvelle efficacité spectrale vaut :

$$\eta = \frac{64}{32} = 2\ \frac{b/s}{Hz}.$$

Une réduction de 25% de l'efficacité spectrale me permet de «sauver» une puissance plus que double exigée à l'émetteur du satellite !

-10) Calculons tout d'abord le nouveau débit binaire.

$$D_{LM} = \frac{9 \text{ octets} \times 8 \text{ bits/octet}}{10^{-6} s} = 72 Mb/s.$$

La plus petite largeur de bande requise pour transmettre ce débit sans IES vaut :

$$B_{min} = \frac{72}{2} = 36 \ MHz.$$

Puisqu'on utilise un roll-off $\alpha = 0.2$, alors on obtient,

$$B = (1 + 0.2).36 = 43.2 \ MHz < 50 \ MHz \text{ bande de canal},$$

donc on peut assurer la transmission sans IES. L'efficacité spectrale vaut donc :

$$\eta = \frac{D_{LM}}{B} = \frac{72 \ Mb/s}{43.2 \ MHz} = 1.67 \ \frac{b/s}{Hz}.$$

-11) Il s'agit d'une transmission binaire, donc :

$$P_b = Q(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}).$$

Vu que l'émetteur du compteur émet avec $1W$, l'énergie par bit d'information transmis vaut :

$$E_b = \frac{\mathcal{P}}{D_{LM}} = \frac{0.1W}{72 \ Mb/s} = 1.38.10^{-9} \ J,$$

d'où le rapport E_b/N_0 vaut :

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1.38.10^{-9}}{10^{-9}} = 1.389.$$

Pour transmission binaire,

$$P_b = Q(\sqrt{2.1.38}) = Q(1.66) \simeq 5.10^{-2}.$$

-12) Avec $p = P_b = 5.10^{-2}$. La capacité de ce canal vaut :

$$C_{CBS} = 1 - H_2(p) = 1 - 0.22 \simeq 0.78 \text{ bits usage de canal}.$$

-13) $k = 4$, un demi-octet. Le code $\mathcal{V}$ est un code $k, k+2$, donc $(6, 4)$. Puisqu'on rajoute un bit de parité globale, pp, le code résultant $\mathcal{C}$ est un code $(7, 4)$. Remarquons que les équations de check de parité partielle, indiquent clairement, que ce code peut être décomposé en deux sous-codes de check de parité simple, le premier qui teste la parité des positions impaires des bits d'information, et le deuxième qui teste la parité des positions paire. Il s'agit donc de la concaténation(entelacement) de deux codes $(3, 2)$, donc il faut pas attendre des merveilles en termes de correction et détection. Le bit pp de parité totale, ne fait qu'un check de check, donc il faudra s'attendre à qu'il soit toujours 0 !

Listons les mots de code :

	$p_1 = i_1 \oplus i_3$	$p_2 = i_2 \oplus i_4$	i_1	i_2	i_3	i_4	$pp = \sum_k \oplus$	poids
c_0	0	0	0	0	0	0	0	0
c_1	0	1	0	0	0	1	0	2
c_2	1	0	0	0	1	0	0	2
c_3	1	1	0	0	1	1	0	4
c_4	0	1	0	1	0	0	0	2
c_5	0	0	0	1	0	1	0	2
c_6	1	1	0	1	1	0	0	4
c_7	1	0	0	1	1	1	0	4
c_8	1	0	1	0	0	0	0	2
c_9	1	1	1	0	0	1	0	4
c_{10}	0	0	1	0	1	0	0	2
c_{11}	0	1	1	0	1	1	0	4
c_{12}	1	1	1	1	0	0	0	4
c_{13}	1	0	1	1	0	1	0	4
c_{14}	0	1	1	1	1	0	0	4
c_{15}	0	0	1	1	1	1	0	4

Clairement, il est systématique. Comme indiqué, le dernier bit de chaque mot de code est toujours à zéro. Une erreur sur ce bit pourra être corrigée, bien que ce code ne corrige aucune erreur !

-14)

$$DET = d_{min} - 1 = 1.$$

$$CORR = \lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \rfloor = 0.$$

-15) En supposant une seule erreur de transmission, le dernier bit ne peut pas $= 1$, donc l'erreur est dans la dernière position. Le message transmis est :

$$\mathbf{i} = 1110.$$