



Formations Libres et Innovantes en Réseaux et Télécomms

FLIRT

Aide mémoire de Traitement du Signal

Septembre 2018.

Signaux déterministes.

1. **Signal à temps continu** $x(t)$ \longleftrightarrow **Signal à temps discret** $\{x_k\}$

2. **Échantillonnage**

$$\{x_k\} = x(kT),$$

avec T , intervalle d'échantillonnage, et $1/T$, la fréquence d'échantillonnage.

$$\{x_k\} = x(kT) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - kT)$$

3. **Énergie**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2$$

4. **Puissance moyenne**

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} |x(t)|^2 dt \quad , \quad \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{+K} |x_k|^2$$

5. **Système linéaire invariant dans le temps**

Réponse impulsionnelle :

$$h(t) \quad , \quad h_k$$

Réponse du système :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$y_k = x_k * h_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m h_{k-m}$$

6. **Transformation de Fourier**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt \quad , \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft} df$$

$$X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{-j2\pi fmT} \quad , \quad x_m = T \int_{-1/2T}^{+1/2T} X(e^{j2\pi fT})e^{+j2\pi fmT} df$$

7. **Théorème de l'échantillonnage**

Un signal $x(t)$ à temps continu peut être reconstruit à partir de ses échantillons x_m , si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la plus grande composante de fréquence de $x(t)$.

Formule de reconstruction

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \frac{\sin[\pi(t - mT)/T]}{\pi(t - mT)/T} \quad , \quad \{x_m\} = x(mT).$$

8. Propriétés de symétrie de la TF

Temps continu	Temps discret
$x(t) \leftrightarrow X(f)$	$x_k \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})$
$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$	$x_{-k} \leftrightarrow X(e^{-j2\pi fT})$
$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$	$x_{-k}^* \leftrightarrow X^*(e^{-j2\pi fT})$
$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$	$x_{-k}^* \leftrightarrow X^*(e^{j2\pi fT})$
$\mathbf{Re}[x(t)] \leftrightarrow X_{\text{paire}}(f)$	$\mathbf{Re}[x_k] \leftrightarrow X_{\text{paire}}(e^{j2\pi fT})$
$j\mathbf{Im}[x(t)] \leftrightarrow X_{\text{impaire}}(f)$	$j\mathbf{Im}[x_k] \leftrightarrow X_{\text{impaire}}(e^{j2\pi fT})$
$x_{\text{paire}}(t) \leftrightarrow \mathbf{Re}[X(f)]$	$x_{\text{paire } k} \leftrightarrow \mathbf{Re}[X(e^{j2\pi fT})]$
$x_{\text{impaire}}(t) \leftrightarrow j\mathbf{Im}[X(f)]$	$x_{\text{impaire } k} \leftrightarrow j\mathbf{Im}[X(e^{j2\pi fT})]$

9. Propriétés de la TF

Temps continu	Temps discret
$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$	$ax_k + by_k \leftrightarrow aX(e^{j2\pi fT}) + bY(e^{j2\pi fT})$
$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$	$x_k * y_k \leftrightarrow X(e^{-j2\pi fT})Y(e^{-j2\pi fT})$
$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$	$x_k y_k \leftrightarrow T \int_{-1/2T}^{1/2T} X(e^{-j2\pi\varphi T})Y(e^{-j2\pi(f-\varphi)T})d\varphi$
$x(t - \tau) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f\tau}$	$x_{k-K} \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})e^{-j2\pi fKT}$
$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f - f_0)$	$x_k e^{j2\pi f_0 kT} \leftrightarrow X(e^{j2\pi(f-f_0)T})$

10. Quelques paires TF

- Porteuse complexe à la fréquence f_0

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow 2\delta(f - f_0) \quad , \quad e^{j2\pi f_0 kT} \leftrightarrow 2/T\delta(f - f_0)$$

- Fonction rectangle

$$\text{rect}(t, a, B) = \begin{cases} a & -B/2 \leq t \leq B/2 \\ 0 & |t| > B/2 \end{cases}$$

$$\text{rect}(t, a, B) \leftrightarrow aB \text{ sinc}(Bf)$$

- Formule de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi n t/T}$$

Dual :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi k f T}.$$

- Peigne de Dirac

$$\text{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\mathbf{TF}\{\text{III}_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T).$$



Signaux aléatoires.

1. Variable aléatoire avec distribution gaussienne

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. Processus aléatoire et séquence aléatoire

$$\{x(t)\} \quad , \quad \{x_k\}$$

3. Moyenne

$$m_x(t) = \mathbb{E}[x(t)] \quad , \quad m_k = \mathbb{E}[x_k]$$

4. Autocorrélation

$$R_x(t_1, t_2) = \mathbb{E}[x(t_1).x^*(t_2)] \quad , \quad R_x(k, i) = \mathbb{E}[x_k.x_i^*]$$

avec x^* , complexe conjugué de x

5. Stationnarité

- $x(t)$ ($\{x_k\}$) est «stationnaire au sens strict» (**PASS**), si les lois de probabilité de $x(t)$ ($\{x_k\}$) ne dépendent pas d'un décalage temporel.

- $x(t)$ ($\{x_k\}$) est «stationnaire au sens large» (**PASL**), si la moyenne et l'autocorrélation, ne dépendent pas d'un décalage temporel. Dans ce cas :

$$m_x(t) = E[x(t)] = m_x \quad , \quad m_k = E[x_k] = m$$

$$R_x(t_1, t_2) = E[x(t_1).x^*(t_2)] = R_x(t_1-t_2) \quad , \quad R_x(k, i) = E[x_k.x_i^*] = R_x(k-i)$$

$$R_x(\tau) = E[x(t).x^*(t+\tau)] \quad , \quad R_x(m) = E[x_k.x_{k+m}^*]$$

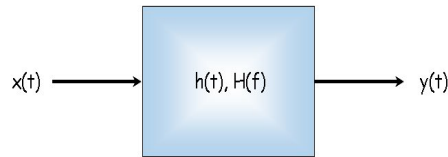
6. Puissance d'un PASL de moyenne nulle

$$R_x(0) = E[x(t).x^*(t)] = E[|x(t)|^2] \quad , \quad R_x(0) = E[x_k.x_k^*] = E[|x_k|^2]$$

7. Densité Spectrale de Puissance d'un PASL

$$S_x(f) = \text{TF}\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad , \quad S_x(e^{j2\pi fT}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{-j2\pi fmT}$$

8. Formule de filtrage



$x(t)$ ($\{x_n\}$), **PASL**, avec densité spectrale de puissance $S_x(f)$ ($S_x(e^{j2\pi fT})$).

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 \quad , \quad S_y(e^{j2\pi fT}) = S_x(e^{j2\pi fT})|H(e^{j2\pi fT})|^2$$

