Communications Numériques et Théorie de l'Information

CNTI

Aide mémoire de Traitement du Signal

à l'usage des Communications Numériques.[1]

Septembre 2011.

Signaux déterministes.

1. **Signal à temps continu** $x(t)$ $\longleftrightarrow$ **Signal à temps discret** $\{x_k\}$

2. **Échantillonnage**

$$\{x_k\} = x(kT),$$

avec T intervalle d'échantillonnage et $1/T$ fréquence d'échantillonnage.

$$\{x_k\} = x(kT) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta(\tau - kT)$$

3. **Énergie**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad , \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2$$

4. **Puissance moyenne**

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} |x(t)|^2 dt \quad , \quad \lim_{K\to\infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{+K} |x_k|^2$$

[1] Contexte académique sans modifications

5. **Système linéaire invariant dans le temps**

   Réponse impulsionnelle

$$h(t) \quad , \quad h_k$$

   Réponse du système

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$y_k = x_k * h_k = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m h_{k-m}$$

6. **Transformation de Fourier**

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad , \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{+j2\pi ft}df$$

$$X(e^{j2\pi fT}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m e^{-j2\pi fmT} \quad , \quad x_m = T\int_{-1/2T}^{+1/2T} X(e^{j2\pi fT})e^{+j2\pi fmT}df$$

7. **Théorème de l'échantillonnage**

> Un signal $x(t)$ à temps continu peut être reconstruit à partir de ses échantillons x_m, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure ou égale au double de la plus grande composante de fréquence de $x(t)$.

   Formule de reconstruction

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_m \frac{\sin[\pi(t-mT)/T]}{\pi(t-mT)/T} \quad , \quad \{x_m\} = x(mT).$$

8. **Propriétés de symétrie de la TF**

Temps continu	Temps discret
$x(t) \leftrightarrow X(f)$	$x_k \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})$
$x(-t) \leftrightarrow X(-f)$	$x_{-k} \leftrightarrow X(e^{-j2\pi fT})$
$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f)$	$x^*_{-k} \leftrightarrow X^*(e^{-j2\pi fT})$
$x^*(-t) \leftrightarrow X^*(f)$	$x^*_{-k} \leftrightarrow X^*(e^{j2\pi fT})$
$\mathbf{Re}[x(t)] \leftrightarrow X_{paire}(f)$	$\mathbf{Re}[x_k] \leftrightarrow X_{paire}(e^{j2\pi fT})$
$j\mathbf{Im}[x(t)] \leftrightarrow X_{impaire}(f)$	$j\mathbf{Im}[x_k] \leftrightarrow X_{impaire}(e^{j2\pi fT})$
$x_{paire}(t)] \leftrightarrow \mathbf{Re}[X(f)]$	$x_{paire\ k} \leftrightarrow \mathbf{Re}[X(e^{j2\pi fT})]$
$x_{impaire}(t)] \leftrightarrow j\mathbf{Im}[X(f)]$	$x_{impaire\ k} \leftrightarrow j\mathbf{Im}[X(e^{j2\pi fT})]$

9. **Propriétés de la TF**

Temps continu	Temps discret
$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f)$	$ax_k + by_k \leftrightarrow aX(e^{j2\pi fT}) + bY(e^{j2\pi fT})$
$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f)Y(f)$	$x_k * y_k \leftrightarrow X(e^{-j2\pi fT})Y(e^{-j2\pi fT})$
$x(t)y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$	$x_k y_k \leftrightarrow T\int_{-1/2T}^{1/2T} X(e^{-j2\pi\varphi T})Y(e^{-j2\pi(f-\varphi)T})d\varphi$
$x(t-\tau) \leftrightarrow X(f)e^{-j2\pi f\tau}$	$x_{k-K} \leftrightarrow X(e^{j2\pi fT})e^{-j2\pi fKT}$
$x(t)e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow X(f-f_0)$	$x_k e^{j2\pi f_0 kT} \leftrightarrow X(e^{j2\pi(f-f_0)T})$

10. **Quelques paires TF**

- Porteuse complexe à la fréquence f_0

$$e^{j2\pi f_0 t} \leftrightarrow 2\delta(f-f_0) \quad , \quad e^{j2\pi f_0 kT} \leftrightarrow 2/T\delta(f-f_0)$$

- Fonction rectangle

$$\mathrm{rect}(t,a,B) = \begin{cases} a & -B/2 \le t \le B/2 \\ 0 & |t| > B/2 \end{cases}$$

$$\mathrm{rect}(t,a,B) \leftrightarrow aBsinc(Bf)$$

- Formule de Poisson

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi nt/T}.$$

Dual

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi kfT}.$$

- Peigne de Dirac

$$\text{Ш}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

$$\mathbf{TF}\{\text{Ш}_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(f - k/T).$$

Signaux aléatoires.

1. **Variable aléatoire avec distribution gaussienne**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. **Processus aléatoire et séquence aléatoire**

$$\{x(t)\} \quad , \quad \{x_k\}$$

3. **Moyenne**

$$m_x(t) = \mathrm{E}[x(t)] \quad , \quad m_k = \mathrm{E}[x_k]$$

4. **Autocorrélation**

$$R_x(t_1, t_2) = \mathrm{E}[x(t_1).x^*(t_2)] \quad , \quad R_x(k, i) = \mathrm{E}[x_k.x_i^*]$$

avec x^* , complexe conjugué de x

5. **Stationnarité**

• $x(t)$ ($\{x_k\}$) sont «stationnaires au sens strict» (**PASS**), si les lois de probabilité de $x(t)$ ($\{x_k\}$) ne dépendent pas d'un décalage temporel.

• $x(t)$ ($\{x_k\}$) sont «stationnaires au sens large» (**PASL**), si la moyenne et l'autocorrélation, ne dépendent pas d'un décalage temporel. Dans ce cas :

$$m_x(t) = \mathrm{E}[x(t)] = m_x \quad , \quad m_k = \mathrm{E}[x_k] = m$$

$$R_x(t_1, t_2) = \mathrm{E}[x(t_1).x^*(t_2)] = R_x(t_1 - t_2) \quad , \quad R_x(k, i) = \mathrm{E}[x_k.x_i^*] = R_x(k - i)$$

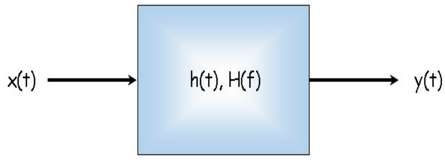
$$R_x(\tau) = \mathrm{E}[x(t).x^*(t + \tau)] \quad , \quad R_x(m) = \mathrm{E}[x_k.x_{k+m}^*]$$

6. **Puissance d'un PASL de moyenne nulle**

$$R_x(0) = \mathrm{E}[x(t).x^*(t)] = \mathrm{E}[|x(t)|^2] \quad , \quad R_x(0) = \mathrm{E}[x_k.x_k^*] = \mathrm{E}[|x_k|^2]$$

7. **Densité Spectrale de Puissance d'un PASL**

$$S_x(f) = \mathrm{TF}\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad , \quad S_x(e^{j2\pi fT}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m e^{-j2\pi fmT}$$



8. **Formule de filtrage**

   $x(t)$ ($\{x_n\}$), **PASL**, avec densité spectrale de puissance $S_x(f)$ ($S_x(e^{j2\pi fT})$)
   .

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 \quad , \quad S_y(e^{j2\pi fT}) = S_x(e^{j2\pi fT})|H(e^{j2\pi fT})|^2$$