Introduction à CNTI.
2008[1]

Georges Rodriguez-Guisantes
Dépt. COMELEC

[1]Dernière mise à jour : janvier 2008

Introduction à CNTI.

I Les Communications

Selon la définition du dictionnaire, on appelle *communication* le fait de communiquer. Communiquer, mot d'origine latine (*communicare*) qui veut dire *être en relation avec* , indique tout processus de transmission ou divulgation d'un message d'une source à un récepteur. Depuis la lointaine Antiquité, on trouve des exemples de tels systèmes : le coureur de Marathon qui annonça à Athènes la victoire sur les Persans, les pigeons du moyen âge qui transportaient les messages du royaume, les signaux de fumée utilisés par les Indiens en Amérique du Nord (exemple de communication optique), de nos jours la poste. Aujourd'hui les télécommunications deviennent un facteur économique de première importance : téléconférence, télé-achat, télébanque, le WEB, etc.

Ce cours traite la communication grâce à l'envoi de signaux électriques. Au fur et à mesure que notre société devient de plus en plus technologique, les volumes d'information à transmettre deviennent de plus en plus grands. Les vitesses de transmission doivent donc suivre cette augmentation. Le défi pour l'ingénieur en télécoms est très grand. La mise en œuvre de systèmes performants est indispensable.

Toute communication peut être décrite par la succession de processus suivants :
- génération du message,
- description symbolique du message,
- adaptation du symbole sous une forme apte pour la transmission,
- transmission du symbole,
- récupération du message émis,
- reconstruction du symbole.

Cette séquence de processus permet de résumer un système de communications en trois modules :

• l'**émetteur** qui adapte le message généré par la source au canal de communication.

• le **canal de communications** est le milieu physique sur lequel le message se propage jusqu'au récepteur.

• le **récepteur** doit reconstruire le message émis en fonction du message reçu (perturbé par le canal de communications).

La figure 1 représente un schéma avec ces modules.

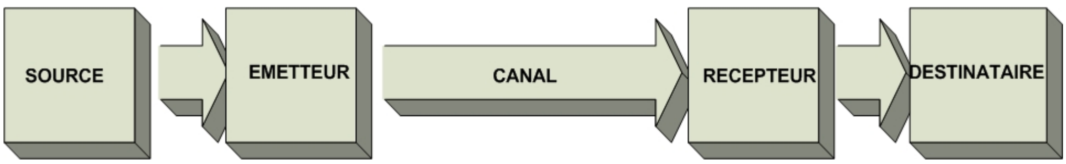

FIG. 1 – Modèle d'une chaîne de transmission.

II CNTI et la BCI

Le but du cours Communications Numériques et Théorie de l'Information est d'analyser les modèles de communication et pouvoir comparer les performances d'une technique par rapport à une autre. Dans ce sens, on étudiera la façon de disposer les messages sur un support de transmission. On analysera dans la suite les modèles les plus courants.

A Contenu du cours

Le cours de CNTI est essentiellement un cours de *modélisation*. Sur la base de certains modèles de transmission, on analysera les meilleures techniques de transmission de l'information. Les points suivants seront traités :

- communications numériques, chaîne de transmission, filtre d'émission et de réception, interférence entre symboles, critère de Nyquist, récepteur optimal, filtre adapté et performances,
- notions élémentaires de la théorie de l'information,
- codes correcteurs des erreurs, codes en bloc linéaires.

Ce cours a une vocation formative, d'où son insertion dans le parcours de la BCI. Certains prérequis sont indispensables pour profiter pleinement du cours. Premièrement, on aura besoin de l'outil « Transformée de Fourier » et des notions de base de la théorie des distributions. Deuxièmement, la théorie élémentaire des systèmes linéaires invariants dans le temps, nous permettra de modéliser les organes de transmission et de réception ainsi que les canaux de communications. Finalement, les « processus aléatoires » et leurs propriétés fondamentales, représentent un outil indispensable dans la suite du cours. Ces sujets ont été traités en partie dans le module *Bases du Traitement du Signal* de la BCI. Le lecteur peut rafraîchir ses idées, un peu plus loin, dans ce document.

III Les sources

Dans les systèmes de communication on retrouve généralement 4 types de sources :

1. la parole , le son,
2. la télévision,
3. le fax,
4. les ordinateurs.

Les messages générés par ces sources contiennent de l'*information*. Une définition rigoureuse de la notion d'information sera traitée dans la dernière partie du cours. Pour l'instant, on se contentera d'une définition plus vague, mais assez intuitive de cette notion : on appelle *information* tout ce qui peut être transmis (objet de connaissance, de mémoire). L'information peut être caractérisée par le signal qui la transporte. On appelle *signal* toute fonction du temps capable d'être générée et transmise sur un canal de communication.

IV Les canaux de communication

Les canaux de transmission les plus communs dans les systèmes de télécommunications sont :

1. le canal téléphonique,
2. le canal optique,
3. le canal radio-mobile,
4. le canal satellite.

V Les Signaux

Pour un système de télécommunication, le signal le plus important est celui qui représente le message généré par la source. Il subit les mêmes variations que les messages de source. Il est appelé *signal en bande de base* (dans la suite la bande base sera indiquée par BB). Le nom « bande base » fait référence à la bande de fréquences dans laquelle le signal est contenu. En général, on associe la bande de base aux composantes de fréquences autour de $f = 0$. Les signaux en BB peuvent être « analogiques » ou « numériques », cette caractéristique dépendant de la nature de la source. Il faut distinguer clairement le signal en BB du signal « transmis », version adaptée aux caractéristiques du milieu de transmission du signal de la source. La transmission peut être faite en bande de base ou en bande dite « transposée » (c'est à dire sur *fréquence porteuse*). La génération d'un signal de transmission en bande transposée est étroitement reliée au processus de modulation.

A La modulation.

Le but d'un système de télécommunication est de faire parvenir un message à un utilisateur, éloigné dans l'espace ou dans le temps de la source d'information. Pour ce faire, l'émetteur transforme le signal de la source en un signal capable d'être véhiculé à travers le canal de communication. Cette transformation est réalisée grâce au processus de *modulation*. La modulation consiste à faire varier un paramètre d'un signal appelé *porteur*, selon le signal du message à transmettre. Le récepteur, en observant les variations de ce paramètre, est capable de reconstruire le message original. Le processus de reconstruction du message transmis s'appelle *démodulation*. En général, on utilise une onde sinusoïdale d'une certaine fréquence comme signal porteur.

Cette définition de modulation est indépendante de la nature du signal modulant, le processus de modulation étant le même pour un signal de source de nature analogique ou bien de nature numérique.

Supposons une modulation d'une porteuse sinusoïdale. Dans ce cas, le signal modulant modifie soit l'**amplitude** (*modulation d'amplitude*, MA), soit la **phase** (*modulation de phase*, MP), soit la **fréquence** (*modulation de fréquence*, MF) de la porteuse. D'autres techniques de modulation sont aussi possibles telle que la modulation par *impulsion d'amplitude*, la modulation par *impulsion de durée* ou la modulation par *impulsion de position*, ces dernières étant très bien adaptées aux messages de nature numérique. Nous les traiterons plus tard dans le cours.

B Le multiplexage.

Le processus de modulation a été présenté comme une façon d'adapter le signal de source au milieu de transmission. Il existe aussi une autre application très importante de la modulation : le « multiplexage ». Le multiplexage est le processus qui permet de combiner plusieurs messages issus de sources différentes sur le même canal de transmission sans qu'il y ait aucune interférence entre eux. *Aucune interférence* veut dire que le démodulateur est capable d'extraire un message d'une source particulière sans qu'il soit affecté par les messages des autres sources. Trois techniques de multiplexage sont souvent utilisées :

1. le multiplexage par division de fréquence (MDF),
2. le multiplexage par division de temps (MDT),
3. le multiplexage par division par code (MDC).

Nous y reviendrons sur cette importante notion dans le cours.

VI La qualité de la transmission.

La notion de qualité de transmission est intrinsèque à la conception d'un schéma de télécommunication. La présence de signaux perturbateurs (signaux de bruit) en réception, réduit la qualité du processus de démodulation. Il faut donc distinguer le critère de qualité suivant la nature de la source. Comme nous l'avons déjà dit, nous distinguons deux types de sources : les sources analogiques et les sources numériques. Dans le cas des sources analogiques, le critère de qualité adopté sera le rapport entre la puissance du signal utile et la puissance de la perturbation (« rapport signal à bruit »). En général ce rapport est mesuré en termes d'un rapport de puissances. Dans le cas d'une communication numérique, le critère universellement adopté est la *probabilité d'erreur*, l'erreur étant calculé comme la différence entre le message émis et le message démodulé.

VII Les ressources.

Dans tout système de télécommunications il y a deux ressources primaires : **la puissance** émise et la **largeur de bande** utilisée pour la transmission. La puissance est définie comme la puissance moyenne du signal émis. La largeur de bande est définie comme la bande de fréquences disponible pour la transmission d'un message. Le but du jeu consiste à concevoir un système de transmission qui utilise ces deux ressources de la façon la plus efficace possible. En général dans un canal de transmission particulier, l'une de ces ressources est plus importante que l'autre. Ainsi, on parle d'une transmission *limitée en puissance* (transmission satellite par exemple) ou d'une transmission *limitée en bande* (transmission téléphonique). Dans tous les cas, la présence du bruit (signal perturbateur) dans le canal de transmission doit être prise en compte. La méthode d'évaluer les effets du bruit, consiste à mesurer le rapport entre la puissance de signal et la puissance du bruit (rapport « signal à bruit » ou **RSB** dans la suite). Le RSB peut être mesuré soit à l'entrée, soit à la sortie du récepteur. Quelle largeur de bande et quel rapport RSB doivent être utilisés dans un schéma de modulation pour obtenir la meilleure performance possible ? Présentée d'une autre façon, la question serait : quel est le rapport RSB minimal en entrée d'un démodulateur pour atteindre un certain RSB en sortie, ayant fait le choix d'une technique de modulation et disposant d'une certaine largeur de bande ? Tout au long de ce cours, on verra quels sont les modèles les plus appropriés pour décrire les systèmes de télécommunications dans le but de répondre à ce type de question.

La théorie de l'information établit quelques pistes pour connaître les performances optimales d'un système de transmission. Comme règle générale, on peut dire que le RSB et la largeur de bande, requis pour atteindre une certaine qualité dans la transmission, ne sont pas des variables indépendantes. En réalité il s'avère qu'il existe un lien exponentiel entre ces deux paramètres. Voyons un exemple.

Supposons deux systèmes de télécommunications S_1 et S_2. S_1 utilise une largeur de bande B_1 et pour atteindre une qualité de transmission Q il nécessite d'un RSB_1. Le système S_2 utilise une largeur de bande B_2 est pour atteindre la même qualité de transmission un RSB_2 est requis. L'échange « largeur de bande-RSB » établit :

$$RSB_2 \approx RSB_1^{\frac{B_1}{B_2}}$$

Cette relation nous permet de tirer des conclusions très importantes. Supposons par exemple que l'on dispose de deux fois plus de largeur de bande. Dans ce cas,

$$B_2 = 2B_1,$$

alors,

$$RSB_2 \;\approx\; \sqrt{RSB_1}.$$

Un exemple numérique peut nous aider à clarifier cette situation.

$$RSB_1 \;=\; 40\,dB \;=\; 10000$$

Si on utilise deux fois plus de largeur de bande, on nécessitera d'un RSB :

$$RSB_2 \;=\; 100 \;=\; 20dB,$$

donc **cent fois** moins de puissance.
Si au lieu de doubler la largeur de bande, on double le RSB,

$$RSB_2 = 2RSB_1$$

alors la largeur de bande requise vaut :

$$B_2 \;\approx\; B_1\,\frac{\log RSB_1}{\log RSB_2}$$

Pour notre exemple numérique,

$$RSB_2 \;=\; 2\;RSB_1,$$

$$RSB_1 \;=\; 40\,dB \;=\; 10000 \longrightarrow\; RSB_2 \;=\; 20000 \;=\; 43\,dB,$$

et la réduction de largeur de bande vaut :

$$B_2 \;\approx\; B_1\,\frac{\log RSB_1}{\log RSB_2} \;=\; B_1\,\frac{\log RSB_1}{\log RSB_1 + 0.7},$$

soit

$$B_2 = 0.93\,B_1.$$

Une réduction du 7% dans la largeur de bande !

Cette règle nous dit clairement que, dans la mesure du possible, les investissements faits en largeur de bande, sont bien plus productifs que l'effort dépensé en puissance !

Évidemment, cette approximation est théorique et les systèmes réels ont du mal à vérifier cet échange « puissance-bande ». Les systèmes de modulation linéaire (modulation analogique d'amplitude, par exemple) ont beaucoup de mal à atteindre ce compromis « puissance-largeur de bande ». Les techniques de modulation de fréquence sont légèrement plus performants dans l'échange. On verra que les systèmes de transmission numériques offrent des performances très bonnes.

Rappels sur l'analyse des signaux.

VIII Représentation des signaux.

Les systèmes de communications traitent des signaux de type très différents. Pour bien comprendre le fonctionnement de ces systèmes, il nous faut des outils d'analyse adaptés aux types de signaux. Les signaux de communication peuvent être classés en trois groupes selon leurs propriétés :

1. Signaux *périodiques* ou *non-périodiques*. Un signal périodique vérifie la condition :

   $$x(t) = x(t + T_o)$$

   avec T_o la période du signal x(t). Exemple : $x(t) = cos(t)$. Tout signal qui ne vérifie pas cette condition est *non-périodique*.
2. Signaux *déterministes* ou *aléatoires*. Un signal déterministe est connu sans aucune ambiguïté (passé, présent et futur). On peut prédire parfaitement son avenir à partir de la connaissance du présent. Un signal aléatoire, au contraire, est caractérisé par une incertitude. Son histoire (passé-futur), ne peut pas être déterminée avec exactitude même avec une parfaite connaissance du signal au présent.
3. Signaux d'*énergie finie* et signaux de *puissance finie*. Dans un système électrique, un signal peut représenter une tension (volts) ou un courant (ampères). Considérons une tension $v(t)$ appliquée aux bornes d'une résistance parfaite R. Soit $i(t)$ le courant qui circule à travers cette résistance. La puissance instantanée dissipée vaut :

   $$p(t) = \frac{|v(t)|^2}{R}$$

   ou de manière équivalente :

   $$p(t) = R|i(t)|^2$$

   On peut normaliser la résistance à 1Ω. La puissance instantanée *normalisée* vaut :

   $$p(t) = |x(t)|^2$$

   À partir de cette puissance instantanée normalisée, on définit l'*énergie totale* du signal $x(t)$:

   $$\varepsilon = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \, dt$$

   La *puissance moyenne* P (énergie par unité de temps) du signal $x(t)$ vaut donc :

   $$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |x(t)|^2 \, dt$$

   On dit que $x(t)$ est un signal à *énergie finie* si :

   $$0 < \varepsilon < +\infty$$

   On dit qu'il est à *puissance finie* si :

   $$0 < P < +\infty$$

IX Analyse de Fourier.

En principe, il y a plusieurs façons de représenter les signaux dans les systèmes de télécommunications. En pratique la représentation basée sur l'analyse de Fourier s'avère très utile. La décomposition en différentes oscillations sinusoïdales superposées facilite la tâche de l'ingénieur en télécoms. La puissance de l'analyse de Fourier est basée sur deux propriétés des systèmes de télécoms : la *linéarité* et la *non-variabilité dans le temps*. Rappelons quelques définitions.

Soit $g(t)$ un signal d'énergie finie, déterministe et non-périodique.

A Transformation de Fourier.

$$G(f) = TF\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ \mathrm{e}^{-j2\pi ft}\ dt.$$

B Transformation Inverse de Fourier

$$g(t) = TF^{-1}\{G(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)\ \mathrm{e}^{j2\pi ft}\ df.$$

C Paire transformée de Fourier

$$g(t) \leftrightarrow G(f).$$

D Propriétés de la TF.

Soient $g(t) \leftrightarrow G(f)$. Alors la TF vérifie les propriétés suivantes :

D.1 Linéarité.

a, b deux constantes réelles ou complexes.

$$ag_1(t) + bg_2(t) \leftrightarrow aG_1(f) + bG_2(f).$$

D.2 Facteur temporel.

$a \neq 0$ une constante réelle

$$g(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}G(\frac{f}{a}).$$

D.3 Dualité.

$$g(t) \leftrightarrow G(f) \Leftrightarrow G(t) \leftrightarrow g(-f).$$

D.4 Décalage temporel.

$$g(t-t_0) \leftrightarrow G(f).\exp(-j2\pi f t_o).$$

D.5 Décalage fréquentiel.

$$\mathrm{e}^{-j2\pi f_c t}\ g(t) \leftrightarrow G(f-f_c).$$

D.6 Intégrale de $g(t)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\ dt = G(0).$$

D.7 Intégrale de $G(f)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\ df = g(0).$$

D.8 Dérivée dans le temps.

$$\frac{d}{dt} g(t) \leftrightarrow j2\pi f G(f).$$

D.9 Intégrale dans le temps.

$$\int_{-\infty}^{t} g(\tau)\ d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi f} G(f) + \frac{G(0)}{2}\delta(f).$$

D.10 Conjugué.

$$g^*(t) \leftrightarrow G^*(-f).$$

D.11 Produit dans le temps.

$$g_1(t).g_2(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\lambda) G_2(f-\lambda)\ d\lambda = G_1(f) \star G_2(f).$$

L'opérateur $\star$ indique le produit de convolution.

D.12 Convolution dans le temps.

$$g_1(t) \star g_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\tau) g_2(t-\tau)\, d\tau \leftrightarrow G_1(f).G_2(f).$$

D.13 Théorème de Parseval.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \; dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \; df.$$

D.14 Exemple.

Calculons la $TF\{x(t)\}$ dela fonction $x(t)$ suivante :

$$x(t) = \Pi(t) = \begin{cases} \text{b} & : \quad \frac{-a}{2} \leq t \leq \frac{a}{2} \\ 0 & : \quad \forall t \end{cases}$$

Selon la définition de TF :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\; dt = b \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \mathrm{e}^{-j2\pi f t}\; dt,$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\; dt = -\frac{b}{j2\pi f}\; \mathrm{e}^{-j2\pi f t}|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \frac{b}{j2\pi f}\; (\mathrm{e}^{j\pi f a} - \mathrm{e}^{-j\pi f a}).$$

Mais ,

$$\mathrm{e}^{j\pi x} - \mathrm{e}^{-j\pi x} = 2j\; \sin(x).$$

Alors on obtient,

$$X(f) = ba\; \mathrm{sinc}(bf).$$

E Notion de largeur de bande B.

La largeur de bande d'un signal donne une mesure du contenu spectral significatif du signal pour les fréquences positives. Dans le cas où la TF du signal est nulle pour les fréquences $|f| > f_o$, alors f_o est la largeur de bande du signal. Dans le cas où la TF du signal n'est pas strictement limitée, la définition de largeur de bande devient plus difficile dû au fait du sens du mot *significatif.* Plusieurs définitions sont possibles :

1. B par zéro spectral, c'est à dire la plus petite fréquence qui annule le spectre du signal ;
2. B à 3 dB, c'est-à-dire la fréquence pour laquelle le spectre du signal est exactement la moitié de la valeur du spectre à la fréquence 0 ;
3. B à $\alpha\%$ de l' énergie, c'est à dire la fréquence pour laquelle le spectre accumule $\alpha\%$ de l'énergie totale.

F Échantillonnage.

L'échantillonnage et ses applications sont très importants pour le traitement du signal et les systèmes de communications. La théorie de l'échantillonnage est traitée en **Bases du Traitement du Signal**. Nous nous limiterons ici à rappeler rapidement le *théorème de l'échantillonnage.*

F.1 Le théorème de l'échantillonnage.

Un signal $g(t)$ qui a un spectre $G(f)$ limité à B Hz ($G(f) = 0\ \forall |f| > B$), peut être reconstruit exactement (« sans erreur ») à partir d'une suite d' échantillons de $g(t)$ pris uniformément à une fréquence au moins égale à $2B$ échantillons par seconde.

On appelle f_S la fréquence d´échantillonnage qui vérifie donc la contrainte :

$$f_S \geq 2B$$

L'intervalle entre deux échantillons vaut :

$$T_S = \frac{1}{f_S} \leq \frac{1}{2B}$$

La fréquence d' échantillonnage minimale $f_S^\star = 2B$ est appelée *fréquence de Nyquist* et l' intervalle d'échantillonnage correspondant $T_S^\star = \frac{1}{2B}$ est appelé *intervalle de Nyquist.*

F.2 La formule de reconstruction.

Soit *g(t)* un signal à bande limitée à B Hz, qui est échantillonné toutes les T_S secondes avec $T_S \leq 1/2B$. Le processus de reconstruction du signal $g(t)$ à partir des échantillons est connu comme *interpolation.* La formule d'interpolation établie le lien entre $g(t)$ et les échantillons $g(kT_S)$ où $k \in \mathbf{Z}$ est l'indice temporel des échantillons. Cette formule établit :

$$g(t) = \sum_k g(kT_S)\, sinc(2B(t - kT_S)), \quad \text{avec} \quad sinc(x) = \frac{sin(\pi x)}{\pi x}.$$

La mise en œuvre d'un tel reconstructeur peut être faite par filtrage linéaire. Voir cours de BTS pour plus d'informations à ce sujet.

F.3 *Exemple.*

Un signal g(t) limité à $B = 1kHz$ est échantillonné toutes les $T_S = 500\mu s$. On obtient la séquence d'échantillons suivante :

$$g(0) = 1 \quad g(\pm T_S) = g(\pm 2T_S) = g(\pm 3T_S) = \ldots = g(\pm kT_S) = \ldots = 0$$

Selon la formule de reconstruction,

$$g(t) = \sum_k g(kT_S)\, sinc(2B(t - kT_S)) = sinc(2Bt)$$

Calculons $g(\tilde{T})$ pour $\tilde{T} = 250\mu s$.

$$g(250\mu s) = sinc(2B.250\mu s) = \frac{2}{\pi}$$

X Systèmes linéaires.

Un **système** est un dispositif qui produit un signal de sortie en réponse à un signal d'entrée. Le signal d'entrée s'appelle **excitation**. Le signal de sortie s'appelle **réponse** du système. Un système qui vérifie le **principe de superposition** est dit **linéaire**. Selon le principe de superposition, la réponse d'un système à un ensemble d'excitations appliquées simultanément (superposées), est égale à la somme (superposition) des réponses de chaque excitation appliquée individuellement. Des exemples de systèmes linéaires sont les **filtres** et les **canaux de communication**. On appelle **réponse impulsionnelle** d'un système la réponse lorsque une **impulsion de Dirac** $\delta(t)$ est appliqué à l'entrée du système. Un système est **invariant** dans le temps, si la réponse impulsionnelle est la même indépendamment de l'instant d'application de l'excitation. Un système linéaire invariant dans le temps est défini par sa réponse impulsionnelle $h(t)$. Si une excitation $x(t)$ est appliquée en entrée d'un système avec réponse impulsionnelle $h(t)$, alors la réponse $y(t)$ du système vaut :

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau.$$

Un système est **causal** s'il ne répond pas avant que l'excitation soit appliquée. La condition de causalité se traduit par :

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

Un système est **stable** si la réponse est bornée pour une excitation bornée. La condition de stabilité peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, d\tau < \infty$$

On appelle **fonction de transfert** d'un système, la TF de sa réponse impulsionnelle.

$$H(f) = TF\{h(t)\}$$

On appelle **réponse en fréquence** d'un système, la TF de la réponse $y(t)$ produite par une excitation $x(t)$. On peut facilement prouver la relation suivante :

$$Y(f) = TF\{y(t)\} = TF\{h(t) \star x(t)\} = H(f)X(f)$$

$H(f)$ est une fonction complexe qui peut s'exprimer en notation polaire sous la forme :

$$H(f) = |H(f)|\, \mathrm{e}^{j\,\beta(f)}$$

$|H(f)|$ s'appelle **réponse en amplitude** (ou tout simplement **amplitude**) et $\beta(f)$ s'appelle **réponse de phase** (ou plus simplement **phase**) du système[2].

[2]Ces fonctions sont aussi appelées **caractéristique d'amplitude** et **caractéristique de phase**.

A Transformation de Hilbert.

Soit $g(t)$ un signal avec TF $G(f)$. On appelle *Transformée de Hilbert* de $g(t)$,

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau}\, d\tau$$

Ces intégrales sont calculées dans le sens de la valeur principale de Cauchy.

B Transformation Inverse de Hilbert.

$$g(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{g}(\tau)}{t-\tau}\, d\tau$$

C Paire transformée de Hilbert.

$$\widehat{g}(t) \overset{H}{\leftrightarrow} g(t)$$

D Propriétés de la TH.

D.1 TF d'une paire de TH

$$\widehat{g}(t) \overset{H}{\leftrightarrow} g(t)$$

La TH peut être interprétée comme la convolution de $g(t)$ avec le signal $\frac{1}{\pi t}$. La TF de $\frac{1}{\pi t}$ vaut :

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j\ sig(f).$$

Donc la TF de $\widehat{g}(t)$ vaut :

$$\widehat{G}(f) = TF\{\widehat{g}(t)\} = -j\ sig(f)\ G(f)$$

D.2 Caractéristique d'amplitude.

Un signal $g(t)$ et sa $TH\{g(t)\} = \widehat{g}(t)$ ont la même caractéristique d'amplitude.

D.3 Involution de la TH.

$$TH\{TH\{g(t)\}\} = -g(t)$$

D.4 Orthogonalité.

$$g(t) \perp \widehat{g}(t)$$

ce qui est équivalent à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widehat{g}(t)\, dt = 0$$

D.5 *Exemple.*

Calculons la TH de la fonction $x(t) = \cos(2\pi f_o t)$.

$$TH\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(2\pi f_o \tau)}{t-\tau}\, d\tau$$

Grâce au changement de variable $v = t - \tau$, on obtient :

$$TH\{x(t)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(2\pi f_o (t-v))}{v}\, dv$$

Mais, $\cos(2\pi f_o(t-v)) = \cos(2\pi f_o t)\cos(2\pi f_o v) + \sin(2\pi f_o t)\sin(2\pi f_o v)$. *Si on remplace cette expression dans la définition de $TH\{x(t)\}$, on a :*

$$TH\{x(t)\} = -\frac{1}{\pi}\cos(2\pi f_o t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(2\pi f_o v)}{v}\, dv - \frac{1}{\pi}\sin(2\pi f_o t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(2\pi f_o v)}{v}\, dv$$

Puisque :

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{cos(2\pi f_o v)}{v}\, dv = 0,$$

et

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin(2\pi f_o v)}{v}\, dv = \pi,$$

on obtient :

$$TH\{\cos(2\pi f_o t)\} = \sin(2\pi f_o t)$$

E Signal analytique.

Soit $x(t)$ un signal réel. On définit le *signal analytique* $z_x(t)$ associé à $x(t)$:

$$z_x(t) = x(t) + jTH\{x(t)\}.$$

Commentaire trivial :

à partir de la définition du signal analytique $z_x(t)$, on déduit :

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z_x(t)\},$$

donc $z_x(t)$ contient la même information que $x(t)$. Il s'agit tout simplement d'une autre représentation du signal $x(t)$. L'importance de cette représentation apparaît dans le domaine de la fréquence. Calculons la TF du signal analytique $z_x(t)$.

$$Z_x(f) = TF\{z_x(t)\} = TF\{x(t)\} + jTF\{TH\{x(t)\}\}.$$

Puisque

$$TF\{TH\{x(t)\}\} = -j\ sig(f)\ X(f)$$

on déduit

$$Z_x(f) = X(f) + j(-jsig(f)X(f)) = (1 + sig(f))X(f).$$

Conséquence intéressante : pour les fréquences négatives $Z_x(f) = 0$ donc le signal analytique n'a pas de composantes à fréquences négatives ! D'autre part pour les fréquences positives $Z_x(f) = 2X(f)$ et l'énergie totale de $z_x(t)$ est la même que celle de $x(t)$.

F Représentation canonique des signaux à bande étroite.

Un signal réel $x(t)$ est dit à *bande étroite*, si sa TF est nulle au-delà de l'intervalle $f_1 < |f| < f_2$. Un tel signal peut être considéré comme un signal centré autour d'une fréquence f_0, dite *fréquence porteuse*. La largeur de bande de ce signal ($B = f_2 - f_1$) vérifie la condition $B \ll f_0$, d'où le nom *signaux à bande étroite*. On peut représenter le signal $x(t)$ centré autour de f_0, par un signal qui soit indépendant de la fréquence porteuse. Soit $z_x(t)$ le signal analityque associé à $x(t)$. À partir de $z_x(t)$, construisons un signal $\alpha_x(t)$ tel que la TF de $\alpha_x(t)$, soit une version translatée de $-f_0$ de $Z_x(f)$. $\alpha_x(t)$ a donc une TF qui vaut :

$$A_x(f) = Z_x(f + f_0)$$

$\alpha_x(t)$ a la même largeur de bande que $z_x(t)$ mais au lieu d'être centrée autour de la fréquence porteuse, elle est centrée autour de la fréquence 0, donc il s'agit d'un signal en bande de base. En appliquant la propriété de modulation de la TF, $\alpha_x(t)$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\alpha_x(t) = z_x(t)\ \mathrm{e}^{-j2\pi f_0 t}$$

$\alpha_x(t)$ s'appelle l'*enveloppe complexe* du signal réel à bande étroite $x(t)$.

On peut écrire $x(t)$ en fonction de son enveloppe complexe grâce à la relation :

$$x(t) = \mathrm{Re}\{z_x(t)\} = \mathrm{Re}\{\alpha_x(t)\mathrm{e}^{j2\pi f_0 t}\}$$

À partir de la décomposition de $\alpha_x(t)$ en partie réelle et imaginaire, on peut donner deux représentations des signaux à bande étroite, dites *représentations canoniques* :

1. *Décomposition en phase et en quadrature.*
   posons :

   $$\alpha_x(t) = p(t) + jq(t);$$

   alors $x(t)$ vaut :

   $$x(t) = p(t)cos2\pi f_0 t - q(t)sin2\pi f_0 t.$$

$p(t)$ et $q(t)$ sont appelés respectivement *composante en phase* et *composante en quadrature*. Il s'agit de signaux à basses fréquences et peuvent s'écrire en fonction de l'enveloppe complexe sous la forme :

$$p(t) = \mathrm{Re}(\alpha_x(t)) = \frac{1}{2}\ ((\alpha_x(t) + (\alpha_x^*(t)),$$

$$q(t) = \mathrm{Im}(\alpha_x(t)) = \frac{1}{2j}\ ((\alpha_x(t) - (\alpha_x^*(t)).$$

Leurs TF respectives s'écrivent :

$$P(f) = TF\{p(t)\} = \frac{1}{2}\ (A_x(f) + A_x^*(-f)),$$

$$Q(f) = TF\{q(t)\} = \frac{1}{2}\ (A_x(f) - A_x^*(-f)).$$

2. *Décomposition en module et phase.*
posons :

$$\alpha_x(t) = a(t)\mathrm{e}^{j\,\phi(t)}.$$

Dans ce cas, *a(t)* est appelé *enveloppe instantanée* et $\phi(t)$ *phase instantanée.* À partir de cette expression on peut représenter le signal $x(t)$ sous la forme suivante :

$$x(t) = a(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi(t)).$$

Les relations traditionnelles entre représentation cartésienne et polaire peuvent être appliquées :

$$a(t) = \sqrt{p^2(t) + q^2(t)},$$

$$\phi(t) = \mathrm{atan}\frac{q(t)}{p(t)}$$

On appelle *fréquence instantanée* :

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}\phi(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Cette définition est particulièrement utile lors de l'étude de la modulation de fréquence.

XI Signaux aléatoires.

Les signaux rencontrés dans les systèmes de télécommunications sont des signaux aléatoires. Ces signaux ont deux propriétés : *i*) ils sont des fonctions du temps dans un intervalle de durée finie et *ii*) ces signaux sont aléatoires dans le sens où on ne peut pas prédire exactement leur futur. Ces signaux sont appelés **processus aléatoires(PA)**. Ils pourront être caractérisés d'un point de vue statistique. Dans la suite, on écrira un PA sous la forme :

$$X(t, s),$$

t étant le temps et s une variable aléatoire élément d'un ensemble S. Si l'on fixe la valeur de s, on obtient une fonction du temps appelée **réalisation** du PA. Si l'on fixe le temps $t = t_1$ on obtient une variable aléatoire. À un autre instant $t = t_2$ on obtient une autre variable aléatoire. De cette façon, on peut définir un nombre infini de variables aléatoires sur l'ensemble des réalisations. La statistique de chacune de ces variables s'appelle *statistique de premier ordre*. Voyons un exemple de calcul d'une statistique de premier ordre.

A *Exemple.*

Soit le PA $x(t) = k\cos(2\pi f_o t) + \theta)$ θ *est une VA uniformément distribuée dans l'intervalle* $(0, 2\pi)$. *Nous cherchons la loi de probabilité de premier ordre* $\mathrm{P}(x; \mathbf{t})$.

La VA x *issue de* $x(t)$ *à l'instant* $\mathbf{t}$*, vaut :*

$$x = k\cos(2\pi f_o \mathbf{t} + \theta)$$

D'où x *est une VA qui dépend d'une autre VA. On peut donc écrire la loi de* x *de la façon suivante :*

$$\mathrm{P}(x; \mathbf{t}) = \frac{\mathrm{P}_\Theta(\theta_1)}{|dx/d\theta_1|} + \frac{\mathrm{P}_\Theta(\theta_2)}{|dx/d\theta_2|}$$

puisque x *accepte la même valeur pour deux valeurs* θ_1 *et* θ_2 *de la variable* θ.

Pour les 2 valeurs de θ

$$\mathrm{P}_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi},$$

et

$$x = k\cos(2\pi f_o \mathbf{t} + \theta),$$

avec

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{dx/d\theta} = \frac{1}{k\sin(2\pi f_o \mathbf{t} + \theta)}$$

$$= k[\sqrt{1 - \cos^2(2\pi f_o \mathbf{t} + \theta)}] = k\sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2}} =$$

$$= \sqrt{k^2 - x^2}.$$

On obtient donc pour la loi de x *l'expression suivante :*

$$\mathrm{P}(x; \mathbf{t}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{k^2 - x^2}} + \frac{1}{2\pi\sqrt{k^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k^2 - x^2}}.$$

La VA x *existe dans l'intervalle* $(-k, k)$ *et elle est nulle à l'extérieur :*

$$\mathrm{P}(x; \mathbf{t}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{k^2 - x^2}} & -k \leq x \leq k \\ 0 & |x| > k \end{cases}$$

Cette loi de probabilité est représentée dans la figure 2 :

La statistique de premier ordre nous donne une idée de la loi de probabilité du PA à chaque instant $\mathbf{t}$. Supposons maintenant que le processus en question soit un signal électrique et que l'on souhaite connaître (estimer) son contenu spectral. Si le processus a un contenu harmonique dans les basses fréquences, le signal (ou statistiquement une réalisation du processus), varie très lentement dans le temps, donc les valeurs du processus aux instants t et $t + \tau$ se ressemblent. Intuitivement, les variables aléatoires $x(t)$ et $x(t + \tau)$ ne sont pas statistiquement indépendantes. La connaissance de $x(t)$ donne une infomation sur la valeur de $x(t + \tau)$. L'autocorrélation statistique :

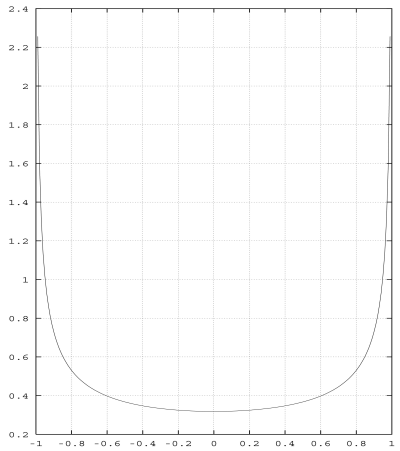

FIG. 2 – Statistique de premier ordre de $x = k\cos(2\pi f_o \mathbf{t}) + \theta); k = 1$.

$$R(t, t+\tau) \;=\; \mathrm{E}[x(t), x(t+\tau)]$$

permet de quantifier ce lien statistique entre les deux VA $x(t)$ et $x(t+\tau)$.

En contrepartie, si le PA $x(t)$ a un contenu harmonique de très haute fréquence, le signal $x(t)$ varie très rapidement et on peut espérer que les VA $x(t)$ et $x(t+\tau)$ soient faiblement dépendantes l'une de l'autre.

Ainsi le degré de corrélation entre les valeurs du signal à deux instants t et $t+\tau$, fournie une idée du contenu harmonique du PA. Nous formaliserons plus tard ce lien entre corrélation et spectre.

Cet exemple, très intuitif, nous permet de conclure que la statistique de premier ordre ne décrit pas complètement les propriétés statistiques d'un PA. La loi de probabilité des deux VA, $x(t)$ et $x(t+\tau)$, qui sera indiquée dans la suite $P_{X_1X_2}(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x(t_1) < x_1; x(t_2) < x_2)$, nous donne un aperçu plus complet des propriétés du processus. Cette loi conjointe s'appelle *statistique de second ordre*. Cette loi conjointe nous permet de calculer par exemple l'autocorrélation. Voyons un exemple.

B *Exemple.*

Soit le PA $x(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$ *ou* $\mathbf{b}$ *est une constante et* $\mathbf{a}$ *est une VA avec loi de probabilité :*

$$P_{\mathbf{a}}(a) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-a^2/2}.$$

La fonction d'autocorrélation de ce PA vaut :

$$R(t, t+\tau) \;=\; \mathrm{E}[x(t), x(t+\tau)] \;=\; \mathrm{E}[(\mathbf{a}t + \mathbf{b}))(\mathbf{a}(t+\tau) + \mathbf{b})].$$

Avec quelques manipulations algébriques, on obtient :

$$R(t, t+\tau) \;=\; \mathrm{E}[\mathbf{a}^2]t(t+\tau) \;+\; \mathbf{b}(2t+\tau)\mathrm{E}[\mathbf{a}] \;+\; \mathbf{b}^2.$$

Puisque $\mathbf{a}$ *est une variable gaussienne de moyenne nulle et variance 1, on déduit :*

$$R(t, t+\tau) \;=\; t(t+\tau) \;+\; \mathbf{b}^2.$$

Par simple intégration on peut récupérer la statistique de premier ordre :

$$P(x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{X_1X_2}(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_2,$$

ou bien,

$$P(x_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{X_1X_2}(x_1, t_1; x_2, t_2)dx_1.$$

Un résultat fondamental de la théorie des probabilités (résultat dû à Kolmogorov), est que la description statistique d'un PA peut être basée sur la connaissance de la distribution de probabilité conjointe :

$$F_{X(t_1),X(t_2),X(t_3),\ldots,X(t_k)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k),$$

pour n'importe quel ensemble *fini* d'instants d'observation $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_k$). Mais la connaissance de ces lois de probabilité, représente un travail immense (impossible dans les cas des systèmes de communications). En général on est obligés de faire des hypothèses simplificatrices, et on verra que dans les cas des systèmes linéaires, il suffit d'établir la statistique d'ordre 2 pour calculer le spectre de puissance d'un PA.

Voyons quelques définitions importantes.

Un PA est **stationnaire** si sa loi de probabilité conjointe est indépendante des $t_i, \forall i$. Les propriétés statistiques sont les mêmes à tout instant. Dans ce cas, on dit que le PA est **stationnaire au sens strict**. Analytiquement cela veut dire que :

$$P(x, t) = P(x),$$

ou, ce qui revient au même :

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_k, t_k) = P(x_1, t_1 + \tau; x_2, t_2 + \tau; \ldots; x_k, t_k + \tau),$$

pour tout décalage temporel τ.

Sauf dans des cas très particuliers, on ne peut pas connaître la loi conjointe et on se contente d'avoir certains de ses moments (jusqu'à l'ordre 2 par exemple). Si certains de ces moments sont indépendants du temps, on dit que le PA est **stationnaire au sens large**.

Pour la moyenne et l'autocorrélation, dans le cas stationnaire, on obtient :

$$\mathrm{E}[x(t)] = \mathit{constante}$$

$$R(t, t + \tau) = R(\tau).$$

Dans l'exemple précédent, on voit clairement que le PA n'est pas stationnaire (dans aucun sens).

Dans les exemples, nous avons toujours décrit les PA à partir de la connaissance des lois de probabilité. En général, on ne dispose pas de cette information précieuse, et la question se pose tout de suite : comment calculer les moments d'ordre 1 et 2, d'un PA stationnaire au sens large sans connaître la distribution conjointe ? La réponse à cette question s'appelle *ergodicité*. Pour comprendre cette idée supposons un PA $x(t)$ avec moyenne statistique μ_X connue, définie par :

$$\mu_x = E[x(t)].$$

Soit $\tilde{x}(t)$, une réalisation de ce processus. On appelle **moyenne temporelle** de $\tilde{x}(t)$ dans l'intervalle $[-T; T]$:

$$\mu(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \tilde{x}(t)\ dt.$$

Si au lieu de choisir la réalisation $\tilde{x}(t)$ on choisit une autre réalisation, disons $\tilde{x}^\star(t)$, on obtiendra une nouvelle moyenne temporelle. Les moyennes temporelles sont une fonction de la réalisation choisie, donc $\mu(T)$ est une variable aléatoire avec une certaine distribution de probabilité. Elle a une moyenne et une variance. On peut considérer $\mu(T)$ comme une **estimation** de la moyenne statistique μ_X. On dit que le PA est **ergodique** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $$\lim_{T\to\infty} \mu(T) = \mu_X,$$
2. $$\lim_{T\to\infty} \mathrm{var}[\mu(T)] = 0.$$

Pour l'autocorrélation, on définit l'**autocorrélation temporelle** de $\tilde{x}(t)$ dans l'intervalle $[-T; T]$:

$$R(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \tilde{x}(t)\tilde{x}(t+\tau)\ dt.$$

Clairement cette idée peut être prolongée à n'importe quel moment.

Si les moyennes temporelles et statistiques coïncident on peut connaître les caractéristiques statistiques en calculant les moyennes temporelles sur **UNE réalisation** du PA. Cette propriété, d'une très grande importance, est systématiquement utilisée par l'ingénieur en télécoms.

XII Caractérisation énergétique des signaux.

A Signaux de puissance finie.

On considère les signaux d'énergie finie dans un intervalle de durée finie 2T, mais d'énergie infinie dans un intervalle de durée infinie.

$$\int_{-T}^{T} x^2(t)dt < +\infty,$$

avec

$$\lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt \to +\infty.$$

Par contre la puissance moyenne (énergie moyenne par unité de temps)

$$P \overset{\triangle}{=} \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^2(t)dt < +\infty,$$

est finie. Dans la suite on considérera que des signaux à puissance moyenne finie.

B Fonction d'autocorrélation d'un signal déterministe.

On appelle *fonction d'autocorrélation* d'un signal déterministe $x(t)$:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t).x(t-\tau)dt.$$

Selon cette définition, on peut conclure que la puissance du signal $x(t)$ vaut :

$$P = R_{xx}(0).$$

C Fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire.

On appelle *fonction d'autocorrélation* d'un processus aléatoire $x(t,s)$ stationnaire :

$$R_{xx}(\tau) = E[x(t,s), x(t-\tau,s)].$$

La puissance du processus aléatoire $x(t)$ vaut donc :

$$P = R_{xx}(0) = E[x(t,s), x(t,s)] = \sigma^2_{xx}.$$

D Densité Spectrale de Puissance.

On appelle *densité spectrale de puissance* $S_{xx}(f)$ (DSP) d'un signal (processus) $x(t)$ ($x(t,s)$), la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation :

$$S_{xx}(f) = TF\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau.$$

Selon cette définition la puissance P de $x(t)$ ($x(t,s)$) peut être calculée à partir de sa DSP de la façon suivante :

$$P = R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)df.$$

E PA et systèmes linéaires. Formule de Wiener-Kintchine.

Soit $y(t)$ la réponse d'un *SLIT*, avec caractéristique de transfert $H(f)$, à l'excitation produite par un PA $x(t,s)$ stationnaire avec DSP $S_{xx}(f)$. Alors la DSP de $y(t)$ (soit $S_{yy}(f)$) vaut :

$$S_{yy}(f) = \|H(f)\|^2 \; S_{xx}(f).$$

Cette relation est connue comme la *formule de Wiener-Kintchine* ou *formule de filtrage.*

XIII Bruit.

On appelle **bruit**, tout signal non souhaité, qui brouille le signal émis. On n'as pas de contrôle sur ce type de signaux et les effets de cette perturbation réduisent la qualité de la transmission. Le bruit peut avoir des sources différentes. On peut les classer en deux catégories :

1. les sources externes, telles que le bruit galactique, le bruit atmosphérique ou le bruit généré par l'homme ;
2. les sources internes produites par les fluctuations aléatoires du courant ou la tension dans les dispositifs électroniques qui font partie des émetteurs et des récepteurs. Comme exemple de ce type de bruit, on trouve le *bruit impulsif* et le *bruit thermique*.

A Bruit thermique.

Le bruit thermique est le résultat du mouvement des électrons dans un conducteur. La valeur quadratique moyenne de la tension générée entre les bornes d'une résistance de $R\ \Omega$, sur une largeur de bande Δf à une température $T\ ^oK$, vaut :

$$E[V_N^2] = 4kTR\Delta f\ volts^2,$$

où $k = 1.38\ 10^{-23} Joules/kelvin$ est la constante de Boltzmann. En conditions d'adaptation, la puissance de bruit disponible vaut :

$$P = kT\Delta f.$$

La densité spectrale de puissance S vaut :

$$S = \frac{P}{\Delta f} = kT.$$

Dans ce cas, la DSP est indépendante de la fréquence. On dit que le bruit est **blanc** (comme pour la lumière blanche, toutes les composantes spectrales sont présentes avec la même puissance). On peut écrire pour le bruit blanc :

$$S_{NN}(f) = \frac{N_0}{2} \quad \forall f \in [-\infty; \infty],$$

où $N_0 = kT$.

Nous complétons ces rappels avec quelques exercises.

XIV Exercises.

1. **PA stationnaire**.

   Considérons le PA,
   $$x(t) = A\ \cos(2\pi f_p t + \phi)$$
   où A et f_0 sont des constantes, et θ est une VA uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 2\pi)$. Montrer que $x(t)$ est stationnaire au sens large.

2. **Amplitude aléatoire**.

   Considérons le signal $x(t)$ du problème précédent, sauf que maintenant f_0 et θ sont des constantes et A est une VA de moyenne non nulle. $x(t)$ est-t-il stationnaire au sens large ?

3. **PA et SLIT**.

   Le diagramme de la figure 3 représente une technique pour mesurer la réponse impulsionnelle d'un SLIT. La méthode consiste à superposer un signal de bruit blanc de faible puissance au signal d'excitation $x(t)$. On mesure la corrélation $R_{yn}(\tau)$ entre $y(t)$ et $n(t)$. Trouver quelle condition doit vérifier $x(t)$ et $n(t)$, pour que $R_{yn}(\tau)$ soit proportionnelle à la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système.

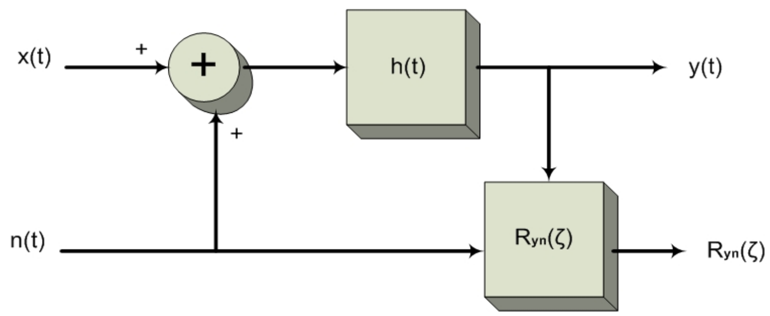

FIG. 3 – Système de mesure de $h(t)$.

4. **Propriétés de la fonction d'autocorrélation**.

   Soit $x(t)$ un PA stationnaire au sens large, avec fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$. Montrer les propriétés suivantes :

   (a) $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$;

   (b) $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$;

   (c) $E[(x(t+\tau) - x(t))^2] = 2(R_{xx}(0) - R_{xx}(\tau))$.

5. **Densité Spectrale de Puissance**.

   Soit $x(t)$ un PA stationnaire au sens large, avec fonction d'autocorrélation $R_{xx}(\tau)$. Prouver que la DSP $S_{xx}(f)$ vérifie :
   $$S_{xx}(f) = S_{xx}(-f).$$

6. **Fonctions de Transfert d' un** ***SLIT***.

   Calculer la fonction de transfert des systèmes indiqués dans la figure 4.

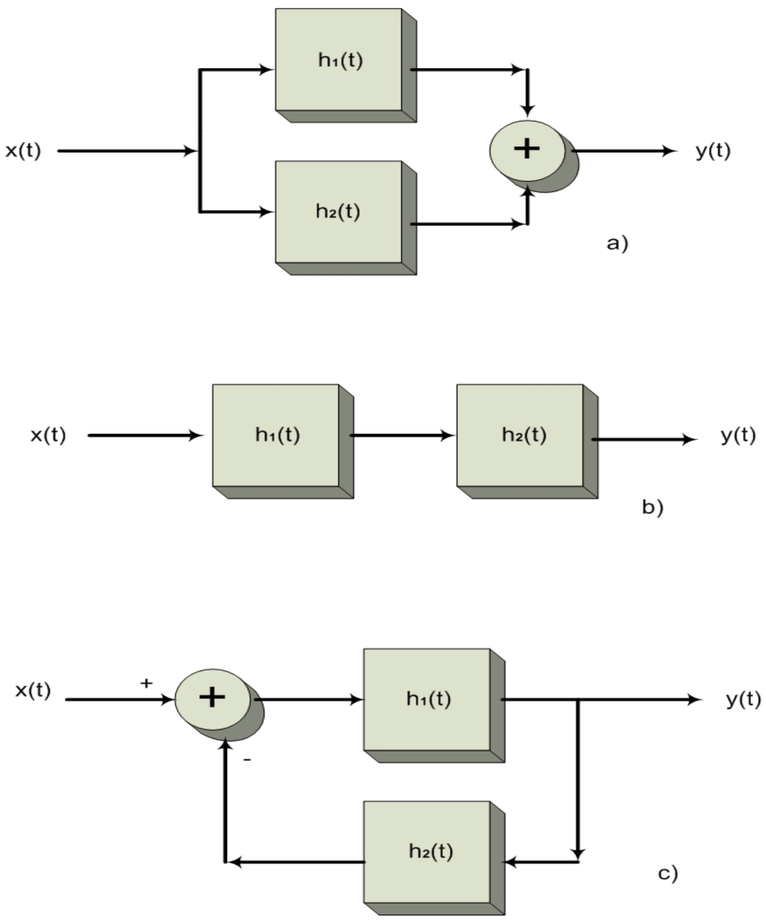

FIG. 4 – *SLIT*.

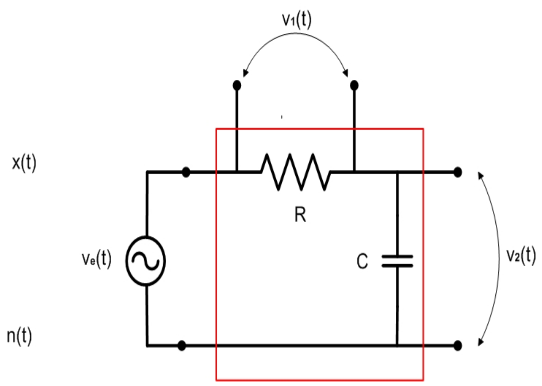

FIG. 5 – Filtre Passe-Haut et Passe-Bas.

7. **Filtre Passe-bas et Passe-haut**.

   Considérons le filtre suivant (5) :

   (a) Calculer la fonction de transfert $H_1(f)$ entre $v_e(t)$ et $v_1(t)$. Représenter sa caractéristique d' amplitude. Il s' agit d' un filtre passe-haut ?

   (b) Calculer la fonction de transfert $H_2(f)$ entre $v_e(t)$ et $v_2(t)$. Représenter sa caractéristique d' amplitude. Il s' agit d' un filtre passe-haut ?

24

8. **Propriétés de la TH**.

   Soit $x(t)$ un signal réel et $TH\{x(t)\}$ sa Transformée de Hilbert. Démontrer les propriétés suivantes :

   (a) $TH\{TH\{x(t)\}\} = -x(t)$;

   (b) $x(t) \perp \widehat{x}(t)$ c.-à-d. :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\widehat{x}(t)\, dt = 0$$

9. $\mathbf{TH}\{\sin(\mathbf{2}\pi\mathbf{f_0 t})\}$.

   Calculez la TH du signal $x(t) = \sin(2\pi f_o t)$. Déduire la $TH\{e^{2\pi f_o t}\}$.

XV Solutions

1. **PA stationnaire**. L'espérance de $x(t)$ vaut :

$$\mathrm{E}\left[x(t)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A\cos(2\pi f_0 t + \theta) f_\Theta(\theta)\, d\theta = 0.$$

L'autocorrélation vaut :

$$\mathrm{E}\left[(x(t+\tau)x(t)\right] = \frac{A^2}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos(2\pi f_0 t+\theta)\cos(2\pi f_0(t+_tau)+\theta)\, d\theta = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0\tau) \;\Rightarrow R_{xx}(t,t+\tau) = R_{xx}(\tau),$$

donc stationnaire au sens large.

2. **Amplitude aléatoire**. L'espérance de $x(t)$ vaut :

$$\mathrm{E}\left[x(t)\right] = \mathrm{E}\left[A\cos(2\pi f_0 t + \theta)\right] = \mathrm{E}\left[A\right]\cos(2\pi f_0 t + \theta).$$

Puisque $\mathrm{E}\left[A\right] \neq 0 \;\Rightarrow \mathrm{E}\left[x(t)\right]$, dépend du temps, donc il n'est pas stationnaire au sens large.

3. **PA et SLIT**. Le signal $y(t)$ en sortie vaut :

$$y(t) = \{x(t) + n(t)\} * h(t).$$

Calculons la corrélation croisée,

$$R_{yn}(\tau) = \mathrm{E}\left[y(t+\tau)n(t)\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-u)\mathrm{E}\left[x(u)n(t)\right]\, du + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-u)\mathrm{E}\left[n(u)n(t)\right]\, du.$$

Puisque le bruit est blanc,

$$R_{nn}(\tau) = \alpha^2\delta(\tau),$$

donc,

$$R_{yn}(\tau) = \alpha^2 h(\tau) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(t+\tau-u)\mathrm{E}\left[x(u)n(t)\right]\, du.$$

Si $x(t)$ et $n(t)$ sont $\perp$, alors

$$\mathrm{E}\left[x(u)n(t)\right] = 0 \;\Rightarrow\; R_{yn}(\tau) = \alpha^2 h(\tau).$$

4. **Propriétés de la fonction d'autocorrélation**.

   (a) Par définition, pour un **PA** réél,

$$R_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\left[x(t+\tau)x(t)\right].$$

   Si on réalise le changement de variable $t' = t + \tau$,

$$R_{xx}(\tau) = \mathrm{E}\left[x(t+\tau)x(t)\right] = \mathrm{E}\left[x(t')x(t'-\tau)\right] = R_{xx}(-\tau). \quad \square$$

(b) Calculons $\mathrm{E}\left[(x(t+\tau) \pm x(t))^2\right]$, qui par définition est une quantité ≥ 0.

$$\mathrm{E}\left[(x(t+\tau) \pm x(t))^2\right] = \mathrm{E}\left[x^2(t+\tau) \pm 2x(t+\tau)x(t) + x^2(t)\right] =$$

$$\mathrm{E}\left[x^2(t+\tau)\right] \pm 2\mathrm{E}\left[x(t+\tau)x(t)\right] + \mathrm{E}\left[x^2(t)\right] = 2R_{xx}(0) \pm 2R_{xx}(\tau).$$

On obtient donc,

$$R_{xx}(0) \pm R_{xx}(\tau) \geq 0. \quad \square$$

De cette inégalité on déduit :

$$R_{xx}(0) \geq |R_{xx}(\tau)|.$$

(c) C'est une conclusion du point précédent.

5. **Densité Spectrale de Puissance**. Par définition

$$S_{xx}(f) = \mathbf{TF}\{R_{xx}(\tau)\}.$$

D'autre part, la fonction d'autocorrélation est une fonction paire,

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau).$$

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(-\tau)e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau.$$

Moyennant le changement de variable $u = -\tau$, on obtient :

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(u)e^{j2\pi fu}\, du = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(u)e^{-j2\pi(-f)u}\, du = S_{xx}(-f). \quad \square$$

6. **Fonctions de Transfert d' un** *SLIT*.

(a)

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{Y_1(f) + Y_2(f)}{X(f)} = H_1(f) + H_2(f).$$

(b)

$$H(f) = H_1(f)\; H_2(f).$$

(c)

$$H(f) = \frac{H_1(f)}{1 + H_1(f)H_2(f)}.$$

7. **Filtre Passe-bas et Passe-haut**.

Application directe de la loi d'Ohm :

$$v_e(j\omega) = \mathrm{Z}\; I(j\omega) \Rightarrow I(j\omega) = \frac{v_e(j\omega)}{\mathrm{Z}}.$$

L'impédance du circuit vaut :

$$\mathrm{Z} = \mathrm{R} + \frac{1}{j\omega\mathrm{C}};$$

d'où,

$$I(j\omega) = \frac{j\omega\mathrm{C}}{1 + j\omega\mathrm{RC}}\; v_e(j\omega).$$

(a) La fonction de transfert $H_1(\omega)$ peut être calculée simplement à partir de :

$$v_{S_1}(j\omega) = \mathrm{R}v_e(j\omega)\frac{j\omega\mathrm{C}}{1+j\omega\mathrm{RC}} \Rightarrow H_1(\omega) = \frac{v_{S_1}(j\omega)}{v_e(j\omega)} = \frac{j\omega\mathrm{RC}}{1+j\omega\mathrm{RC}}.$$

$$|H_1(\omega)|^2 = \frac{\omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2}{1-\omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2},$$

ce qui correspond à la fonction de transfert d'un filtre passe-haut !

(b) La fonction de transfert $H_2(\omega)$ peut être calculée simplement à partir de :

$$v_{S_2}(j\omega) = \frac{1}{j\omega\mathrm{C}}\ v_e(j\omega)\frac{j\omega\mathrm{C}}{1+j\omega\mathrm{RC}} \Rightarrow H_2(\omega) = \frac{v_{S_2}(j\omega)}{v_e(j\omega)} = \frac{1}{1+j\omega\mathrm{RC}}.$$

$$|H_2(\omega)|^2 = \frac{1}{1-\omega^2\mathrm{R}^2\mathrm{C}^2},$$

ce qui correspond à la fonction de transfert d'un filtre passe-bas !

8. **Propriétés de la TH**.

(a) Soit $X(f) = \mathbf{TF}\{x(t)\}$. Si $\widehat{x}(t) = \mathbf{TH}\{x(t)\}$, calculons la $\mathbf{TF}\{\widehat{x}(t)\}$.

$$\mathbf{TF}\{\widehat{x}(t)\} = -j\ \mathrm{sig}(f)\ X(f).$$

Donc,

$$\mathbf{TF}\{\widehat{\widehat{x}(t)}\} = -j\ \mathrm{sig}(f)\ \{-j\ \mathrm{sig}(f)\ X(f)\} = -X(f),$$

d'où

$$\widehat{\widehat{x}(t)} = \mathbf{TF}^{-1}\{-X(f)\} = -x(t). \quad \square$$

(b) Puisque $\widehat{x}(t)$ est un signal réel, $\widehat{x}^*(t) = \widehat{x}(t)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\widehat{x}(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\widehat{x}^*(t)\ dt \overset{\text{Parseval}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)[-j\mathrm{sig}(f)X(f)]^*\ df = j \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2\mathrm{sig}(f)\ df = 0. \quad \square$$

9. $\mathbf{TH}\{\sin(\mathbf{2\pi f_0 t})\}$

$$\mathbf{TH}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f_0\tau)}{t-\tau}\ d\tau.$$

En utilisant le changement de variable $v = t-\tau$ et avec les mêmes manipulations algébriques que celle utilisées dans l'exemple de calcul de la $\mathbf{TH}\{\cos(2\pi f_0 t)\}$, on obtient :

$$\mathbf{TH}\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \cos(2\pi f_0 t).$$

Puisque $e^{j2\pi f_0 t} = \cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)$, alors,

$$\mathbf{TH}\{e^{j2\pi f_o t}\} = \mathbf{TH}\{\cos(2\pi f_0 t)\} + j\mathbf{TH}\{\sin(2\pi f_0 t)\};$$

$$\mathbf{TH}\{e^{j2\pi f_o t}\} = \sin(2\pi f_0 t) + j\cos(2\pi f_0 t) = j\{\cos(2\pi f_0 t) - j\sin(2\pi f_0 t)\} = j\ e^{-j2\pi f_0 t}. \quad \square$$