Département COMELEC | UE COM105

Corrigé du TD 9

On se propose d'étudier 4 modifications du code en bloc $C(6,3)$ de matrice génératrice :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Code étendu :
   (a) G étant sous forme systématique on déduit la matrice H de C facilement :
   $$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   Sa distance minimale est égale à 3 correspondant au nombre minimale de colonnes de H linéairement dépendante .
   (b) Pour le code étendu on a : $n = 7$ et $k = 3$.
   (c) La matrice de parité H_E est de dimension 4×7, ainsi l'extension du code revient à rajouter une ligne et une colonne à H. Afin de vérifier la propriété $c.H_E^t = 0$, la dernière colonne de H doit être un vecteur de 1. La matrice H_E est la suivante :
   $$H_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (d) H_E sous forme systématique et la matrice génératrice du code étendu sont :
   $$H_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
   (e) La distance minimale du code étendu est égale à 4, ainsi l'extension du code a permis d'augmenter la distance minimale du code.

2. Code rallongé :
   (a) Pour le code rallongé : $n = 7$ et $k = 4$.
   (b) La matrice de parité H_R est de dimension 3×7, ainsi le rallongement du code revient à rajouter une colonne à H.
   (c) Le seul choix possible de H_R qui permet de conserver la distance minimale à 3 est le suivant :
   $$H_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce n'est autre que le code de Hamming $(7, 4, 3)$.

3. Code raccourcis :

   (a) Pour le code raccourcis on a : $n = 5$ et $k = 2$.

   (b) La matrice de parité H_{Ra} est de dimension 3×5, ainsi le raccourcissement du code revient à supprimer une colonne à H.

   (c) Nous pouvons supprimer n'importe quelle colonne de H pour obtenir H_{Ra}, le code raccourcis obtenu aura toujours une distance minimale de 3.

4. Code expurgé :

   (a) Le sous ensemble S des mots de code de C est $\{000000, 010110, 001111, 011001\}$.

   (b) Connaissant le premier bit de tous les mots de code de S, nous pouvons le supprimer. Pour le code expurgé on a : $n = 5$ et $k = 2$.

   (c) A la réception, il suffit de rajouter au message reçu un premier bit à 0 et de procéder au décodage de C.

   Le code correcteur d'erreur utilisé dans la DVB, est un code expurgé $(204, 188)$ obtenu à partir du code Reed Solomon $(255, 239)$ en considérant les 51 premier bits à 0. Cette modification est nécessaire dans ce cas pour s'adapter à la taille des paquets de 188 bits délivrés par le codeur de source.