Département COMELEC | UE COM105

Corrigé du TD 8

1. Une matrice de parité H sous forme systématique peut s'écrire (elle n'est pas unique) :

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. La distance minimale du code est égale à $d_{min} = 3$. Le code peut détecter toutes les configurations d'une erreur et de 2 erreurs et peut corriger toutes les configurations d'une erreur.

3. Le mot de code envoyé est $C = (000000000000000)$.

Message reçu	Syndrome	Colonne de H
$R = (100000000000000)$	$S = (1001)$	h_1
$R = (000000000000010)$	$S = (0010)$	h_{14}
$R = (110000000000000)$	$S = (0100)$	$h_1 + h_2$
$R = (101000000000000)$	$S = (0110)$	$h_1 + h_3$
$R = (100000000000011)$	$S = (1110)$	$h_1 + h_{14} + h_{15}$
$R = (110000000000100)$	$S = (0000)$	$h_1 + h_2 + h_{13}$

   h_i étant la ième colonne de H.
   - Pour une erreur, le syndrome est égal à la colonne de H correspondante à la position de l'erreur, il ne peut donc jamais être nul.
   - Pour 2 erreurs, le syndrome est égal à la somme des deux colonnes de H correspondantes aux positions des deux erreurs. La distance minimale du code étant 3, le syndrome dans ce cas ne peut jamais être nul.
   - Pour 3 erreurs, le syndrome est égal à la somme des trois colonnes de H correspondantes aux positions des trois erreurs. Comme dans l'exemple donné dans le tableau ci-dessus, il est possible dans ce cas d'avoir un syndrome nul.

4.

   Algorithme de détection d'erreurs :

   Calculer le syndrome

   - Si le syndrome est nul alors le mot reçu est un mot de code. (pas nécessairement le bon)
   - Si le syndrome est non nul alors il y a un ou deux erreurs dans le mot reçu.

5. Algorithme de correction d'erreur :

   Calculer le syndrome
   - Si le syndrome est nul alors le mot reçu est un mot de code
   - Si le syndrome est non nul alors comparer le syndrome à toutes les colonnes de H afin de déterminer la position de l'erreur. Corriger le bit correspondant à la position de l'erreur dans le message reçu. Récupérer les bits d'information qui correspondent aux 11 premiers bits du message reçu (forme systématique du code).

6. Le gain de codage offert par le code de Hamming pour une probabilité d'erreur cible de 10^{-5} est de $1,6$ dB.