Département COMELEC UE COM105

Corrigé du TD 7

On considère deux codes $C_1(n_1, k, d_{min1})$ et $C_2(n_2, k, d_{min2})$ sous formes systématiques. Le code C est aussi sous forme systématique et un mot de code se compose de 3 parties :

$$C = [k \text{ bits d'information} \mid (n_1 - k) \text{ bits de redondance de } C_1 \mid (n_2 - k) \text{ bits de redondance de } C_2]$$

1. le code de parité $(2, 1)$ et C_2 le code à répétition $(2, 1)$.
   (a) $C_1 = \{00, 11\}$ et donc $d_{min} = 2$ et $C_2 = \{00, 11\}$ et donc $d_{min} = 2$
   (b) Le rendement de C est $r = \frac{1}{3}$.
   (c) Les mots de code de C sont : $\{000, 111\}$.
   (d) La distance minimale de C est égale à 3.
2. Le code $C_1(6, 3)$ est défini par sa matrice génératrice G et C_2 est le code de parité $(4, 3)$.

$$G_{C_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) L'ensemble des mots de code de C_1 et C_2 sont :

C_1

0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	4
0	1	0	1	1	0	3
0	1	1	0	0	1	3
1	0	0	1	0	1	3
1	0	1	0	1	0	3
1	1	0	0	1	1	4
1	1	1	1	0	0	4

C_2

0	0	0	0	0
0	0	1	1	2
0	1	0	1	2
0	1	1	0	2
1	0	0	1	2
1	0	1	0	2
1	1	0	0	2
1	1	1	1	4

   (b) La distance minimale de C_1 est $d_{min,1} = 3$, et la distance minimale de C_2 est $d_{min,2} = 2$.
   (c) Le rendement du code C est $r = \frac{3}{7}$.
   (d) Les mots de code de C sont :

0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	5
0	1	0	1	1	0	1	4
0	1	1	0	0	1	0	3
1	0	0	1	0	1	1	4
1	0	1	0	1	0	0	3
1	1	0	0	1	1	0	4
1	1	1	1	0	0	1	5

   (e) La distance minimale de C est égale à 3.
3. $C_1(n_1, k, d_{min1})$ et $C_2(n_2, k, d_{min2})$.

(a) Le rendement du code C est $r = \frac{k}{n_1+n_2-k}$

(b) Un mot de code de C peut s'écrire :

$$\begin{aligned} C &= [k \,\text{bits d'information} \mid (n_1-k) \,\text{bits de redondance de}\, C_1 \mid (n_2-k) \,\text{bits de redondance de}\, C_2] \\ &= [C_1 \mid (n_2-k) \,\text{bits de redondance de}\, C_2] \\ &= [C_2 \mid (n_1-k) \,\text{bits de redondance de}\, C_1] \end{aligned}$$

Ainsi les mots de code sont tous de poids supérieur ou égal à $d_{min,1}$, puisque le poids minimale d'un mot de code de C_1est $d_{min,1}$ auquel on rajoute les bits de redondance de C_2 tous nuls. De la même façon, les mots de code sont tous de poids supérieur ou égale à $d_{min,2}$. La distance minimale étant le poids minimale d'un mot de code, elle est strictement supérieure au min$(d_{min,1}, d_{min,2})$.

On pourrait avoir des mots de code de C composés soit par un mot de code de C_1 auquel se rajoute les (n_2-k) bits de redondance de C_2 tous à 1 ou à un mot de code de C_2 auquel se rajoute les (n_1-k) bits de redondance de C_1 tous à 1, d'où $d_{min} \leq$ min$((d_{min1}+n_2-k), (d_{min2}+n_1-k))$.

La concaténation parallèle des codes correcteurs d'erreurs permet d'obtenir un codage plus robuste des bits d'information, qui sont dans ce cas protégés par les bits de redondance des deux codes. Le décodage peut se faire en considérant le code équivalent, mais il peut se faire aussi de manière itérative, où à chaque itération on décodage le premier code ensuite le deuxième code.

Ce type de concaténation parallèle a donné naissance aux Turbo Codes, code correcteur ayant un très fort pouvoir de correction. Les Turbo Codes sont adoptés dans plusieurs normes telles que le WiMax et le LTE Advanced.