Département COMELEC | UE COM105

Corrigé du TD 4

1. La probabilité de bonne détection sur le lien global est égale à $1 - P_e$. Pour que le lien global soit correct, il faut que tous les liens intermédiaires soient eux aussi corrects. La probabilité de bonne détection de ces liens intermédiaires est $1 - P_e^{(i)}$. Comme les liens intermédiaires sont indépendants, on obtient que
$$1 - P_e = (1 - P_e^{(i)})^{N+1}$$
ce qui conduit au résultat.
2. Pour un lien intermédiaire quelconque fixé, il faut déterminer l'énergie reçue par symbole, notée $E_s^{(r)}$. Il est clair que la relation entre les puissances émises et reçues s'appliquent aussi sur les énergies (puisque le temps-symbole est invariant). Par conséquent, on a
$$E_s^{(r)} = \frac{E_s}{D_R^2}.$$
De plus, une modulation 2-PAM est utilisée, donc selon le cours, on sait que
$$P_e^{(i)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s^{(r)}}{N_0}}\right).$$
Ainsi, on obtient que
$$P_e^{(i)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{D_R^2 N_0}}\right).$$
3. Comme $D_T = (N+1)D_R$ et comme $P_e = 1 - (1 - P_e^{(i)})^{N+1}$, on en déduit trivialement que
$$P_e = 1 - \left(1 - Q\left(\sqrt{\frac{2(N+1)^2 E_s}{D_T^2 N_0}}\right)\right)^{N+1}.$$
En notant
$$\beta = \sqrt{\frac{2E_s}{D_T^2 N_0}} > 0,$$
et
$$f_\beta(x) = 1 - (1 - Q(x+1))^{x+1},$$
on a
$$P_e = f_\beta(N). \tag{1}$$
4. On veut optimiser P_e par rapport à N. Par conséquent, on va étudier les variations de P_e en fonction de N (cf. Eq. (1)). En examinant rapidement la fonction f_β, on s'aperçoit vite qu'elle tend vers 0 quand N tend vers l'infini. et donc que la probabilité d'erreur peut être rendu aussi petit que l'on souhaite en mettant un nombre infini de répéteurs. Ce résultat n'est en fait pas surprenant car, comme l'énergie par symbole est bornée par répéteur et non pour l'ensemble des répéteurs, plus on met de répéteur et plus l'énergie par symbole émis augmente ce qui implique une décroissance vers 0 de la probabilité d'erreur. En pratique, évidemment on ne met pas un nombre infini de répéteurs en raison du coût et en fait aussi parce que cela n'est pas nécessaire. En effet, aucun système ne souhaite travailler avec une probabilité d'erreur infiniment petite. Chaque système requiert une certaine qualité de service (QoS) avec une probabilité d'erreur cible qui sera amplement suffisante si elle est satisfaite. Pour la voix (2G), $P_e^{(0)} = 10^{-3}$ suffit. Pour les données (ADSL), $P_e^{(0)} = 10^{-7}$ suffit. Pour la vidéo (TNT), $P_e^{(0)} = 10^{-11}$ suffit.

5. On a

$$N_{\min} = \arg \min_{\substack{N \\ t.q.\ P_e^{(0)} \geq f_\beta(N)}} N.$$

6. Etant donné notre application numérique, on a

$$\beta = \sqrt{\frac{2.10^{10}}{(10^6)^2}} = \sqrt{2}.10^{-1}.$$

La fonction $f_{\sqrt{2}.10^{-1}}$ est représentée sur la Fig. 1.

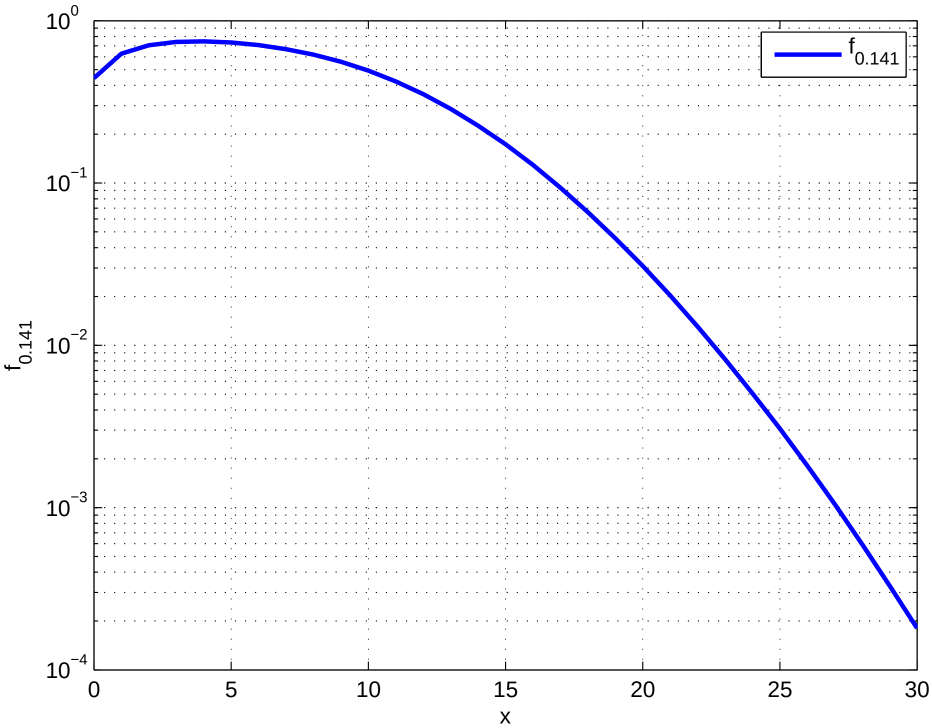

FIGURE 1 – $f_{\sqrt{2}.10^{-1}}(x)$ en fonction de x

On observe que

$$N_{\min} = 28.$$