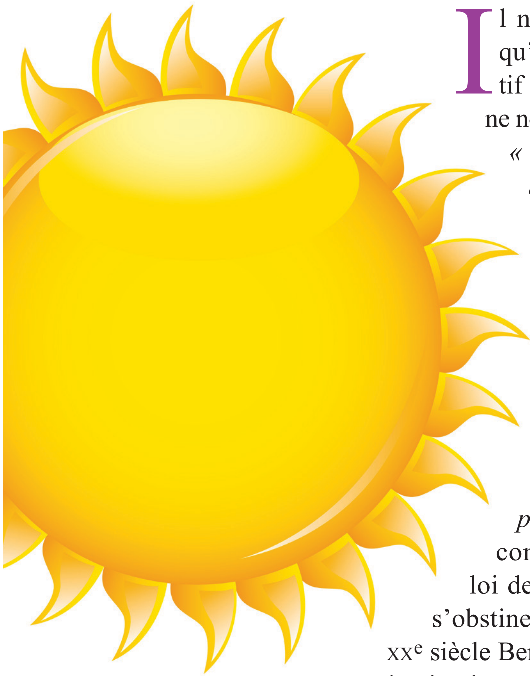
par Karim Zayana et Olivier Rioul

Le soleil se lèvera-t-il demain ?

Faut-il vivre chaque jour comme s'il était le dernier ? Cette question est légitime quand on sait que Pierre-Simon de Laplace, en 1814, évaluait à 0,99999945 la probabilité que le Soleil se lève à nouveau le lendemain…



Il n'y a pas plus trompeur qu'un raisonnement inductif mal construit. D'ailleurs, ne nous met-on pas en garde ? *« Ce n'est pas parce que l'on vient de tirer cinq fois "pile" avec une pièce qu'elle a moins de chances de tomber sur "pile" au sixième lancer ! »* nous avertit le professeur, avant d'ajouter, en ponctuant ses syllabes : *« Les évènements sont in-dé-pen-dants. »* À l'inverse, comment ne pas voir une loi des séries quand le destin s'obstine ? Le mathématicien du XX^e^ siècle Bertrand Russell (voir notre dossier dans *Tangente* 206, 2022) aura, lui, cité l'exemple d'une dinde de Noël : généreusement traitée chaque matin, ne prend-elle pas confiance en la main nourricière qui lui tordra pourtant le cou le soir du réveillon ?
Qui croire, alors ? Le professeur, Russell, ou… Laplace ? Eh bien chacun d'eux, car tout dépend des hypothèses ! En particulier, l'approche bayésienne va éclairer la démonstration de Laplace, qui évaluait à 0,99999945 la probabilité que le Soleil se lève à nouveau le lendemain.

Des lancers « indépendants »

Laplace fonde sa réflexion dès 1774 dans son traité *Mémoires sur la probabilité des causes par les évènements*, et l'illustre quarante ans après sur la succession des jours dans son *Essai philosophique sur les probabilités*.
Commençons par un cas d'école : la pièce de 1 euro. Supposons-la, dans un premier temps, bien équilibrée, et lançons-la plusieurs fois. Les lancers sont faits dans des conditions qui n'ont rien à voir les unes avec les autres : en langage

courant, ils sont « indépendants ». On peut donc admettre que les évènements de « pile » ou « face » successifs seront indépendants au sens mathématique du terme. Ainsi la pièce ne garde-t-elle aucune mémoire des lancers précédents. Ce raisonnement s'applique également à une pièce déséquilibrée, dont la probabilité de tomber sur « pile » vaudrait x (et donc sur « face », $1 - x$). Avec des lancers « indépendants », les évènements successifs demeurent mathématiquement indépendants : ce n'est pas parce que l'on vient de tirer cinq fois « pile » que cela change les chances du sixième lancer, dont la probabilité de tomber sur « pile » vaut toujours x.

Compliquons maintenant les choses en prenant deux pièces distinctes, aux probabilités respectives x_1 et x_2 de tomber sur « pile » une fois lancées. Pour exagérer, on pourrait imaginer x_1 « très voisine » de 1 (voire égale à 1) et x_2 « très voisine » de 0 (voire égale à 0). Piochons à l'aveugle l'une des deux pièces dans notre porte-monnaie et lançons-la six fois de suite. Dans l'hypothèse où elle tomberait d'abord cinq fois sur « pile », cela laisse présager qu'on a pioché la première pièce. Cela renforce donc la probabilité qu'elle tombe une sixième fois sur « pile ». Dans cette nouvelle situation, les lancers restent « indépendants », mais plus les évènements de « pile » ou « face » successifs ! Mathématiquement, il y a *indépendance conditionnelle* (une fois la pièce choisie), mais « pas indépendance stricte » (inconditionnelle). On note E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 et E_6 les évènements successifs de « pile » ou « face » et N le numéro (égal à 1 ou 2) de la pièce choisie au hasard. Le calcul en encadré prouve que

$$P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \ldots E_5=\text{pile}}(E_6 = \text{pile}) = \frac{x_1^6 + x_2^6}{x_1^5 + x_2^5}.$$

Indépendance conditionnelle : le déroulement des calculs

D'une part, par définition d'une probabilité conditionnelle, avec les notations usuelles, on a :

$$P(E_1 = \text{pile}, E_2 = \text{pile} \ldots E_5 = \text{pile}) = \frac{P(E_1 = \text{pile}, E_2 = \text{pile} \ldots E_5 = \text{pile}, E_6 = \text{pile})}{P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \ldots E_5=\text{pile}}(E_6 = \text{pile})}.$$

D'autre part, par la formule des probabilités totales, on peut écrire :

$$P(E_1 = \text{pile}, E_2 = \text{pile} \ldots E_5 = \text{pile}) = P_{N=1}(E_1 = \text{pile}, E_2 = \text{pile} \ldots E_5 = \text{pile}) \times P(N = 1) + P_{N=2}(E_1 = \text{pile}, E_2 = \text{pile} \ldots E_5 = \text{pile}) \times P(N = 2).$$

Convenons de l'équiprobabilité du choix des pièces : $P(N = 1) = P(N = 2) = 1/2$.

Puisque les lancers sont « indépendants », on obtient :

$$P(E_1 = \text{pile}, E_2 = \text{pile} \ldots E_5 = \text{pile}) = \frac{1}{2}\left(x_1^5 + x_2^5\right).$$

De même, on calcul

$$P(E_1 = \text{pile}, E_2 = \text{pile} \ldots E_6 = \text{pile}) = \frac{1}{2}\left(x_1^6 + x_2^6\right).$$

On en déduit le résultat annoncé dans le texte. On peut généraliser en prenant k pièces distinctes, dont les probabilités de tomber sur « pile » sont respectivement x_1, x_2... x_k. Disons que ces pièces ont des probabilités égales d'être choisies dans notre porte-monnaie : $P(N = 1) = P(N = 2) = \ldots = P(N = k) = 1/k$.

Tirons une pièce au hasard, puis lançons-la $n + 1$ fois. Si les n premiers lancers donnent « pile », alors :

$$P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \ldots E_n=\text{pile}}(E_{n+1} = \text{pile}) = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^{n+1}}{\sum_{j=1}^{k} x_j^n}.$$

Envisageons enfin des pièces de tailles ou de formes différentes : distinctes au toucher, leurs probabilités d'être choisies ne sont plus nécessairement égales ! Elles valent maintenant

$P(N = 1) = f(x_1), P(N = 2) = f(x_2) \ldots = P(N = k) = f(x_k)$,

où f désigne une mesure de probabilité.

Dès lors,

$$P_{E_1=\text{pile}, E_2=\text{pile} \ldots E_n=\text{pile}}(E_{n+1} = \text{pile}) = \frac{\sum_{j=1}^{k} x_j^{n+1} f(x_j)}{\sum_{j=1}^{k} x_j^n f(x_j)}.$$

Un passage à la limite délicat

Posons $u = x^{n+2}$ dans l'intégrale du numérateur et $u = x^{n+1}$ dans celle du dénominateur. Ces changements de variable conduisent dans un cas à $du = (n+2)x^{n+1}dx$ et, dans l'autre, à $du = (n+1)x^n dx$.

Les bornes d'intégration restent inchangées et le rapport

$$\frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx}{\int_0^1 x^n f(x)dx} \text{ devient } \frac{n+1}{n+2} \times \frac{\int_0^1 f\left(u^{1/(n+2)}\right) du}{\int_0^1 f\left(u^{1/(n+1)}\right) du}.$$

En supposant f continue, les deux intégrales admettent $f(1)$ pour limite par le théorème de convergence dominée. Pourvu que $f(1)$ soit non nul, le rapport étudié équivaut donc au quotient annoncé et tend donc vers 1.

Tout est en place pour Laplace

Un beau jour de 1814, Laplace se demande avec quelle probabilité le Soleil se lèvera à nouveau le lendemain, sachant qu'il s'est toujours levé chaque matin depuis que l'Homme est apparu sur Terre. Cette question, devenue célèbre, peut apparaître incongrue ; voyons ce qu'en fait le savant, à la fois mathématicien, physicien et philosophe. Étant posé que le Soleil s'est déjà levé n fois de suite, Laplace se demande s'il reviendra le $(n+1)^{\text{ième}}$ matin. Il assimile les levers de Soleil à des « épreuves indépendantes » suivant une loi de Bernoulli de même paramètre de succès p. Hélas, l'univers a certes fixé p, mais sans nous le dévoiler. Laplace suppose donc que la valeur de p a été choisie « au hasard » dans un ensemble X de valeurs x comprises entre 0 et 1. Contrairement au cas du porte-monnaie, X pourrait prendre un continuum de valeurs. Cette éventualité amène Laplace à étendre la dernière formule de l'encadré ci-contre du discret au continu, remplaçant les sommes par des intégrales. D'où, en conduisant le même raisonnement et en adaptant les notations :

$$P_{E_1=\text{se lève}, E_2=\text{se lève} \ldots E_n =\text{se lève}}(E_{n+1} = \text{se lève}) = \frac{\int_0^1 x^{n+1} f(x)dx}{\int_0^1 x^n f(x)dx}.$$

Un passage à la limite (voir ci-dessous) montre que cette probabilité tend vers 1 quand n tend vers l'infini. Cependant, les grands théorèmes de convergence ne seront formalisés qu'au cours du XXe siècle, notamment par Henri Lebesgue.

Pour son application numérique, Laplace postule *a priori* une densité uniforme (cette hypothèse, devenue classique, est connue sous le nom d'a priori *de Laplace*), soit $f = 1_{[0,1]}$. La probabilité recherchée est donc exactement égale à $\dfrac{\int_0^1 x^{n+1}dx}{\int_0^1 x^n dx}$, soit $\dfrac{n+1}{n+2}$.

Laplace estime ensuite l'âge de l'humanité à 5 000 ans, soit $n = 1\,826\,213$ jours. Ce faisant, il obtient la probabilité annoncée : environ 0,99999945.

Ce résultat, « proche » de 1 mais pas tout à fait égal à 1, provient de l'hypothèse *a priori* que l'univers a choisi aléatoirement le paramètre p qui gouvernerait (en partie) le Système solaire. L'existence de cet *a priori*, caractéristique de l'approche bayésienne, peut être critiquée. Doit-on pour autant rejeter cette approche ? C'est un débat perpétuel entre « bayésiens » et « fréquentistes » !

K. Z. & O. R.