

# La vie et l'œuvre de Kolmogorov

Olivier RIOUL



Андрей Николаевич Колмогоров (Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov) est un mathématicien soviétique, l'un des plus grands mathématiciens du XXe siècle. Un esprit des plus brillants, profonds et originaux que le monde ait jamais connu. Que ce soit en probabilité, statistiques, analyse fonctionnelle, analyse spectrale, géométrie, théorie de l'approximation, logique intuitionniste, topologie algébrique, génétique, écologie, systèmes dynamiques, turbulence, mécanique classique, théorie de l'information, complexité algorithmique, pédagogie mathématique. . . il révolutionnait chaque sujet en l'abordant avec un regard étonnamment neuf et une perspective totalement originale. Ses idées, toujours d'une grande portée, paraissent dans des articles très courts : seulement quelques pages d'une profondeur, d'une perspicacité et d'une imagination stupéfiantes. Et sa bibliographie complète comporte plus de 500 publications. Il était admiré par ses collègues mathématiciens du monde entier pendant plus de 60 ans et donnait l'impression qu'il démontrait tous les théorèmes qu'il voulait.

Il est surtout connu pour ses travaux sur la théorie des probabilités et particulièrement pour ses *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (« Fondements de la théorie des probabilités »), une modeste monographie de 60 pages paru en 1933. En reconstruisant rigoureusement toute la théorie des probabilités, ce petit ouvrage a totalement révolutionné la discipline à la fois scientifiquement et culturellement.

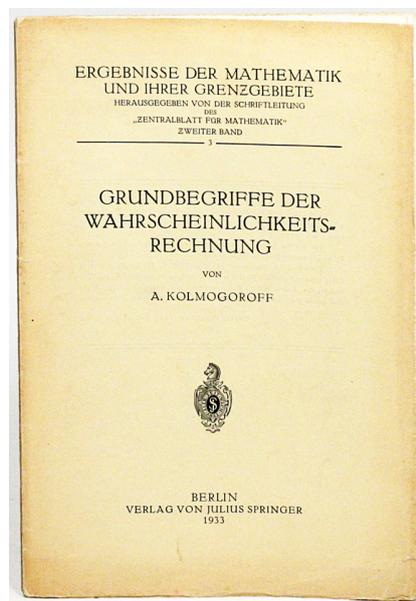


FIGURE 1 – La couverture originale des *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, parue en allemand chez Springer en 1933.

Mais commençons par le commencement. A. N. Kolmogorov est né en 1903 à Tambov, une petite ville de Russie, totalement par hasard : sa mère célibataire était en train de rentrer de Crimée chez son

grand père à Tunoshna, près de Iaroslavl ; elle est morte à sa naissance. Le nom de Kolmogorov vient d'ailleurs de ce grand père maternel Yakov Stepanovich Kolmogorov, un noble prospère, et non de son père Nikolaï Matveïevitch Kataïev, un agriculteur exilé pour sa participation à la révolution russe, qui disparut pendant la guerre civile en 1919. Kolmogorov est élevé à Tunoshna par la soeur de sa mère, sa tante Vera Yakovlena, qu'il considérait comme sa vraie mère.



FIGURE 2 – Kolmogorov enfant et sa tante et mère adoptive

On raconte que Kolmogorov publie ses premiers essais littéraires et mathématiques à l'école de Tunoshna où il était scolarisé ; qu'adolescent il invente des machines à mouvement perpétuel, et qu'après avoir interrompu temporairement ses études pour devenir conducteur de train tout en rédigeant un traité de mécanique newtonienne, il se consacre, en plus des mathématiques, à la métallurgie et à l'histoire russe où il rédige une thèse.

Il entre à l'université d'État de Moscou en 1920 et excelle avant tout en mathématiques. Dès ses études de premier cycle, il obtient des résultats de portée internationale en analyse de Fourier : alors que jusqu'ici on n'avait pu construire que des séries de Fourier qui convergeaient presque partout, contre toute attente, à seulement 19 ans, il construit une fonction intégrable périodique dont la série de Fourier *diverge* presque partout ! Mieux encore, trois ans plus tard, il obtient une série de Fourier qui *diverge partout*... La démonstration de ce résultat difficile remplit une simple note aux comptes rendus de l'académie des sciences de Paris.

Diplômé de l'université de Moscou en 1925, il commence sa thèse auprès de Nikolaï Louzine. Dès 1925 il publie pas moins de 8 articles, notamment sur la logique intuitionniste, montrant qu'il s'intéresse depuis toujours aux fondements des mathématiques. Brouwer avait fondé l'intuitionnisme comme totalement antinomique du formalisme classique en refusant le raisonnement par l'absurde et l'infini actuel ; la logique intuitionniste était donc considérée plus faible que la logique classique. Là encore contre toute attente, Kolmogorov formalise la logique intuitionniste comme une extension de la logique classique, de sorte que toute proposition « finitaire » qu'on peut démontrer classiquement admet aussi une preuve intuitionniste... tout cela en deux pages !

Autre événement en 1925, il commence à publier quelques beaux théorèmes sur les *probabilités*. Il affine la fameuse inégalité de Bienaymé-Tchebyshev  $\mathbb{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq \sigma^2/\varepsilon^2$  (pour une somme  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  de variables centrées indépendantes, de variance  $\sigma^2$ ) en démontrant l'« inégalité de Kolmogorov »  $\mathbb{P}(\sup_{k \leq n} |S_k| > \varepsilon) \leq \sigma^2/\varepsilon^2$ , ce qui lui permettra de déduire (avec Khintchine) un célèbre « théorème des trois séries » qui donne une condition nécessaire et suffisante sur la convergence de trois séries déterministes pour que la série aléatoire  $\sum_n X_n$  (où les  $X_n$  ne sont plus nécessairement centrées) soit presque sûrement convergente. Ces résultats inspireront Doob pour sa théorie des martingales. Au moment de son doctorat en 1929, Kolmogorov avait écrit dix-huit articles sur

la logique, l'analyse et les probabilités dont une loi forte des grands nombres et une loi du logarithme itéré.

À l'été 1929 il se lie d'amitié avec le mathématicien Pavel Aleksandrov pendant un voyage en bateau sur la Volga, puis à travers les montagnes du Caucase, jusqu'au lac Sevan en Arménie. Kolmogorov travaille alors sur les processus de Markov à temps continu qu'il aborde d'un point de vue original : au lieu d'étudier des trajectoires, il détermine les équations différentielles satisfaites par les densités de probabilités de transition, prémisses de la théorie moderne de la diffusion. Kolmogorov et Aleksandrov font un autre long voyage à l'été 1931, à Berlin, Göttingen, Munich et Paris, où Kolmogorov entame des discussions approfondies avec Paul Lévy. Ils passent ensuite un mois au bord de mer avec Maurice Fréchet. Kolmogorov devient professeur à l'université de Moscou la même année.

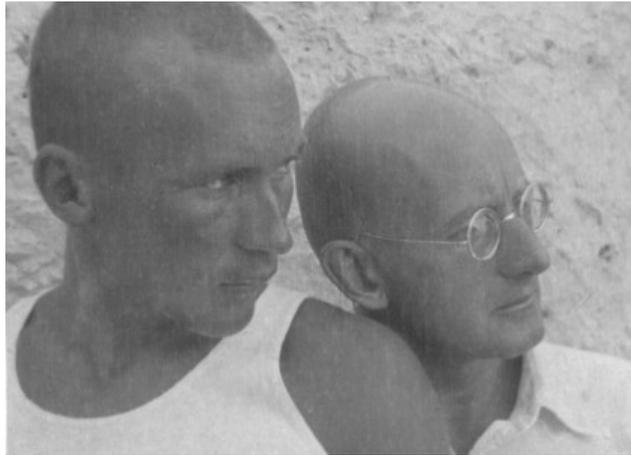


FIGURE 3 – Kolmogorov et Aleksandrov en voyage. Un an avant sa mort, Kolmogorov se confie : « pour moi, ces 53 années d'amitié intime et indissoluble ont été la raison pour laquelle toute ma vie a été remplie de bonheur, et la base de ce bonheur a été la considération permanente que m'a faite Aleksandrov »

C'est en 1933 que paraît en allemand ses *Grundbegriffe*, le manuel des Fondements de la théorie des probabilités qui apporte une contribution majeure au sixième problème de Hilbert (1900) : « axiomatiser la physiques », plus précisément :

*« traiter sur le modèle de la géométrie les branches de la physique où les mathématiques jouent un rôle prépondérant ; avant toutes autres, le calcul des probabilités [et de la mécanique] ».*

Inspirés par Borel, toute une série de mathématiciens avaient ébauché des axiomatisations de la théorie des probabilités, mais Kolmogorov règle définitivement la question : son axiomatique naturelle permet de traiter enfin rigoureusement l'espérance conditionnelle et les processus stochastiques, et s'est imposée jusqu'à nos jours.

À cette occasion il énonce sa fameuse *loi du tout ou rien* (ou loi 0-1) qui établit que tout événement asymptotique ne peut être a priori que de probabilité 0 ou 1 : il n'y a pas de demi-mesure. Ce résultat a profondément modifié la vision des probabilistes. Il en déduit la version optimale de la loi forte des grands nombres pour des variables indépendantes et identiquement distribuées :  $S_n/n$  converge presque sûrement (vers la valeur moyenne des variables) si et seulement si cette valeur moyenne existe.

La même année, à la suite du « théorème fondamental de la statistique » de Glivenko et Cantelli, il précise aussitôt la loi de convergence et en déduit un test statistique d'ajustement pour la loi inconnue très efficace, appelé test de Kolmogorov-Smirnov.

En 1935, Aleksandrov et Kolmogorov achètent une maison à Komarovka, à l'extérieur de Moscou. Ils y invitent de nombreux mathématiciens renommés.

Kolmogorov se passionne pour la topologie. À la question difficile d'Eilenberg de savoir si une application ouverte peut augmenter la dimension, il répond par une construction extrêmement ingénieuse dans un article de 3 pages. En même temps et indépendamment de l'américain James W. Alexander, il construit l'anneau de cohomologie des espaces topologiques. Il s'intéresse aussi à l'écologie en développant une approche qualitative d'un modèle proie-prédateur utilisable dans des cas réalistes. Un peu plus tard il entreprend des travaux novateurs sur la turbulence en dynamique des fluides.

Jusqu'en 1935 environ, les mathématiciens soviétiques, au premier rang desquels Kolmogorov, jouissent d'une grande liberté dans leur choix du domaine de recherche, d'un grand prestige et de très bonnes conditions de vie comparés à l'ensemble de la population. C'est l'âge d'or des mathématiques soviétiques. Mais les choses se gâtent durant la Grande Purge stalinienne. Ernest Kol'man, professeur « rouge » influent, s'attaque à la science et est sans doute à l'origine de dénonciations anonymes contre Nikolaï Louzine, le directeur de thèse de Kolmogorov, qui est accusé d'être un ennemi du Peuple et jugé en 1936. Il est possible que le pouvoir soviétique ait fait pression sur Aleksandrov et Kolmogorov en menaçant de révéler leur relation homosexuelle, afin qu'ils témoignent contre leur ancien professeur. Aleksandrov est agressif alors que Kolmogorov est plus mesuré : il témoigne des bons services de Louzine aux mathématiques... avant sa « décadence morale et politique ». Louzine est finalement déchu de toutes ses fonctions, mais curieusement ne disparaît pas dans les goulags et continuera sa carrière.

Dans le même temps, un article de la Pravda de juillet 1936 accuse les mathématiciens soviétiques (non seulement Louzine, mais aussi Aleksandrov, Kolmogorov, Khintchine et d'autres) de publier leurs meilleurs résultats à l'étranger, « oubliant leur fierté nationale et leur patriotisme soviétique ». Kolmogorov demanda immédiatement à son élève Grigory Bavli de traduire à la hâte les *Grundbegriffe* qui avait initialement été publié en allemand chez Springer. L'ouvrage paraît la même année en russe.



FIGURE 4 – Devant Staline, Lyssenko appelle à tuer les ennemis de sa pseudo-théorie scientifique.

L'affaire Louzine marque le début d'une série d'attaques politiques contre la génétique, la physique quantique, la théorie de la relativité et d'autres branches de science moderne de la fin des années 1930. Tout ce qui n'était pas strictement déterministe était suspect. Trofim Denissovitch Lyssenko, un technicien agricole, promeut avec le soutien de Staline une théorie génétique pseudo-scientifique opposée à la « science bourgeoise » des lois de Mendel. Kolmogorov prend courageusement la défense de la génétique mendélienne en publiant une note intitulée « *Sur une nouvelle confirmation des lois de Mendel* » en février 1940 où il met sérieusement en cause la philosophie de Lyssenko et les expériences de Kol'man en montrant qu'elles ne font que confirmer les lois de Mendel. Kolmogorov conclut :

*« L'article de Kol'man mentionné au début de cette note ne contient pas des faits nouveaux ; il analyse uniquement les données d'Enin et est basé sur une complète incompréhension des circonstances exposées dans son article. »*

Mais cela n'a pas empêché l'interdiction de l'enseignement de la théorie chromosomique de l'hérédité pendant la Guerre, le limogeage de nombreux généticiens voire leur disparition pure et simple. En 1948 le lyssenkisme accède au rang de théorie officielle exclusive avec le mot d'ordre que « *La science est l'ennemi du hasard* » ; Kolmogorov doit avouer ses péchés et se rétracter publiquement.

Il peut sembler curieux que les vues strictement déterministes de la philosophie soviétique officielle n'aient pas directement condamné les mathématiques du hasard chères à Kolmogorov. Ce dernier poursuit ses travaux en probabilités dans les années 1940, où parallèlement à Norbert Wiener aux U.S.A., il inaugure la théorie de la prédiction linéaire de processus stochastiques stationnaires (le « filtre de Wiener ») et l'applique à des problèmes de contrôle des tirs d'artillerie en temps de guerre. Non seulement son travail ne semble pas limité par le régime soviétique, mais on lui décerne les plus hautes distinctions : l'Ordre de la science socialiste (1940), le prix Staline (1941) et sept fois l'ordre de Lénine.

Que Kolmogorov soit relativement épargné durant la période stalinienne s'explique sans doute par son aura de « prince des mathématiques » et la forte tradition russe en probabilités depuis le 19<sup>e</sup> siècle. Mais surtout, il bénéficie de la protection de son ami Aleksandrov qui avait la confiance et l'approbation de Staline, et de l'intérêt de Staline lui-même pour les mathématiques et les mathématiciens de son Académie. On peut lire dans les archives soviétiques :

*« Kolmogorov est largement connu en URSS et à l'étranger. Dur au travail, il a un fort caractère et une forte volonté. Ayant la capacité d'attirer des étudiants talentueux, il accorde une grande attention à leur formation scientifique. Il fait un excellent travail d'examen et de préparation de programmes et de manuels pour l'école secondaire. Exceptionnellement modeste dans sa vie, il jouit d'un respect bien mérité. »*

L'affrontement entre Louzine et ses anciens élèves connut une réplique en 1946, lorsque Kolmogorov le gifla en plaine séance de l'assemblée parce qu'il avait voté contre l'élection d'Alexandrov à l'Académie des sciences. L'incident est rapporté au Kremlin mais la réaction de Staline est plutôt bienveillante (« cela arrive aux meilleurs d'entre nous »). Cela n'a pas empêché que Kolmogorov perde tous ses postes de professeur ; il éprouvera néanmoins toujours de la gratitude pour Staline pour lui avoir « pardonné son égarement ».

Au début des années 1950, motivé par des questions de stabilité du système solaire, il fait paraître deux articles de 4 pages sur la théorie des systèmes dynamiques qui marquent le début de la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser). Kolmogorov expose ensuite dans des congrès son théorème fondamental qui explique la stabilité de mouvements proches de l'équilibre d'un système possédant de nombreuses lois de conservation. Mais il ne publie pas sa démonstration. Arnold et Moser publieront les premières preuves (avec des hypothèses différentes), d'où le nom KAM. Pendant plus de trente ans, toutes les preuves connues étaient extraordinairement complexes ; ce n'est que récemment en 1984, puis en 2002 qu'une preuve simplifiée est proposée par plusieurs auteurs. Lors du congrès de 2002, des auditeurs qui avaient écouté Kolmogorov dans les années 1950 ont dit à l'un des auteurs de leur démonstration était en fait la démonstration originale !

Après avoir apporté une contribution majeure au sixième problème de Hilbert, Kolmogorov s'attaque au treizième problème de Hilbert en 1956–57. Hilbert avait demandé de prouver qu'une certaine fonction continue de trois variables ne peut pas être construite en un nombre fini d'étapes par composition et/ou addition à partir de fonctions d'une ou deux variables (c'était une idéalisation d'une méthode de résolution graphique des équations). En 1956 Kolmogorov prouve que des fonctions continues de



FIGURE 5 – Kolmogorov en vacances en 1947.

trois variables suffisaient pour construire *toute* fonction continue de  $n$  variables, et son élève Vladimir Arnold montre en 1957 que toute fonction continue de trois variables peut être construite à l'aide de fonctions continues de deux variables, ce qui résout (par la négative) le treizième problème de Hilbert. La même année, Kolmogorov va plus loin en montrant que toute fonction continue de trois variables ou plus est en fait constructible au moyen de fonctions d'une seule variable et d'additions : ce *théorème de superposition de Kolmogorov*, qu'il considérait comme sa réalisation la plus difficile techniquement, est aujourd'hui appliqué aux réseaux de neurones.

À partir du milieu des années 1950, Kolmogorov s'intéresse à la théorie de l'information qui avait été créée par l'ingénieur et mathématicien américain Claude Shannon en 1948 en se fondant sur la théorie des probabilités. En développant de manière rigoureuse les idées de Shannon, Kolmogorov cherche à rendre la théorie applicable dans le cadre très général des espaces abstraits. Kolmogorov introduit la notion d' $\epsilon$ -entropie qui est devenu un outil classique en théorie de l'approximation dans les espaces métriques. Avec son élève Iakov Sinaï il introduit également la notion d'entropie métrique des systèmes dynamiques dans la continuation de la théorie KAM. Ils démontrent que l'entropie de certains systèmes déterministes est non nulle, préfigurant la théorie moderne du chaos.

La théorie de l'information amène Kolmogorov à réfléchir à nouveau sur les questions fondamentales en probabilités dans les années 1960. Par une approche algorithmique très originale du hasard il introduit la notion de « complexité de Kolmogorov » pour mesurer l'aléa de longues séquences de nombres. D'une certaine manière, il s'agit là pour Kolmogorov de répondre aux questions philosophiques posés trente ans auparavant dans les *Grundbegriffe*, en en prenant pour ainsi dire le contrepied : son article de 1983, basé sur son exposé de 1970 à Nice, résume ses pensées en disant que la théorie des probabilités doit être basée sur la théorie (algorithmique) de l'information, et non l'inverse... Sans doute seul le fondateur de la théorie moderne des probabilités aurait pu avoir l'audace d'adopter un tel point de vue !

Comme la plupart des gens de sa génération, Kolmogorov a craint le Parti jusqu'à son dernier jour. Son élève Arnold témoigne qu'à chaque fois qu'il agissait d'une façon qui contredisait clairement ses principes, il avait coutume de dire « un jour, je vais tout vous expliquer ». Ce comportement provenait sans doute de pressions de la part du pouvoir via son ami Aleksandrov. Ainsi, sous Brejnev en 1974, il cosigne avec Aleksandrov un article à propos de l'écrivain dissident Soljenitsyne intitulé "*La trahison ne se pardonne pas*" dans le quotidien *la Pravda* :

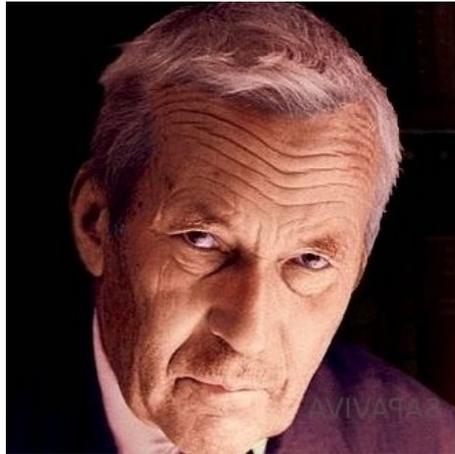


FIGURE 6 – Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov en 1972.

*« Nous avons appris avec grande satisfaction que Soljenitsyne a été privé de la citoyenneté soviétique et mis dehors de notre pays. L'intelligentsia soviétique se caractérise par sa grande conscience civique, son sens du devoir envers les peuples et l'Etat, son respect des traditions et des emblèmes du peuple et sa fierté des réalisations remarquables du peuple soviétique dans la construction du communisme. Dans ses créations, publiées en Occident, A. Soljenitsyne noircit notre structure sociale, profané le souvenir de ceux qui ont péri lors des batailles de la Grande Guerre Patriotique et donne délibérément une image déformée de la vie du peuple soviétique. Ainsi il ne fait pas que violer les lois soviétiques, il viole aussi le sanctuaire intérieur de notre peuple. Il s'est mis en dehors de notre société. Ce genre de personnes n'ont pas leur place dans notre pays. »*

Mais de l'avis de tous, Kolmogorov était un homme particulièrement souriant, ouvert, et généreux notamment avec ses étudiants. Il n'hésitait pas à encourager des jeunes mathématiciens doués, en Russie ou à l'étranger. Il s'est donné beaucoup de mal pour les faire progresser dans leur carrières, n'hésitant pas à leur financer des séjours sur ses deniers personnels.

Kolmogorov s'est également particulièrement investi dans la pédagogie et l'enseignement. C'est lui qui a fondé les "écoles spéciales" pour les jeunes élèves doués en mathématiques, exemple imité ensuite dans de nombreux pays au premier rang desquels les États-Unis et Taiwan. Pendant de nombreuses années, il a planifié des programmes, rédigé des manuels scolaires, écrit plusieurs articles pédagogiques à l'usage des enseignants et des parents, enseigné lui-même en initiant les élèves à la littérature et à la musique, en les accompagnant dans leurs récréations et leurs promenades.

Kolmogorov s'intéressait à beaucoup de choses en dehors des mathématiques, de la randonnée en montagne à la structure de la poésie de l'auteur russe Pouchkine.

Atteint de la maladie de Parkinson, il meurt à Moscou en 1987, mais ses idées mathématiques sont toujours bien vivantes et fécondes !