

Compte rendu du stage LIESSE

Introduction au calcul stochastique et à la théorie des erreurs

Télécom Paris, Palaiseau, 11 mai 2026

Auteur du compte rendu : M. LETOURNEL

/ Déroulé du stage

Le séminaire s'est déroulé à l'École Télécom Paris le 11 mai 2026. Il a réuni une dizaine de participants. Nous avons été accueillis par Olivier Rioul, en charge des relations entre Télécom Paris et l'UPS, ainsi que par Victor Rabiet, conférencier pour la journée.

Le séminaire était consacré à une introduction au calcul stochastique et à la théorie des erreurs. Il avait pour objectif de présenter les principaux outils mathématiques permettant de modéliser des phénomènes aléatoires dépendant du temps, ainsi que d'analyser la manière dont les erreurs se propagent dans les modèles. Un lien historique a été établi avec le calcul des erreurs introduit par Gauss, afin d'en montrer à la fois la portée, la nature de l'approche et les limites lorsqu'on passe au cadre du calcul stochastique.

L'exposé s'est organisé autour de quatre parties principales :

1. la construction du mouvement brownien et les bases théoriques probabilistes ;
2. l'intégrale d'Itô et son application à l'équation de Langevin ;
3. le calcul des erreurs introduit par Gauss ;
4. l'extension de cette approche au calcul stochastique.

1 Mouvement brownien et bases théoriques probabilistes

Une première difficulté, par rapport au programme usuel des classes préparatoires scientifiques, tient au fait que les processus stochastiques étudiés ne sont pas discrets, mais formulés en temps continu. On ne considère donc plus seulement des suites de variables aléatoires, mais des familles de variables aléatoires indexées par un paramètre réel, généralement interprété comme le temps.

Un processus stochastique peut ainsi être vu comme une famille

$$(X_t)_{t \geq 0}$$

de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}).$$

Pour chaque instant t , X_t est une variable aléatoire, tandis que pour chaque éventualité $\omega \in \Omega$, l'application

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

décrit une trajectoire possible du processus.

Dans ce cadre, une question essentielle consiste à comprendre comment l'information disponible sur une variable aléatoire X permet d'évaluer ou de réduire l'incertitude sur une autre variable aléatoire Y . La notion de variance conditionnelle intervient alors naturellement. La formule de variance totale donne une décomposition fondamentale :

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y | X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y | X)).$$

Elle exprime que la variance totale de Y se décompose en deux contributions : d'une part l'incertitude moyenne qui subsiste lorsque X est connue, et d'autre part la variance de la meilleure estimation de Y à partir de X .

Le mouvement brownien est ensuite introduit comme l'un des exemples fondamentaux de processus stochastique en temps continu. Il s'agit d'un processus

$$B = (B_t)_{t \geq 0}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

$$B_0 = 0,$$

et, pour tous $0 \leq s < t$,

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

Les accroissements du mouvement brownien sont donc gaussiens, centrés, et leur variance est proportionnelle à la durée $t - s$. On ajoute généralement que ces accroissements sont indépendants sur des intervalles de temps disjoints et que les trajectoires sont continues.

L'exposé a également présenté une construction du mouvement brownien à partir de la base de Haar et des fonctions triangulaires de Schauder. Cette construction permet de représenter une trajectoire brownienne comme une série aléatoire dont les coefficients sont des variables gaussiennes indépendantes. Elle offre une manière concrète de comprendre comment un objet continu, mais très irrégulier, peut être obtenu à partir d'une base fonctionnelle simple.

Une illustration numérique en Python a été proposée. Elle reposait notamment sur la transformation de Box-Muller, qui permet de construire des variables aléatoires suivant une loi normale à partir de variables aléatoires uniformes indépendantes. Si U_1 et U_2 sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$, alors les variables

$$Z_1 = \sqrt{-2 \ln U_1} \cos(2\pi U_2), \quad Z_2 = \sqrt{-2 \ln U_1} \sin(2\pi U_2)$$

sont indépendantes et suivent toutes deux la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Ce procédé fournit une méthode simple pour simuler les coefficients gaussiens intervenant dans la construction du mouvement brownien.

Plusieurs éléments théoriques ont été parcourus rapidement afin de donner un cadre cohérent à cette construction. L'espace $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ des variables aléatoires de carré intégrable a notamment été évoqué. Il s'agit de l'ensemble des variables aléatoires X telles que

$$\mathbb{E}(X^2) < +\infty.$$

Cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}(XY),$$

ce qui permet d'interpréter certaines notions probabilistes dans un cadre géométrique.

La notion de filtration a également été introduite. Une filtration est une famille croissante de tribus

$$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0},$$

où \mathcal{F}_t représente l'information disponible jusqu'à l'instant t . Cette notion est centrale en calcul stochastique, car elle permet de formaliser l'idée qu'un processus évolue dans le temps sans dépendre d'informations futures.

Enfin, le séminaire a fait le lien avec la notion d'intégrale. Pour un physicien, la mesure d'une grandeur se ramène fréquemment au calcul d'une intégrale. Dans le cadre du mouvement brownien, cette idée conduit naturellement à s'interroger sur la possibilité d'intégrer le long d'une trajectoire aléatoire. Or ces trajectoires sont continues mais non dérivables, ce qui rend inadaptée l'intégrale de Riemann usuelle. Ce point motive l'introduction de l'intégrale de Stieltjes, puis de l'intégrale stochastique, qui sera développée dans la suite de l'exposé.

L'ensemble de cette première partie a ainsi permis de faire apparaître progressivement les objets nécessaires au calcul stochastique : variables aléatoires, processus en temps continu, conditionnement, mouvement brownien, espaces L^2 , filtrations et intégrales adaptées aux trajectoires irrégulières. L'exposé a assemblé ces notions de manière cohérente, en reliant les intuitions probabilistes, analytiques et physiques d'une manière plus détaillée que celle présentée dans ce résumé.

2 Intégrale d'Itô, formule d'Itô et équation de Langevin

La deuxième partie du séminaire a introduit l'intégrale d'Itô et la formule d'Itô. Ces outils jouent, dans le cadre stochastique, un rôle analogue à celui de l'intégrale et de la formule de dérivation des fonctions composées dans le cadre déterministe. Ils permettent notamment d'étudier des équations différentielles stochastiques, dans lesquelles l'évolution d'un système dépend à la fois d'une dynamique déterministe et d'un terme aléatoire.

Dans le calcul classique, si une grandeur $\varphi(t)$ est dérivable, on peut écrire :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(s) ds.$$

Cette formule exprime que la valeur de φ au temps t s'obtient en accumulant ses variations infinitésimales entre 0 et t .

Cette approche ne s'applique plus directement lorsque la grandeur considérée dépend d'un mouvement brownien B_t . En effet, le mouvement brownien est continu, mais ses trajectoires sont presque sûrement non dérivables. On ne peut donc pas traiter B_t comme une fonction régulière du temps et écrire naïvement une dérivée B_t' .

La formule d'Itô donne précisément la règle de calcul adaptée à cette situation. Si φ est une fonction suffisamment régulière, alors :

$$\varphi(B_t) = \varphi(B_0) + \int_0^t \varphi'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi''(B_s) ds.$$

Le premier terme intégral,

$$\int_0^t \varphi'(B_s) dB_s,$$

est une intégrale stochastique : elle est prise par rapport au mouvement brownien lui-même. Elle ne doit donc pas être confondue avec une intégrale ordinaire par rapport au temps.

Le second terme,

$$\frac{1}{2} \int_0^t \varphi''(B_s) ds,$$

est le terme correctif propre à la formule d'Itô. Il provient de la variation quadratique du mouvement brownien. Formellement, on retient souvent l'idée que

$$(dB_t)^2 = dt,$$

alors que, dans le calcul différentiel classique, les termes du second ordre sont négligés. Cette différence explique l'apparition du terme faisant intervenir la dérivée seconde de φ .

La formule d'Itô constitue ainsi la règle de dérivation des fonctions composées dans le cadre stochastique. Elle montre que le passage d'un calcul déterministe à un calcul brownien ne consiste pas seulement à remplacer dt par dB_t , mais impose une correction supplémentaire liée à l'irrégularité des trajectoires browniennes.

Dans le cadre plus général d'une équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t,$$

la formule d'Itô prend la forme :

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + a \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (t, X_t) dt + b(t, X_t) \frac{\partial f}{\partial x} (t, X_t) dB_t.$$

Elle fournit donc un outil central pour étudier les processus de diffusion, c'est-à-dire les processus dont l'évolution comporte à la fois une composante déterministe et une composante aléatoire.

Une référence utile pour approfondir ces notions est l'ouvrage de Francis Comets et Thierry Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffusions. Cours et exercices corrigés*, publié chez Dunod. Cet ouvrage présente notamment les processus aléatoires, le mouvement brownien, les martingales, l'intégrale stochastique, la formule d'Itô, les équations différentielles stochastiques et les processus de diffusion.

3 Le calcul des erreurs introduit par Gauss

La troisième partie de l'exposé a repris l'approche historique de Gauss pour étudier l'influence des erreurs de mesure. L'idée générale est la suivante : lorsqu'une grandeur est calculée à partir de plusieurs mesures imparfaites, l'incertitude sur ces mesures se transmet au résultat final. Le calcul des erreurs cherche alors à quantifier cette propagation.

L'exemple historique d'un triangle inscrit dans un cercle a été développé avec soin. Pour un tel triangle, il existe plusieurs manières de déterminer la longueur de ses côtés. On peut par exemple utiliser une mesure angulaire des sommets du triangle, une mesure liée à la hauteur de la médiatrice d'un segment, ou encore une mesure caractérisant un segment à partir de la position de son milieu et d'un angle associé.

Ces différentes méthodes conduisent à une même grandeur géométrique, mais elles ne font pas intervenir les mesures élémentaires de la même manière. Par conséquent, les erreurs de mesure ne se propagent pas de façon identique selon la méthode utilisée. L'exemple permet ainsi de montrer que l'incertitude sur le résultat final ne dépend pas seulement de la précision des mesures initiales, mais aussi de la fonction qui relie ces mesures à la grandeur calculée.

Si une grandeur c est mesurée avec une petite erreur Δc , et si l'on considère une grandeur dérivée $f(c)$, alors l'erreur induite sur $f(c)$ peut être étudiée par un développement de Taylor :

$$f(c + \Delta c) - f(c) = f'(c)\Delta c + \frac{1}{2}f''(c)(\Delta c)^2 + o((\Delta c)^2).$$

Ainsi, au premier ordre, l'erreur se propage selon la formule :

$$\Delta f \simeq f'(c)\Delta c.$$

Cette expression montre que la sensibilité du résultat à l'erreur de mesure est gouvernée par la dérivée de la fonction f .

Si l'on conserve les termes du second ordre, on obtient :

$$\Delta f \simeq f'(c)\Delta c + \frac{1}{2}f''(c)(\Delta c)^2.$$

Le terme faisant intervenir $f''(c)$ mesure alors l'effet de la courbure de la fonction f sur la propagation de l'erreur.

Dans le cas de plusieurs variables mesurées, si

$$f = f(c_1, \dots, c_n),$$

et si chaque mesure c_i est affectée d'une erreur Δc_i , la formule au premier ordre devient :

$$\Delta f \simeq \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial c_i}(c_1, \dots, c_n) \Delta c_i.$$

Cette écriture exprime que chaque erreur élémentaire contribue à l'erreur finale selon la sensibilité de f à la variable correspondante.

Dans une approche probabiliste, les erreurs Δc_i peuvent être modélisées comme des variables aléatoires. Si elles sont centrées, indépendantes, et de variances respectives σ_i^2 , alors la variance de l'erreur propagée est donnée, au premier ordre, par :

$$\text{Var}(\Delta f) \simeq \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial c_i} \right)^2 \sigma_i^2.$$

Cette formule constitue l'une des formes classiques du calcul gaussien des erreurs.

L'intérêt de cette partie de l'exposé est d'avoir montré que le calcul des erreurs repose déjà sur une idée proche de celle que l'on retrouvera ensuite en calcul stochastique : lorsqu'une grandeur dépend d'une quantité incertaine, l'effet de cette incertitude est déterminé par la manière dont la fonction transforme les variations élémentaires.

4 Extension du calcul des erreurs au cadre stochastique

La dernière partie de l'exposé a repris l'idée du calcul des erreurs de Gauss, mais en la transposant dans un cadre beaucoup plus général. Dans le calcul classique des erreurs, on étudie l'effet d'un nombre fini d'erreurs de mesure sur une grandeur calculée. Dans le cadre stochastique, on considère au contraire une infinité de variables aléatoires, correspondant par exemple aux différents instants de mesure d'un processus. L'imprécision attachée à chaque mesure constitue alors elle-même une source d'erreur.

Le temps consacré à cette dernière partie a malheureusement été réduit, en raison du nombre de questions posées au cours des parties précédentes. Les notions ont donc été présentées de manière plus rapide, mais elles ont permis d'ouvrir une perspective plus large sur le lien entre calcul des erreurs, processus stochastiques et analyse fonctionnelle.

Des notions d'erreurs faiblement aléatoires et fortement aléatoires ont été introduites. Qualitativement, une erreur faiblement aléatoire peut être pensée comme une erreur de la forme

$$hY,$$

où Y est une variable aléatoire et où h est un paramètre tendant vers 0. L'erreur est alors aléatoire, mais son amplitude devient petite. Cette situation permet de retrouver des raisonnements proches du calcul différentiel classique, où l'on étudie l'effet d'une petite perturbation.

Dans le cas d'erreurs plus fortement aléatoires, l'incertitude ne peut plus être traitée comme une simple perturbation infinitésimale. Elle intervient directement dans la dynamique du système. C'est ce qui conduit à considérer des équations différentielles stochastiques, par exemple de la forme

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t.$$

Dans cette équation, le terme

$$b(X_t) dt$$

représente la partie déterministe de l'évolution, tandis que le terme

$$\sigma(X_t) dB_t$$

représente la partie aléatoire, portée par le mouvement brownien B_t . La fonction b est appelée coefficient de dérive, tandis que σ mesure l'intensité de la diffusion.

Cette équation décrit un processus de diffusion. Elle généralise l'idée selon laquelle une grandeur peut évoluer à la fois sous l'effet d'une dynamique moyenne et sous l'effet de fluctuations

aléatoires. À une telle équation est associée une famille d'opérateurs, appelée semi-groupe, qui décrit l'évolution des fonctions observables du processus. Si l'on note

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)],$$

alors $P_t f(x)$ représente la valeur moyenne de $f(X_t)$ lorsque le processus part de $X_0 = x$. La propriété de semi-groupe s'écrit :

$$P_{t+s} = P_t P_s.$$

Elle traduit simplement le fait que l'évolution entre 0 et $t + s$ peut être décomposée en une évolution de durée s , puis une évolution de durée t .

Cette approche est illustrée par la formule de Black-Scholes, qui repose sur une modélisation stochastique de l'évolution d'un actif financier. Sans entrer dans les détails financiers, l'intérêt de cet exemple est de montrer que les équations différentielles stochastiques permettent de relier une dynamique aléatoire à une équation aux dérivées partielles déterministe. Le calcul stochastique fournit ainsi un passage entre trajectoires aléatoires individuelles et évolution globale des quantités moyennes.

Enfin, dans un laps de temps trop court, ont été présentées les formes de Dirichlet. Elles permettent de reformuler la théorie des erreurs dans un cadre probabiliste et analytique plus général. Dans le calcul classique des erreurs, l'incertitude sur une grandeur transformée $f(X)$ est gouvernée, au premier ordre, par la dérivée de f . Si l'erreur sur X est petite, on écrit :

$$\Delta f \simeq f'(X) \Delta X.$$

La variance de l'erreur propagée fait alors apparaître le carré de la dérivée :

$$\text{Var}(\Delta f) \simeq (f'(X))^2 \text{Var}(\Delta X).$$

La théorie des formes de Dirichlet généralise cette idée en introduisant un opérateur, souvent appelé carré du champ et noté Γ , qui mesure la sensibilité d'une fonction aux fluctuations de la variable sous-jacente. Dans le cas le plus simple, on a :

$$\Gamma(f) = |f'|^2,$$

et, en dimension supérieure,

$$\Gamma(f) = |\nabla f|^2.$$

La forme de Dirichlet associée est alors définie par :

$$\mathcal{E}(f, f) = \int \Gamma(f) d\mu.$$

Cette quantité peut être interprétée comme une énergie, mais aussi comme une mesure de l'erreur propagée par la fonction f . Elle permet donc de relier le calcul des erreurs de Gauss, fondé sur les dérivées partielles, au calcul stochastique, où les fluctuations aléatoires sont décrites par des processus comme le mouvement brownien.

Dans le cas du mouvement brownien, la forme de Dirichlet associée est liée au laplacien et s'écrit, à un facteur près :

$$\mathcal{E}(f, f) = \frac{1}{2} \int |\nabla f(x)|^2 dx.$$

Elle correspond au générateur infinitésimal

$$L = \frac{1}{2} \Delta,$$

qui apparaît également dans la formule d'Itô :

$$df(B_t) = \nabla f(B_t) \cdot dB_t + \frac{1}{2} \Delta f(B_t) dt.$$

Ainsi, les formes de Dirichlet donnent un cadre commun à la propagation des erreurs, à l'énergie analytique des fonctions et à l'étude des processus stochastiques. Elles prolongent l'intuition initiale de Gauss : une erreur ne se transmet pas seulement selon son amplitude propre, mais selon la manière dont la fonction observée transforme les fluctuations de la variable mesurée.

/ Conclusion et remerciements

Pour terminer, je signale en référence le livre de Nicolas Bouleau, *Théorie des erreurs*, publié chez Cassini, dans la collection Spartacus, qui reprend une grande partie des notions présentées et résumées ici.

Je remercie Victor Rabiet pour sa présentation, Olivier Rioul pour son accueil, ainsi que l'ensemble de la direction de l'équipe de Télécom Paris. Je remercie également les collègues de l'UPS intervenant dans le cadre de l'organisation des stages Liesse pour le travail réalisé.

En espérant avoir limité les erreurs de transcription, même si certaines sont, nous le savons désormais, parfaitement aléatoires mais quantifiables quand même.

Marc LETOURNEL