TELECOM Paris	TSE101 **TP 9** Economie circulaire

Dans ce TP, nous allons étudier un système d'économie circulaire, c'est-à-dire, en présence de recyclage du produit. Nous construirons le modèle mathématique sous-jacent. Nous en étudierons le comportement en énergie sur le long-terme selon plusieurs schémas de croissance. Nous montrerons notamment qu'une croissance continue est insoutenable malgré le recyclage alors que si l'économie stagne à une certaine vitesse - que vous caractériserez -, le modèle est soutenable. Nous confronterons le modèle à des données réelles provenant de l'industrie papetière.

Description du modèle

On considère l'économie d'un certain produit. Le modèle actuel est *linéaire* : chaque produit est fabriqué et vendu neuf pour un coût écologique, dit PEF (*Product Environnmental Footprint*) unitaire u_N.
Ayant signé un accord cadre avec l'Etat exigeant une réduction significative du PEF, la filière de fabrication de ce produit explore à cette fin la piste du recyclage. On supposera que le produit est recyclable à l'infini avec un taux d'efficacité de η, càd, que le PEF du produit recyclé vaut $(1-\eta)u_N$.
On souhaite quantifier, de façon *simplifiée mais rigoureuse*, l'impact carbone du système circulaire en fonction du type de croissance du marché de ce produit et du taux de recyclage. On notera

- $Q_N(n)$: la quantité de produit neuf vendu durant l'année n,
- $Q_C(n)$: la quantité de produit non-neuf vendu durant l'année n
- $Q_T(n) = Q_N(n) + Q_C(n)$: la quantité de produit vendu durant l'année n
- f : la part de la production en filière circulaire à l'année $n+1$ en fonction de la production de l'année n,
- η : l'efficacité environnementale d'une solution circulaire,
- g : le rapport entre la production totale de l'année $n+1$ avec celle de l'année n.
- $E_T(n)$: l'impact environnemental annuel total $E_T(n)$ (exprimé en kgCO_2e), bref le PEF total annuel.

Par défaut, on prendra les valeurs numériques suivantes :

Symbole	Description	Valeur
$Q_T(0)$	Production annuelle (unités) en l'année 0	10000
$Q_C(0)$	Production annuelle recyclée en l'année 0	0
u_N	Impact unitaire du neuf (kgCO_2e)	25
η	Efficacité du recyclage	0,5

Scénario linéaire (non-circulaire)

Dans cette section, on considère par conséquent que $f = 0$ ce qui induit que $Q_C(n) = 0$ pour tout n.

1.1 Calculez $Q_N(n)$ en fonction de g et $Q_N(0)$.

1.2 En déduire $E_T(n)$ en fonction de g, $Q_N(0)$ et u_N.

1.3 Tracez la courbe de $E_T(n)$ en fonction de n pour les deux valeurs de $g \in \{0{,}75, 1{,}25\}$.

Scénario avec modèle d'économie circulaire

On souhaite construire le modèle mathématique permettant d'écrire $E_T(n)$ (l'impact environnemental total à l'instant n) pour tout n et étudier son comportement.

2.1 Donnez le PEF unitaire u_C pour un produit issu d'une filière circulaire en fonction de u_N et η. Dans u_C, on ne compte que le coût en PEF lié aux procédés industriels de la filière circulaire.

2.2 Donnez $E_T(n)$ en fonction de u_N, η et des quantités neuves et non neuves produites, càd,

$$\mathbf{X}(n) = [Q_N(n), Q_C(n)]^{\mathrm{T}}$$

avec $(.)^{\mathrm{T}}$ l'opérateur de transposition.

2.3 Montrez que $\mathbf{X}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(n)$ avec $\mathbf{A}$ une matrice à caractériser.

2.4 En examinant uniquement le lien multiplicatif entre $Q_N(n+1)$ et $Q_N(n)$, intuitez une condition sur g qui pourrait permettre d'avoir une production de neuf ne divergeant pas quand $n \to +\infty$.

2.5 Exprimez $E_T(n)$ en fonction de $\mathbf{A}$, $\mathbf{X}(0)$ et $c = [u_N, u_N(1-\eta)]$. En déduire que le comportement asymptotique de $E_T(n)$ est lié au spectre de la matrice $\mathbf{A}$. En examinant ce spectre, indiquez les conditions sur g permettant une décroissance de $E_T(n)$ pour n grand. Le résultat est-il en accord avec la réponse à la question **2.4** ?

2.6 Donnez explicitement $E_T(n)$ en fonction de n et tous les paramètres introduits jusqu'à présent. Commentez.

2.7 Maintenant, nous allons considérer une croissance qui peut évoluer avec le temps : on a ainsi $g_n > 1$ et on écrira $g_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n > 0$. On souhaite trouver une condition sur la suite ε_n afin que la suite $E_T(n)$ soit bornée.

- Trouvez la condition nécessaire et suffisante sur ε_n telle la suite $E_T(n)$ soit bornée. Pour cela, vous remarquerez que la matrice $(1/g_n)\mathbf{A}_n$ est non-négative (tous ses éléments sont positifs ou nuls) et colonne-stochastique, càd, que ses colonnes somment à un.
- On suppose que $Q_T(n+1) = Q_T(n) + h$. Ecrire le g_n et donc le ε_n associé. Vérifie-t-il la condition de bornitude du PEF.

On souhaite concrétiser par quelques valeurs numériques les constants des questions **2.**.

3. Nous allons tracer maintenant des courbes de $E_T(n)$ en fonction de n pour
   - $g = 0{,}75$ avec $f = 0{,}5$ et $f = 0{,}75$,
   - $g = 1$ avec $f = 0{,}5$ et $f = 0{,}75$,
   - $g = 1{,}25$ avec $f = 0{,}5$ et $f = 0{,}75$.

Quelques données réelles

Nous allons nous intéresser sur quelques données réelles provenant du marché de papier et carton. Les chiffres proviennent du site de la FAO : `https://openknowledge.fao.org`. Pour rappel, la FAO est l'organisation de l'Alimentation et de l'Agriculture de l'ONU.

4.1 En utilisant le fichier `tp9_tse101_students.py` fourni, tracez la production de la filière papetière (papiers + cartons neufs et recyclés, papiers ou cartons) au niveau mondial en fonction de l'année (en allant de 1961 à 2021). De plus comparez l'évolution de la production de cette filière avec le PIB et la population ?

4.2 Tracez ε_n et f_n pour $n \in [1961, 2021]$. Comme on n'a pas le chiffre de 1960, on prendra $\varepsilon_{1961} = 0$. Commentez l'allure des courbes.

4.3 Pour ε_n, on va procéder à plusieurs types de régression (attention, pour éliminer les points négatifs liés à des événements spécifiques, on remplacera ε_n par la moyenne de ses points adjacents :

- Type « élastique » : $\varepsilon \approx \frac{\beta}{n^\alpha}$.
- Type « exponentiel » : $\varepsilon \approx \beta e^{\alpha n}$.
- Type « linéaire » : $\varepsilon \approx \beta + \alpha n$.

Pour chaque type, donnez les α et β et évaluez les R^2 correspondant. Tracez les données et les régressions. Attention, pour les deux types élastique et exponentiel, il suffit de faire une régression linéaire adaptée sur $\ln(\varepsilon_n)$, de plus on considérera que l'année 1961 correspond à l'indice 1. Quelle est la meilleure régression ?