

Analyse Temps-Fréquence et Temps-Echelle

Olivier Rioul

Dept. Comelec
Télécom Paris
Institut Polytechnique de Paris
olivier.rioul@telecom-paristech.fr
perso.telecom-paristech.fr/rioul/

Formation LIESSE
Fourier, temps et fréquence
2019

Plan

- 1 Notion de fréquence
- 2 Notion de résolution (temps et fréquence)
- 3 Pourquoi l'analyse temps-fréquence ?
- 4 Transformée de Fourier Court-Terme
- 5 Transformée en Ondelettes
- 6 Transformations bilinéaires
- 7 Boîtes à outils



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Transformée de Fourier (T.F.)



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Pour des signaux 1D :

Description temporelle : Signal vu comme une fonction $x(t)$ de la variable **temps** $t \in \mathbb{R}$

Description fréquentielle : Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

fonction de la variable (duale) de **fréquence** $f \in \mathbb{R}$

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Valeurs complexes



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

- Noter que $X(f) \in \mathbb{C}$, même pour un signal réel
- La T.F. d'un signal réel est à **symétrie hermitienne** :
$$X(-f) = X^*(f)$$
- On peut donc se limiter aux fréquences ≥ 0 pour un $x(t)$ à valeurs réelles
- **Signal analytique** : $z(t) \in \mathbb{C}$ tel que $Z(f) = 2X_+(f)$
- Il est commode de supposer dans la suite que $x(t)$ est déjà analytique : $x(t) = z(t)$.

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Attention

L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2j\pi ft} dt$$

n'a souvent « aucun sens ».

- Signaux \mathbf{L}^1 « intégrables » : $\int |x(t)| dt < \infty$. La T.F. $X(f)$ est continue et bornée.
- Signaux \mathbf{L}^2 « de carré intégrable » (d'énergie finie) :

$$\|x\|^2 = \int |x(t)|^2 dt < \infty$$

La T.F. $X(f)$ est elle-même \mathbf{L}^2 (cf. Parseval), passage à la limite dans \mathbf{L}^2 de l'intégrale tronquée.

En mathématiques...



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Cadre général

Signaux \mathcal{S}' (distribution **tempérée**) : $x(t) = O(t^\alpha)$.
La T.F. $X(f)$ est elle même tempérée.

Exemple : impulsion de Dirac

$$\int e^{2j\pi ft} dt = \delta(f)$$

$$\int e^{2j\pi ft} df = \delta(t)$$

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Reconstruction du signal

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2j\pi ft} df$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int \left(\int x(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \right) e^{2j\pi ft} df &= \int x(\tau) \left(\int e^{2j\pi f(t-\tau)} df \right) d\tau \\ &= \int x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= x(t) \quad \square \end{aligned}$$

- Les TF directe et inverse ont des formes similaires (et donc des propriétés similaires).
- « **Dualité temps-fréquence** » : $t \iff f$

Translation/Modulation



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Translation $\overset{\text{T.F.}}{\rightleftarrows}$ Modulation

$$x(t)e^{2j\pi f_0 t} \overset{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} X(f - f_0)$$

$$x(t - t_0) \overset{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} X(f)e^{-2j\pi f t_0}$$

Démonstration.

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t - t_0)e^{-2j\pi f(t+t_0)} dt$$

$$X(f - f_0) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2j\pi(f-f_0)t} dt$$



Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Impulsion/Onde pure



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Impulsion (Dirac) $\stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows}$ Onde pure (sinusoïde)

$$e^{2j\pi f_0 t} \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} \delta(f - f_0)$$

$$\delta(t - t_0) \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} e^{-2j\pi f t_0}$$

Démonstration.

Par translation/modulation à partir de

$$\int e^{-2j\pi f t} dt = \delta(f)$$

et de la formule duale. □

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Convolution



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Convolution $\xleftrightarrow{\text{T.F.}}$ Produit

$$\int x(u)y(t-u)du \xleftrightarrow{\text{T.F.}} X(f)Y(f)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int \left(\int x(u)y(t-u)du \right) e^{-2j\pi ft} dt \\ &= \int x(u)e^{-2j\pi fu} \int y(t-u)e^{-2j\pi f(t-u)} dt du \\ &= X(f)Y(f) \quad \square \end{aligned}$$

Translation : convolution par $\delta(t-t_0)$

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Dérivation



Dérivation $\stackrel{\text{T.F.}}{\Leftrightarrow}$ Produit par $2j\pi f$

$$x'(t) \stackrel{\text{T.F.}}{\Leftrightarrow} 2j\pi f X(f)$$

Démonstration.

Intégration par parties :

$$\int x'(t)e^{-2j\pi ft} dt = -(-2j\pi f) \int x(t)e^{-2j\pi ft} dt \quad \square$$

- Dérivation : convolution par δ'
- Dualité régularité/décroissance à l' ∞ :
 - Th. de Bernstein : bande limitée \implies toutes dérivées bornées
 - Irrégularité \implies composantes de fréquences élevées.
Exemples : rectangle et sinus cardinal, triangle et (sinus cardinal)²

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Dilatation/Contraction



Dilatation $\stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows}$ Contraction

La transformée de Fourier transforme dilatation en contraction et *vice versa* :

$$\frac{1}{\sqrt{a}}x\left(\frac{t}{a}\right) \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftarrows} \sqrt{a}X(af)$$

- Paramètre $a > 0$
- En temps : dilatation ($a > 1$) ou contraction ($a < 1$)

Démonstration.

Changement de variable :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int x\left(\frac{t}{a}\right) e^{-2j\pi ft} dt = \frac{a}{\sqrt{a}} \int x(t) e^{-2j\pi a ft} dt$$



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Conservation de l'énergie



Relation de Parseval-Plancherel (dans \mathbf{L}^2)

$$\int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int X(f)X^*(f) df &= \int \int \int x(t)x^*(u)e^{2j\pi f(u-t)} df dt du \\ &= \int \int x(t)x^*(u)\delta(t-u) dt du = \int x(t)x^*(t) dt \quad \square \end{aligned}$$

La transformée de Fourier conserve l'énergie (isométrie).

- $|x(t)|^2$: densité temporelle d'énergie (**puissance instantanée**)
- $|X(f)|^2$: densité fréquentielle (spectrale) d'énergie (**dsp**)

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Produit scalaire temps ou fréquence



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Généralisation : Relation de Parseval

$$\int x(t)y^*(t) dt = \int X(f)Y^*(f) df$$

Démonstration.

Similaire au cas de la norme (énergie $\|x\|^2 = \langle x|x \rangle$).

N.B. Le produit scalaire découle de la norme :

$$4 \langle x|y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + j\|x + jy\|^2 - j\|x - jy\|^2 \quad \square$$

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Temps discret



Pour un signal à temps discret $x_n = x(nT)$:

- transformée de Fourier

$$X(f) = \sum_n x_n e^{-2j\pi n f T}$$

- fréquence périodique (de période $1/T$)
- reconstruction (série de Fourier) :

$$x_n = T \int_{\langle 1/T \rangle} X(f) e^{2j\pi n f T} df$$

- énergie (Parseval) :

$$\sum_n |x_n|^2 = T \int_{\langle 1/T \rangle} |X(f)|^2 df$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Temps et fréquence discrets



Pour un signal à durée limitée x_0, x_1, \dots, x_{N-1} :

- transformée de Fourier discrète

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2j\pi nk/N}$$

- algorithmes rapides (FFT de toutes sortes)
- temps et fréquence périodiques (de longueur N)
- reconstruction :

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{2j\pi nk/N}$$

- énergie (Parseval) :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Dans un corps fini



Pour un signal q -aire $x_0, x_1, \dots, x_{N-1} \in \mathbb{F}_q$ (corps fini à q éléments)

- transformée de Fourier discrète dans un corps fini :

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \alpha^{nk}$$

- α est d'ordre N ($\alpha^N = 1$ implique $N | q^m - 1$) et $X_k \in \mathbb{F}_{q^m}$ (sur-corps localisateur)
- reconstruction :

$$x_n = N^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} X_k \alpha^{nk}$$

- utile en algèbre (codes correcteurs d'erreurs, etc)
- généralisation : indicage sur un groupe de caractères $\{\chi\}$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discretisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Autres discrétisations



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Note

- Des discrétisations similaires sont possibles pour tout ce qui va suivre (analyse temps-fréquence, transformées bilinéaires, etc.)
- c'est indispensable pour l'implantation (toolboxes)
- ce n'est pas trivial! (plusieurs méthodes)
- [*nous resterons discrets sur la discrétisation...*]

Fréquence

Transformée de
Fourier

Propriétés de la TF

Conservation de
l'énergie

Discrétisations

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Résolution temporelle ou fréquentielle



$$\text{Energie } E = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

Définition

Centre temporel/fréquentiel d'énergie : espérance mathématique

$$\langle t \rangle = \frac{1}{E} \int t |x(t)|^2 dt \quad \langle f \rangle = \frac{1}{E} \int f |X(f)|^2 df$$

Définition

Résolution temporelle/fréquentielle : dispersion d'énergie

$$\Delta t = \sqrt{\frac{1}{E} \int (t - \langle t \rangle)^2 |x(t)|^2 dt} \quad \Delta f = \sqrt{\frac{1}{E} \int (f - \langle f \rangle)^2 |X(f)|^2 df}$$

Analyse

Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de
signaux

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Inégalité de Weyl-Heisenberg



Théorème (Weyl, 1931)

Si $x(t), tx(t), x'(t) \in \mathbf{L}^2$ alors

$$\|x(t)\|^2 \leq 2\|tx(t)\|\|x'(t)\|$$

avec égalité ssi $x(t)$ est une **gaussienne**.

Démonstration.

$$\int x^2(t)dt = -2 \int tx(t)x'(t)dt \quad \text{int. par parties}$$
$$\|x(t)\|^2 \leq 2\|tx(t)\|\|x'(t)\| \quad \text{Cauchy-Schwarz.}$$

avec égalité ssi $x'(t)/x(t) \propto t$. □

L'inégalité de Weyl est célèbre pour son application à la mécanique quantique (principe d'incertitude d'Heisenberg).

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de
signaux

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Principe d'incertitude



Principe d'incertitude temps-fréquence

Pour tout signal $x(t)$ d'énergie finie avec Δt et Δf finis :

$$\Delta t \cdot \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$$

avec égalité ssi $x(t)$ est une **gaussienne**.

Démonstration.

On se ramène à $\langle t \rangle = 0$ par translation dans le temps, à $\langle f \rangle = 0$ par modulation fréquentielle.

On a $E = \|x(t)\|^2 = \|X(f)\|^2$ et par la formule de dérivation $\|x'(t)\|^2 = |2j\pi|^2 \|fX(f)\|^2$. D'où Weyl : $\|x(t)\|^2 \leq 2\|tx(t)\|\|x'(t)\|$ s'écrit

$$E \leq 4\pi\|tx(t)\|\|fX(f)\| = 4\pi E\Delta t\Delta f. \quad \square$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de
signaux

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Principe d'incertitude : moralité



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de
signaux

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Limitation fondamentale de la transformée de Fourier : On ne peut pas être à la fois « précis » en temps **et** en fréquence
- Bonne localisation temporelle \iff mauvaise localisation fréquentielle, et *vice versa* (il faudra faire un choix)
- La **gaussienne** a la meilleure localisation temps-fréquence

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Décomposition temporelle



On peut (toujours) écrire :

$$x(t) = \int x(u)\delta(t - u) du$$

- $\delta(t)$ élément neutre pour la convolution
- C'est une décomposition de $x(t)$ sur des « fonctions de base » translattées $\delta(t - u)$: $\Delta t = 0$
- Les fonctions de base $\delta(t - u)$ ont pour T.F. $e^{-2j\pi fu}$:
 $\Delta f = \infty$.

Conclusion : Le principe d'incertitude est vérifié à la limite :

$$\Delta t = 0 \quad \Delta f = \infty$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de
signaux

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Décomposition fréquentielle



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de
signaux

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Synthèse spectrale par TF inverse :

$$x(t) = \int X(\nu) e^{2j\pi\nu t} d\nu$$

- Décomposition sur des fonctions de base $e^{2j\pi\nu t}$ (ondes pures) éternelles : $\Delta t = \infty$
- Les fonctions de base ont pour T.F. $\delta(f - \nu)$: $\Delta f = 0$

Conclusion : Le principe d'incertitude est vérifié à la limite :

$$\boxed{\Delta t = \infty \quad \Delta f = 0}$$

La fréquence est globale : gomme l'aspect temporel

Note sur la décomposition spectrale



Dans la décomposition :

$$x(t) = \int X(f)e^{2j\pi ft} df$$

- **Orthonormalité** entre fonctions de base oscillant à des fréquences différentes :

$$\langle e^{2j\pi ft} | e^{2j\pi \nu t} \rangle = \delta(f - \nu)$$

- La Transformée de Fourier est donc le **produit scalaire** :

$$X(f) = \langle x(t) | e^{2j\pi ft} \rangle$$

coefficient de la décomposition de $x(t)$. Indique la « ressemblance » de $x(t)$ contre une onde pure.

- Synthèse : somme (continue) des **projections** orthonormales sur les fonctions de base.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Principe d'incertitude

Décomposition de
signaux

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Signaux stationnaires



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Définition

Signal stationnaire : dont les caractéristiques (spectrales) ne varient pas dans le temps.

L'analyse spectrale (de Fourier) est bien adaptée.

Exemples

- Onde pure
- Combinaison linéaire d'ondes pures (harmoniques)

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire

Cas non stationnaire

Fréquence dépendant
du temps

Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Filtrage stationnaire



Définition

Filtre : Transformation linéaire \mathbf{F} invariante dans le temps

Puisque $x(t) = x(t) * \delta(t) = \int x(u)\delta(t-u) du$:

$$\mathbf{F}(x(t)) = \int x(u)\mathbf{F}(\delta)(t-u) du$$

Réponse impulsionnelle : $h(t) = \mathbf{F}(\delta)(t)$.

$$\mathbf{F}(x(t)) = \boxed{\int x(u)h(t-u) du} \quad (\text{Convolution})$$

Sur la base de Fourier : $\boxed{Y(f) = H(f)X(f)}$. La TF **diagonalise** le filtre.

- Vecteurs propres : les ondes pures $e^{2j\pi ft}$.
- Valeurs propres : $H(f)$ (réponse fréquentielle)

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire

Cas non stationnaire

Fréquence dépendant
du temps

Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Modélisation par filtrage linéaire



Un exemple d'outil du stationnaire :

Modélisation par filtrage linéaire

Le signal (aléatoire **stationnaire**) $x(t)$ est modélisé comme sortie d'un filtre $h(t)$ excité par un bruit blanc $e(t)$

La densité spectrale de puissance en sortie est donnée par la formule de filtrage :

$$S_{xx}(f) = S_{ee}(f)|H(f)|^2 \propto |H(f)|^2$$

Applications :

- analyse de signal par modèle linéaire AR, ARMA,...
- codage par prédiction linéaire (parole, son)
- ...

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire
Cas non stationnaire
Fréquence dépendant
du temps
Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Signaux non-stationnaires



Définition

Signal non stationnaire : dont les caractéristiques (spectrales) varient au cours du temps.

Exemple

Morceau de musique : chaque note a un temps d'émission et une hauteur.

- L'essentiel de l'information est portée par les non-stationnarités : Début, fin, transitoires
- L'analyse spectrale perd l'information temporelle puisqu'elle moyenne sur tous les temps.
- Approche **par morceaux** : adapter les outils du stationnaire (TF, modèle linéaire) aux variations dans le temps.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire

Cas non stationnaire

Fréquence dépendant
du temps

Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Méthodes paramétriques



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

- Une solution : Modèles paramétriques sur tranches temporelles du signal (supposées localement stationnaires).
- Exemples de méthodes spectrales paramétriques : AR, ARMA, MUSIC
- Méthodes adaptatives/évolutives
- Problème : Nécessité d'estimer l'ordre du modèle au fil de l'eau
- Connaissance *a priori* difficile à exploiter sur les non-stationnarités.

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire

Cas non stationnaire

Fréquence dépendant
du temps

Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Méthodes non-paramétriques



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

- Alternative : analyse globale des caractéristiques spectrales dépendantes du temps : **analyse temps-fréquence**.
- Aucune connaissance *a priori* nécessaire : « universel »
- On évite le problème de l'estimation de l'ordre d'un modèle
- Problème : Choix du type d'analyse. L'analyse peut jouer le rôle d'un « modèle ».
- Difficulté d'interprétation de l'analyse (principe d'incertitude, interférences).

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire

Cas non stationnaire

Fréquence dépendant
du temps

Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Fréquence instantanée

Première idée (simple) : définir une **fréquence locale** (qui dépend du temps)



- Ecrire le signal modulé en amplitude et en phase (signal analytique à fréquences positives)

$$x(t) = a(t)e^{j\phi(t)}$$

- Les variations de la phase définissent la **fréquence instantanée** :

$$f_x(t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Analyse

Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire
Cas non stationnaire
Fréquence dépendant
du temps

Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Fréquence instantanée et retard de groupe



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Exemples

- La fréquence instantanée de $\cos(2\pi f_0 t)$ est $f_x(t) = f_0$ (constante)
- **Chirp** (signal modulé linéairement en fréquence) : la fréquence instantanée de $\cos(2\pi(at^2 + bt))$ est $f_x(t) = 2at + b$

Notion duale : les variations fréquentielles de phase de

$$X(f) = A(f)e^{j\Phi(f)}$$

définissent le **retard de groupe** : temps dépendant de la fréquence

$$t_x(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial f}$$

Exemple : $\delta(t - t_0)$ a pour retard de groupe $t_x(f) = t_0$

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

Cas stationnaire

Cas non stationnaire

Fréquence dépendant
du temps

Besoin d'une
véritable analyse
temps-fréquence

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Limitations

- La méthode $f(t)$ ne convient qu'à des signaux de type VCO.
- Pour deux chirps simultanés $\cos(2\pi(at^2 + bt)) + \cos(2\pi(a't^2 + b't))$, les fréquences locales sont moyennées : horrible !
- Il faut donc disposer d'une dimension supplémentaire, i.e., définir une **amplitude** dépendant du temps et de la fréquence : $A_x(t, f)$ (représentation 3D)

Analogie : partition musicale

A musical score for piano in G major, 3/4 time, with a tempo of 60. The score is written on a single staff with a treble clef. The lyrics are "La - La Li - La Laa". Above the staff, there are annotations: "Domin7" above the first measure, "FaΔ" above the second measure, and "Légèrement" above the third measure. The first measure starts with a dynamic marking of *mf*. The score includes various musical notations such as eighth notes, quarter notes, and rests.

Fenêtre glissante sur la TF



Idée

Analyse de Fourier sur tranches temporelles du signal (supposées localement stationnaires) :

$$\text{fenêtre glissante } h(t - \tau)$$

On obtient :

Transformée de Fourier court-terme

$$S_x(\tau, f) = \int x(t)h^*(t - \tau)e^{-2j\pi ft} dt$$

(**STFT** : Short-Time Fourier Transform)

Le paramètre τ permet d'analyser (spectralement) l'information à tous les instants.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme
Mono-résolution

Onделettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Choix de la fenêtre



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

- La notion de fréquence f dépend ici du **choix** de la fenêtre analysante $h(t)$ et de sa **longueur**.
- $h(t)$ = rectangle (mauvaise localisation fréquentielle), gaussienne (meilleure localisation temps-fréquence : Gabor, 1946), ...
- en temps-discret : Bartlett, Hamming, Hanning, Blackman, Chebyshev, Kaiser (suivant critère de localisation fréquentielle : lobes secondaires, equiripples, etc.)
Ici la fenêtre est « sautante » (τ est discrétisé)

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme
Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Décomposition sur les fonctions de base



- On peut interpréter la STFT comme des **produits scalaires** :

$$S_x(t, f) = \langle x(t) | h(t - \tau) e^{2j\pi ft} \rangle$$

contre des **fonctions de base**.

- Les fonctions de base sont des fenêtres modulées (ex : Gabor). « Atomes temps-fréquence »
- Par Parseval :

$$S_x(t, f) = \langle X(\nu) | H(\nu - f) e^{-2j\pi(\nu - f)\tau} \rangle$$

fonctions de base en fréquence

- L'analyse temps-fréquence est aussi une analyse fréquence-temps

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Illustration

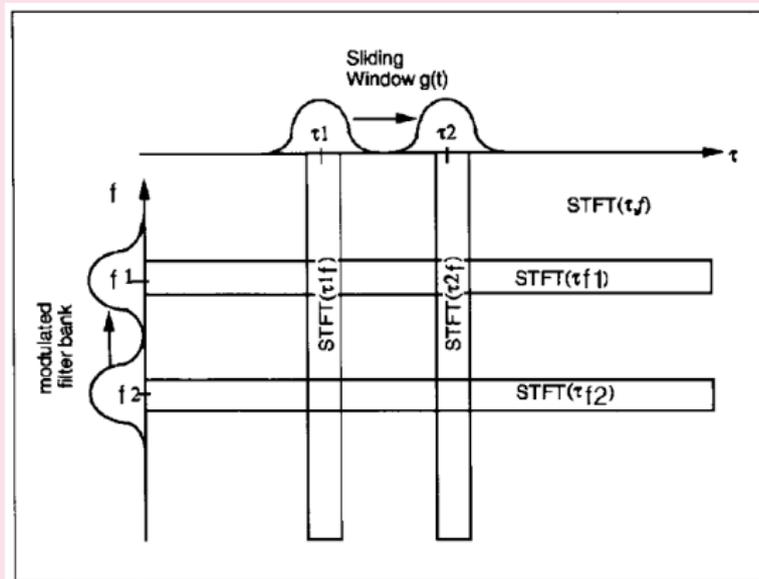


Fig. 1. Time-frequency plane corresponding to the Short-Time Fourier Transform. It can be seen either as a succession of Fourier Transforms of a windowed segment of the signal (vertical stripes) or as a modulated analysis filter bank (horizontal stripes).

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Dualité ligne/colonne



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Sur les lignes (pour chaque f) :

$$S_x(t, f) = \langle x(t) | h(t - \tau) e^{2j\pi f t} \rangle$$

- Sur les colonnes (pour chaque t) :

$$S_x(t, f) = e^{2j\pi f t} \cdot \text{T.F.}^{-1} \text{ de } X(\nu) H^*(\nu - f)$$

Filtrage avec réponses fréquentielles $H^*(\nu - f)$

- Bancs de filtres uniforme (largeur de bande Δf constante)

Groupe de Weyl-Heisenberg



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- **Groupe de translation/modulation** de Weyl-Heisenberg :

$$(t, \nu) \mapsto (t - \tau, \nu - f)$$

- Action (à gauche) sur la fenêtre analysante :

$$h_{\tau, f}(t) = h(t - \tau)e^{2j\pi ft}$$

$$H_{\tau, f}(\nu) = H(\nu - f)e^{-2j\pi(\nu - f)\tau}$$

- Mesure (de Haar) invariante par le groupe :

$$d(t, f) = dt df$$

- Relation avec les états cohérents de la Mécanique Quantique...

Résolution de l'identité



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Orthonormalité temps-fréquence

$$\int \int h_{t,f}(\tau) h_{t,f}^*(u) d(t, f) = \delta(u - \tau)$$

On dit aussi « fermeture » ou « résolution de l'identité »

Démonstration.

$$\int \int h(\tau - t) h^*(u - t) e^{-2j\pi f(u - \tau)} dt df = E_h \cdot \delta(u - \tau)$$

OK pour une fenêtre **admissible** (d'énergie finie) normalisée ($E_h = 1$) □

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Reconstruction du signal



Par résolution de l'identité dans l'expression

$$\int \int S_x(t, f) h_{t,f}(\tau) d(t, f) = \int \int \int x(u) h_{t,f}^*(u) h_{t,f}(\tau) d(t, f) du$$

on obtient

$$x(\tau) = \int \int S_x(t, f) h_{t,f}(\tau) d(t, f)$$

(reconstruction du signal par sommation des projections)

Inversibilité de la STFT

$$x(\tau) = \int \int S_x(t, f) h(t - \tau) e^{-2j\pi f t} dt df$$

Possibilité de modélisation temps-fréquence par STFT
(squelette...)

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Noyau reproduisant



- La résolution de l'identité s'écrit

$$\int \int h_{t,f}(\tau) h_{t,f}^*(u) d(t, f) = \delta(u - \tau)$$

- Notion duale : **Noyau reproduisant** :

$$K(t, f, u, \nu) = \int h_{t,f}(\tau) h_{u,\nu}^*(\tau) d\tau$$

- C'est la transformée de l'atome temps-fréquence analysé par lui-même
- Explication du terme « Noyau reproduisant » :

$$S_x(u, \nu) = \int \int K(t, f, u, \nu) S_x(t, f) d(t, f)$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Spectrogramme



Définition

$$\text{Spectrogramme : } |S_x(t, f)|^2$$

C'est une **distribution d'énergie temps-fréquence** :

Conservation de l'énergie

$$E = \int \int |S_x(t, f)|^2 dt df$$

Démonstration.

L'intégrale est

$$\int x(\tau) \int x^*(u) \int \int h_{t,f}(\tau) h_{t,f}^*(u) d(t, f) d\tau du$$

où par résolution de l'identité, l'intégrale en (t, f) vaut $\delta(u - \tau)$. □

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Onделettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Généralisation au produit scalaire



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Formule de type Parseval :

$$\langle x|y \rangle = \int \int S_x(t, f) S_y^*(t, f) dt df$$

Démonstration.

Même preuve que pour $\langle x|x \rangle = \|x\|^2$.



Analyse Mono-résolution



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Pourquoi Mono-résolution ?

Parce que les fonctions de base $h(t - \tau)e^{2j\pi ft}$ sont toutes de même résolutions $\Delta t, \Delta f$ (vérifiant l'inégalité d'incertitude)

Exemples

- $x(t) = \delta(t - t_0)$ donne $|S_x(t, f)|^2 = |h(t_0 - t)|^2$
- $x(t) = e^{2j\pi f_0 t}$ donne $|S_x(t, f)|^2 = |H(f_0 - f)|^2$
- Pour « voir » des zones oscillatoires (stationnaires), prendre une fenêtre longue.
- Pour « voir » des zones transitoires (non stationnaires), recommencer toute l'analyse avec une fenêtre courte.

Illustration

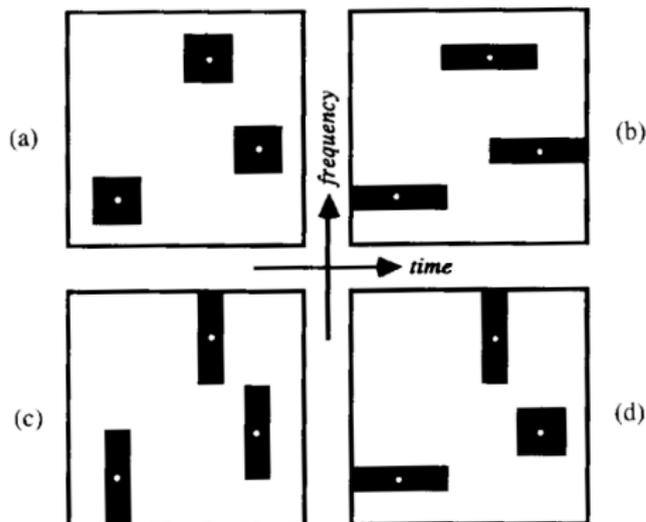


Fig. 1. Compared time-frequency resolution of spectrograms and scalograms. (a) Spectrogram with window neither short nor long; (b) Spectrogram with long window; (c) Spectrogram with short window. (d) Scalograms.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Fenêtrage

Décomposition sur
des fonctions de base

Groupe de
transformations

Résolution de
l'identité

Spectrogramme

Mono-résolution

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Pour une large classe de signaux réels, les zones d'énergie sont surtout « non stationnaires » sur des périodes courtes à haute fréquence.
- D'où l'idée d'une analyse **multirésolution** :
 - Δt petit (Δf grand) dans les fréquences hautes
 - Δf petit (Δt grand) dans les fréquences basses

Groupe affine



- On suit la même démarche que pour la STFT, mais pour un autre groupe de transformations :
- **Groupe affine** $ax + b$ de translation/dilatation
- Action sur un $h(t)$

$$h_{\tau,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$$

(le facteur $1/\sqrt{a}$ sert à normaliser l'énergie)

- Dilatation si $a > 1$
- Contraction si $a < 1$
- Mesure invariante (à gauche) par le groupe :

$$d(t, a) = \frac{dt da}{a^2}$$

- Relation avec les états cohérents affines de la MécaQ

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Décomposition sur les ondelettes



Les $h_{\tau,a}(t)$ sont utilisées comme fonctions de base, appelées « **Ondelettes** »

Transformée en ondelettes

$$C_x(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int x(t) h^* \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

(**CWT** : continuous wavelet transform)

- La CWT forme des produits scalaires contre les fonctions de base ondelettes

$$C_x(\tau, a) = \langle x(t) | h_{\tau,a}(t) \rangle$$

- Les ondelettes sont les « Atomes temps-échelle » (τ, a)

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Pourquoi multi-résolution ?

Parce que les ondelettes sont de résolutions différentes $\Delta t, \Delta f$
(avec inégalité d'incertitude) :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t - \tau}{a}\right) \stackrel{\text{T.F.}}{\rightleftharpoons} \sqrt{a} H(af) e^{-2j\pi f\tau}$$

- Δt petit (Δf grand) dans les échelles a faibles, et
- Δf petit (Δt grand) dans les échelles a hautes.

Illustration

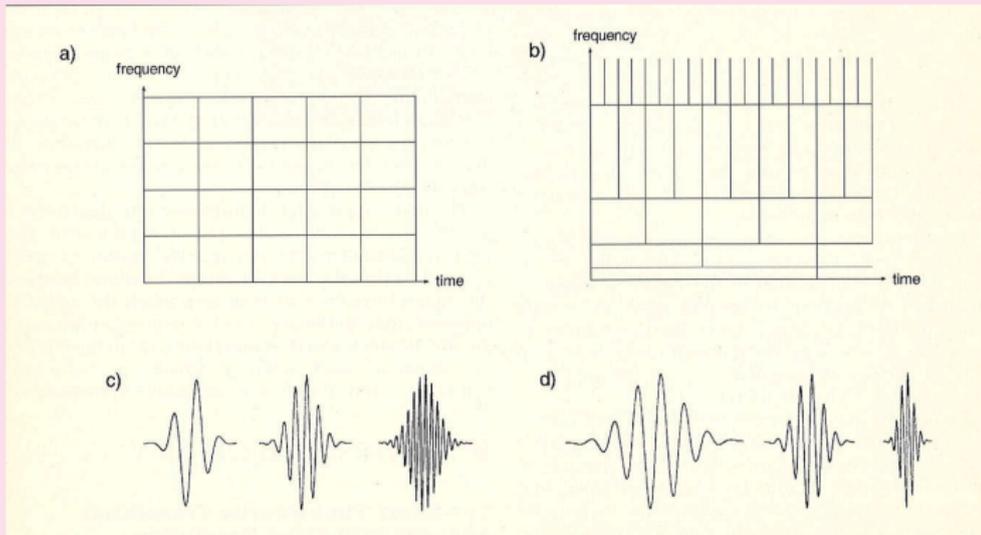


Fig. 2. Basis functions and time-frequency resolution of the Short-Time Fourier Transform (STFT) and the Wavelet Transform (WT). The tiles represent the essential concentration in the time-frequency plane of a given basis function. (a) Coverage of the time-frequency plane for the STFT, (b) for the WT. (c) Corresponding basis functions for the STFT, (d) for the WT ("wavelets").

Calcul en colonnes

Par Parseval :

$$C_x(\tau, a) = \langle X(\nu) | H_{\tau, a}(\nu) \rangle = \sqrt{a} \text{T.F.}^{-1} \text{ de } X(\nu) H^*(a\nu)$$

Bancs de filtres à Q-constant (réponses fréquentielles $H^*(a\nu)$)

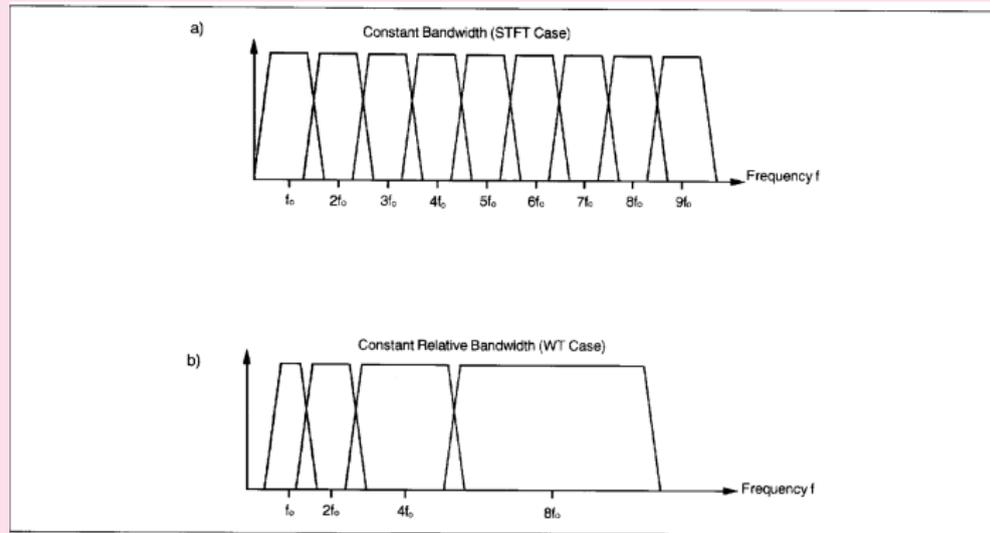


Fig. 3. Division of the frequency domain (a) for the STFT (uniform coverage) and (b) for the WT (logarithmic coverage).

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Résolution de l'identité



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Orthonormalité temps-échelle

$$\int \int h_{t,a}(\tau) h_{t,a}^*(u) d(t, a) = \delta(u - \tau)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int \int h\left(\frac{\tau-t}{a}\right) h^*\left(\frac{u-t}{a}\right) \frac{dt da}{a^2} \\ &= a \int \int H(a\nu) H^*(a\nu) e^{-2j\pi\nu(\tau-u)} d\nu \frac{da}{a^2} \\ &= A_h \cdot \delta(u - \tau) \end{aligned}$$

OK si l'ondelette est « admissible » : $A_h = 1$



Ondelette admissible



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Ondelette admissible

$$A_h = \int \frac{|H(\nu)|^2}{|\nu|} d\nu < +\infty$$

(normalisée à $A_h = 1$).

- Une ondelette admissible doit être « passe-bande » :
- de valeur moyenne nulle $\int h(t) dt = 0$ (d'où le terme « **ondelette** »)
- de densité spectrale d'énergie $\ll \frac{1}{|\nu|}$ à l'infini.

Ondelette admissible (suite)



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Exemples d'ondelettes (admissibles)

- Ondelette de Morlet-Gabor : gaussienne modulée

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} e^{-2j\pi f_0 t}$$

- « Chapeau mexicain » (dérivée seconde de gaussienne)

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(1 - \frac{t^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Reconstruction du signal



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Grâce à la résolution de l'identité :

Reconstruction par sommation des projections :

$$x(\tau) = \int \int C_x(t, a) h_{t,a}(\tau) d(t, a)$$

Inversibilité de la CWT

$$x(\tau) = \int \int C_x(t, a) \frac{1}{\sqrt{a}} h\left(\frac{t - \tau}{a}\right) \frac{dtda}{a^2}$$

Possibilité de modélisation temps-échelle par CWT (squelette...)

Noyau reproduisant



- La résolution de l'identité s'écrit

$$\int \int h_{t,a}(\tau) h_{t,a}^*(u) d(t, a) = \delta(u - \tau)$$

- Notion duale : **Noyau reproduisant** :

$$K(t, a, u, \alpha) = \int h_{t,a}(\tau) h_{u,\alpha}^*(\tau) d\tau$$

- C'est la transformée de l'atome temps-échelle analysé par lui-même
- Explication du terme « Noyau reproduisant » :

$$C_x(u, \alpha) = \int \int K(t, a, u, \alpha) C_x(t, a) d(t, a)$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Scalogramme



Définition

$$\text{Scalogramme : } |C_x(t, a)|^2$$

C'est une **distribution d'énergie temps-échelle** :

Conservation de l'énergie

$$E = \int \int |C_x(t, a)|^2 \frac{dt da}{a^2}$$

Démonstration.

L'intégrale est

$$\int x(\tau) \int x^*(u) \int \int h_{t,a}(\tau) h_{t,a}^*(u) d(t, a) d\tau du$$

où par résolution de l'identité, l'intégrale en (t, a) vaut $\delta(u - \tau)$. □

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Généralisation au produit scalaire



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Formule de type Parseval :

$$\langle x|y \rangle = \int \int C_x(t, a) C_y^*(t, a) \frac{dt da}{a^2}$$

Démonstration.

Même preuve que pour $\langle x|x \rangle = \|x\|^2$.



Quel lien entre échelle et fréquence ?



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Soit f_0 la fréquence caractéristique de l'« ondelette-mère » $h(t)$ (ex : ondelette de Morlet)
- Les autres ondelettes $\frac{1}{\sqrt{a}}h\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$ oscillent à la fréquence $f = f_0/a$
- D'où l'identification

$$a \approx \frac{f_0}{f}$$

- Axe (logarithmique) des échelles pointant vers le bas

Calcul par colonne (suite)

Rappel $C_x(\tau, a) = \sqrt{a} \cdot \text{T.F.}^{-1}$ de $X(\nu)H^*(a\nu)$
(filtrage avec réponses fréquentielles $H^*(a\nu)$)

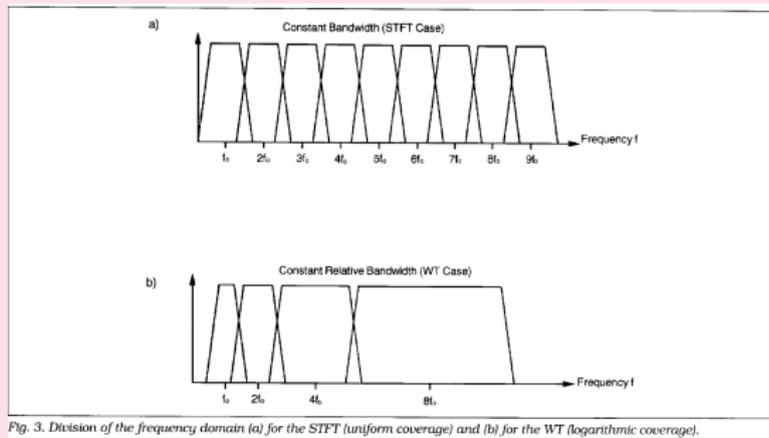


Fig. 3. Division of the frequency domain (a) for the STFT (uniform coverage) and (b) for the WT (logarithmic coverage).

Par dilatation (paramètre a), $\frac{\Delta f}{f}$ est constant :
« Filtrage à Q constant » : Q est la surtension (fréquence centrale rapportée à la largeur de bande)

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Comparaison STFT-CWT

Une impulsion / 3 sinusoïdes

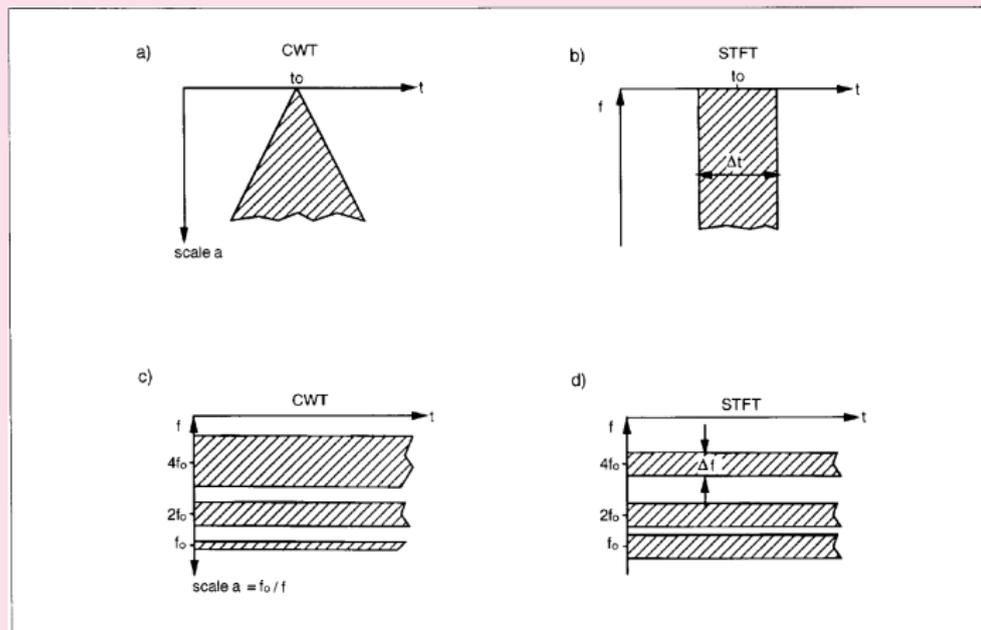


Fig. 4. Regions of influence of a Dirac pulse at $t=t_0$ (a) for the CWT and (b) for the STFT: as well as of three sinusoids (of frequencies f_0 , $2f_0$, $4f_0$) for (c) the CWT and (d) the STFT.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Deux impulsions et deux sinusoides (ensemble)

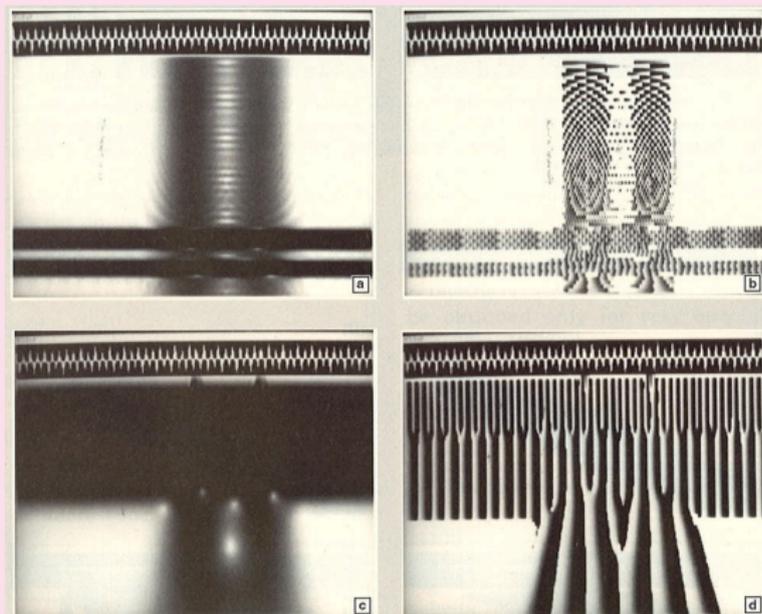


Fig. 5.1. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of two Dirac pulses and two sinusoids. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Trois sinusoïdes d'instants d'émission décalés

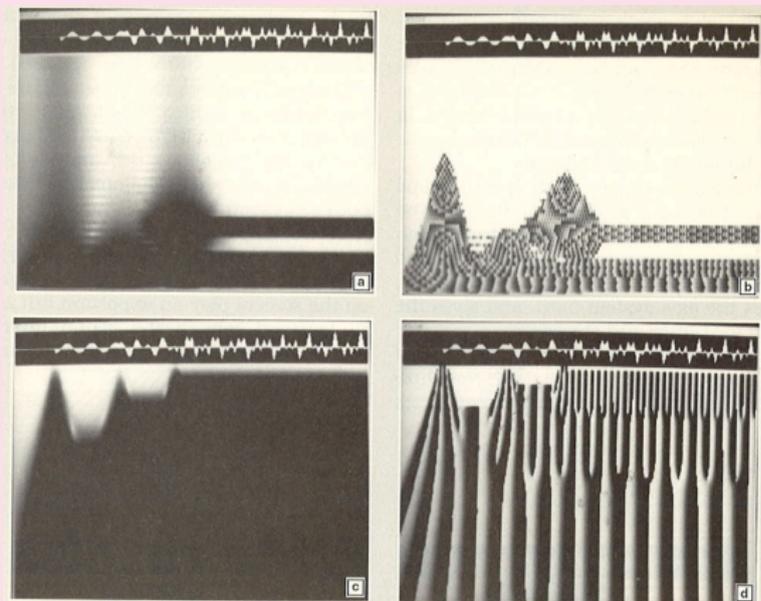


Fig. 5.2. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of three sinusoids with staggered starting times. The low frequency one comes first, followed by the medium and high frequency ones. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Un chirp (signal linéairement modulé en fréquence)

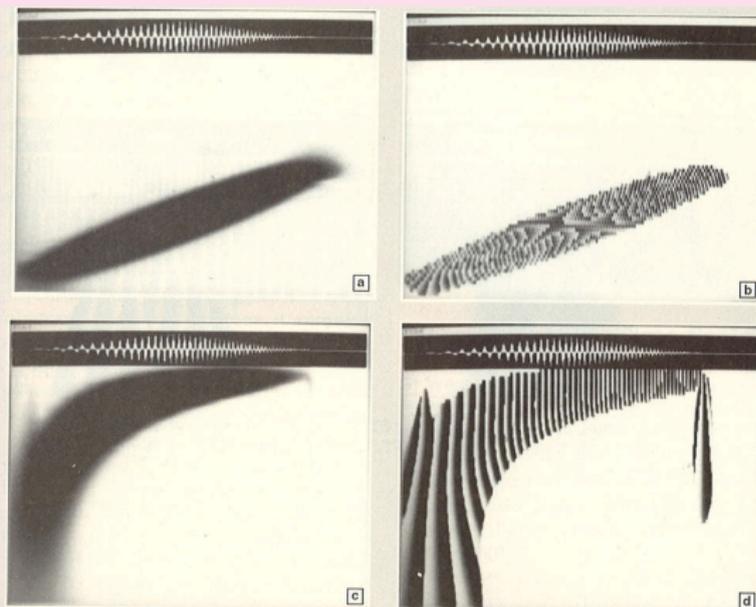


Fig. 5.3. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of a chirp signal. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

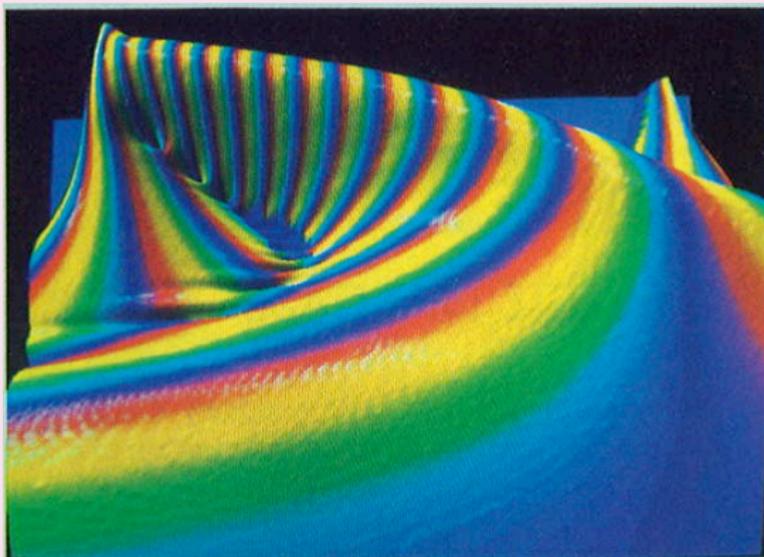
Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Scalo-phasagramme

Le même en scalo-phasagramme :



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

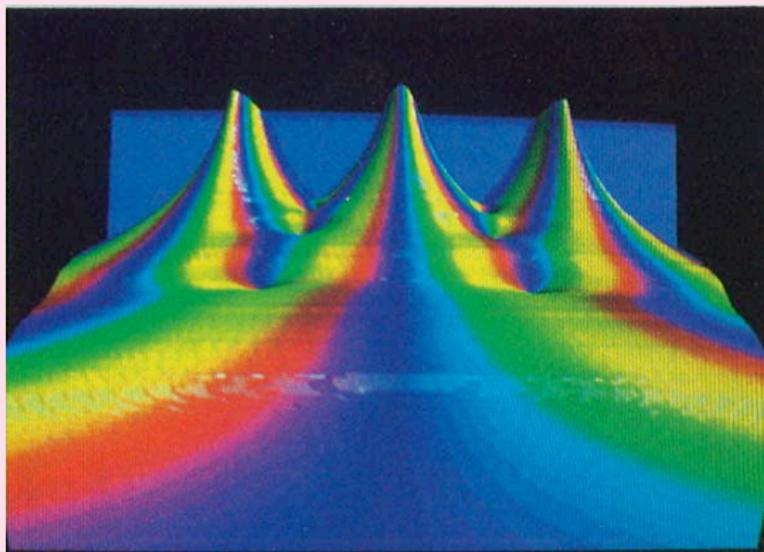
Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Scalo-phasagramme

Un signal “triangle” :



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

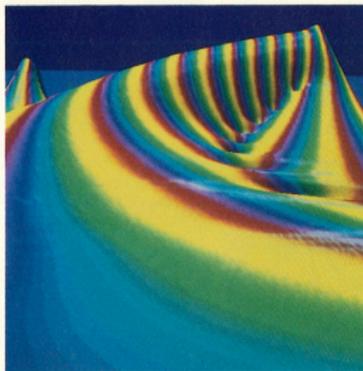
Bibliographie

Scalo-phasagramme

O. Rioul and M. Vetterli. Wavelets and Signal Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*, Oct. 1991, pp. 14–38.

Wavelets and Signal Processing

OLIVIER RIOUL and MARTIN VETTERLI



Wavelet theory provides a unified framework for a number of techniques which had been developed independently for various signal processing applications. For example, multiresolution signal processing, used in computer vision; subband coding, developed for speech and image compression; and wavelet series expansions, developed in applied mathematics, have been recently recognized as different views of a single theory.

In fact, wavelet theory covers quite a large area. It treats both the continuous and the discrete-time cases. It provides very general techniques that can be applied to many tasks



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Comparaison STFT-CWT (module et phase)

Un signal de parole :

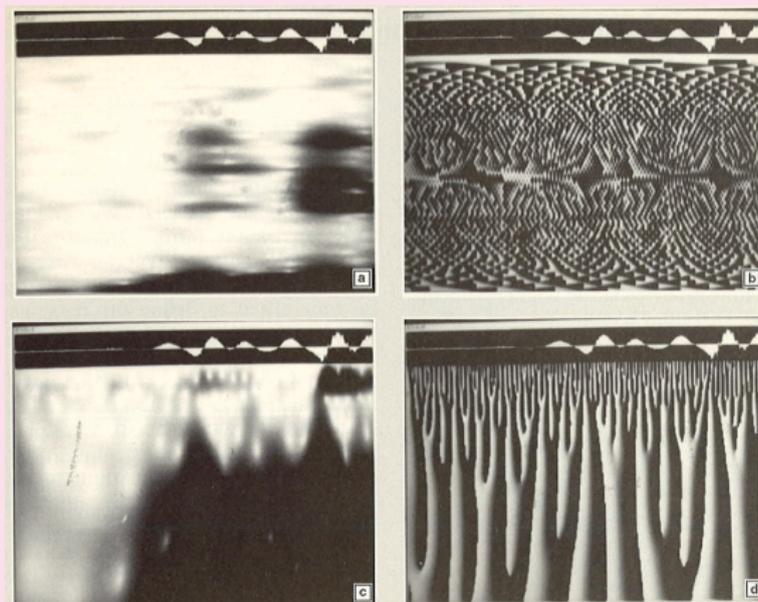


Fig. 5.4. Spectrogram and scalogram for the STFT and CWT analysis of a segment of speech, including onset of voicing. (a) Magnitude of the STFT. (b) Phase of the STFT. (c) Amplitude of the WT. (d) Phase of the WT.

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Décomposition sur
des ondelettes

Multirésolution

Reconstruction

Scalogramme

Echelle et fréquence

Exemples d'analyse
de signaux

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Distributions énergétiques



- Généralisation de la notion de **distribution énergétique** du signal dans le plan temps-fréquence (ou temps-échelle).
- Temps-fréquence : Définir $T_x(t, f)$ tel que

$$\int T_x(t, f) d(t, f) = E_x = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

(de même en temps-échelle avec la mesure $d(t, a)$)

- Cas particuliers :
 - Spectrogramme $T_x(t, f) = |S_x(t, f)|^2$
 - Scalogramme $T_x(t, a) = |C_x(t, a)|^2$
- Généralisation : produit scalaire (propriété de **Moyal**)

$$\iint T_x(t, f) T_y(t, f) dt df = \left| \int x(t) y^*(t) dt \right|^2$$

Analyse

Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

Transformées bilinéaires



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- On cherche naturellement une **forme quadratique (bilinéaire)** du signal :

$$T_x(t, f) = \int \int k(u, v, t, f) x(u) x^*(v) du dv$$

ou

$$T_x(t, f) = \int \int K(\nu, \mu, t, f) X(\nu) X^*(\mu) d\nu d\mu$$

avec un **noyau** k (ou K).

- Noter que $x(u)x^*(v)$ est invariante par transformation de phase : $x(t) \mapsto x(t)e^{j\phi}$. **On ne peut pas ici exploiter l'information sur la phase.**

Covariance par le groupe



Principe fondamental :

Covariance par rapport au groupe

Le principe de covariance impose une forme particulière du noyau.

Exemples

- Groupe de Weyl-Heisenberg (de translation temps-fréquence) :

$$y(t) = x(t - t_0)e^{-2j\pi f_0 t} \implies T_y(t, f) = T_x(t - t_0; f - f_0)$$

- Groupe affine (de translation-dilatation)

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0}} x\left(\frac{t - t_0}{a_0}\right) \implies T_y(t, a) = T_x\left(\frac{t - t_0}{a_0}; \frac{a}{a_0}\right)$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance
Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

Classe de Cohen



- Par covariance temps-fréquence on obtient la forme générale de la **Classe de Cohen** (1966) :

$$T_x(t, f) = \int \int N(\tau - t, \nu - f) W_x(\tau, \nu) d\tau d\nu$$

- C'est une convolution temps-fréquence (2D) d'un **noyau** N avec la **distribution de Wigner-Ville** :

$$W_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-2j\pi f\tau} d\tau$$

- Note : on retrouve le spectrogramme en prenant $N = W_h$. En effet, par la formule de Moyal :

$$\int \int W_x(t, f) W_h(t - \tau, f - \nu) dt df = \left| \int x(t) h_{\tau, \nu}^*(t) dt \right|^2.$$

Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- Par covariance temps-échelle on obtient la forme générale de la **Classe affine** (Rioul-Flandrin, 1992) :

$$T_x(t, a) = \int \int N \left(\frac{\tau - t}{a}, a\nu \right) W_x(\tau, \nu) d\tau d\nu$$

- C'est une convolution temps-échelle (2D) d'un **noyau** N avec la même **distribution de Wigner-Ville**
- Note : on retrouve le scalogramme en prenant $N = W_h$

Propriété attendue : Marginales



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance
Classes générales

**Autres propriétés
attendues**

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

On retrouve les **densités temporelle et spectrale d'énergie** par marginalisation temps ou fréquence :

$$\int T_x(t, f) df = |x(t)|^2$$

$$\int T_x(t, f) dt = |X(f)|^2$$

Propriété attendue : Moments



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

**Autres propriétés
attendues**

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

On retrouve la **fréquence instantanée** et le **retard de groupe** comme les moments d'ordre 1 (temps ou fréquence) : Fréquence

instantanée :

$$f_x(t) = \frac{\int f T_x(t, f) df}{\int T_x(t, f) df}$$

Retard de groupe :

$$t_x(f) = \frac{\int t T_x(t, f) dt}{\int T_x(t, f) dt}$$

(se généralise aux moments d'ordre supérieur)

Propriété attendue : Supports



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance
Classes générales

**Autres propriétés
attendues**

Distribution de
Wigner-Ville
Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- Pour un signal de durée finie T , sa représentation bilinéaire a le **même support temporel**.
- Pour un signal de bande limitée B , sa représentation bilinéaire a le **même support fréquentiel**.
- (en contradiction apparente avec le principe d'incertitude : voir interférences plus loin)

La solution : Distribution de Wigner-Ville



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

Bonne nouvelle [Wigner (1932) et Ville (1948)] :

La distribution de Wigner-Ville :

$$W_x(t, f) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{-2j\pi f\tau} d\tau$$

a toutes les propriétés ci-dessus !

En plus, elle est inversible à une amplitude/phase près :

$$x(t) = \frac{1}{x^*(0)} \int W_x\left(\frac{t}{2}, f\right) e^{2j\pi ft} df$$

Preuve : TF inverse pour $\tau = t/2$.

Fonction d'ambiguïté



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

**Distribution de
Wigner-Ville**

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- Transformée duale de Wigner-Ville : **Fonction d'ambiguïté**

$$A_x(f, \tau) = \int x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)e^{2j\pi ft} dt$$

- Utile pour la discrimination/séparation temps-fréquence.
- Exemple : Radar pour des cibles proches en distance (retard) et en vitesse (fréquence Doppler)

Mauvaise nouvelle :

La distribution **énergétique** temps-fréquence $W_x(t, f)$ est réelle mais **pas toujours positive**!!

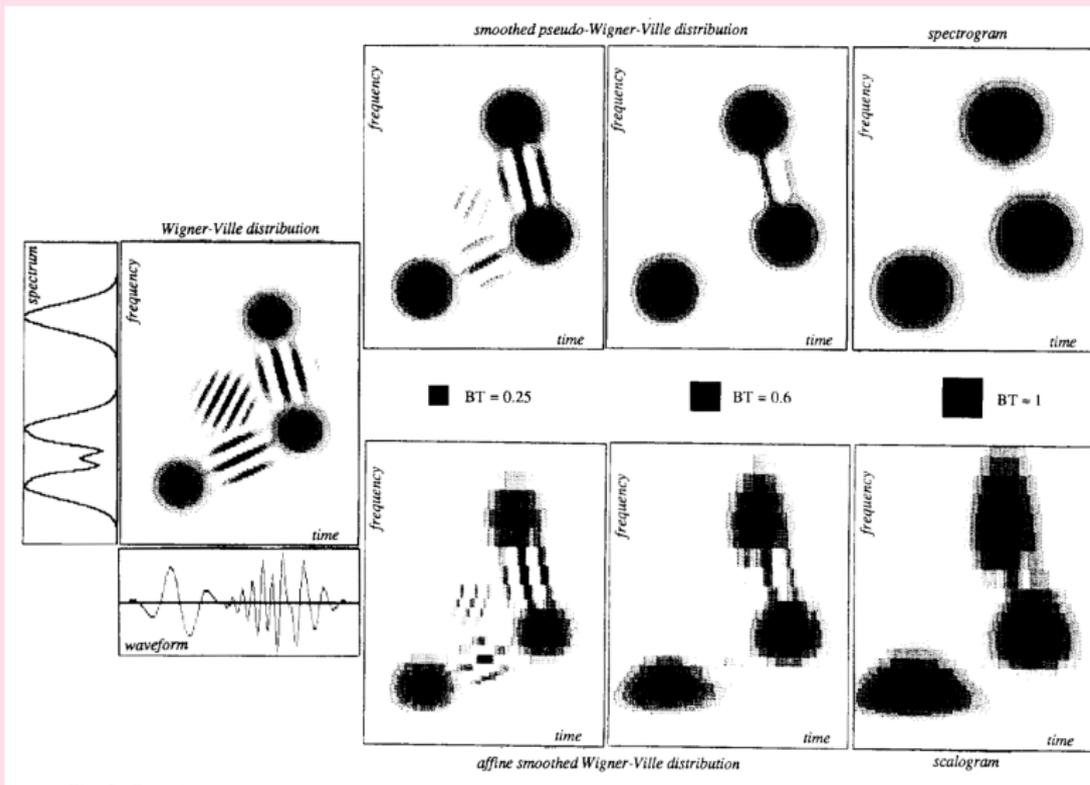
Très mauvaise nouvelle :

Si $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, alors (**termes d'interférence**)

$$W_x(t, f) = W_{x_1}(t, f) + W_{x_2}(t, f) + W_{x_1, x_2}(t, f) + W_{x_2, x_1}(t, f)$$

- **Très gênant** pour l'interprétation (explique la non-positivité)
- N composantes donne une représentation temps-fréquence de N termes + $N(N - 1)/2$ termes d'interférences!
- D'où l'idée de **lisser** Wigner-Wille (par convolution) pour réduire les interférences :

Wigner-Ville lissée



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

Noyaux de lissage



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- **Wigner-Ville pseudo-lissée** (pseudo signifie lissage séparable $t : f$ ou $t : a$)
- Exemple de lissage non séparable temps-fréquence pour réduire les interférences : **Choi-Williams** (1989) :
 - Noyau gaussien en le produit des variables temps-fréquence :

$$N(t, f) = (\text{TF}^2\text{D})^{-1} \text{ de } e^{-(\pi\nu\tau/\sigma)^2/2}$$

- Intérêt : Réduction d'interférence en conservant les propriétés de marginales et de moments.
- Méthodes de lissage calculées en fonction du signal (méthodes adaptatives non-paramétriques)
Exemple : OK distribution (Optimal Kernel, **Baraniuk**, 1993)

Autres choix de noyaux



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

- Principe : **On fait de l'analyse sur l'outil d'analyse !**
- Chaque propriété voulue se traduit sur le noyau N
- Un ensemble de propriétés définit une classe de solutions $T_x(t, f)$ (si elle existe !)

Impossibilités

- Il est impossible de vérifier à la fois positivité et marginales (ex : STFT)
- Il est impossible de vérifier à la fois positivité et Moyal (ex : Wigner-Ville)

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

Exemple de distribution temps-fréquence : Rihaczek



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- Distribution de **Rihaczek** (1968)

$$T_x(t, f) = x(t)X^*(f)e^{-2j\pi ft}$$

- Intérêt : très simple. On en prend souvent la partie réelle (Ackroyd)
- Distribution s -Wigner : Transition douce entre Wigner-Ville et Rihaczek par un paramètre $|s| < \frac{1}{2}$:

$$T_x(t, f) = \int x\left(t + \left(s - \frac{1}{2}\right)\tau\right)x^*\left(t - \left(s + \frac{1}{2}\right)\tau\right)e^{-2j\pi f\tau} d\tau$$

Exemple de distribution temps-fréquence : Page



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Covariance

Classes générales

Autres propriétés
attendues

Distribution de
Wigner-Ville

Choix de noyaux

Boîtes à outils

Bibliographie

- Distribution de **Page-Levin** (1950)

$$T_x(t, f) = \frac{\partial}{\partial t} \left| \int_{-\infty}^t x(\tau) e^{-2j\pi f\tau} d\tau \right|^2$$

- Intérêt : Causalité

Ce ne sont que quelques exemples !

cf. [Flandrin93] pour une liste exhaustive de distributions

Outils standard MATLAB



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- **Signal Processing Toolbox** : `specgram` (spectrogram)
- **Wavelet Toolbox** :
 - Centrale Lyon, Marne-la-Vallée, Paris V et Paris Sud
 - 1D and 2D orthogonal wavelets, paquets, denoising...
 - `cwt` (continuous wavelet transform)

Outils standford WaveLab



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

- **Wavelab** : www-stat.stanford.edu/~wavelab (Donoho, Williams, Mallat)
- Très varié (pointu) sur l'analyse par ondelettes.
- Squelettes, maxima, packets, interpolation, etc.
- Continuous tools : CWT
- Wigner tools : Spectrogram, WVDist, TFDist

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

- Bibliothèque **SIMPA** du GDR-PRC ISIS
gdr-isis.org/Applications/
- Boîte à Outils **Temps-Echelle** (O. Rioul Télécom ParisTech, J. C. Pesquet LSS, H. Krim MIT)
 - Ondelettes (bi)-orthogonales, FWT, régularité
 - Paquets d'ondelettes
- Boîte à Outils **Temps-Fréquence** (P. Flandrin ENS Lyon etc.)
 - tftb.nongnu.org 1996
 - Très complet sur les transformations bilinéaires.
 - Fréquence instantanée, retard de groupe, Mellin,...
 - Classe de Cohen : Spectrogramme, Wigner-Ville, Choi-Williams, Rihaczek, *etc, etc!*
 - Classe affine : Wigner-Ville lissé affine, scalogramme, etc.

Un peu de lecture...



P. Flandrin.

Temps-fréquence.

Hermès, 1993.



M. Akay, ed.

Time-Frequency and Wavelets in Biomedical Signal Processing.

IEEE Press, 1998.



O. Rioul and M. Vetterli.

Wavelets and Signal Processing.

IEEE Signal Processing Magazine, Oct. 1991, pp. 14–38.



O. Rioul and P. Flandrin.

Time-Scale Energy Distributions : A General Class Extending Wavelet Transforms.

IEEE Trans. on Signal Processin, July 1992,
40(7) :1746–1757.



Analyse
Temps-Fréquence
et Temps-Echelle

O. Rioul

Fréquence

Résolution
temps-fréquence

Pourquoi
l'analyse
temps-fréquence ?

T.F. Court Terme

Ondelettes

Transformations
bilinéaires

Boîtes à outils

Bibliographie

Mes articles « ondelettes et temps-échelle » sont disponibles en format PDF sur ma page Web :

<http://perso.telecom-paristech.fr/rioul/researchold.html>