Compétences minimales en probabilités pour des ingénieurs en fin de formation

Conventions :

En adoptant une taxonomie simplifiée, on distingue ci-après quatre niveaux de savoirs :

- Initiation = I
- Savoir-faire = SF
- Maîtrise = M
- Appropriation, développement = A

Au niveau Initiation, l'élève sait résoudre une question par la méthode imposée explicitement ou implicitement par l'énoncé.

Au niveau Savoir-Faire, l'élève sait résoudre une question en choisissant la méthode la plus adaptée.

Au niveau Maîtrise, les questions d'évaluation sont plus ouvertes et les réponses nécessitent l'emploi de plusieurs étapes élémentaires.

Si le niveau A relève plus d'une formation doctorale, nous avons indiqué son existence pour montrer que le niveau M n'est pas l'ultime degré de connaissance mais bien un niveau de maîtrise.

Pour chaque ensemble de connaissances, nous avons indiqué un niveau minimal qui nous semble devoir être celui que doivent atteindre tous les élèves ingénieurs et un niveau idéal pour ceux dont la formation nécessite de plus solides bases en probabilités. Aux quatre niveaux précédents, nous avons donc ajouté le stade NV, pour non-vu.
Lorsqu'une seule indication est donnée dans la colonne afférente, c'est que le niveau d'exigence est le même pour tout le monde.

Outils méthodologiques généraux :

- On demande que l'élève ait acquis avant ces enseignements le niveau N2 en calcul de séries numériques et d'intégrales unidimensionnelles.

Compétence n°1 : formaliser mathématiquement un phénomène aléatoire

Dans tous les domaines d’activité d’un ingénieur, les probabilités constituent un outil essentiel de la représentation formelle du réel. Elles permettent de formaliser les parties inconnues ou mal connues d’un phénomène, quelle que soit sa nature. Par ailleurs, les probabilités ne sauraient être disjointes des statistiques (voir fiche correspondante), qui constituent le moyen par excellence d’analyser quantitativement le monde réel.

Dans le développement la compétence n°1, on s’attachera à développer la capacité à passer d’une situation concrète énoncée en langage naturel à une description formelle développée dans le langage des probabilités.

Enfin, il va de soi que cette aptitude à la modélisation n’est en rien spécifique aux probabilités. Cet aspect doit être développé tout le long de la formation d’ingénieur et dans tous les autres enseignements qui s’y prêtent.

Compétences	**Commentaires/limites**	**Connaissances**	**D°. Ex.**
Construire le cadre mathématique pour la description d'un phénomène aléatoire en termes d'événements et de variables aléatoires.	Cadre formel des probabilités. On introduira les concepts dans le cadre des espaces d’événements discrets. On insistera ensuite sur l’apport de la formalisation abstraite pour les situations « mixtes » (discret-continu).	Espace probabilisé, variables aléatoires, probabilité, lois. Être capable d'écrire formellement la question à résoudre.	SF
Savoir choisir la structure de dépendance pertinente associée à un phénomène aléatoire.	Première approche de la représentation de la dépendance. Pas de processus aléatoire.	Indépendance, probabilité conditionnelle, coefficient de corrélation.	SF
	Deuxième approche de la représentation de la dépendance.	Loi conditionnelle, espérance conditionnelle	NV à SF
	Introduction de la notion de temps dans la modélisation. Augmentation de l'espace d'état pour garantir le caractère markovien du modèle.	Chaînes de Markov	NV à SF

Compétence n°2 : résoudre un problème formalisé en termes relevant de la théorie des probabilités

Une fois le problème réel formalisé, il reste à le résoudre, c’est-à-dire lui trouver une solution qui permette des évaluations quantitatives. Il importe de remarquer que la connaissance des outils théoriques conditionne la richesse des modèles que le futur ingénieur sera susceptible d’invoquer au cours de sa carrière. On ne saurait donc faire l’économie d’une solide formation théorique.

<table>
<tr><th>Compétences</th><th>Commentaires/limites</th><th>Connaissances</th><th>D° Ex.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Calculer Créé le 09/04/08 09:56des probabilités d’événements élémentaires dans le cadre des probabilités discrètes</td><td rowspan="2">Puisque le but est de se familiariser avec les méthodes et les lois usuelles, cette partie ne sera pas plus que les autres, prétexte à des exercices savants.</td><td>Méthodes usuelles de calculs de probabilité d'événements
-Dénombrements usuels : combinaison, arrangements, etc.
-Formule d'inclusion/exclusion
-Utilisation de l'indépendance et probabilité conditionnelle
-Fonction génératrice</td><td>M</td></tr>
<tr><td>Variables aléatoires discrètes
-Loi, loi jointe, loi marginale
-Espérance, variance, moments
-Indépendance
-Fonction génératrice</td><td>M</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Calculer des probabilités d’événements élémentaires dans le cadre des probabilités sur continuum</td><td rowspan="2">Puisque le but est de se familiariser avec les méthodes et les lois usuelles, cette partie ne sera pas plus que les autres, prétexte à des exercices savants.</td><td>Variables aléatoires réelles uni-dimensionnelles
-Fonction de répartition
-Densité
-Fonction caractéristique</td><td>M</td></tr>
<tr><td>Variables aléatoires vectorielles
- Loi jointe, loi marginale
-Indépendance
-Loi image</td><td>SF à M</td></tr>
</table>

Savoir mener à bien une résolution analytique d'un problème formalisé.	Insister sur la notion de loi et les différentes caractérisations d’un tel objet de manière à unifier les présentations des probabilités discrètes et continues.	-Définition générale et propriétés élémentaires d’une mesure -Thm de Kolmogorov -Intégration par rapport à une mesure quelconque : définition et principaux théorèmes. -Lien entre indépendance et mesure produit	NV à SF
Calculs approchés de probabilités	Être capable de calculer une moyenne sans nécessairement connaître les lois sous-jacentes. Le calcul des moments est une méthode qui permet d'avoir simplement des résultats partiels. À comparer aux calculs de lois et à rapprocher des théorèmes limites.	Calculs des moments de variables aléatoires : -Additivité de l'espérance -Additivité de la variance dans le cas indépendant -Utilisation d’outils analytiques -Inégalités de Bienaymé-Tchebychev, de Markov.	SF à M
	Pas de difficultés théoriques soulevées sur ces théorèmes.	-Loi des grands nombres -Théorème de la limite centrée	SF
	On mettra en évidence les difficultés numériques.	Construire et programmer une simulation d'un modèle aléatoire. Analyser la précision des résultats.	I à SF
Pouvoir représenter précisément les dépendances entre variables aléatoires.	Savoir calculer des lois conditionnelles, lois a priori et a posteriori pour les statistiques	-Loi conditionnelle -Espérance conditionnelle -Cas gaussien	NV à SF
	Calculer (analytiquement ou numériquement) la loi stationnaire et les principales caractéristiques d'une chaîne de Markov.	Chaînes de Markov à espaces d'états discrets -Propriétés structurelles des chaînes de Markov -Loi stationnaire Savoir classer les états.	NV à SF