



ESTIMATION PARAMÉTRIQUE

OLIVIER RIOUL

Spartacus Supérieur
Niveau Master
Collection Enseignement

Estimation paramétrique

OLIVIER RIOUL
2022

Spartacus
IDH

ISBN : 978-2-36693-122-8
© Spartacus-idh, Paris 2022

Table des matières

Liste des notations	3
Liste des exercices	5
Table des figures	7
Introduction	9
Plan du cours sur l'estimation statistique.	10
1 Modèle statistique	11
2 Conventions sur le modèle statistique.	21
3 Fréquentiste vs. bayésien : deux approches opposées	27
4 Estimation paramétrique et risque	33
5 Compromis biais-variance	41
6 Estimation non biaisée optimale	47
7 Score et information de Fisher	53
8 Borne de Cramér-Rao	59
9 Maximum de vraisemblance	73
10 Estimation linéaire	93
11 Moindres carrés	95
12 Le point de vue bayésien	105
13 Erreur quadratique moyenne minimale	111
14 Maximum a posteriori	121
15 Estimation bayésienne linéaire	139

Liste des notations

$\mathcal{B}(p)$	loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$
$\mathcal{B}(n, p)$	loi binomiale de longueur n et de paramètre $p \in [0, 1]$
$\mathcal{B}(\alpha, \beta)$	loi bêta de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
$B(\alpha, \beta)$	fonction bêta $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$
$\mathbb{B}(\hat{\theta})$	biais
$D(p q)$	divergence de Kullback-Leibler
$\mathbb{E}(\cdot)$	espérance
$\mathcal{E}(\lambda)$	loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (loi gamma $\Gamma(1, \lambda)$)
$\Gamma(\alpha)$	fonction Gamma
$\Gamma(\alpha, \beta)$	loi gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
$\Gamma^{-1}(\alpha, \beta)$	loi inverse gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.
J_{θ}	information de Fisher
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	loi normale (gaussienne) de moyenne μ et variance σ^2
$\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$	loi normale de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance \mathbf{C}
$\mathcal{P}(\lambda)$	loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
$\mathbb{P}(\cdot)$	(loi de) probabilité
$R(\hat{\theta})$	risque
$S_{\theta}(X)$	score
θ	paramètre
$\hat{\theta}$	estimateur
$\mathcal{U}[a, b]$	loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$
$\mathbb{V}(\hat{\theta})$	variance

4

$|\cdot|$ norme euclidienne sur \mathbb{R}^n

$\|\cdot\|$ norme euclidienne sur \mathbb{R}^N

$X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ convergence en loi (en distribution)

$X_N \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ convergence en probabilité

$X_N \rightarrow X$ *p.s.* convergence presque sûre

Liste des exercices

Un sondage	15
Le problème de la régression	17
Signal dans du bruit	19
Exemples de modèles dominés	25
Statistique suffisante, factorisation de Fisher	31
Estimateurs (in)admissibles	39
Avec ou sans biais	45
Théorème de Rao-Blackwell	49
Théorème de Lehmann-Scheffé.	51
Estimateurs efficaces	63
Bornes de Cramér-Rao généralisées	65
Non existence d'estimateurs optimaux.	67
Reparamétrisation et efficacité asymptotique	69
Pseudo-inverse et déconvolution	71
Non existence et non unicité du maximum de vraisemblance.	79
Consistance, biais et normalité asymptotiques et reparamétrisation	81
Estimateurs du maximum de vraisemblance	83
Performances asymptotiques de l'estimateur des moments	85
Divergence de Kullback-Leibler et consistance de l'estimateur du maximum de vraisemblance.	87
Normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance	91
Moindres carrés et équations normales	99
Estimation d'amplitude dans du bruit corrélé	101

Moindres carrés séquentiel, moindres carrés non linéaire	103
Règle de succession de Laplace-Bayes	107
A priori de Jeffreys	109
Loi de la variance totale.	115
A priori normal en estimation d'amplitude dans du bruit gaussien	117
A priori de Dirichlet et lissage additif de Laplace	119
Comparaison entre estimateurs MMSE, MAP et ML	127
Comparaison entre estimations fréquentiste et bayésienne	129
Inégalité de van Trees	131
Consistance de l'estimation bayésienne	133
Théorème de Bernstein-von Mises	135
Erreur absolue moyenne minimale	137
Moindres carrés moyens et équations de Wiener-Hopf	141
Comparaison entre estimateurs LMMSE et ML	143
Lissage et filtrage de Wiener, prédiction linéaire	145
Révision sur l'estimation fréquentiste	147
Révision sur l'estimation statistique	149

Table des figures

1.1	Sondage par communes lors du deuxième tour d'une élection présidentielle.	16
1.2	Régression non linéaire	18
1.3	Régression linéaire	18
1.4	Signal dans du bruit gaussien	20
2.1	Une densité binomiale d'ordre 10	26
3.1	Les fondateurs des écoles fréquentiste et bayésienne.	27
3.2	Réduction de dimensionnalité par statistique suffisante minimale.	32
4.1	Exemples de $MSE(\theta)$ d'estimateurs admissibles.	40
5.1	Biais et variance lors d'un tir sur cible.	46
6.1	Rao et Blackwell..	50
6.2	Lehmann et Scheffé.	52
8.1	Estimation efficace par la moyenne.	64
8.2	Fréchet, Darmois, Cramér et Rao.	66
8.3	MSE de deux estimateurs suivant la valeur du paramètre.	68
8.4	Estimation asymptotiquement efficace.	70
8.5	Principe de la déconvolution dans du bruit additif	72
9.1	Densités bilatérales exponentielle (en rouge) et χ^2 à un degré de liberté (en bleu).	80
9.2	Relations entre consistance et sans biais asymptotique.	82
9.3	Maximum de log-vraisemblance pour le modèle de Bernoulli.	84
9.4	Rappel sur la méthode δ	86
9.5	Kullback et Leibler..	89
9.6	Illustration d'une normalité asymptotique.	92

11.1	Projection orthogonale de l'observation sur un le sous-espace du modèle. . .	100
11.2	Illustration de l'estimation linéaire aux moindres carrés : on cherche la droite qui minimise la surface des carrés des erreurs.	102
11.3	Mémoire de Legendre sur la méthode des moindres quarrés, 1805.	104
12.1	Laplace et Bayes..	108
12.2	A priori uniforme vs. a priori de Jeffreys pour le modèle binaire.	110
13.1	Variances intra-classes et inter-classes pour deux valeurs de X (classes) et une variance de θ donnée.	116
13.2	Densités normales a priori et a posteriori..	118
13.3	Histogramme présentant des classes vides sans lissage de Laplace.	120
14.1	Comparaison entre MMSE, MAP et ML.	128
14.2	Effet d'une erreur de modèle a priori.	130
14.3	Harry Leslie Van Trees.	132
14.4	Joseph Leo Doob.	134
14.5	Bernstein et von Mises.	136
14.6	Médiane, moyenne et mode.	138
15.1	Wiener et Hopf.	142
15.2	Preuve du lemme d'inversion matriciel de Woodbury	144
15.3	Filtrage de Wiener pour débruiter un signal.	146
15.4	Flux de trafic entrant (en paquets mesurés) à un nœud d'un réseau en utilisant la distribution de Pareto pendant environ 500 secondes.	150