

Théorie des probabilités

© LAVOISIER, 2008

LAVOISIER
11, rue Lavoisier
75008 Paris

www.hermes-science.com
www.lavoisier.fr

ISBN 978-2-7462-1720-1
ISSN 1952-2401



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, d'une part, que les "copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective" et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, "toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite" (article L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Tous les noms de sociétés ou de produits cités dans cet ouvrage sont utilisés à des fins d'identification et sont des marques de leurs détenteurs respectifs.

Printed and bound in England by Antony Rowe Ltd, Chippenham, June 2008.

Théorie des probabilités

Olivier Rioul

hermes
Science
— publications —

Lavoisier

Direction éditoriale Bernard Dubuisson

COLLECTION SCIENCES ET TECHNOLOGIES
SOUS LA DIRECTION DE PIERRE-NOËL FAVENNEC

Préface

*Les plus importantes questions de la vie ne sont,
la plupart du temps, que des affaires de probabilité.*

Pierre-Simon, marquis de Laplace

... un *autre* livre de probabilités ?

L'esprit humain a horreur du désordre. Le déterminisme, conception selon laquelle la nature, et en particulier notre propre existence, sont déterminées (dans le passé ou dans l'avenir), ne fait que refléter le besoin de certitude des individus qui évoluent dans un environnement incertain. Le monde n'est pas régi par un mécanisme d'horlogerie, mais plutôt par un jeu de poker ! Pour l'appréhender, il faudra donc s'attaquer au problème de décrire le *hasard*. Mais qu'est-ce que le hasard ?

Depuis la nuit des temps, les hommes ont été fascinés par le hasard tel qu'il se manifeste dans un lancer de dés ou dans la météo pour le lendemain : un désordre insaisissable qui échappe à notre connaissance. Ainsi, le hasard représente tout simplement notre incompetence à cerner tous les facteurs naturels qui contribuent à l'état de notre environnement, dans un lieu et à un instant donnés.

Au siècle des lumières, des philosophes et mathématiciens, tel le marquis de Laplace, crurent que le désordre pouvait être soumis aux règles mathématiques : ils découvrirent ainsi les *lois du hasard*. La première conclusion fût époustouflante : bien que les événements se produisent de manière aléatoire, leur configuration moyenne est assujettie à certaines lois ! Le déterminisme se mêle du hasard !

2 Théorie des probabilités

Répondre à la question « qu'est-ce que le hasard ? », devient alors très difficile. Il faut distinguer le problème mathématique du problème physique du hasard. Le premier est d'ordre logique, le deuxième consiste à déterminer si les événements physiques obéissent aux critères mathématiques. Nous aurons beaucoup de mal à qualifier un événement d'« aléatoire » dans la mesure où l'on est incapable de définir mathématiquement le hasard. Peut-être le hasard est-il absolument *indéfinissable* ?

Cela semble paradoxal : comment est-il possible qu'il y ait autant de livres traitant le sujet sans définition rigoureuse du hasard ? Les mathématiciens ont réussi à contourner le problème en donnant une définition opérationnelle : la *probabilité* est ce qui obéit aux théorèmes que l'on déduit à son propos : la théorie ne commence qu'une fois assignées des probabilités aux différents événements. Comment cette assignation a-t-elle eu lieu ? On ne discutera jamais sur cette question, car cela remettrait en cause la problématique même de la définition du hasard !

Un grand nombre de manuels ont été rédigés dans ce domaine, en grande majorité ciblés sur l'aspect purement logique et mathématique de la théorie. On peut donc se demander : pourquoi un nouveau livre de probabilités ? Parce que précisément, dans ce livre, Olivier RIOUL a réussi à présenter une approche innovante et non dogmatique des rouages de la théorie, avec le parti pris de ne pas commencer son exposé par les mathématiques les plus abstraites.

Mélange dosé entre description mathématique et souci de rattachement aux événements physiques, le formalisme des probabilités est exposé dans une perspective simple et claire. Comme l'écrit l'auteur, on « fera des probabilités » sur la base d'une compréhension intuitive des idées sous-jacentes. Illustrés par de très nombreux exemples, les concepts les plus abstraits, de la définition de variable aléatoire jusqu'à la loi des grands nombres, sont traités avec rigueur et simplicité dans un langage accessible au néophyte. Le lecteur n'a pas besoin d'un fort bagage de connaissances mathématiques pour s'immerger dans les pages de ce livre très agréable à lire, et très riche en commentaires et points de vue.

J'invite donc le lecteur à plonger dans le monde de l'incertain !

Georges RODRIGUEZ-GUISANTES

TELECOM ParisTech

Avant-propos

Ce livre s'adresse aussi bien aux chercheurs, ingénieurs et professeurs qu'aux étudiants de deuxième cycle des universités ou d'écoles d'ingénieurs. On y aborde les notions essentielles de la théorie des probabilités, pour son application dans les différents domaines des sciences physiques ou de l'ingénieur. Le lecteur est supposé connaître les notions fondamentales d'algèbre linéaire et de calcul intégral, y compris les notions de bases sur les distributions de Dirac et la transformation de Fourier.

De nombreux ouvrages portant sur les probabilités ont été publiés, y compris en langue française, et je n'aurais pas pris la peine d'écrire celui-ci si je ne ressentais pas un besoin pour une approche un peu nouvelle ou originale. Mon but a été d'écrire un manuel que j'aurais moi-même aimé lire lors de mes études, et grâce auquel le lecteur peut rapidement bénéficier des outils de calcul de probabilités pour des besoins pratiques, sans pour cela abandonner la saveur et l'intérêt d'une étude suffisamment rigoureuse des concepts. Une des originalités de la présentation, donc, est qu'elle est axée de bout en bout sur les variables et vecteurs aléatoires, définis directement par des distributions de probabilité – sans requérir au préalable la notion de fonction mesurable sur un espace probabilisé abstrait. Les cas discret et continu sont traités ensemble. Les bases mathématiques sont développées de la manière la plus naturelle possible, de sorte à pouvoir disposer rapidement des résultats essentiels. Les notions plus avancées – et plus difficiles, comme celles résultant des différentes définitions de convergence (étroite ou presque sûre) ou de la construction de Kolmogorov – sont exposées à la fin et non au début.

Cette présentation suggère que l'exposé systématique de la théorie de la mesure et de l'intégration n'est pas un préliminaire indispensable pour commencer à « faire des probabilités » : les résultats utiles liés à la théorie de la mesure sont démontrés au fur et à mesure des besoins, et toujours exprimés en termes de variables, de vecteurs ou de processus aléatoires. De la sorte, on arrive à exposer avec

rigueur tous les résultats essentiels de la théorie, depuis la définition axiomatique des probabilités jusqu'à la loi des grands nombres et le théorème ergodique.

Cet ouvrage est né de cours donnés par l'auteur, à l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications (TELECOM ParisTech) et à l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI). Sa rédaction a évolué pendant plus de dix ans. Je voudrais remercier ici toutes les personnes, collègues et amis, qui d'une manière ou d'une autre, ont rendu possible l'organisation des cours desquels ce livre est issu, aidé à leur élaboration, ou m'ont encouragé à publier cet ouvrage ; merci en particulier à Maurice CHARBIT, Philippe CIBLAT, Pierre DUHAMEL, Philippe GALLION, Ghaya REKAYA-BEN OTHMAN, et Bruno THEDREZ. Un merci tout particulier à Walid HACHEM pour son aide et ses remarques précieuses, ainsi qu'à Georges RODRIGUEZ-GUISANTES pour sa relecture minutieuse et pour avoir accepté d'écrire la préface de ce livre.

Bonne lecture!

Olivier RIOUL

Table des matières

Introduction	9
Chapitre 1. Bases de la théorie des probabilités	15
1.1. Probabilité empirique et loi des grands nombres	15
1.2. Bases de la théorie des probabilités	18
1.3. Ensembles probabilisables	22
1.4. Unicité par prolongement	26
1.5. Intersection, réunion et continuité	29
1.6. Construction d'une mesure de probabilité	34
Chapitre 2. Classification des variables aléatoires	39
2.1. Variables aléatoires discrètes	39
2.2. Partie discrète d'une variable aléatoire	43
2.3. Variables aléatoires continues	45
2.4. Partie continue d'une variable aléatoire	50
2.5. Classification des variables aléatoires réelles	53
2.6. Notation unifiée	56
Chapitre 3. Fonctions et composantes de vecteurs aléatoires	59
3.1. Fonction d'une variable aléatoire	59
3.2. Composantes de vecteurs aléatoires	63
3.3. Distributions marginales	66
3.4. Vecteurs aléatoires dégénérés	69
3.5. Distribution de probabilité d'une fonction de v.a.	73
3.6. Changement de variable aléatoire	75

Chapitre 4. Indépendance	83
4.1. Deux v.a. indépendantes	83
4.2. Plusieurs v.a. indépendantes	86
4.3. Indépendance de fonctions de v.a.	89
4.4. Déterminisme et indépendance	92
4.5. Somme de v.a. indépendantes	94
Chapitre 5. Conditionnement	99
5.1. Une v.a. conditionnée par une autre	99
5.2. Conditionnement, indépendance et dépendance	102
5.3. Conditionnement et paramétrage	105
5.4. Probabilité conditionnelle	108
5.5. Plusieurs v.a. conditionnées par d'autres	112
5.6. Indépendance conditionnelle	115
Chapitre 6. Espérance	117
6.1. Espérance ou moyenne probabiliste	117
6.2. Propriétés de l'espérance	123
6.3. Indépendance et espérance	131
6.4. Espérance conditionnelle	133
Chapitre 7. Moments et fonction caractéristique	139
7.1. Moyenne et variance	139
7.2. Moyenne, médiane et mode	144
7.3. Fonction caractéristique	147
7.4. Moments	152
7.5. Cumulants	155
7.6. Fonction caractéristique et indépendance	158
Chapitre 8. Inégalités	163
8.1. Inégalité de Cauchy-Schwarz	163
8.2. Inégalités de Jensen	165
8.3. Inégalités d'information	166
8.4. Inégalités de Tchebychev	168
8.5. Inégalité de Chernov	170
Chapitre 9. Corrélation linéaire	173
9.1. Covariance et corrélation entre deux v.a. réelles	173
9.2. Géométrie des v.a. de carré intégrable	178
9.3. Matrices de covariance de plusieurs v.a.	185
9.4. Transformée de Karhunen-Loève	194
9.5. Intercorrélation entre vecteurs aléatoires	197

Chapitre 10. Vecteurs gaussiens réels et complexes	201
10.1. Vecteurs gaussiens	201
10.2. Vecteurs aléatoires complexes propres	209
10.3. Variables et vecteurs gaussiens complexes	216
Chapitre 11. Estimation et corrélation non linéaire	221
11.1. Estimation aux moindres carrés	221
11.2. Estimation linéaire	228
11.3. Estimation non linéaire	232
11.4. Estimation conjointement gaussienne	236
11.5. Corrélation linéaire et non linéaire	239
Chapitre 12. Loïs des grands nombres	243
12.1. Convergence en loi de variables aléatoires	243
12.2. Convergence et fonction caractéristique	253
12.3. Loi des grands nombres et théorème central limite	259
12.4. Loïs des grands nombres et des petits nombres	268
Chapitre 13. Processus aléatoires, stationnaires, ergodiques	277
13.1. Processus aléatoires	277
13.2. Loïs du tout ou rien	290
13.3. Loi forte des grands nombres	295
13.4. Processus stationnaires	306
13.5. Processus ergodiques	314
Annexe. Exercices et problèmes	325
A.1. Génération d'une variable aléatoire continue	325
A.2. Distribution de Rice	325
A.3. Loïs du min et du max	326
A.4. Paradoxe de Bertrand	327
A.5. Temps d'attente exponentiel	327
A.6. Paradoxe de l'attente	328
A.7. Distributions gamma, bêta, khi, t, F, etc.	329
A.8. Décorrélacion, indépendance et normalité	331
A.9. Poisson composé	333
A.10. Inégalités de minoration	335
A.11. Inégalité de Cantelli	335
A.12. Inégalité de Gauss	336
A.13. Quantification optimale aux moindres carrés	337
A.14. Planche de Galton	339
A.15. Intervalle de confiance et fonctions d'erreur	341
A.16. Estimations sur des échantillons gaussiens	342

8 Théorie des probabilités

A.17. Un paradoxe normal	343
A.18. Types stables	345
A.19. Théorème de Cramér-Lévy	346
A.20. Loi des séries	347
A.21. Flots poissonniens de bus	349
A.22. Loi du tout ou rien de Hewitt-Savage	351
A.23. Inégalité de Kolmogorov	353
A.24. Lois fortes des grands nombres	354
A.25. Filtrage d'un processus	355
Bibliographie annotée	357
Index	359

Index

A

absolument continue *voir* : continue
addition *voir* : somme
additivité *voir* : σ -additivité
aléatoire *voir* : expérience, indice,
processus, variable, vecteur
alphabet 39, 64
analyse en composantes principales 196
aplatissement 157
approximation *voir* : estimation,
gaussienne, poissonnienne
ARMA (processus \rightarrow) 311
asymétrie 152, 157, 161
de Pearson 157, 336
asymptotique
comportement — d'une v.a. 258
événement — 290
autorégressif (processus AR) 311

B

balayage conditionnel (formules de \rightarrow)
101
Bayes (formule de \rightarrow) 101, 112, 113
Bernoulli
distribution de \rightarrow *voir* : binaire
loi des grands nombres 268
Bertrand (paradoxe de \rightarrow) 327
Bêta
distribution — 330
fonction — 329
biais (d'un estimateur) 226, 338, 343

Bienaymé-Tchebychev (inégalité de \rightarrow)
169, 335
bilatéral (processus \rightarrow) 289, 306
bilatérale (distribution \rightarrow) 79
binaire (distribution \rightarrow) 41, 67, 161, 268,
348
binomial (processus \rightarrow) 288
binomiale (distribution \rightarrow) 95, 128, 162,
171, 270, 340, 348
Birkhoff (théorème de \rightarrow) *voir* :
ergodique
Borel
classe de \rightarrow 25, 281, 282
loi des grands nombres 299
paradoxe de \rightarrow 294
Borel-Cantelli
critère de convergence de \rightarrow 297
lemmes de \rightarrow 293
loi 0-1 de \rightarrow 292
borélien 25, 29, 281
borélienne (fonction \rightarrow) 60

C

Cantelli
inégalité de \rightarrow 335
loi des grands nombres 354
caractéristique (fonction \rightarrow) 147, 148,
153, 155, 158, 189, 191, 205, 255, 347
carré intégrable (v.a. de \rightarrow) 178, 181, 183,
223
cauchienne (distribution \rightarrow) 48, 81, 97,
120, 152, 154, 160, 262, 274, 345

- Cauchy-Schwarz (inégalité de —) 163, 175, 180
 centre d'inertie 118, 139
 centrée (v.a. —) 140, 150
 centroïde (condition du —) 338
 certaine (v.a. —) *voir* : déterministe
 certain (événement —) 19, 290
 chaîne *voir* : Markov
 changement de variable (aléatoire) 75, 125
 Chernov (inégalité de —) 170, 270, 300, 342, 354
 complémentaire (événement —) 21
 complexe (v.a. —) 49, 81, 86, 181, 210
 composante (d'un v.a.) 63
 composé (processus —) 323
 conditionnée (v.a. —) 108
 conditionnelle
 distribution — 99
 espérance — 133
 indépendance — 115
 probabilité — 109
 conditionnement multiple 114
 confiance *voir* : intervalle de —
 conjointe (distribution —) 65, 85
 consistance (conditions de —) 279
 continue (v.a. —) 45, 48, 50
 convergence
 de fonctions de v.a. 253
 de v.a. continues 250
 de v.a. discrètes 247
 en loi 244, 254, 297
 en probabilité 252, 297
 monotone 32
 presque sûre 296, 297
 quadratique 184, 263
 convexité (inégalités de —) *voir* : Jensen
 convolution (produit de —) 94
 corrélation
 coefficient de — 178, 232, 239
 entre deux v.a. 176, 188
 matrice d'auto— 198
 matrice de — 178, 185, 187
 matrice d'inter— 198
 non linéaire 222, 235, 239
 rapport de — 227, 235
 cosinus (transformée en —) 344
 covariance 174, 182
 complémentaire 211
 conditionnelle 235, 237
 matrice d'auto— 197
 matrice de — 175, 185, 238
 matrice d'inter— 197
 totale (formule de la —) 235
 Cramér-Lévy (théorème de —) 346
 cumulant 155, 161, 190, 334
 cumulatif (processus —) 288
 cylindre (événement) 279
- D**
- Daniell (prolongement de —) 35
 décalage (temporel) 307
 décorrélation
 complexe 182, 211
 de deux v.a. 132, 137, 177, 199, 241, 331
 deux à deux 190, 199
 d'ordre supérieur 191
 non linéaire 241
 dégénéré(e) (v.a. —) 54, 55, 69, 121, 192, 193
 de Moivre
 approximation poissonnienne 249
 formule de — 130
 théorème central limite 270, 340
 densité (de probabilité) 45
 voir aussi : distribution
 dépendance (fonctionnelle) 103, 134
 voir aussi : indépendance
 linéaire 175, 192
 déterministe (v.a. —) 42, 74, 92, 103, 104, 121, 125, 142
 déviation *voir* : dispersion
 différence (d'ensembles) 21
 Dirac (distribution de —) 48, 56, 70, 121
 discrète (distribution —, v.a. —) 39, 42, 43, 57, 71, 74, 121
 dispersion
 absolue 146
 quadratique *voir* : écart-type, variance
 distorsion 338
 distribution (de probabilité) 11, 58, 73
 divergence 167

E

écart quadratique *voir* : erreur quadratique
 écart-type 142, 146
 entière (v.a. —) 39
 entropie 123, 167
 relative 167
 équiprobabilité 41, 144
 équivalentes (v.a. —s) 75, 104
 ergodique
 décomposition — 324
 en loi 321
 en moyenne 320
 hypothèse — 314
 pour la corrélation 322
 processus — 315, 322
 théorème — 317
 erreur (fonction d'—) 341
 erreur quadratique moyenne (e.q.m.) 223
 minimale (e.q.m.m.) 224, 228, 234
 espérance 13, 117
 conditionnelle 133, 232
 in(dé)finie 119, 120, 139
 (linéarité) 127, 135
 marginale 124
 matricielle 122, 129
 (notation **E**) 123
 (représentation intégrale) 130, 146, 346
 totale (formule de l'—) 135, 136
 vectorielle 122, 128
 estimateur *voir* : estimation
 estimation 221
 aux moindres carrés 223
 conjointement gaussienne 236
 linéaire 224, 228
 non biaisée 226, 338, 343
 non linéaire 224, 232
 optimale 224, 230, 236
 événement 17
 voir aussi : borélien
 expérience aléatoire 9, 11
 exponentielle (distribution —) 79, 325, 328, 350

F

f.f. (événement) 282
 filtrage (d'un processus) 310, 313, 316, 320, 356
 Fisher
 distribution de — 331
 information de — 123
 fonction (d'une v.a.) 59, 91
 voir aussi : borélienne, caractéristique, erreur, indicatrice, répartition
 Fourier (transformée de —) 147
 fréquence
 angulaire 147
 expérimentale *voir* : probabilité empirique

G

Galton (planche de —) 339
 Gamma
 distribution — 329
 fonction — 250, 329
 gaussien
 bruit blanc — 289
 processus — 286, 309, 313
 vecteur — 201
 vecteur — complexe 216
 vecteur — dégénéré 203
 vecteur — propre 218
 gaussienne
 approximation — *voir* : théorème central limite
 conjointement —s 202, 206
 distribution — 47, 86, 88, 96, 106, 143, 151, 154, 156, 157, 160, 259, 262, 274, 332, 333, 344–346
 distribution conditionnelle 237
 généralisée 250
 unilatérale 79
 Gauss (inégalité de —) 336
 Gauss-Markov (processus de —) 309, 311, 313, 314, 316
 génératrice (fonction —, série —) 148, 348
 Gibbs (inégalité de —) 166

H

Hadamard
 inégalité de — 195
 transformée de — 344
 Hewitt-Savage (loi 0-1 de —) 351
 Hilbert (espace de —) 184
 Hoeffding (borne de —) 171
 Hölder (inégalité de —) 166

I

i.f. (événement) 283
 i.i.d. 95, 159, 203, 261, 287, 294, 304, 308
 impossible (événement —) 19, 22, 290
 impropre *voir* : propre
 incompatibles (événements —) 20
 inconditionnelle *voir* : conditionnelle
 incréments (d'un processus) *voir* :
 cumulatif
 indéfiniment divisible (distribution —)
 274
 indépendance
 asymptotique 316, 320
 conditionnelle 115
 de composantes 90, 158
 déterministe 92
 deux à deux 88
 de v.a. 83, 102, 132, 134, 137, 241, 331
 d'événements 112
 d'un processus 286, 315
 globale 88
 indicatrice (fonction —) 109, 129
 indice aléatoire 107, 136
 information *voir* : Fisher, Shannon
 i.n.i.d. 287, 316
 intervalle 22
 de confiance 341, 343
 types d'—s 26
 invariant (événement —) *voir* :
 stationnaire
 isométrie *voir* : orthogonalité
 isotrope (distribution —) 88, 217

J, K

jacobien 76
 Jensen (inégalités de —) 129, 165
 Karhunen-Loève (transformée de —) 194

khi (distribution χ) 79, 330
 khi-deux (distribution χ^2) 80, 330, 343
 Khintchine (loi des grands nombres) 264,
 300
 Kolmogorov
 condition de — 302
 construction de — 12, 284
 inégalité de — 335, 353
 loi 0-1 de — 291, 306
 loi des grands nombres 302, 304, 320,
 355
 Kronecker (distribution de —) 42, 56, 121
 kurtosis *voir* : aplatissement

L

L^2 *voir* : carré intégrable
 Laplace (transformée de —) 148
 laplacienne (distribution —) 79, 151, 154,
 157
 Lebesgue (décomposition de —) 53, 108
 Lebesgue-Stieltjes (mesure de —) 34
 Lévy-Cramér (critère de convergence de
 —) 255
 Liapounov
 condition de — 266, 343
 inégalité de — 166
 théorème central limite 266
 Lindeberg-Lévy (théorème central limite)
 265
 loi (d'une v.a.) *voir* : distribution
 loi des erreurs *voir* : théorème central
 limite
 loi des grands nombres 259, 272, 317
 empirique 18, 83, 111, 118
 faible 259, 298
 forte 298
 loi des petits nombres 274
 loi des séries 347
 loi du tout ou rien 290, 299, 351, 352
 lorentzienne (distribution —) *voir* :
 cauchienne

M

marche aléatoire 288, 348
 marginale (distribution —) 66, 73, 85, 106
 Markov

- chaîne de — 116
 - inégalité de — 168
 - markovien (processus —) 287, 308
 - masse ponctuelle 43
 - maximum (distribution du —) 326
 - médiane 144, 146, 346
 - mesurable
 - ensemble — 35, 36
 - fonction — *voir* : borélienne
 - mesure
 - de probabilité *voir* : probabilité
 - théorie de la — 12, 19
 - minimum (distribution du —) 326
 - Minkowski (inégalité de —) 166, 180
 - mixte (v.a. —) 55, 71
 - mode 145, 336
 - moindres carrés *voir* : estimation aux —
 - moment 152, 155, 334
 - absolu 145, 152
 - centré 152
 - comoment 173
 - d'inertie 140
 - d'un vecteur gaussien 207
 - moyenne (d'une v.a.) 139, 161
 - voir aussi* : espérance
 - glissante (processus MA) 311
 - nulle *voir* : centrée
 - quadratique 140, 178
- N, O**
- négligeable 19
 - normales (équations —) 228
 - normal(e) *voir* : gaussien(ne)
 - norme quadratique (d'une v.a.) 179, 181, 183
 - observation 222
 - orthogonalité
 - de deux v.a. 180, 182
 - d'une matrice 192, 194, 203, 343, 344
 - principe d'— 224
- P**
- paramétrée (distribution —) 105
 - pavé *voir* : intervalle
 - Pearson
 - asymétrie de — *voir* : asymétrie
 - distribution de — *voir* : khi-deux
 - Poincaré (formule de —) 130
 - Poisson (loi des grands nombres) 271
 - poissonnien (processus —) 289, 349
 - poissonnienne
 - approximation — 249, 273
 - distribution — 42, 96, 120, 150, 160, 259, 274, 351
 - distribution — composée 333
 - presque partout (p.p.) 19
 - presque sûrement (p.s.) 19, 125
 - probabilité
 - conditionnelle 109
 - (construction) 34, 284
 - (continuité) 32, 284
 - (décomposition) 53
 - d'erreur 109
 - d'un événement 18, 26, 278
 - empirique 17, 84, 111
 - (prolongement unique) 28, 281
 - vue comme une espérance 129
 - processus aléatoire 277
 - à temps continu 289
 - à temps discret 289, 306
 - produit scalaire (de deux v.a.) 179, 181, 183
 - propre (v.a. —) 212
 - pseudo-(co)variance *voir* : (co)variance complémentaire
 - pulsation *voir* : fréquence angulaire
 - Pythagore (théorème de —) 181
- Q, R**
- quantification 222, 337
 - queue de gaussienne 341
 - Radon (mesure de —) 35
 - Radon-Nikodym (théorème de —) 53
 - randomisation 105, 323
 - Rayleigh (distribution de —) 81, 127, 326
 - réalisation 15
 - réduite (v.a. —) 142, 150, 178, 219
 - régression 222
 - courbe de — 222
 - droite de — 231
 - répartition (fonction de —) 28, 33, 44, 71, 130, 325
 - Rice (distribution de —) 325

S

Scheffé (critère de convergence de —) 250
 série (de v.a.) 355
 Shannon (information de —) 167
 sigma (règle des trois σ) 342
 σ -additivité 20, 31
 singe savant 294
 singulière *voir* : dégénérée
 somme
 d'ensembles 20, 24
 de v.a. décorréelées 177, 190
 de v.a. gaussiennes 206, 346
 de v.a. indépendantes 94, 159
 (notation \int) 58
 soustraction *voir* : différence
 stable (distribution —) 275, 345
 standard *voir* : réduite
 stationnaire
 asymptotiquement — 321
 au premier ordre 312
 au second ordre 312
 événement — 315
 faiblement — 231, 312
 processus — 307, 320
 transformation — 307, 310
 Stirling (formule de —) 249, 340
 stochastique *voir* : processus aléatoire
 Student (distribution de —) 331, 343
 suite aléatoire *voir* : processus aléatoire
 symétrie circulaire 217

T

Tchebychev
 inégalités de — 168, 169
 loi des grands nombres 262

tension (d'une suite de v.a.) 256
 théorème central limite 260, 266, 341, 346
 transformation (linéaire) 188, 205, 214,
 218
 voir aussi : cosinus, Fourier,
 Hadamard, Karhunen-Loève,
 orthogonalité
 tribu 31

U

uniforme (distribution —) 41, 46, 86, 87,
 158, 251
 unilatéral (processus —) 306
 unilatérale (distribution —) 79
 unimodale (distribution —) 145, 336
 unitaire *voir* : orthogonalité

V

variable aléatoire (v.a.) 11, 15, 39, 45, 56
 voir aussi : distribution
 variance 140, 161
 voir aussi : covariance
 complémentaire 211
 conditionnelle 234
 nulle 142
 résiduelle 227
 totale (formule de la —) 227, 230, 234
 variété 69
 vecteur aléatoire (v.a.) 16, 42, 48, 56

W, Y

Wiener-Hopf (équations de —) 230
 Wiener (processus de —) 288
 Yule-Walker (équations de —) 230