

PARCOURS MASTER 2
ATiAM

Parcours multi-mentions du Master Sciences et Technologies
Université Pierre et Marie Curie - Paris 6
en collaboration avec TELECOM ParisTech et l'Ircam

Traitement du signal audio-numérique (TSA)



Responsable de l'UE : Roland Badeau

Auteurs : Maurice Charbit et Gérard Blanchet

Septembre 2012

Table des matières

Préambule	5
Notations	7
Les transformées	9
1 Les signaux déterministes à temps continu	11
1.1 Représentation des signaux à temps continu	11
1.2 Représentation de Fourier des signaux périodiques	12
1.2.1 Coefficients de Fourier	12
1.2.2 Propriétés des coefficients de Fourier	12
1.3 Représentation de Fourier des signaux d'énergie finie	13
1.3.1 Transformée de Fourier	13
1.3.2 Convolution de deux signaux	14
1.3.3 Propriétés	14
1.3.4 Exemples de transformées de Fourier	15
1.4 Filtrage linéaire	16
1.4.1 Définition et premiers exemples	16
1.4.2 Le filtrage convolutionnel	17
1.5 Distorsions	18
2 Echantillonnage	21
2.1 Cas des signaux "passe-bas"	22
2.2 Cas des signaux passe-bande ou à bande étroite	24
2.3 Cas des signaux passe-bas de bande infinie	25
2.4 Reconstruction pratique	26
3 Signaux déterministes à temps discret	29
3.1 Généralités	29
3.2 Transformation de Fourier à temps discret (TFTD)	30
3.2.1 Définition	30
3.2.2 Propriétés	31
3.2.3 Relation entre la TF ^{TC} et la TFTD	32
3.3 Transformation de Fourier discrète (TFD)	33
3.4 Récapitulatif	35
3.5 Résolution et précision	37
3.5.1 Résolution et fenêtrage	37
3.5.2 Précision	38
3.6 Quelques éléments sur les images	38
4 Transformée en z et filtrage	41
4.1 Transformation en z	41
4.2 Filtrage linéaire convolutionnel des signaux déterministes à temps discret	44
4.2.1 Définition et propriétés	44
4.2.2 Filtre à fonction de transfert rationnelle	46
4.2.3 Synthèse d'un filtre RIF par la méthode de la fenêtre	49

4.3	Quelques éléments sur les images	51
5	Processus aléatoires SSL à temps discret	53
5.1	Le modèle aléatoire	53
5.2	Propriétés générales	54
5.2.1	Loi temporelle	54
5.2.2	Stationnarité	56
5.2.3	Propriétés du second ordre	58
5.3	Processus aléatoires SSL à temps discret	59
5.4	Filtrage des processus aléatoires SSL à temps discret	60
5.5	Exemples de modèles de processus SSL à temps discret	60
5.5.1	Processus harmonique	60
5.5.2	Bruit blanc	61
5.5.3	Processus à moyenne ajustée d'ordre q	62
5.5.4	Processus autorégressif d'ordre p	62
5.6	Éléments d'estimation	66
5.6.1	Estimation de la moyenne	66
5.6.2	Estimation des covariances	67
5.6.3	Estimation de la d.s.p.	67
6	Numérisation d'un signal	71
6.1	Rappels et compléments sur l'échantillonnage	71
6.2	Quantification uniforme de pas q	73
6.3	Mise en forme du bruit de quantification	75
6.4	Quantification non uniforme	76
7	Changement de fréquence	79
7.1	Interpolation	79
7.2	Décimation	80
8	Annexe	83
8.1	Transformée de Fourier	83
8.1.1	La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	83
8.1.2	La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	85
8.1.3	La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$	86
8.1.4	Espace des fonctions de carré intégrable	87
8.1.5	Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$	87
8.2	La transformée en z , inversion	89
	Bibliographie	90
	Index	92

Préambule

L'information extraite de l'observation d'un phénomène se présente sous forme d'une ou plusieurs grandeurs physiques qui évoluent dans le *temps* et/ou dans l'*espace*. Dans les problèmes rencontrés en pratique on est souvent amené à s'intéresser à l'un ou l'autre de ces deux aspects. On parle alors de *signal* lorsqu'on a affaire à une évolution temporelle, et d'*image* pour une "évolution" spatiale.

Dans ce cours nous nous intéressons essentiellement aux propriétés du signal, étant bien entendu que certains résultats peuvent s'étendre à l'image.

Les différents traitements que l'on fait subir aux signaux nécessitent l'utilisation d'outils mathématiques. Ces derniers sont à la base de la théorie du signal. Ce cours s'intéresse à l'étude et surtout à la mise en œuvre - le traitement du signal - de certains d'entre eux.

En signal on modélise la grandeur physique observée par un objet mathématique dépendant de la variable réelle t représentant le temps. Dans la suite, le mot signal désignera indifféremment la grandeur physique observée ou l'objet mathématique servant à la modéliser. On a l'habitude d'envisager les cas suivants :

Déterministe/aléatoire : la première distinction porte sur notre capacité à prédire l'évolution temporelle de la grandeur observée. Si on prend par exemple un oscillateur sinusoïdal d'amplitude A et de fréquence f_0 , on peut alors prédire la valeur de l'amplitude à tout instant par l'expression $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$. Si A et f_0 varient très légèrement au cours du temps on pourra en prendre une valeur moyenne et utiliser ces dernières dans le modèle. Un tel modèle de signal est dit *déterministe*.

Il existe cependant des situations où il n'est pas concevable de représenter de cette façon l'évolution temporelle du signal. C'est le cas, par exemple, pour la tension engendrée à la sortie d'un microphone ou encore pour le courant électrique produit par l'agitation thermique des particules dans un conducteur (bruit de fond). On ne peut pas dire combien vaudra $x(t)$ à l'instant t , mais on pourra éventuellement supposer que cette grandeur est distribuée suivant une certaine loi de probabilité. On dit alors que le signal est *aléatoire*.

Temps continu/temps discret : si, comme c'est le cas pour le signal $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$, le temps t prend ses valeurs dans \mathbb{R} , on dit que le signal est à *temps continu*. Toutefois, on rencontre aussi en traitement du signal des grandeurs qui évoluent uniquement à des instants discrets t_n où $n \in \mathbb{Z}$. On parle alors de signal à *temps discret* ou encore de signal *numérique*. En termes mathématiques, un signal à temps continu est une fonction du temps tandis qu'un signal à temps discret est une suite.

Le développement et l'essor des techniques numériques ont fait que les solutions apportées aux traitements des signaux à temps discret ont pris une place essentielle aujourd'hui, comparée à celle qu'occupent les traitements portant sur les signaux à temps continu. C'est pourquoi ce cours est centré sur les problèmes de temps discret, sur le passage du temps continu au temps discret (théorème d'échantillonnage) et sur le traitement numérique des signaux. Il est toutefois utile de rappeler brièvement quelques propriétés des signaux à temps continu. Le vocabulaire utilisé en traitement du signal trouve en effet son origine dans l'étude de ces signaux.

Notations

\emptyset	Ensemble vide
$\sum_{k,n}$	$= \sum_k \sum_n$
$\text{rect}_T(t)$	$= \begin{cases} 1 & \text{si } t < T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
$\text{sinc}(x)$	$= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$
$\mathbb{1}(x \in A)$	$= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (Fonction indicatrice de A)
$(a, b]$	$= \{x : a < x \leq b\}$
$\delta(t)$	$\begin{cases} \text{Distribution de Dirac si } t \in \mathbb{R} \\ \text{Symbole de Kronecker si } t \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\text{Re}(z)$	Partie réelle de z
$\text{Im}(z)$	Partie imaginaire de z
i ou j	$= \sqrt{-1}$
$x(t) \Rightarrow X(f)$	Paire de transformées de Fourier
$x(t) \star y(t)$	Produit de convolution à temps continu
	$= \int_{\mathbb{R}} x(u)y(t-u)du$
$x(t) \star y(t)$	Produit de convolution à temps discret
	$= \sum_{u \in \mathbb{Z}} x(u)y(t-u)$

\mathbf{I}_N	Matrice unité de dimension $N \times N$
\mathbf{A}^*	Conjuguée de \mathbf{A}
\mathbf{A}^T	Transposée de \mathbf{A}
\mathbf{A}^H	Transposée-conjuguée de \mathbf{A}
\mathbf{A}^{-1}	Inverse de \mathbf{A}

$\mathbb{P}\{X \in A\}$	Probabilité pour que $X \in A$
$\mathbb{E}\{X\}$	Espérance mathématique de X
$X_c = X - \mathbb{E}\{X\}$	Variable aléatoire centrée
$\text{var}(X) = \mathbb{E}\{ X_c ^2\}$	Variance de X
$\mathbb{E}\{X Y\}$	Espérance de X connaissant Y

AR	Autorégressif
ARMA	AR et MA
bps	Bits par seconde
CAN	Convertisseur Analogique Numérique
CNA	Convertisseur Numérique Analogique
DCT	<i>Discrete Cosine Transform</i>
d.s.e. ou dse	Densité Spectrale d'Energie
d.s.p. ou dsp	Densité Spectrale de Puissance
FEP	Fonction d'Étalement Ponctuel
FT	Fonction de Transfert
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FTO	Fonction de transfert optique
i.i.d.	Indépendant et identiquement distribué
MA	<i>Moving Average</i>
p.a.	Processus aléatoire
ppp	Points par pouce
RSB	Rapport Signal sur Bruit
SSL	Stationnaire (du second ordre) au Sens Large
TF ou TFCT	Transformée de Fourier à temps continu
TFCT	Transformée de Fourier à Court Terme
TFR	Transformée de Fourier Rapide
TFTD	Transformée de Fourier à Temps Discret
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TFDI	Transformée de Fourier Discrète Inverse
TZ	Transformée de en z
TZC	Transformée de en z Causale
v.a.	Variable aléatoire

Les transformées

Temps continu	Temps discret
Transformée de Fourier $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2j\pi ft} dt$ $x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{2j\pi ft} df$	Transformée de Fourier $X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)e^{-2j\pi nf}$ $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{2j\pi nf} df$
Filtre linéaire ($t \in \mathbb{R}$) $(x \star h)(t) \leftrightarrow X(f)H(f)$ Stabilité EBSB $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} h(t) dt < +\infty$	Filtre linéaire ($n \in \mathbb{Z}$) $(x \star h)(n) \leftrightarrow X(f)H(f)$ Stabilité EBSB $\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) < +\infty$
Série de Fourier $X(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)e^{-2j\pi kt/T} dt$ $x(t) \stackrel{L^2}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(k)e^{2j\pi kt/T}$	Transformée de Fourier discrète $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2j\pi kn/N}$ $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{2j\pi nk/N}$
Transformée de Laplace bilatérale $X(s) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-st} dt, s \in (\mathcal{C})$ $x(t) = \frac{1}{2j\pi} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(s)e^{st} ds$	Transformée en z $X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n}, z \in (\mathcal{C})$ $x(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{\Gamma} X(z)z^{n-1} dz$
Système ($t \in \mathbb{R}$) $(x \star h)(t) \leftrightarrow X(s)H(s)$ Stabilité EBSB \Leftrightarrow axe imaginaire \subset domaine de convergence.	Système ($n \in \mathbb{Z}$) $(x \star h)(n) \leftrightarrow X(z)H(z)$ Stabilité EBSB \Leftrightarrow cercle unité \subset domaine de convergence.

Chapitre 1

Les signaux déterministes à temps continu

Mots-clés et notions à connaître :

- Séries de Fourier et spectre de raies,
- Transformée de Fourier et spectre,
- Energie et puissance, Formules de Parseval,
- Relation d'incertitude (BT d'un signal).

1.1 Représentation des signaux à temps continu

Modélisation

Dans ce premier chapitre nous nous intéressons essentiellement aux signaux déterministes à temps continu. Nous avons vu en préambule que cela sous-entendait que l'on va considérer des fonctions réelles ou complexes du temps t , données soit de façon explicite par leur expression $x(t)$ soit par l'intermédiaire d'un processus de construction, en général une équation différentielle. On ne s'interdira d'ailleurs pas de considérer d'autres objets tels que les distributions, en remarquant que l'on se limitera à des cas particuliers pour ne pas alourdir inutilement le discours.

Dans le cas des signaux déterministes à temps continu, une classification est faite autour des notions d'*énergie* et de *puissance*. De façon très grossière nous dirons que les signaux d'énergie finie servent à modéliser les signaux de durée finie et les signaux de puissance finie les signaux de durée infinie, plus particulièrement les mélanges de sinusoides.

Energie et Puissance

L'*énergie* d'un signal $x(t)$, fonction complexe de la variable réelle t , est la quantité E définie par :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

La *puissance* d'un signal $x(t)$, fonction complexe de la variable réelle t , est la quantité P définie par :

$$P = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \quad (1.2)$$

Si $x(t)$ est tel que $0 < E < +\infty$, on dit que le signal est d'*énergie finie* et sa puissance $P = 0$. Si $x(t)$ est tel que $0 < P < +\infty$, on dit que le signal est de *puissance finie* et son énergie est infinie. ¹

¹ Les termes *énergie* et *puissance* proviennent de la représentation des signaux électriques. En effet si le signal $x(t)$ représente une tension exprimée en volt, la quantité $x^2(t)$ est alors proportionnelle à des watts et $x^2(t)\Delta t$ à des joules.

Les signaux rencontrés en physique sont évidemment d'énergie finie. Il est toutefois utile, pour étudier les régimes permanents, de sortir du cadre des signaux d'énergie finie pour envisager celui des signaux de puissance finie, dont l'archétype est sans aucun doute le signal :

$$x(t) = \sum_{k=1}^P A_k \cos(2\pi f_k t + \phi_k)$$

constitué de la somme de P sinusoïdes et que nous désignerons sous le terme de *mélange harmonique*.

Représentation fréquentielle des signaux

Nous verrons que les exponentielles complexes sont les fonctions propres des filtres linéaires. C'est une des raisons fondamentales de l'introduction de la décomposition d'un signal en une somme d'exponentielles complexes. Cette décomposition porte le nom de *représentation de Fourier* ou *représentation fréquentielle*.

Ainsi le signal $x(t)$ périodique de période T (ou de support T borné) admet, sous certaines conditions, et dans un certain sens (exprimé par l'égalité $\stackrel{S.F.}{\equiv}$ ou $\stackrel{L^2}{\equiv}$), une décomposition en série de Fourier :

$$x(t) \stackrel{S.F.}{\equiv} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{2j\pi n t/T} \text{ avec } X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-2j\pi n t/T} dt$$

La suite des coefficients X_n est désignée sous le terme de *coefficients de Fourier* du signal $x(t)$.

Mathématiquement la fonction $x(t)$ et la suite des X_n sont équivalentes. Toutefois, en traitement du signal, elles ont chacune leur intérêt. Elles correspondent à deux visions du même phénomène.

1.2 Représentation de Fourier des signaux périodiques

Un signal est dit *périodique* s'il existe U tel que, pour tout $t \in (-\infty, +\infty)$, $x(t+U) = x(t)$. La plus petite valeur positive T de U qui vérifie cette propriété s'appelle la *période*. L'inverse de T s'appelle la *fréquence fondamentale*. Les multiples de la fréquence fondamentale s'appellent les *fréquences harmoniques*.

Remarque : la somme de deux sinusoïdes de périodes différentes n'est pas forcément périodique. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le rapport des périodes soit un nombre rationnel. Toutefois, on peut vérifier que la plupart des résultats énoncés pour les signaux périodiques s'appliquent encore aux signaux que nous avons désignés sous le terme de mélange harmonique.

Les signaux périodiques entrent dans la classe des signaux de *puissance finie* et on a :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \tag{1.3}$$

1.2.1 Coefficients de Fourier

Sous certaines conditions, que nous ne rappellerons pas ici, un signal périodique, de période T , se développe en série de Fourier sous la forme :

$$x(t) \stackrel{S.F.}{\equiv} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n e^{2j\pi n t/T} \text{ où } X_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-2j\pi n t/T} dt$$

On remarque que :

$$x(0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_n \quad \text{et} \quad X_0 = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

1.2.2 Propriétés des coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier vérifient les propriétés suivantes :

1. *Linéarité* : étant donné $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux de même période T , alors la combinaison linéaire $ax(t) + by(t)$ a pour coefficients de Fourier $aX_k + bY_k$,

2. *Symétrie hermitienne*: si le signal $x(t)$ est à valeurs dans \mathbb{R} , alors $X_k = X_{-k}^*$, en particulier X_0 est réel,
3. *Retard*: soit $y(t) = x(t - \tau)$, le signal périodique retardé de τ , alors $Y_k = \exp(-2j\pi k\tau/T)X_k$,
4. *Bande limitée*: le signal périodique réel $x(t)$ est à bande limitée s'il existe n_0 tel que X_n est nul pour tout $|n| > n_0$. On montre qu'un signal $x(t)$ périodique à bande limitée ne peut s'annuler que sur un ensemble au plus dénombrable de points.

Formule de Parseval

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux périodiques de même période T et soit $z(t)$ le produit de $x(t)$ par $y^*(t)$. On note respectivement X_n, Y_n et Z_n les suites des coefficients de Fourier de $x(t), y(t)$ et $z(t)$. Un calcul simple montre que :

$$Z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k Y_{k-n}^*$$

On dit que Z_n est égal au *produit de convolution* de la suite X_n par la suite Y_n^* . En faisant $n = 0$ il vient :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k Y_k^* = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) y^*(t) dt$$

Dans le cas particulier où $x(t) = y(t)$, nous obtenons la *formule de Parseval*:

$$P = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |X_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \quad (1.4)$$

La relation de Parseval (1.4) est très importante, car elle possède une interprétation énergétique simple: la puissance d'un signal est égale à la somme des puissances élémentaires de chacune de ses composantes, où l'on entend par k -ème composante le signal "sinusoïdal" $X_k e^{2j\pi k/T}$ qui est de puissance $|X_k|^2$.

1.3 Représentation de Fourier des signaux d'énergie finie

La transformée de Fourier généralise la notion de série de Fourier au cas des signaux non périodiques. Nous la désignerons par TFTC (*transformée de Fourier à temps continu*) ou TF.

1.3.1 Transformée de Fourier

Nous rappelons que pour une fonction $x(t)$ appartenant à l'ensemble $L^2 \cap L^1$ des fonctions de carré sommable et de module sommable, la *transformée de Fourier* existe et appartient à L^2 . Les formules de transformations directe et inverse sont :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi ft} dt \quad \text{et} \quad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi ft} df \quad (1.5)$$

La variable f s'appelle la *fréquence*. Son unité est le *Hertz* (en abrégé Hz).

On se souviendra que les valeurs à l'origine sont données par :

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df \quad \text{et} \quad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$$

1.3.2 Convolution de deux signaux

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux de la variable réelle t , on appelle *produit de convolution* ou *convolution* de $x(t)$ par $y(t)$ l'opération notée $(x \star y)(t)$ (on note plus souvent, mais de façon impropre $x(t) \star y(t)$) et définie par :

$$(x \star y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)y(u)du \tag{1.6}$$

Le produit de convolution, sur l'espace des fonctions considérées, est commutatif, associatif et distributif par rapport à l'addition (il n'est pas associatif sur l'espace des distributions).

Rappelons que, pour deux signaux d'énergie finie $x(t)$ et $y(t)$, l'inégalité de Schwarz a pour expression :

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(u)du \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(u)|^2du \int_{-\infty}^{+\infty} |y(u)|^2du \tag{1.7}$$

Une conséquence est que, si $x(t)$ et $y(t)$ sont d'énergie finie, le produit de convolution existe.

La propriété fondamentale du produit de convolution est que la transformée de Fourier de la convolution est le produit des transformées de Fourier. Ce qui s'écrit :

$$x(t) \star y(t) \xrightarrow{TF} X(f) \times Y(f)$$

1.3.3 Propriétés

La plupart des propriétés énoncées dans le tableau ci-dessous s'établissent simplement. Montrons en exemple que la transformée de Fourier d'un signal *réel* possède la *symétrie hermitienne*. Pour cela reprenons la définition de $X(f)$ et conjuguons les deux membres. Il vient :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2j\pi ft}dt \rightarrow X^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t)e^{2j\pi ft}dt$$

En changeant alors f en $-f$ et en utilisant le fait que $x^*(t) = x(t)$ puisque le signal est supposé réel, on trouve que $X^*(-f) = X(f)$.

Propriété	$x(t)$	$X(f)$
Similitude	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X(f/ a)$
Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Translation	$x(t - t_0)$	$X(f) \exp(-2j\pi ft_0)$
Modulation	$x(t) \exp(2j\pi f_0 t)$	$X(f - f_0)$
Convolution	$x(t) \star y(t)$	$X(f)Y(f)$
Produit	$x(t)y(t)$	$X(f) \star Y(f)$
Dérivations	$d^n x(t)/dt^n$	$(2j\pi f)^n X(f)$
	$(-2j\pi t)^n x(t)$	$d^n X(f)/df^n$
Parité, conjugaison	réelle paire	réelle paire
	réelle impaire	imaginaire impaire
	imaginaire paire	imaginaire paire
	imaginaire impaire	réelle impaire
	complexe paire	complexe paire
	complexe impaire	complexe impaire
	réelle	$X(f) = X^*(-f)$
	$x^*(-t)$	$X(f) = X^*(-f)$ $\text{Re}(X(f)), X(f) $ paires $\text{Im}(X(f)), \arg(X(f))$ impaires $X^*(f)$

Formule de Parseval

En utilisant la propriété de convolution des transformées de Fourier, on obtient 1.8 qui traduit l'égalité de deux produits scalaires :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df \tag{1.8}$$

En effet la transformée du produit de convolution $x(t) \star y^*(-t)$ est $X(f)Y^*(f)$. Ce qui s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(u-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)e^{2j\pi ft}df$$

En faisant $t = 0$, on obtient le résultat annoncé.

Cette relation est tout simplement l'expression de la conservation du produit scalaire par transformation de Fourier (isométrie). En faisant $x(t) = y(t)$, on obtient la *formule de Parseval* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (1.9)$$

La fonction $|x(t)|^2$ apparaît donc comme une répartition de l'énergie en fonction du temps et peut être assimilée à une puissance instantanée. Mais la formule de Parseval montre que l'énergie est aussi l'intégrale sur tout l'axe des fréquences de la fonction $|X(f)|^2$. Cette fonction peut donc s'interpréter comme la *répartition* ou *localisation* de l'énergie en fonction de la fréquence : elle porte dans la littérature le nom de *densité spectrale d'énergie* (d.s.e.) ou tout simplement *spectre*. La fin de ce paragraphe énonce sans démonstration quelques notions et propriétés importantes des signaux d'énergie finie.

Définition 1.1

- Le signal $x(t)$ est dit de durée finie s'il est nul en dehors d'un intervalle de temps (t_0, t_1) .
- Le signal $x(t)$ est dit à bande limitée si sa transformée de Fourier est nulle en dehors de l'intervalle de fréquence $(-B_0, B_1)$. Si $x(t)$ est réel et à bande limitée, $X(f)$ possède la symétrie hermitienne ($X(f) = X^*(-f)$) et l'intervalle de fréquence s'écrit $(-B, B)$. Dans ce cas, B s'appelle la bande du signal.

Propriété 1.1

1. Un signal d'énergie finie ne peut être à la fois de durée finie et à bande limitée.
2. Si $x(t)$ est d'énergie finie E et à bande limitée $(-B, B)$ alors $|x(t)| \leq \sqrt{2BE}$.
3. Théorème de Bernstein : si $x(t)$ est d'énergie finie, à bande limitée $(-B, B)$ et tel que $\sup_t |x(t)| \leq M$ (signal borné), alors les dérivées successives vérifient :

$$|x^{(n)}(t)| \leq (2\pi B)^n M \quad (1.10)$$

Ce dernier théorème a une interprétation pratique importante. Un signal borné et à bande limitée ne peut avoir des variations arbitrairement rapides. On dit aussi qu'un signal a des variations d'autant plus lentes que son support en fréquence est petit ou encore qu'un signal a des fronts d'autant plus raides (dérivée importante) qu'il contient de l'énergie dans les fréquences élevées. Il y a ainsi un lien étroit entre la notion de fréquence et celle de dérivée, c'est-à-dire de variation temporelle.

1.3.4 Exemples de transformées de Fourier

On appelle *signal rectangle* le signal $x(t)$ défini par $x(t) = \text{rect}_T(t) = \mathbf{1}_{(-T/2, T/2)}(t)$. Un calcul immédiat donne pour sa transformée de Fourier :

$$X(f) = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} = T \text{sinc}(fT) \quad (1.11)$$

où la fonction $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ s'appelle la fonction *sinus-cardinal* (car elle s'annule pour les valeurs entières de la variable x). Sa forme est représentée à la figure 1.1. Notons que lorsque la durée T diminue, la "largeur" de son support en fréquence augmente. Ce comportement revêt un caractère tout-à-fait général. Il traduit ce que l'on appelle parfois la *dualité temps-fréquence*.

Le tableau ci-après donne d'autres exemples de transformée de Fourier de signaux rencontrés en pratique.

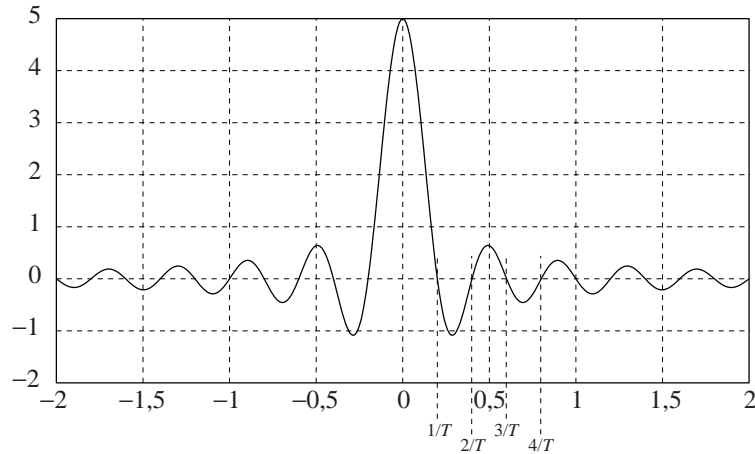


Figure 1.1: Transformée de Fourier “sinus-cardinal” de la fonction rectangle

$x(t)$	$X(f)$
$\text{rect}_T(t) \star \text{rect}_T(t)$ (fonction triangle)	$T^2 \text{sinc}^2(fT)$
$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\pi f^2)$
$\exp(-t/T) \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(t)$	$T/(1 + 2j\pi fT)$
$\exp(- t /T)$	$2T/(1 + 4\pi^2 f^2 T^2)$

1.4 Filtrage linéaire

En pratique les signaux subissent un certain nombre de transformations au cours de leur passage à travers un *système*; ces transformations peuvent être désirables, on parle alors de *traitement*, ou indésirables et on parle alors de *distorsion*. Une manière de décrire ces transformations est de donner l’expression du signal de *sortie* $y(t)$ en fonction du signal d’*entrée* $x(t)$.

1.4.1 Définition et premiers exemples

Un filtre linéaire est une relation fonctionnelle entre une classe de signaux d’entrée \mathcal{X} et une classe de signaux de sortie \mathcal{Y} , relation qui possède les deux propriétés suivantes :

- *linéarité*: si $x_1(t)$ donne $y_1(t)$ et $x_2(t)$ donne $y_2(t)$, alors $ax_1(t) + bx_2(t)$ donne $ay_1(t) + by_2(t)$,
- *invariance temporelle*: si au signal d’entrée $x(t)$ correspond le signal de sortie $y(t)$, alors au signal d’entrée $x(t - \tau)$ correspond le signal de sortie $y(t - \tau)$. Autrement dit, un tel système prend en compte les intervalles de temps mais pas l’origine des temps². On parle parfois de filtre *stationnaire*.

Nous commençons par des exemples évidents :

- un amplificateur de gain G_0 est défini par la relation $y(t) = G_0 x(t)$, qui se trouve être instantanée; c’est bien un filtre linéaire.
- un retardateur pur est défini par la relation $y(t) = x(t - \tau)$; c’est aussi un filtre linéaire.
- on peut sans difficulté généraliser les deux exemples précédents à des relations entrée–sortie de la forme $y(t) = \sum_{k=1}^K G_k x(t - \tau_k)$.

Par passage à l’infinésimal on est alors conduit à la définition des *filtres convolutionnels*.

² Contre-exemple : on pourra vérifier que le système qui, à l’entrée $x(t)$, fait correspondre la sortie $y(t) = \int_0^t x(u) du$ est linéaire sans être invariant dans le temps.

1.4.2 Le filtrage convolutionnel

Définition 1.2

Un filtre linéaire est dit convolutionnel si, à l'entrée $x(t) \in \mathcal{X}$, il fait correspondre la sortie $y(t) \in \mathcal{Y}$:

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)x(t-\tau) d\tau \quad (1.12)$$

où la fonction $h(t)$, supposée de module sommable ($\int |h(t)|dt < +\infty$), est appelée la réponse impulsionnelle du filtre.

Définition 1.3

La transformée de Fourier de $h(t)$ s'appelle le gain complexe ou réponse en fréquence.

Exemples fondamentaux

- exponentielle complexe : pour $x(t) = \exp(2j\pi f_0 t)$, un calcul simple et justifié par le fait que $h(t) \in L^1(\mathbb{R})$, donne :

$$y(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)e^{2j\pi f_0(t-\tau)} d\tau = e^{2j\pi f_0 t} \int_{\mathbb{R}} h(\tau)e^{-2j\pi f_0 \tau} d\tau = H(f_0)x(t)$$

Ainsi l'action d'un filtre convolutionnel se résume à la multiplication du signal par le terme complexe $H(f_0)$ qui n'est autre que la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle $h(t)$ au point f_0 . Autrement dit, les exponentielles complexes sont les *fonctions propres* des filtres linéaires. $H(f)$ est appelé *gain complexe* du filtre.

- mélange harmonique : par linéarité, le résultat précédent se généralise au *mélange harmonique* :

$$x(t) = \sum_{k=1}^K A_k e^{2j\pi f_k t} \text{ qui donne en sortie } y(t) = \sum_{k=1}^K H(f_k) A_k e^{2j\pi f_k t}$$

- entrée stable : si $x(t) \in L^1(\mathbb{R})$ ($\int |x(t)|dt < +\infty$), alors $y(t) \in L^1(\mathbb{R})$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |y(t)|dt &\leq \int_{\mathbb{R}} |h(t)|dt \int_{\mathbb{R}} |x(t)|dt \\ \Rightarrow Y(f) &= H(f)X(f) \end{aligned} \quad (1.13)$$

- entrée d'énergie finie : si $x(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ($\int |x(t)|^2 dt < +\infty$), alors $y(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |y(t)|^2 dt &\leq \int_{\mathbb{R}} |h(t)|^2 dt \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt \\ \Rightarrow Y(f) &= H(f)X(f) \end{aligned} \quad (1.14)$$

- entrée bornée : si $x(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\sup_t |x(t)| < +\infty$, alors $y(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$, plus précisément $\sup_t |y(t)| \leq \int |h(t)|dt \sup_t |x(t)|$. Cette propriété fondamentale, qui dit qu'à toute entrée bornée correspond une sortie bornée, porte le nom de *stabilité entrée bornée / sortie bornée* (EBSB). Les filtres convolutionnels sont donc stables EBSB.

Interprétation du filtrage

L'expression "réponse impulsionnelle" provient du fait que $h(t)$ est la sortie du filtre dont l'entrée est une impulsion infiniment brève et d'aire 1 (une présentation rigoureuse de cette notion passe par la définition de la *distribution de Dirac*).

L'équation de convolution (1.12) montre que la sortie d'un filtre peut être vue comme l'action de la *fenêtre glissante* $h(-u)$ sur le signal d'entrée $x(\theta)$ et donc comme une pondération linéaire des entrées passées et futures par la fonction $h(-u)$. En particulier :

- si $h(u) = 0$ pour $u < 0$, la valeur en sortie à l’instant t ne nécessite pas la connaissance des valeurs de l’entrée au-delà de t : on dit alors que le filtre est *causal*.
- si $h(u) = 0$ pour tout $u > t_M$, la valeur en sortie à l’instant t ne nécessite pas la connaissance des valeurs de l’entrée antérieures à l’instant $t - t_M$: t_M s’interprète alors comme la *mémoire* du filtre.
- si $h(u) = 0$ pour $u < t_R$, la valeur en sortie à l’instant t ne nécessite pas la connaissance des valeurs de l’entrée entre $t - t_R$ et t . On peut dire que ces entrées n’ont pas encore eu le temps de “traverser” le filtre : t_R s’interprète comme le *temps de réponse* du filtre.

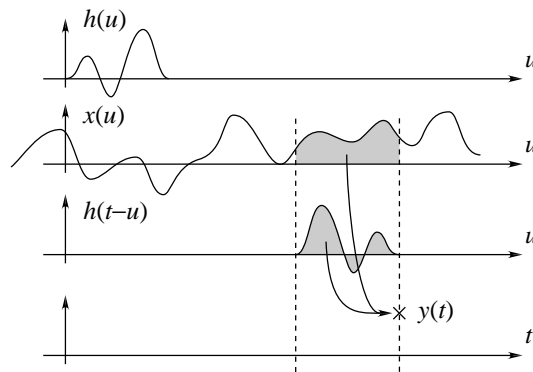


Figure 1.2: Représentation graphique de la convolution

On peut “estimer” la réponse en fréquence $H(f)$ d’un filtre linéaire de réponse impulsionnelle réelle en appliquant à son entrée le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$. Le signal en sortie a pour expression $y(t) = H_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ où $H_0 = |H(f_0)|$ et $\phi_0 = \arg(H(f_0))$. Et donc, en mesurant le rapport entre l’amplitude de l’entrée et l’amplitude de la sortie, on obtient $|H(f_0)|$, puis en mesurant le déphasage entre l’entrée et la sortie, on obtient $\arg(H(f_0))$. En faisant varier f_0 , on obtient la réponse en fréquence. On dit que l’on a fait une *analyse harmonique*.

Système physique et filtrage linéaire

En pratique on peut considérer deux cas qui conduisent à la représentation d’un système physique par un filtre linéaire.

Dans le premier cas on exploite la connaissance des lois d’évolution des phénomènes à l’intérieur du système envisagé (par exemple la loi d’Ohm). Si ces lois possèdent les caractères linéaire et stationnaire (ou sont approximables par des lois ayant ces propriétés), on obtient une équation différentielle linéaire à coefficients constants, qui conduit à la représentation de ce système par un filtre linéaire.

Dans le deuxième cas on ne possède pas, ou pas assez, de connaissances physiques pour employer la première méthode et on postule que le système étudié est représentable par un filtre linéaire. Le problème consiste alors à estimer au mieux, suivant certains critères, la fonction de transfert de ce filtre.

1.5 Distorsions

Distorsions linéaires

On distingue deux types de distorsion pour les filtres linéaires :

1. Lorsque le gain n’est pas constant les fréquences ne sont pas toutes amplifiées ou atténuées de la même manière : on parle alors de *distorsion d’amplitude*.
2. Lorsque la phase de la fonction de transfert n’est pas linéaire, les composantes fréquentielles ne sont pas toutes retardées ou avancées de la même manière : on parle alors de *distorsion de phase*.

Distorsion dans les systèmes non-linéaires

Pour illustrer ce type de distorsion, nous traiterons seulement un exemple. Soit un système réalisant en fonction de l'entrée $x(t)$ et la sortie $y(t) = x(t) + x^2(t)$. Et considérons le signal d'entrée $x(t) = a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t)$. La sortie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + a_1 \cos(2\pi f_1 t) + a_2 \cos(2\pi f_2 t) \\ &\quad + \frac{1}{2}a_1^2 \cos(4\pi f_1 t) + \frac{1}{2}a_2^2 \cos(4\pi f_2 t) \\ &\quad + a_1 a_2 \cos(2\pi(f_1 - f_2)t) + a_1 a_2 \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) \end{aligned}$$

Nous voyons qu'un tel système introduit deux types de distorsion proprement non linéaires :

1. la distorsion *harmonique* : elle correspond à la présence des fréquences $2f_1$ et $2f_2$;
2. la distorsion d'*intermodulation* : elle correspond à la présence des fréquences $(f_1 - f_2)$ et $(f_1 + f_2)$.

Ces effets sont appelés distorsions quand ils sont nuisibles, mais sont mis à profit dans certains montages (récupération de porteuse, déplacement de fréquence, multiplication de fréquence...).

Chapitre 2

Echantillonnage

Mots-clés et notions à connaître :

- Formules de Poisson,
- Fréquence de Nyquist,
- Repliement,
- Reconstruction parfaite et formule d'interpolation,
- Reconstruction pratique et conversion numérique-analogique.

L'échantillonnage (en anglais *sampling*) est une opération qui consiste à prélever sur un signal à temps continu une suite de valeurs, prises en une suite d'instants t_n , $n \in \mathbb{Z}$. Dans la suite nous n'envisagerons que l'échantillonnage dit *régulier* où $t_n = nT_e$. L'intérêt porté aux problèmes de l'échantillonnage tient dans le développement des techniques numériques.

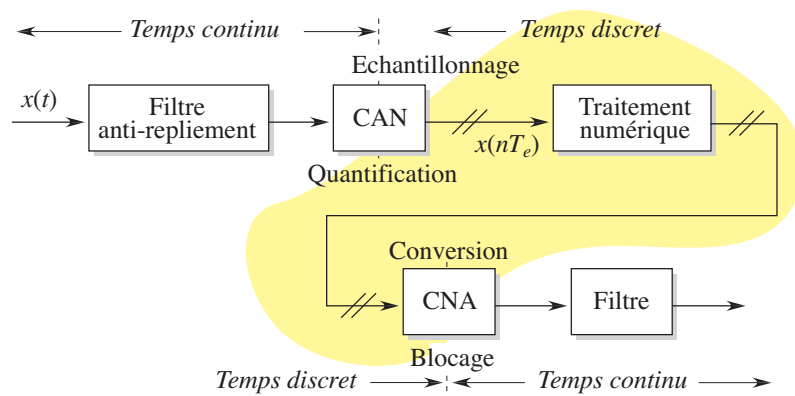


Figure 2.1: Architecture de traitement

La question fondamentale posée dans ce qui suit est de savoir s'il est possible de reconstruire $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT_e)$, ce qui est aussi une façon de dire que l'on n'a pas perdu d'information sur le signal. A première vue il existe une infinité de fonctions qui passent par les valeurs $x(nT_e)$ aux instants nT_e (pour s'en convaincre on peut prendre une sinusoïde $\sin(2\pi F_0 t)$, l'échantillonner à la fréquence F_e , ce qui donne la suite $\{\sin(2\pi F_0 n/F_e)\}$ et vérifier que toutes les sinusoïdes $\sin(2\pi(F_0 + kF_e)t)$ passent par les points d'échantillonnage). Toutefois le théorème d'échantillonnage montre que, pour les signaux à bande limitée, la reconstruction est unique.

2.1 Cas des signaux “passe-bas”

Théorème 2.1 (Formule de Poisson)

Soit $x(t)$ un signal de module intégrable ($x(t) \in L^1(\mathbb{R})$) et dont la transformée de Fourier $X(F)$ est elle-même de module intégrable. On a alors pour tout $T_e > 0$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(F - \frac{n}{T_e}\right) = T_e \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) e^{-2j\pi k F T_e} \quad (2.1)$$

Nous utilisons volontairement des lettres majuscules pour les fréquences “en Herz”, ceci afin d’éviter toute confusion avec les fréquences *réduites* usuellement notées par des lettres minuscules.

Le premier membre de 2.1 est une fonction de F de période $1/T_e$. Elle est donc développable en série de Fourier sous la forme $\sum_k X_k e^{-2j\pi k F T_e}$, où X_k est donné par :

$$X_k = T_e \int_{-1/2T_e}^{1/2T_e} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(F - \frac{n}{T_e}\right) \right) e^{-2j\pi k F T_e} dF = T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T_e}^{1/2T_e} X\left(F - \frac{n}{T_e}\right) e^{-2j\pi k F T_e} dF$$

En faisant le changement de variable $u = F - n/T_e$, il vient :

$$\begin{aligned} X_k &= T_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T_e - n/T_e}^{1/2T_e - n/T_e} X(u) e^{-2j\pi k u T_e} dF \\ &= T_e \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{-2j\pi k u T_e} dF = T_e x(-kT_e) \end{aligned}$$

et donc $\sum_n X(F - n/T_e) = \sum_k X_k e^{2j\pi k F T_e}$, ce qui donne le résultat annoncé.

NOTES :

```
%==== echant.m echantillonnage de sinus
F0=100; % frequence en Herz du sinus
%==== signal en "temps continu"
Fc=10000; tpscont=[0:1/Fc:2/F0];
xtc=sin(2*pi*F0*tpscont);
plot(tpscont,xtc), grid
%==== signal en "temps discret"
Fe=450; % frequence d'echantillonnage
tpsdisc=[0:1/Fe:2/F0];
xn=sin(2*pi*F0*tpsdisc);
hold on, plot(tpsdisc,xn,'o'), hold off
```

Théorème 2.2 (Théorème d’échantillonnage)

Soit un signal réel $x(t)$ de module intégrable ($x(t) \in L^1(\mathbb{R})$), à bande limitée B ($X(F) = 0$ pour $|F| > B$) et soit $F_e = 1/T_e$ une fréquence d’échantillonnage. On suppose que $\sum_{\mathbb{Z}} |x(nT_e)| < +\infty$.

Si $F_e \geq 2B$, $x(t)$ peut être reconstruit de manière unique à partir de la suite d’échantillons $x(nT_e)$, suivant la formule dite d’interpolation :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) h(t - nT_e) \text{ où } h(t) = \frac{\sin(2\pi B t)}{\pi F_e t} \quad (2.2)$$

Si $F_e < 2B$, la reconstruction est impossible. La fréquence minimale $2B$ s’appelle la fréquence de Nyquist.

Cela signifie que, pour un signal qui a de l’énergie dans les fréquences élevées et donc des variations rapides, il faut prendre une fréquence d’échantillonnage élevée. En pratique ce résultat est appliqué, de façon intuitive, lors du relevé d’une courbe point par point : dans les parties à variations rapides (hautes fréquences), on augmente la fréquence d’échantillonnage en prenant un plus grand nombre de points.

Le problème de l'échantillonnage, tel qu'il est posé ici, consiste à montrer que, pour une certaine classe de signaux $x(t)$, il est possible de faire coïncider $x(t)$ avec :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)h(t - nT_e) \quad (2.3)$$

pour une certaine fonction $h(t)$ à déterminer.

La formule d'interpolation 2.3 est une équation analogue à l'équation de filtrage rencontrée dans le cas du filtrage linéaire, sauf qu'ici l'entrée est une suite à temps discret à savoir $x(nT_e)$ et la sortie un signal à temps continu à savoir $\tilde{x}(t)$. Nous en verrons une conséquence sous la forme du filtrage qui intervient dans l'opération d'interpolation présentée chapitre 7.

Afin de comparer $\tilde{x}(t)$ et $x(t)$ nous allons passer dans le domaine des fréquences. Pour cela notons $H(F)$ la transformée de Fourier de $h(t)$. Alors $h(t - nT_e)$ a pour transformée de Fourier $H(F)e^{-2j\pi nFT_e}$. On en déduit que $\tilde{x}(t)$ a pour transformée de Fourier :

$$\tilde{X}(F) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e)H(F)e^{-2j\pi nFT_e}$$

En sortant $H(F)$ du signe somme et en utilisant la formule de Poisson, on obtient :

$$\tilde{X}(F) = \frac{1}{T_e}H(F) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(F - \frac{n}{T_e})$$

Cette expression fait dire que l'opération d'échantillonnage en temps a pour effet, en fréquence, de *périodiser* le spectre du signal avec une période égale à la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$. Il est à noter que le résultat est vrai même si $X(F)$ n'est pas à bande limitée. Toutefois, quand $X(F)$ est à bande limitée, il est possible de choisir $H(F)$ de façon à ce que cette expression coïncide avec $X(F)$.

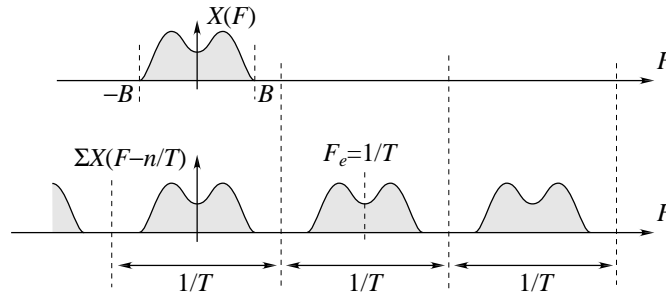


Figure 2.2: Périodisation du spectre par échantillonnage

Supposons que $X(F) = 0$ pour $|F| > B$. Deux cas sont possibles (cas de la figure 2.2) :

1. $F_e = 1/T_e < 2B$: il y a recouvrement des différentes courbes obtenues par périodisation de $X(F)$. On dit alors qu'il y a *repliement de spectre* (en anglais *aliasing*). L'origine de ce terme s'explique de la façon suivante : la partie de $X(F - n/T_e)$ qui s'ajoute à $X(F)$ dans l'intervalle $(-1/2T_e, 1/2T_e)$ est la même que la partie de $X(F)$ qui se trouve au-delà de n/T_e . Tout se passe comme si on empilait dans l'intervalle $(-1/2T_e, 1/2T_e)$, après repliement, les deux extrémités de $X(F)$. La conséquence du repliement de spectre est l'impossibilité de reconstruire $X(F)$ à partir de $\tilde{X}(F)$ et, par là même, $x(t)$ à partir des échantillons $x(nT_e)$.
2. $F_e = 1/T_e \geq 2B$: en choisissant $H(F) = T_e \text{rect}_{2B}(F)$, il vient $X(F) = \tilde{X}(F)$ et donc $x(t) = \tilde{x}(t)$. La transformée de Fourier inverse de $H(F) = T_e \text{rect}_{2B}(F)$ a pour expression $h(t) = T_e \sin(2\pi Bt)/\pi t$. En portant dans 2.3, on obtient la formule d'interpolation :

$$x(t) = \sum_n x(nT_e) \frac{\sin(2\pi B(t - nT_e))}{\pi F_e(t - nT_e)}$$

La formule d'interpolation montre que le signal réel $x(t)$ est reconstruit de façon unique à partir de la suite de ses échantillons $x(nT_e)$. Mais cette opération n'est *pas causale* puisque la reconstruction de $x(t)$ au temps t , nécessite de connaître la suite $x(nT_e)$ au delà de t . Toutefois comme la fonction $h(t)$ décroît rapidement quand t tend vers $-\infty$, il est possible de réaliser une bonne approximation causale en acceptant un retard fini. Cela revient à dire que $x(t)$ est calculé, de façon approchée, avec quelques échantillons situés au delà de t .

Cas des signaux complexes à bande limitée

Pour un signal complexe dont le spectre est nul à l'extérieur d'une bande B_c , c'est-à-dire $X(F) = 0$ pour $F \notin B_c$, le calcul de la transformée de Fourier de $\tilde{x}(t)$ est en tout point identique à celui fait précédemment. On en déduit que la fréquence minimale d'échantillonnage, qui s'obtient en exprimant simplement la condition de non-repliement, a pour expression $F_e = 1/T_e \geq B_c$. En fait on peut dire que, dans les cas réel et complexe, la fréquence de Nyquist est égale à la largeur du support en fréquence de la transformée de Fourier de $x(t)$.

2.2 Cas des signaux passe-bande ou à bande étroite

Considérons à présent un signal réel $x(t)$ dont la transformée de Fourier est nulle en dehors des deux intervalles de fréquence définis par $F_m \leq |F| \leq F_M$.

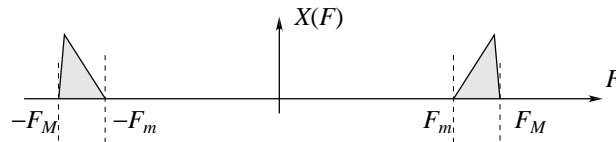


Figure 2.3: Spectre d'un signal à bande étroite

Rappelons que puisque $x(t)$ est réel, $X(F)$ possède la symétrie hermitienne. L'application brutale du théorème d'échantillonnage conduit à prendre comme fréquence de Nyquist la valeur $2F_M$. Pourtant, il est possible d'échantillonner à une cadence bien plus faible si on met à profit le fait que le spectre est nul dans l'intervalle $(-F_m, F_m)$.

Cherchons les conditions sur F_e pour que le spectre, une fois périodisé, soit constitué de bandes disjointes.

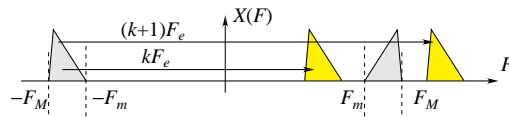


Figure 2.4: Périodisation du spectre pour un signal à bande étroite

On voit graphiquement qu'il suffit de choisir deux valeurs k et F_e , telles que la k -ième et la $(k+1)$ -ième traduites de la partie de $X(F)$ dans les fréquences négatives ne recouvrent pas la partie de $X(F)$ dans les fréquences positives. Ce qui s'écrit :

$$-F_m + kF_e < F_m \text{ et } -F_M + (k+1)F_e > F_M$$

Par conséquent F_e doit être choisie dans des plages de valeurs de la forme :

$$\frac{2F_M}{k+1} < F_e < \frac{2F_m}{k} \quad (2.4)$$

où k est un entier tel que $(2F_M/k+1) < 2F_m/k$, c'est-à-dire $k \leq F_m/(F_M - F_m)$. Plus la valeur choisie de k est grande, plus la plage des fréquences possibles d'échantillonnage est située dans les fréquences basses. Par conséquent la plus petite fréquence d'échantillonnage qui assure le non repliement du spectre est donc donnée par $2F_M/(k_0+1)$ où k_0 est la partie entière de $F_m/(F_M - F_m)$. Les fréquences F_e d'échantillonnage permises sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Plage pour F_e			
k_0	$2F_M/(k_0 + 1)$	$\leq F_e \leq$	$2F_m/k_0$
\vdots		\vdots	
k	$2F_M/(k + 1)$	$\leq F_e \leq$	$2F_m/k$
\vdots		\vdots	
0	$2F_M$	$\leq F_e <$	$+\infty$

Remarquons que plus la fréquence d'échantillonnage est choisie petite plus la plage de fréquences à laquelle elle appartient est étroite.

Formule d'interpolation

Pour établir la formule de reconstruction, le calcul est en tout point analogue à celui fait pour un signal "passe-bas". Mais il faut prendre, pour faire coïncider $\tilde{x}(t)$ avec $x(t)$, le filtre passe-bande réel défini par :

$$H(F) = T_e (\text{rect}_{\Delta F}(F - F_0) + \text{rect}_{\Delta F}(F + F_0))$$

où $\Delta F = F_M - F_m$ et $F_0 = (F_M + F_m)/2$. Et donc $h(t) = 2T_e \cos(2\pi F_0 t) \sin(\pi \Delta F t) / \pi t$. Il suffit alors d'utiliser l'expression $x(t) = \sum_n x(nT_e)h(t - nT_e)$ pour obtenir la formule d'interpolation.

2.3 Cas des signaux passe-bas de bande infinie

En pratique, lorsque la fréquence d'échantillonnage est imposée, le phénomène de repliement de spectre ne peut être évité. Il y a donc perte d'information sur le signal à échantillonner. Le problème est de limiter autant que possible cette perte. Pour cela on choisit de filtrer *préalablement* le signal avant l'opération d'échantillonnage proprement dite, suivant le schéma représenté figure 2.5.

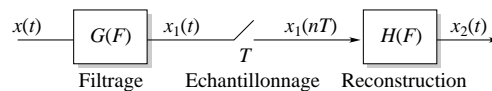


Figure 2.5: Préfiltrage du signal avant échantillonnage

A priori le signal $x_2(t)$ reconstruit doit contenir toutes les fréquences compatibles avec la condition de non-repliement à la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/T_e$: il faut donc supposer que la bande $B = F_e/2$. Dans ce cas le filtre $H(F)$ a pour gain complexe $H(F) = T_e \text{rect}_{F_e}(F)$.

Afin de déterminer au mieux le filtre $G(F)$, nous allons minimiser l'écart quadratique :

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x_2(t)|^2 dt$$

entre le signal original $x(t)$ et le signal $x_2(t)$ obtenu à partir des échantillons $x_1(nT_e)$. Avec des notations évidentes, en utilisant la formule de Parseval, on a encore :

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(F) - X_2(F)|^2 dF$$

Déterminons l'expression de $X_2(F)$. En utilisant la formule de Poisson :

$$X_2(F) = \sum_n x_1(nT_e)H(F)e^{-2j\pi nFT_e} = \frac{1}{T_e} \sum_n X_1(F - n/T_e)H(F)$$

Comme $H(F) = T_e \text{rect}_{F_e}(F)$ et que $X_1(F) = X(F)G(F)$, on en déduit que :

$$X_2(F) = \text{rect}_{F_e}(F) \sum_n X(F - n/T_e)G(F - n/T_e) \quad (2.5)$$

et donc que :

$$\varepsilon^2 = \int_{|F| < F_e/2} |X(F) - X_2(F)|^2 dF + \int_{|F| > F_e/2} |X(F)|^2 dF \quad (2.6)$$

Comme tous les termes sont positifs et que le second terme du membre droit de l'équation (2.6) ne dépend pas du choix de $G(F)$, le minimum est obtenu en prenant $G(F) = \text{rect}_{F_e}(F)$: en effet, dans ce cas et d'après 2.5, $X_2(F) = X(F)\text{rect}_{F_e}(F)$, ce qui annule complètement le premier terme de (2.6).

Ce résultat est important, puisqu'il indique que l'on doit faire précéder l'opération d'échantillonnage d'un filtrage passe-bas idéal dans la bande $(-F_e/2, F_e/2)$, appelé filtrage *anti-repliement*. Évidemment il y a perte d'information et ce que l'on peut reconstruire, au mieux, est le signal $x_1(t)$. Ce qui est hors de la bande $(-F_e/2, F_e/2)$ est perdu.

Exemple 2.1 (Signal MIC en téléphonie numérique) le signal téléphonique est échantillonné à la fréquence de 8000 échantillons/s. Pour éviter le repliement, on effectue un filtrage du signal dans la bande $(0 - 3400)$ Hz légèrement plus étroite que le minimum requis de 4000 Hz. Chaque échantillon est ensuite codé sur 8 bits. On obtient ainsi un débit de 64 kbits/s. Cette suite est désignée par le terme de *MIC* (pour *Modulation par Impulsion et Codage*).

2.4 Reconstruction pratique

La conversion du signal analogique à partir de la suite numérique nécessite une bonne approximation causale d'un filtre passe-bas idéal. En pratique la façon la plus simple de procéder consiste à utiliser un *bloqueur d'ordre 0* (*convertisseur numérique-analogique* ou *CNA*) qui bloque pendant toute la durée T_e entre deux échantillons la valeur numérique appliquée à l'entrée. Le signal obtenu en sortie du bloqueur d'ordre 0 a donc pour expression :

$$x_0(t) = \sum_n x(nT_e)h_0(t - nT_e) \text{ où } h_0(t) = \text{rect}_{T_e}(t - T_e/2)$$

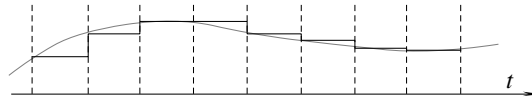


Figure 2.6: Reconstruction par bloqueur d'ordre 0

Le signal $x_0(t)$ est un signal en escalier dont les marches ont pour amplitude $x((n+1)T_e) - x(nT_e)$. En prenant la transformée de Fourier de $x_0(t)$ et en utilisant la formule de Poisson, on obtient :

$$X_0(F) = \sum_n H_0(F)X(F - n/T_e) \text{ où } H_0(F) = \frac{\sin(\pi FT_e)}{\pi F} e^{-j\pi FT_e} \quad (2.7)$$

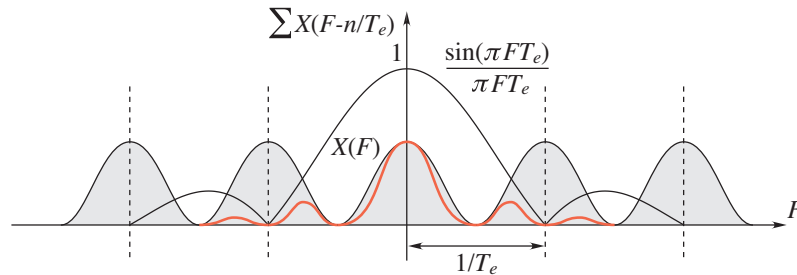


Figure 2.7: Spectre en sortie du bloqueur d'ordre 0

En observant $|X_0(F)|$ représenté à la figure 2.7, on voit apparaître deux formes de distorsion entre le signal de départ $x(t)$ et le signal $x_0(t)$ en sortie du bloqueur d'ordre 0.

1. une distorsion dans la bande utile $(-1/2T_e, 1/2T_e)$ du signal. Un remède est de réaliser avant échantillonnage une compensation par le filtre de gain $\pi FT_e / \sin(\pi FT_e)$;
2. et une distorsion hors de la bande utile $(-1/2T_e, 1/2T_e)$. Cette distorsion peut être gênante : ainsi, en acoustique, si elle se trouve dans la bande audible, il faut utiliser un filtre passe-bas pour supprimer ces composantes “hautes fréquences”.

Le calcul précédent montre que les lobes de la fonction sinus-cardinal ont pour largeur $1/T_e$ où T_e représente la durée de la fonction de reconstruction du bloqueur mais aussi la période d'échantillonnage du signal. D'où l'idée de faire précéder le bloqueur d'une opération d'interpolation d'ordre n . Nous verrons que cette opération est possible car le signal vérifie les conditions du théorème d'échantillonnage. Dans ce cas l'énergie hors de la bande utile est située essentiellement autour de la fréquence n/T_e . Ainsi en audio, en choisissant un facteur d'interpolation suffisamment grand, la bande de fréquence autour de n/T_e peut même être hors de la bande audible et l'écoute ne nécessite alors aucun filtre supplémentaire en sortie du bloqueur. C'est ce qui est fait sur les cartes audio des micro-ordinateurs que nous utilisons tous les jours lorsque les fréquences d'échantillonnage justifient ce traitement.

Chapitre 3

Signaux déterministes à temps discret

Mots-clés et notions à connaître :

- TFTD, fréquences réelles et fréquences réduites,
- Suite tronquée et ondulations du spectre,
- TFD, convolution circulaire,
- Résolution et précision.

3.1 Généralités

Un signal *déterministe à temps discret* est une suite de valeurs réelles ou complexes indexées par \mathbb{Z} . On utilise aussi le terme de *signal numérique* bien que ce terme soit plutôt utilisé dans le domaine des communications pour désigner un signal à temps continu servant à transmettre un message numérique.

En traitement du signal, un signal à temps discret provient souvent de l'échantillonnage à la cadence $F_e = 1/T_e$, d'un signal $x_c(t)$ déterministe à temps continu qui est supposé à bande limitée $(-F_e/2, F_e/2)$. Dans la suite nous supposons que tous les signaux sont échantillonnés à la même cadence et nous omettons alors d'indiquer T_e en notant $x(n) = x_c(nT_e)$.

Comme pour les signaux à temps continu on peut distinguer les signaux d'*énergie finie* qui vérifient :

$$E = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 < +\infty \quad (3.1)$$

et les signaux de *puissance finie* qui vérifient :

$$P = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 < +\infty \quad (3.2)$$

Voici quelques exemples de signaux déterministes à temps discret.

- signal *impulsion-unité*, d'énergie finie 1, défini par :

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- signal *échelon-unité* défini par $u(n) = \mathbb{1}_{\mathbb{N}}(n)$,
- signal *rectangulaire* de longueur N défini par $\text{rect}_N(n) = \mathbb{1}_{\{0, \dots, N-1\}}(n)$,

- *exponentielle complexe* de puissance A^2 défini par $x(n) = Ae^{2j\pi f_0 n}$, avec $f_0 \in (0, 1)$ ¹,
- signal *sinusoïdal* de puissance $A^2/2$ défini par la suite $x(n) = A \sin(2\pi f_0 n)$, avec $f_0 \in]0, 1/2[$,
- *exponentielle réelle* d'énergie finie $1/(1 - a^2)$ définie par $x(n) = a^n u(n)$ avec $|a| < 1$.

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```

%==== exple1.m exponentielle complexe
N=20; n=[0:N-1];
f0=.12; xn=exp(2*pi*j*f0*n);
subplot(311), plot(xn,'x'), axis('square')
subplot(312), plot(n,real(xn),'x')
subplot(313), plot(n,imag(xn),'x')

```

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```

%==== exple2.m signaux
N=20; n=[0:N-1];
rectn=ones(1,N);
subplot(211), plot(n,rectn,'x'), grid
a=.8; a2n=a.^n;
subplot(212), plot(n,a2n,'x'), grid

```

3.2 Transformation de Fourier à temps discret (TFTD)

3.2.1 Définition

Définition 3.1

On appelle transformée de Fourier à temps discret (TFTD) du signal numérique $x(n)$ la fonction définie par :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-2j\pi n f} \quad (3.3)$$

Par définition, la TFTD est périodique de période 1. Pour cette raison on limite sa représentation à un intervalle de longueur 1 et on prend soit $(-1/2, 1/2)$ soit $(0, 1)$. Remarquons que la suite $x(n)$ représente aussi la suite des coefficients de Fourier de la fonction périodique $X(f)$. Par conséquent on a la formule de TFTD inverse :

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)e^{2j\pi n f} df \quad (3.4)$$

A titre d'exemple, calculons la TFTD du signal rectangulaire $x(n) = \frac{1}{N} \text{rect}_N(n)$. Il vient :

$$X(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2j\pi n f} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-2j\pi N f}}{1 - e^{-2j\pi f}} = e^{-j\pi(N-1)f} \frac{\sin(N\pi f)}{N \sin(\pi f)}$$

On a représenté figure 3.1 $|X(f)|$ pour $N = 10$. On note que le lobe principal est de largeur $2/N$, que les lobes secondaires sont de largeur $1/N$ et que le premier lobe secondaire se trouve à environ 13 dB en-dessous du lobe principal.

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```

%==== specdir.m calcul direct du spectre
N=10; % n=[0:N-1]; rectn=ones(1,N);
Nf=2048; freq=[0:Nf-1]/Nf;
spec=20*log10(abs(sin(N*pi*freq)./sin(pi*freq))/N);
%==== on a NaN en f=0
spec(1)=0;
plot(freq,spec), grid
%==== on se limite a l'intervalle [-40 0]
set(gca,'ylim',[-40 0])
hold on, plot([0 1],[-13 -13],'-r'), hold off

```

¹ Pour l'exponentielle complexe, le changement de f_0 en $f_0 + N$, où N désigne un entier quelconque, conduit à deux suites indistingables. C'est pourquoi on ne considère que des valeurs de $f_0 \in (0, 1)$.

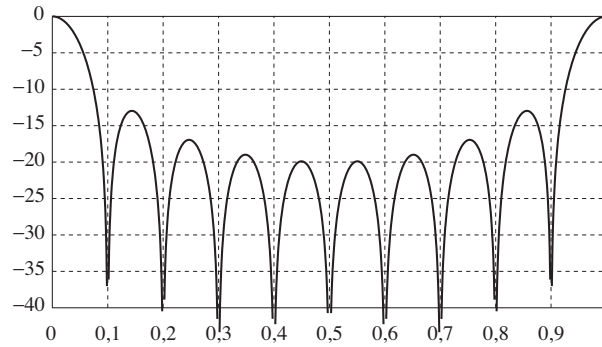


Figure 3.1: Module du spectre de la fenêtre rectangulaire pour $N = 10$

3.2.2 Propriétés

Propriété 3.1

1. si $x(n)$ est de module sommable, la série $\sum_n x(n)e^{-2j\pi n f}$ converge uniformément vers une fonction continue de f ,
2. si $x(n)$ est de carré sommable, sans être de module sommable, il n'y a plus convergence uniforme. La série converge seulement en moyenne quadratique. Rappelons que $\sum_n |x(n)| < +\infty \Rightarrow \sum_n |x(n)|^2 < +\infty$, mais que la réciproque est fautive.

Illustrons le point 2. Considérons la fonction $X(f)$, périodique de période 1, définie pour $f \in (-1/2, 1/2)$ par :

$$X(f) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |f| < f_0 \\ 0 & \text{pour } |f| > f_0 \end{cases}$$

où $f_0 \in (-1/2, 1/2)$. En utilisant la formule inverse, on obtient pour les coefficients de Fourier la suite $x(n) = \sin(2\pi n f_0) / (\pi n)$ où $n \in \mathbb{Z}$. Considérons à présent la fonction $X_N(f) = \sum_n^N x(n)e^{-2j\pi n f}$. La théorie de Fourier montre que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f) - X_N(f)|^2 df \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Il n'y a cependant pas convergence uniforme, dans le sens où le sup de l'écart ne tend pas vers 0. Un calcul compliqué montre d'ailleurs que le maximum de la fonction $X_N(f)$ reste légèrement supérieur à 1,08 et ce quel que soit N . Ce phénomène est général : au voisinage d'une discontinuité, il peut apparaître des oscillations non évanescentes, que l'on désigne, dans le contexte des signaux, par *phénomène de Gibbs*.

Remarquons enfin que, pour assurer la convergence en un point de discontinuité tel que f_0 , il suffit d'affecter à la fonction la valeur du demi-saut : ici on prendra $X(f) = 1/2$.

On remarque que presque toutes les propriétés peuvent être obtenues par analogie avec celles de la transformée de Fourier à temps continu.

Propriété	temps	fréquence
linéarité	$ax(n) + by(n)$	$aX(f) + bY(f)$
translation en temps	$x(n - n_0)$	$X(f)e^{-2j\pi f n_0}$
translation en fréquence	$x(n)e^{2j\pi f_0 n}$	$X(f - f_0)$
convolution	$x(n) \star y(n)$	$X(f)Y(f)$
conjugaison	$x^*(n)$	$X^*(-f)$
	réelle	$X(f) = X^*(-f)$
	réelle, paire	réelle, paire

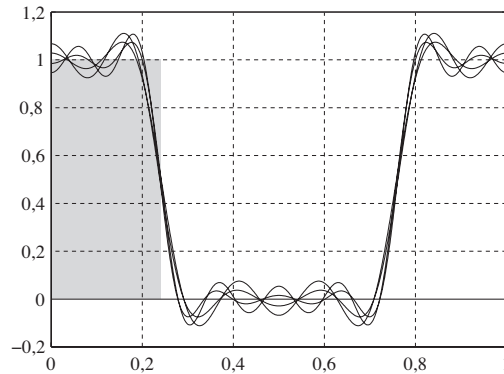


Figure 3.2: Phénomène de Gibbs : $X_N(f) = \sum_{n=0}^N x(n)e^{-2j\pi n f}$ avec $N = 5, 6, 7, 8$ pour la suite $x(n) = \sin(2\pi f_0 n)/\pi n$, où $f_0 = 0,24$, qui tend quadratiquement vers la fonction rectangle de largeur $2f_0$;

Définition 3.2 (Convolution linéaire)

L'expression

$$x(n) \star y(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x(k)y(n-k) \quad (3.5)$$

est appelée convolution linéaire de la suite $x(n)$ par la suite $y(n)$.

Propriété 3.2 (Relation de Parseval)

En utilisant la propriété de convolution, on obtient l'expression de conservation du produit scalaire :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)y^*(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f)Y^*(f)df$$

qui donne pour $y(n) = x^*(n)$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n)|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |X(f)|^2 df$$

3.2.3 Relation entre la TFTC et la TFTD

On considère un signal à temps continu $x_a(t)$. On note $X_a(F)$ sa transformée de Fourier à temps continu (TFTC). On échantillonne ce signal à la fréquence $F_e = 1/T_e$. On pose $x_e(n) = x_a(nT_e)$. On note $X_e(f)$ la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de la suite $x_e(n)$. La question est : quelle est la relation entre $X_a(F)$ et $X_e(f)$. La réponse est donnée par le théorème d'échantillonnage que nous rappelons ici :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a(F_e(f-k))$$

On retiendra :

TFTC \rightarrow TFTD :

- on divise l'axe des fréquences par F_e ,
- on périodise avec la période 1,
- on divise l'amplitude par T_e .

TFTD \rightarrow TFTC :

- on multiplie l'axe des fréquences par F_e ,
- on multiplie l'amplitude par T_e ,
- si le signal $x_a(t)$ est à bande limitée, on limite la TFTC à cette bande.

Remarque : si le signal $x_a(t)$ est réel, la bande est centrée autour de la fréquence 0.

3.3 Transformation de Fourier discrète (TFD)

On a vu que l'outil de base de l'étude des signaux numériques était la transformée de Fourier à temps discret $X(f) = \sum_n x(n)e^{-2j\pi n f}$. En pratique, cette fonction ne peut être calculée que sur un nombre fini de valeurs de n et pour un nombre fini de valeurs de f . Ces raisons sont à l'origine de l'introduction de la transformée de Fourier discrète ou TFD. On limite l'indice n à une plage de N valeurs et on discrétise l'intervalle $(0, 1)$ en prenant un nombre fini de P fréquences régulièrement espacées de la forme $f = k/P$ avec $k \in \{0, \dots, P-1\}$.

Définition 3.3

Soit la suite finie $\{x(0), x(1), \dots, x(N-1)\}$. On appelle transformée de Fourier discrète (en abrégé TFD), la suite finie $\{X(0), X(1), \dots, X(P-1)\}$ définie par :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_P^{kn} \text{ avec } w_P = \exp(-2j\pi/P) \quad (3.6)$$

Notons que w_P est racine P -ième de l'unité.

Très souvent, en particulier lors de l'utilisation de l'algorithme de calcul rapide (*Fast Fourier Transform*, en abrégé FFT), on prend $N = P$. On obtient les formules directe et inverse :

$$\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w_N^{kn} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)w_N^{-kn} \end{cases} \quad (3.7)$$

Pour démontrer la formule inverse on utilise l'identité :

$$g_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w_N^{kn} = 1 \text{ si } k = 0 \text{ mod } N, 0 \text{ sinon} \quad (3.8)$$

Exemple 3.1 (exponentielle complexe) Pour illustrer le lien entre la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier à temps discret, considérons l'exponentielle complexe tronquée $x(n) = A \exp(2j\pi f_0 n) \mathbb{1}_{\{0, \dots, N-1\}}(n)$ où $f_0 \in (0, 1)$. Sa transformée de Fourier à temps discret a pour expression :

$$X_c(f) = A \frac{\sin(\pi N(f - f_0))}{\sin(\pi(f - f_0))} e^{-j\pi(f - f_0)(N-1)} \quad (3.9)$$

On retrouve un résultat général qui est que la troncature introduit des ondulations et "étale" le spectre. On constate la présence d'un lobe principal de largeur $2/N$ bordé de lobes secondaires.

Le passage à la TFD se fait en ne conservant que N points de fréquence de la forme $f = k/N$:

$$X(k) = A \frac{\sin(\pi N(f_0 - k/N))}{\sin(\pi(f_0 - k/N))} e^{j\pi(f_0 - k/N)(N-1)}$$

Nous avons représenté, figure 3.3, $X(k)$ pour $f_0 = 0,2$ et $N = 32$. La suite $X(k)$ comporte plusieurs valeurs non nulles, sauf si f_0 est juste un multiple de $1/N$.

Dans les propriétés données ci-après, les opérations sur les indices doivent être effectuées modulo N .

Ainsi si la suite $\{x(n)\}$ désigne $\{x(0), x(1), x(2), x(3), x(4), x(5), x(6), x(7)\}$, la suite notée $\{x(n-3)\}$ désigne $\{x(5), x(6), x(7), x(0), x(1), x(2), x(3), x(4)\}$ et la suite notée $\{x(-n)\}$ désigne $\{x(0), x(7), x(6), x(5), x(4), x(3), x(2), x(1)\}$.

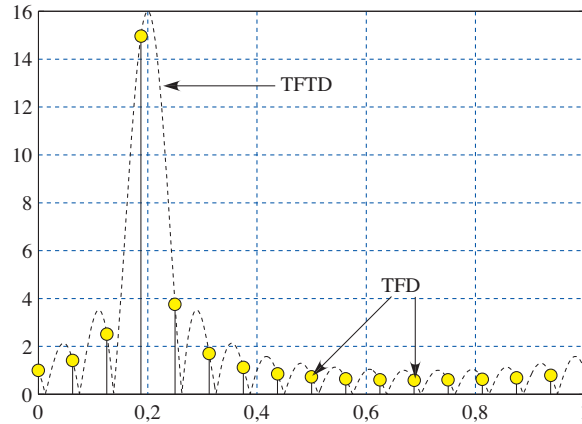


Figure 3.3: Module de la TFD de $x(n) = e^{2j\pi f_0 n}$, pour $n \in \{0, \dots, N-1\}$, avec $N = 16$ et $f_0 = 0,2$. En pointillé, le module de la TFD de la suite.

Propriété 3.3

- linéarité: $ax(n) + b(y(n))$ a pour TFD $aX(k) + bY(k)$,
- retard: $x(n-p)$ a comme TFD $w_N^{pk} X(k)$,
- convolution circulaire: $x(n) \star y(n)$ a comme TFD $X(k)Y(k)$,
- symétrie hermitienne: si $x(n)$ réelle alors $X(k) = X^*(-k)$,
- conjugaison: $x^*(n)$ a comme TFD $X^*(-k)$.

Convolution circulaire

Soit $x(n)$ et $y(n)$ deux suites de longueur N . On note $X(k)$ et $Y(k)$ leurs transformées de Fourier discrètes respectives. Calculons la transformée de Fourier discrète inverse de la suite $Z(k) = X(k)Y(k)$. Il vient :

$$\begin{aligned} z(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x(p)w_N^{pk} y(q)w_N^{qk} \right\} w_N^{-nk} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{q=0}^{N-1} x(p)y(q) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_N^{(p+q-n)k} \right\} \end{aligned}$$

En utilisant l'identité 3.8, il vient :

$$z(n) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p)y(n-p) \quad (\text{indices calculés modulo } N) \quad (3.10)$$

L'opération décrite par la relation 3.10 s'appelle une *convolution circulaire*. Elle est à rapprocher de l'expression 3.5 de la convolution linéaire.

Exemple 3.2 (Propriétés de la TFD pour le retard) On considère une suite $\{x_n\}$ de longueur N . On calcule sa TFD $\{X_k\}$ sur N points à laquelle on applique le théorème du retard en prenant un retard égal à 1. Quelle est l'expression de la suite originale ?

INDICATIONS : on construit la suite $\{Y_k = e^{-2\pi jk/N} X_k\}$. La transformée inverse de $\{Y_k\}$ est :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_n &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N Y_k e^{+2\pi jnk/N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N e^{-2\pi jk/N} X_k e^{+2\pi jnk/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N e^{2\pi j(n-1)k/N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-2\pi jmk/N} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{k=0}^N e^{2\pi j(n-1-m)k/N}\end{aligned}$$

La dernière somme vaut 0 ou N si $n-1-m=0 \pmod{N}$, soit :

$$\tilde{x}_n = x_{(n-1) \pmod{N}}$$

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```
%==== propmodulo.m ====
N=16; xn=[1:N]; n=[0:N-1];
subplot(211), plot(n,xn,'o'); grid
nfft=N; % prendre nfft>N pour avoir un vrai retard
Xk=fft(xn,nfft); k=[0:nfft-1];
Xk=Xk .* exp(-2*pi*j*k/nfft);
xnt=real(ifft(Xk,nfft));
subplot(212), plot([0:nfft-1],xnt,'o'); grid
```

Si on veut que la suite soit retardée dans son ensemble, il suffit de rajouter un élément nul (on en rajoute autant qu'il y a de retard). Dans le programme `propmodulo` taper simplement `nfft=N+1`.

Formule de Parseval

En faisant $y(n) = x^*(-n)$ dans le résultat 3.10 et en remarquant que $z(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k)$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2 \quad (3.11)$$

3.4 Récapitulatif

Nous avons vu que l'évaluation numérique, à partir d'une observation, du spectre d'un signal à temps continu nécessite :

- d'échantillonner le signal observé,
- de se limiter à un nombre fini d'échantillons,
- enfin de calculer la TFTD sur un nombre fini N de points de fréquence, ce qui nous donne la TFD. Le calcul se fait par l'algorithme de FFT, algorithme rapide dont le nombre de multiplications complexes est de l'ordre de $N \log_2 N$. On peut toujours donner un nombre de points de calcul \geq au nombre de points de signal. Si le signal est de longueur $< N$, le calcul est effectué sur la suite complétée avec des 0 pour obtenir une longueur N . Dans le cas contraire le calcul est effectué sur N points du signal *tronqué* à N échantillons.

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```
%==== specFFT.m calcul du spectre par FFT
N=10; n=[0:N-1]; rectn=ones(1,N)/N;
Nf=2048; freq=[0:Nf-1]/Nf;
spec=20*log10(abs(fft(rectn,Nf)));
%==== on a NaN en f=0
plot(freq,spec), grid
%==== on se limite a l'intervalle [-40 0]
set(gca,'ylim',[-40 0])
hold on, plot([0 1],[-13 -13],'-r'), hold off
```

Nous allons présenter, à partir d'un exemple, les déformations introduites par ces différentes opérations sur le spectre.

Exemple 3.3 On considère le signal à temps continu $x(t) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau) \mathbb{1}_{(0, +\infty[}(t)$ avec $\tau > 0$. Un calcul sans difficulté donne pour sa transformée de Fourier l'expression :

$$X(F) = \int_0^{+\infty} \tau^{-1} e^{-t/\tau} e^{-2j\pi Ft} dt = \frac{1}{1 + 2j\pi F\tau}$$

On échantillonne $x(t)$ à la fréquence $F_e = 1/T_e$. On note $x_e(n) = x(nT_e)$ la suite de ses échantillons et $X_e(f)$ la TFTD de $x_e(n)$. On a vu que la TFTD s'obtient à partir de $X(F)$ en normalisant l'échelle des fréquences par division par F_e puis en périodisant avec la période 1. On note que dans notre cas, puisque le signal est de bande infinie, il y aura du repliement de spectre quelle que soit la valeur de F_e .

On évalue la TFTD en ne prenant que N échantillons de la suite $x_e(n)$. Cela revient à multiplier la suite $x_e(n)$ par une fonction rectangulaire de durée N (en secondes cela correspond à une durée $D = NT_e$). On obtient la suite

$$\tilde{x}_e(n) = x_e(n) \mathbb{1}(n \in \{d, \dots, d + N - 1\})$$

Cela revient à convoluer le spectre de $x_e(n)$ par la fonction $\sin(\pi N f) / \sin(\pi f) e^{j\phi(d)}$. En terme de module la troncature introduit dans le spectre des ondulations de pseudo-période $1/N$. Dans la suite on néglige l'effet de d et on suppose $d = 0$.

Partant de la suite $\{x_e(0), \dots, x_e(N - 1)\}$ de ces échantillons, on veut calculer $X_e(f)$. Comme $X_e(f)$ est par définition périodique de période 1, il suffit de ne considérer que l'intervalle $(0, 1)$. Pour pouvoir effectuer le calcul sur ordinateur, il faut alors discrétiser l'intervalle en prenant par $f_k = k/L$ avec $k \in \{0, \dots, L - 1\}$. Le calcul est fait au moyen de la FFT.

En conséquence le traitement introduit :

- un repliement éventuel, dû à l'opération d'échantillonnage,
- des ondulations dues à la durée finie d'observation et dont la pseudo-période est $1/N$ si N désigne le nombre d'instantants d'observation,
- une précision d'affichage due au choix de L .

La figure 3.4 récapitule ces différents effets. On observe le repliement sur les spectres représentés à la sous-figure (b). Sur le spectre de la suite constituée des 5 premières valeurs, on observe des ondulations de pseudo-période $1/5$.

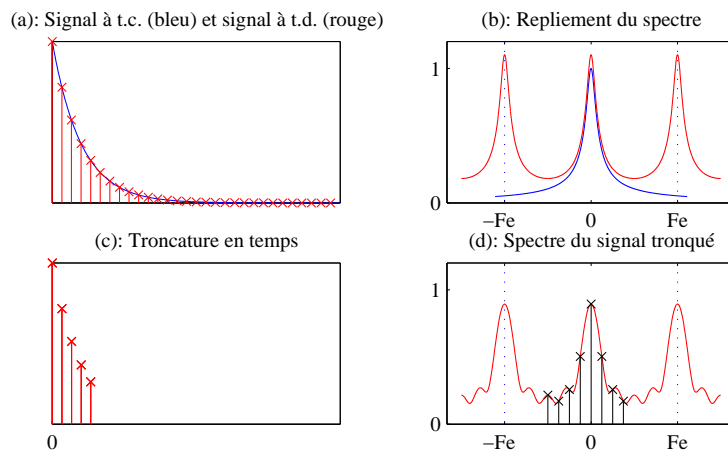


Figure 3.4: Effets de l'échantillonnage et du fenêtrage sur le spectre du signal.

3.5 Résolution et précision

3.5.1 Résolution et fenêtrage

On considère le signal numérique de durée finie N , défini par :

$$x(n) = A \exp(2j\pi f_0 n) \text{ pour } n \in \{0, \dots, N-1\}$$

où $f_0 \in (-1/2, 1/2)$. La forme de la TFTD $X(f)$ de cet extrait de signal est donnée par l'expression 3.9. L'allure de $|X(f)|$ fait apparaître un lobe principal de largeur $2/N$ autour de la fréquence f_0 et des lobes secondaires de largeur $1/N$.

Résolution

Considérons ensuite la somme de deux exponentielles complexes :

$$x(n) = A \exp(2j\pi f_0 n) + A \exp(2j\pi f_1 n) \text{ pour } n \in \{0, \dots, N-1\}$$

où f_0 et $f_1 \in (-1/2, 1/2)$.

La superposition et le tracé du spectre montre que si l'écart $|f_1 - f_0|$ est supérieur à $1/N$ (ordre de grandeur), alors il est possible de distinguer les deux fréquences f_0 et f_1 par examen du spectre. $1/N$ est désigné par *limite de Fourier*.

La *résolution* en fréquence, ou aptitude à distinguer deux fréquences voisines dans le spectre, est liée au nombre de points du signal.

Fenêtrage

On considère maintenant la cas du signal :

$$x(n) = A_0 \exp(2j\pi f_0 n) + A_1 \exp(2j\pi f_1 n) \text{ pour } n \in \{0, \dots, N-1\}, A_0 > A_1$$

Un masquage du lobe principal de la composante en f_1 peut survenir en raison des ondulations présentes dans le spectre de $A_0 \exp(2j\pi f_0 n)$. Une solution pour limiter ce phénomène consiste à appliquer une pondération sur le bloc de données. On interprète ceci en disant qu'une fenêtre rectangulaire introduit des discontinuités "brutales" aux extrémités du bloc, tandis que l'application d'une fenêtre "adoucit" cette discontinuité.

On construit donc un nouveau bloc $\{x_h(n) = w(n)x(n)\}$.

Exercice 3.1 On note $x_h(n) = \pi_h(n)x(n)$, la suite obtenue en pondérant les valeurs de $x(n)$ par la *fenêtre de Hamming* dont l'expression est donnée par :

$$\pi_h(n) = C(0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/N)) \text{ pour } n \in \{0, \dots, N-1\}$$

où C est choisie de façon telle que $X_h(f)$ présente une amplitude égale à A en $f = f_0$ (calibration des amplitudes). Déterminer l'expression de C . Indiquer l'effet de $\pi_h(n)$ sur la résolution.

Quelques fenêtres

Type	Expression	Affaibl.	Lobe princ.	Aff. (dB/oct.)
Rectangulaire	$\Pi_N = \mathbf{1}_{[0, N-1]}$	-13 dB	$\frac{2}{N}$	-6
Triangulaire (Bartlett)	$\Pi_N \star \Pi_N$	-27 dB	$\frac{4}{N}$	-12
Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$ ($0 \leq n \leq N-1$)	-43 dB	$\frac{4}{N}$	-6
Hann (Hanning)	$0,5(1 - \cos(2\pi n/(N+1)))$ ($1 \leq n \leq N$)	-32 dB		-18
Blackman	$(0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/(N-1)) + 0,08 \cos(4\pi n/(N-1)))$ ($0 \leq n \leq N-1$)	-58 dB		-18

Autres : Tukey, Parzen, Blackman-Harris, Gaussienne, Kaiser-Bessel...

3.5.2 Précision

On ne calcule $X(f)$ que pour $f = k/P$ avec $k \in \{0, \dots, P-1\}$. P influe seulement sur la précision du “tracé” du spectre et donc sur la détermination de f_0 .

La *précision*, ou aptitude à mesurer une valeur de fréquence, est liée au nombre de points de calcul du spectre du signal.

3.6 Quelques éléments sur les images

Les images telles que nous les considérerons ici sont définies par des tableaux (N_l lignes \times N_c colonnes) ou chaque élément du tableau est un *pixel*. En pratique on rencontrera trois sortes de structures :

- des tableaux bi-dimensionnels ou chaque élément est un nombre entier servant d’indice dans une table ($N_p \times 3$) de couleurs, la *palette*;
- des tableaux tri-dimensionnels ($N_l \times N_c \times 3$) dans lequel chacun des trois plans correspond soit à une couleur primaire (rouge, vert, bleu), soit à une composante (teinte, saturation, luminosité) ;
- une structure de données correspondant exactement au cas précédent.

Dans le cas des images indexées, la fonction `imagesc` affiche une image en faisant une “règle de 3” pour ramener les indices entre 1 et N_p . La fonction `image` “sature” les indices de valeur < 1 à 1 et $> N_p$ à N_p .

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```
%==== img01.m creation d'une image indexee
% la palette par defaut a 64 couleurs
img=round(rand(128,128)*63+1); % tableau d'indice (l'image)
figure(1)
image(img)
% on definit une autre palette avec 256 niveaux de gris
mapalette=[0:1/255:1]*ones(1,3);
figure(2); colormap(mapalette)
% et une autre image
img=round(rand(128,128)*255+1);
image(img)
```

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```
%==== img02.m lecture d'une image
img=imread('monimage.jpg','JPEG'); % image et type
imagesc(img), axis('image')
```

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```
%==== lecwenwen.m exemple de lecture d'image .raw
% creee dans Photoshop (image indexee, niveaux de gris 8 bits
nl=354; nc=354;
%==== lecture image
fid = fopen('wenwen2.raw','r');
img=zeros(nl,nc);
for k=1:nl
    lig=fread(fid,nl,'int8');
    img(:,k)=lig;
end
img=img+129; img=img';
%==== lecture palette
fidp = fopen('mapalette.act','r');
mapl=fread(fidp);
mapalette=zeros(3,256); mapalette(:)=(255-mapl)/256;
figure(1), image(img); axis('image')
figure(2), imagesc(img); axis('image')
figure(3), image(img); axis('image')
colormap(mapalette')
fclose all
```

MATLAB[®] a été doté de fonctions 2-D dès l'origine. En particulier on a une fonction de calcul de TFD-2D `fft2`.

Définition 3.4

La TFD-2D d'une suite finie $\{x(k, \ell)\}$, avec $k \in \{0, \dots, M-1\}$ et $\ell \in \{0, \dots, N-1\}$, est la suite définie, pour $m \in \{0, \dots, M-1\}$ et $n \in \{0, \dots, N-1\}$, par :

$$X(m, n) = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} x(k, \ell) \exp \left\{ -2\pi j \left(\frac{km}{M} + \frac{\ell n}{N} \right) \right\} \quad (3.12)$$

Si on change l'expression de $X(m, n)$ en :

$$X(m, n) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \left(\exp \left\{ -2\pi j \frac{\ell n}{N} \right\} \sum_{k=0}^{M-1} x(k, \ell) \exp \left\{ -2\pi j \frac{km}{M} \right\} \right) \quad (3.13)$$

alors, on voit que la somme intérieure est une TFD-1D sur les colonnes du tableau x . La TFD-2D est ensuite simplement réalisée en faisant la TFD-1D de la suite des coefficients obtenus :

```
fft(fft(x).)'
```

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```
%==== img03.m TFD-2D
nfft=128; freq=[0:nfft-1]/nfft;
img=ones(8,8); % image "fonction porte"
%==== contenu spectral (forme en sin(N pi f)/sin(pi f))
imgs=fft2(img,nfft,nfft);
waterfall(freq,freq,abs(imgs)); % ou mesh, surf...
set(gca,'xlim',[0 1/2],'ylim',[0 1/2])
colormap('jet')
```


Chapitre 4

Transformée en z et filtrage

Mots-clés et notions à connaître :

- transformée en z , causalité, lien avec le domaine de convergence,
- convolution, filtre, stabilité,
- gain complexe, fonction de transfert, pôles et zéros,
- méthode de la fenêtre.

4.1 Transformation en z

La transformée en z est un outil particulièrement pratique lorsqu'on veut résoudre des équations récurrentes linéaires à coefficients constants. Elle ne constitue pas un outil indispensable pour le traitement du signal mais offre des interprétations très utiles du comportement des systèmes à temps discret en termes de pôles et zéros.

Définition 4.1

On appelle transformée en z (TZ) du signal à temps discret $x(n)$, la fonction complexe de la variable complexe z , définie par :

$$X_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{pour } R_1 \leq |z| \leq R_2 \quad (4.1)$$

On suppose que la couronne de convergence, définie par $R_1 \leq |z| \leq R_2$, ne se réduit pas à l'ensemble vide.

On remarquera que la TFTD est égale à la transformée en z calculée le long du cercle unité (il faut donc que le cercle unité appartienne au domaine de convergence) :

$$X(f) = X_z(e^{2j\pi f}) \quad (4.2)$$

Les points du domaine de convergence où $X_z(z) = 0$ s'appellent les *zéros*. Les points isolés du domaine de convergence où $|X_z(z)| = +\infty$ s'appellent les *pôles*. Dans la quasi-totalité des exemples rencontrés dans ce cours, $X_z(z)$ sera une fraction rationnelle et par conséquent les zéros sont les racines du numérateur et les pôles les racines du dénominateur.

On a les propriétés suivantes :

- si $x(n)$ est de durée finie, c'est-à-dire si $x(n) = 0$ à l'extérieur de l'intervalle (N_1, N_2) , le domaine de convergence est le plan tout entier, sauf peut-être en $z = 0$ et $z = \infty$.

- si $x(n)$ est *causale*, c'est-à-dire $x(n) = 0$ pour $n < 0$, $X_z(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + \dots$ est finie à l'infini. Si $X_z(z)$ est une fraction rationnelle, cela implique que son numérateur est de degré inférieur ou égal à celui de son dénominateur. A titre de contre-exemple, à la fonction $X_z(z) = (z-1)^2/(z-1/2)$ ne correspond aucune suite causale.
- si $x(n)$ est causale, $x(0) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} X_z(z)$.
- si $x(n)$ est nulle à gauche, c'est-à-dire si $x(n) = 0$ pour $n < N_1$, le domaine de convergence est la partie du plan qui s'étend jusqu'à l'infini : $R_2 = \infty$.
- si $x(n)$ est nulle à droite, c'est-à-dire si $x(n) = 0$ pour $n > N_2$, le domaine de convergence est la partie du plan qui contient l'origine : $R_1 = 0$.
- si $x(n)$ est bilatérale, le domaine de convergence est une couronne de la forme $R_1 \leq |z| \leq R_2$, qui est délimitée inférieurement et supérieurement par un pôle, qui ne contient aucun pôle et qui est connexe.

Exemple 4.1 Calculons la transformée en z de $x(n) = \mathbb{1}_{\{0, \dots, N-1\}}(n)$. Il vient :

$$X_z(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} = 1 + z^{-1} + \dots + z^{N-1}$$

qui converge pour toute valeur $z \neq 0$. $X_z(z)$ n'a pas de pôle, autre que $z = 0$. On note que $X_z(1) = N$. On peut aussi écrire pour tout $z \neq 1$ que :

$$X_z(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

Exemple 4.2 La transformée en z de la suite $x(n) = a^n$ pour $n \geq 0$ et nulle pour $n < 0$ est :

$$X_z(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

La série converge pour toute valeur de z qui vérifie $|z| > |a|$. On vérifie que, $x(n)$ étant nulle à gauche, $R_2 = +\infty$. $X_z(z)$ n'a pas de zéro et a un pôle en $z = a$.

Formule inverse

L'inversion de la transformée en z ne peut se faire que si l'on se donne à la fois $X_z(z)$ et son domaine de convergence. En effet, à une même fonction de z correspondent plusieurs suites numériques, suivant le domaine de convergence qui lui est associé. C'est ce que montre l'exemple suivant. Considérons la fonction :

$$X_z(z) = \frac{z^2}{(z - \frac{1}{2})(z - 2)}$$

Cette fonction possède deux pôles, l'un en $z = 2$ et l'autre en $z = 1/2$. Il y a donc trois régions possibles de convergence. A ces 3 régions correspondent 3 suites numériques distinctes mais qui ont en commun l'expression $X_z(z)$ de leurs transformées en z .

1. Au domaine $|z| < 1/2$ correspond la suite anti-causale :

$$x(n) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{3} 2^{n+1} & n \leq -2 \\ 0 & n > -2 \end{cases}$$

2. Au domaine $1/2 < |z| < 2$ correspond la suite bilatérale :

$$x(n) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$$

3. Au domaine $|z| > 2$ correspond la suite causale :

$$x(n) = \begin{cases} \frac{-2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} 2^{n+1} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Vérifions le point 1. Il vient :

$$X_z(z) = \frac{\frac{2}{3}z^2}{\frac{1}{2} - z} + \frac{-\frac{2}{3}z^2}{2 - z} = \frac{\frac{4}{3}z^2}{1 - 2z} + \frac{-\frac{1}{3}z^2}{1 - \frac{z}{2}}$$

Comme on a supposé que $|z| < 1/2$, $2|z| < 1$ et $|z/2| < 1$. On peut donc utiliser le développement en série $\sum_0^{+\infty} u^n = 1/(1-u)$ valable pour $|u| < 1$. On obtient :

$$X_z(z) = \frac{4}{3} (z^2 + \dots + 2^n z^{n+2} + \dots) - \frac{1}{3} \left(z^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{n+2} + \dots \right)$$

En déterminant l'expression du coefficient du terme en z^{-n} , on en déduit le résultat annoncé.

Cet exemple donne une méthode pratique d'inversion de la transformée en z pour une fraction rationnelle : on décompose la fraction en éléments simples, puis en prenant en compte le domaine de convergence, on utilise le développement en série $\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = 1/(1-u)$ valable pour $|u| < 1$.

Inversion du sens du temps

Soit la suite :

$$X_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{avec} \quad D_x = R_{1x} < |z| < R_{2x}$$

Considérons la suite $t(n) = x(-n)$. Sa transformée en z a pour expression $T_z(z) = X_z(1/z)$ et donc la série converge pour les valeurs de z appartenant au domaine :

$$D_t = R_{1t} = \frac{1}{R_{2x}} < |z| < R_{2t} = \frac{1}{R_{1x}}$$

que nous notons symboliquement $1/D_x$.

Produit de Convolution

Le produit de convolution de deux suites est défini par :

$$t(n) = x(n) \star y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)y(k)$$

Cette opération est commutative, associative et distributive par rapport à l'addition. Elle est, comme dans le cas des signaux à temps continu, à la base de la caractérisation des filtres linéaires.

L'une des principales propriétés de la transformée en z est d'associer au produit de convolution le produit simple. En effet considérons deux suites $x(n)$ et $y(n)$ et leurs transformées en z respectives :

$$X_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} \quad \text{avec} \quad D_x = R_{1x} < |z| < R_{2x}$$

$$Y_z(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)z^{-n} \quad \text{avec} \quad D_y = R_{1y} < |z| < R_{2y}$$

Déterminons la transformée en z notée $T_z(z)$ de la suite numérique $t(n) = x(n) \star y(n)$.

$$\begin{aligned} T_z(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) \right) z^{-n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)z^{-k} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n-k)z^{n-k} \right) = Y_z(z)X_z(z) \end{aligned}$$

Par conséquent la transformée en z de la suite $t(n) = x(n) \star y(n)$ est $T_z(z) = Y_z(z)X_z(z)$. Son domaine de convergence contient au moins les valeurs de z qui vérifient $\max(R_{1x}, R_{2y}) < |z| < \min(R_{2x}, R_{2y})$. En effet le domaine peut être augmenté des pôles de $X_z(z)$ qui sont des zéros de $Y_z(z)$. Symboliquement on peut donc écrire que D_t contient $D_x \cap D_y$.

Relation de Parseval

En appliquant la propriété de la convolution à la suite $t(n) = x(n) \star y^*(-n)$ et en faisant $n = 0$, on obtient la formule :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k) = t(0) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{(c)} T_z(z) \frac{dz}{z} = \frac{1}{2j\pi} \oint_{(c)} X_z(z)Y_z^*(1/z^*) \frac{dz}{z}$$

où (c) est un contour de Cauchy dans le domaine défini par la double inégalité $\max(R_{1x}, 1/R_{2y}) < |z| < \min(R_{2x}, 1/R_{1y})$.

Dans le cas particulier où on fait $x(n) = y(n)$, on obtient la formule dite de *Parseval* :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = \frac{1}{2j\pi} \oint_{(c)} X_z(z)X_z^*(1/z^*) \frac{dz}{z} \quad (4.3)$$

Produit simple

On montre que la transformée en z de la suite numérique $t(n) = x(n)y(n)$ est donnée par :

$$T_z(z) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{(c)} X(u)Y(z/u) \frac{du}{u}$$

dont la région de convergence contient au moins le domaine noté $D_x \times D_y$ et défini par : $R_{1x}R_{1y} < |z| < R_{2x}R_{1y}$. En effet si $Y(u)$ a comme domaine de convergence $R_{1y} < |u| < R_{2y}$, $Y(z/u)$ a comme domaine de convergence $R_{1y} < |z/u| < R_{2y}$. Par conséquent, $T_z(z)$ existe si l'intersection entre $R_{1x} < |u| < R_{2x}$ et $|z|/R_{2y} < |u| < |z|/R_{1y}$ est non vide. Ce qui est obtenu si $R_{1x} < |z|/R_{2y}$ et si $R_{2x} > |z|/R_{1y}$.

Les propriétés qui suivent sont énoncées sans démonstration :

propriété	$t(n)$	$T_z(z)$	convergence
linéarité	$ax(n) + by(n)$	$aX_z(z) + bY_z(z)$	$D_x \cap D_y$
inversion du temps	$x(-n)$	$X_z(1/z)$	$1/D_x$
translation en temps	$x(n - n_0)$	$X_z(z)z^{-n_0}$	D_x
convolution	$x(n) \star y(n)$	$X_z(z)Y_z(z)$	$D_x \cap D_y$
produit	$x(n)y(n)$	$X_z(z) \star Y_z(z)$	$D_x \times D_y$
conjugaison	$x^*(n)$	$X_z^*(z^*)$	D_x
	réelle	$X_z(z) = X_z^*(z^*)$	

4.2 Filtrage linéaire convolutionnel des signaux déterministes à temps discret

4.2.1 Définition et propriétés

Définition 4.2

Soit $x(n)$ un signal à temps discret et soit $\{h(n)\}$ une suite telle que $\sum_n |h(n)| < +\infty$. Un filtre linéaire convolutionnel effectue la convolution :

$$y(n) = (x \star h)(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k) \quad (4.4)$$

La transformée de Fourier à temps discret $H(f)$ de la suite $h(n)$ s'appelle la réponse en fréquence ou gain complexe du filtre. La transformée en z , $H_z(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)z^{-n}$, de la réponse impulsionnelle $h(n)$, est appelée fonction de transfert. Comme $h(n)$ est supposé de module sommable, le domaine de convergence de $H_z(z)$ contient le cercle unité.

Le terme réponse impulsionnelle vient de ce que $h(n)$ est la sortie du filtre lorsque l'on applique à son entrée le signal $x(n) = \delta(n)$ (qui vaut 1 pour $n = 0$ et 0 sinon).

MATLAB[®] possède la fonction `conv` qui réalise la convolution de deux suites finies (multiplication des deux polynômes dont les coefficients sont les éléments des deux suites).

NOTES :

```

%====expleconv.m fonction convolution
N=5; rectn=ones(1,N);
yn=conv(rectn,rectn); plot(yn,'o')
    
```

Propriétés fondamentales

Linéarité : si $x_1(n)$ et $x_2(n)$ donnent respectivement $y_1(n)$ et $y_2(n)$, alors $a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ donne $a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$,

Invariance dans le temps : si au signal d'entrée $x(n)$ correspond le signal de sortie $y(n)$ alors, pour tout entier k , au signal d'entrée $x(n - k)$ correspond en sortie le signal $y(n - k)$.

Exponentielle complexe : pour $x(n) = \exp(2j\pi f_0 n)$, un calcul simple et justifié par le fait que $h(n)$ est de module sommable, donne :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)e^{2j\pi f_0(n-k)} = H(f_0)x(n)$$

Ainsi l'action d'un filtre convolutionnel se résume à la multiplication du signal par le terme complexe $H(f_0)$ qui n'est autre que la TFTD de la réponse impulsionnelle $h(n)$ au point f_0 . Autrement dit, les exponentielles complexes sont les fonctions propres des filtres linéaires.

Entrée mélange harmonique : par linéarité, le résultat précédent se généralise au mélange harmonique défini par :

$$x(n) = \sum_{k=1}^K A_k e^{2j\pi f_k n}$$

qui donne en sortie le signal :

$$y(n) = \sum_{k=1}^K H(f_k) A_k e^{2j\pi f_k n}$$

Entrée stable : si $x(n) \in \ell^1$, c'est-à-dire $\sum_n |x(n)| < +\infty$, alors $y(n) \in \ell^1$, plus précisément

$$\sum_k |y(k)| \leq \sum_k |h(k)| \sum_k |x(k)|$$

et on a :

$$y = (x \star h) \rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \quad (4.5)$$

Entrée d'énergie finie : si $x(n) \in \ell^2$, c'est-à-dire $\sum_n |x(n)|^2 < +\infty$, alors $y(n) \in \ell^2$, plus précisément

$$\sum_k |y(k)|^2 \leq \sum_k |h(k)| \sum_k |x(k)|^2$$

et on a :

$$y = (x \star h) \rightarrow Y(f) = H(f)X(f) \quad (4.6)$$

Entrée bornée : si $x(n) \in \ell^\infty$, c'est-à-dire $\sup_n |x(n)| < +\infty$, alors $y(n) \in \ell^\infty$, plus précisément $\sup_n |y(n)| \leq \sum_k |h(k)| \sup_n |x(n)|$. Cette propriété fondamentale, qui dit qu'à toute entrée bornée correspond une sortie bornée, porte le nom de *stabilité*. Les filtres convolutionnels sont donc stables.

Exemple 4.3 (filtre moyenneur) on considère le filtre dont la relation d'entrée-sortie s'écrit :

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n x(k)$$

qui représente la moyenne des N dernières valeurs de $x(n)$. Sa réponse en fréquence est $H(f) = e^{-j\pi(N-1)f} \sin(\pi N f) / \sin(\pi f)$.

4.2.2 Filtre à fonction de transfert rationnelle

Une importante classe de filtres linéaires est constituée par les systèmes qui répondent à une équation récurrente linéaire à coefficients constants de la forme :

$$y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_p y(n-p) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_q x(n-q) \quad (4.7)$$

En utilisant les propriétés de la transformée en z , on obtient pour la fonction de transfert la fraction rationnelle :

$$H_z(z) = \frac{b_0 + \dots + b_q z^{-q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \quad (4.8)$$

Le domaine de convergence est la couronne du plan ne contenant aucun pôle et contenant le cercle unité (en raison de la sommabilité). Pour que cette couronne ne soit pas vide il faut et il suffit que le polynôme $A_z(z) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}$ n'ait pas de zéros sur le cercle unité, c'est-à-dire $A_z(z) \neq 0$ pour $z = e^{2j\pi f}$. Rappelons en plus que le filtre est causal si le domaine de convergence est une couronne qui s'étend à l'infini.

Par conséquent on a le résultat suivant.

Théorème 4.1

Pour qu'un filtre linéaire (par définition stable), ayant comme fonction de transfert la fraction rationnelle $H_z(z) = B_z(z)/A_z(z)$, soit causal il faut et il suffit que tous ses pôles (racines de $A_z(z)$) soient strictement à l'intérieur du cercle unité.

Notons que, s'il y a des pôles hors du disque unité, il existe une solution (stable) mais elle n'est pas causale. Elle est même anticausale si tous les pôles sont à l'extérieur du cercle unité.

On note que le système défini par 4.7 possède évidemment une solution causale : il suffit de dire que $y(n)$ peut s'obtenir uniquement à partir du présent et du passé. Cette solution apparaît dans l'expression de $H_z(z)$, puisque le numérateur et le dénominateur ont même degré et donc $H_z(z)$ est fini à l'infini. Cette solution est stable (c'est-à-dire $h(n)$ de module sommable) si et seulement si $A_z(z) \neq 0$ pour $|z| \geq 1$.

Remarquons enfin que, si les coefficients de l'équation aux différences 4.7 sont réels :

- la réponse impulsionnelle est réelle,
- la fonction de transfert vérifie $H_z(z) = H^*(z^*)$ et sa réponse en fréquence $H(f) = H^*(-f)$,
- les numérateur et dénominateur de $H_z(z)$ sont des polynômes à coefficients réels. Et donc ses pôles et ses zéros sont soit réels, soit vont par pair de complexes conjugués.

La fonction `filter` de MATLAB[®] ne donne que la solution causale de l'équation de filtrage.

NOTES :

```

| %=====explefilt.m fonction filter
| % echelon unite
| N=20; rectn=ones(1,N); tps=[0:N-1];
| % reponse indicielle du filtre 1/(1-.5 z^(-1))
| yn=filter(1,[1 -.5],rectn); plot(tps,yn,'o')

```

Exemple 4.4 (Filtre purement récursif d'ordre 1) Soit le système répondant à l'équation aux différences :

$$y(n) - ay(n-1) = x(n) \quad (4.9)$$

Calculons directement sa réponse impulsionnelle. Pour cela déterminons le signal de sortie $h(n)$ produit par le signal d'entrée impulsion-unité $x(n) = \delta(n)$. Il vient :

$$\begin{aligned} h(n) - ah(n-1) &= 0 & \text{pour } n < 0 \\ h(n) - ah(n-1) &= 1 & \text{pour } n = 0 \\ h(n) - ah(n-1) &= 0 & \text{pour } n > 0 \end{aligned}$$

La solution qui correspond à la condition de causalité doit vérifier $h(n) = 0$ pour $n < 0$. On en déduit que $h(0) = 1$ et que $h(n) = a^n$ pour $n > 0$. Cette solution ne correspond à un filtre stable que si $|a| < 1$.

Calculons sa fonction de transfert. Pour cela prenons la transformée en z des deux membres de l'équation 4.9. On obtient $H_z(z) = 1/(1 - az^{-1})$. Pour assurer la stabilité il faut que $|a| \neq 1$. La réponse impulsionnelle s'obtient alors en effectuant un développement de $H_z(z)$ pour $|z| > a$.

Définition 4.3 (filtre passe-tout d'ordre 1)

On appelle filtre passe-tout d'ordre 1, un filtre dont la fonction de transfert a pour expression :

$$H_z(z) = \frac{z^{-1} - b^*}{1 - bz^{-1}} \quad \text{avec } |b| < 1 \quad (4.10)$$

Propriété 4.1

Pour un filtre passe-tout, $|Hf| = 1$ pour tout f .

Il suffit de noter que $H(f) = e^{-2j\pi f}(1 - b^*e^{2j\pi f})/(1 - be^{-2j\pi f})$.

Théorème 4.2

Soit une fonction rationnelle $H_z(z) = B_z(z)/A_z(z)$ et soit b un zéro de $H_z(z)$. Alors on ne change pas le module de $H(f)$, en remplaçant le zéro b par le zéro $1/b^*$.

Pour remplacer le zéro b par le zéro $1/b^*$, il suffit de multiplier $H_z(z)$ par $\frac{z^{-1} - b^*}{1 - bz^{-1}}$ et d'utiliser la propriété précédente. Dans le plan complexe, les affixes de b et de $1/b^*$ forment une paire dans l'inversion de pôle 0 et puissance 1.

Si un ensemble de zéros et de pôles réalise un filtre de fonction de transfert rationnelle et de gain donné (module de sa réponse impulsionnelle), les conditions de stabilité et de causalité imposent de positionner tous les pôles à l'intérieur du cercle unité. Il reste toutefois, d'après le théorème précédent, un degré de liberté sur la position des zéros. Ce degré tombe si l'on impose au filtre d'être à minimum de phase.

Définition 4.4 (filtre à minimum de phase)

On dit qu'un filtre linéaire, dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle, est à minimum de phase, si les pôles et les zéros de sa fonction de transfert sont à l'intérieur du cercle unité.

Notons que, tel que nous l'avons défini, un filtre à minimum de phase est stable, causal et que le filtre inverse est lui-même causal et stable.

Propriété 4.2

Le filtre à minimum de phase de fonction de transfert $H_{\min}(z)$ est, parmi tous les filtres de fonction de transfert $H_z(z)$ ayant le même gain (module de la réponse en fréquence), celui qui répond le plus "rapidement" dans le sens où (avec des notations évidentes) :

- si $x(n)$ est causal, $|y_{\min}(0)| \geq |y(0)|$,
- $\forall n$, on a $\sum_{k=-\infty}^n |y_{\min}(k)|^2 \geq \sum_{k=-\infty}^n |y(k)|^2$.

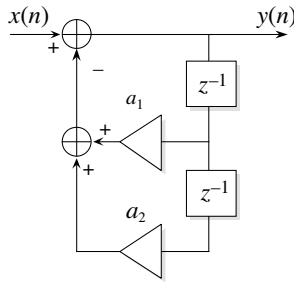


Figure 4.1: Réalisation d'un filtre du second ordre purement récursif

Filtre du second ordre purement récursif

On considère le filtre linéaire du second ordre, causal, stable, répondant à l'équation aux différences :

$$y(n) + a_1y(n-1) + a_2y(n-2) = x(n) \quad (4.11)$$

Une façon de le réaliser est obtenue par la structure donnée à la figure 4.1.

Sa fonction de transfert a pour expression $H_z(z) = 1/(1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2})$. Les conditions de stabilité et de causalité imposent que les deux pôles soient de module inférieur à 1 et que le domaine de convergence soit constitué des valeurs de z , dont le module est supérieur au module du pôle de plus grand module. On est conduit à distinguer deux cas suivant que les deux pôles sont réels ou complexes conjugués. En nous limitant à ce dernier cas c'est-à-dire $a_1^2 - 4a_2 < 0$ et en notant p et p^* les deux pôles, on a $\text{Re}(p) = -a_1/2$ et $|p| = \sqrt{a_2}$ supposé inférieur à 1.

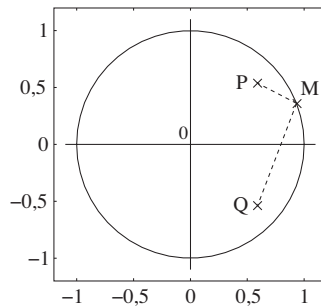


Figure 4.2: Position des pôles d'un filtre du second ordre purement récursif

Si on désigne par P et Q les affixes de p et p^* dans le plan complexe (voir figure 4.2) et par M un point du cercle unité d'affixe $\exp(2j\pi f)$, le module du gain complexe a pour expression $|H(f)| = 1/(MP \times MQ)$. Le cercle unité est gradué en valeurs de la fréquence qui varient entre $-1/2$ ($-F_e/2$) et $1/2$ ($F_e/2$). La présence d'un pôle près du cercle unité peut alors entraîner de fortes valeurs pour $|H(f)|$. Le calcul montre que $|H(f)|$ passe par un maximum si $a_1(1 + a_2) < 4a_2$. Le maximum est alors atteint pour une fréquence dite de fréquence de résonance dont l'expression est :

$$f_R = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{-a_1(1 + a_2)}{4a_2}\right)$$

La valeur du maximum, appelée *surtension*, est donnée par :

$$H_R = \frac{1}{(1 - a_2) \sin(2\pi f_R)}$$

Le terme de surtension s'explique par le fait que si l'on applique à l'entrée du filtre le signal sinusoïdal $x(n) = A \cos(2\pi f_R n)$, on obtient en sortie le signal sinusoïdal $y(n) = AH_R \cos(2\pi f_R n + \phi_R)$. Et donc l'amplitude a été multipliée par H_R .

NOTES :


```
%==== tracpolzer.m tracer des poles
denom=[1 -1.2 .7]; % denominateur
poles=roots(denom)+j*eps;
plot(poles,'x')
%==== cercle unite
cercle=exp(2*j*pi*[0:100]/100);
hold on, plot(cercle), hold off
axis('square')

%==== tracspect.m tracer du gain
Fe=1; % frequence d'echantillonnage
nfft=1024; % nombre pts calcul de TFD
freq=[0:nfft-1]/nfft*Fe; % pour les abscisses
%==== fonction de transfert rationnelle
numer=[1 1]; % numerateur
denom=[1 -1.2 .7]; % denominateur
%==== spectre
numerS=fft(numer,nfft); denomS=fft(denom,nfft);
gaincplx=numerS ./ denomS;
plot(freq,abs(gaincplx)), grid
%==== transfert reel => sym. herm.
set(gca,'xlim',[0 Fe/2])
```

Gabarit d'un filtre

En pratique on est souvent conduit à synthétiser un filtre à partir de la donnée d'une région, le *gabarit*, dans laquelle on souhaite faire passer son gain en fréquence. Dans le cas d'un filtre passe-bas, on se donne trois régions de la bande en fréquence :

- la bande *passante*, plage de fréquences où le gain prend des valeurs comprises entre $(1 - \delta_p, 1 + \delta_p)$ (δ_p est le *taux d'ondulation* en bande passante),
- la bande *affaiblie* ou *atténuée*, plage de fréquences où le gain prend des valeurs inférieures à δ_a (δ_a est le *taux d'ondulation* en bande affaiblie),
- la bande *de transition*, plage de fréquences où le gain s'atténue dans un rapport A .

QUELQUES REMARQUES :

- si les pôles et les zéros sont complexes conjugués, $|H(f)|$ est paire (cas des filtres ayant une réponse impulsionnelle réelle).
- La partie du plan complexe où se trouvent les pôles correspond à la bande passante. Plus les pôles sont proches du cercle unité, plus les surtensions sont grandes. Plus le nombre de pôles est grand, plus les ondulations dans la bande passante pourront être rendues faibles.
- La partie du plan complexe où se trouvent les zéros correspond à la bande affaiblie. Plus les zéros sont proches du cercle unité, plus l'atténuation est grande. Plus le nombre de zéros est grand, plus les ondulations dans la bande affaiblie pourront être rendues faibles.

4.2.3 Synthèse d'un filtre RIF par la méthode de la fenêtre

Un filtre à réponse impulsionnelle finie, en abrégé filtre RIF, a pour relation d'entrée-sortie :

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \dots + h(p-1)x(n-p+1) \quad (4.12)$$

Une réalisation est constituée de $p-1$ mémoires, de p multiplieurs et d'un sommateur.

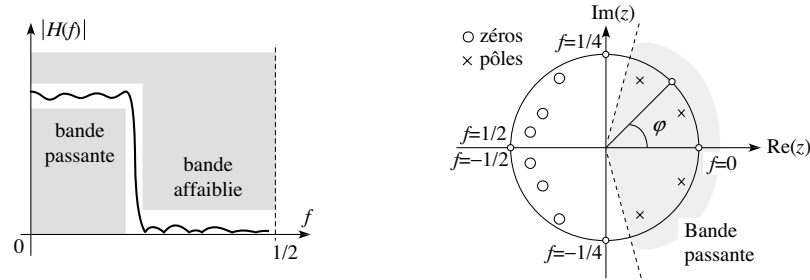


Figure 4.3: Gabarit et position des pôles et des zéros

Deux avantages des filtres RIF

Le premier avantage d'un filtre RIF est d'être stable quels que soient les coefficients, puisque la fonction de transfert n'a pas de pôle. Un deuxième avantage est permettre la réalisation d'un filtre à phase linéaire. Cette propriété, qui assure l'absence de distorsion de phase, est parfois exigée dans certains problèmes pratiques. Comme nous allons le voir cette propriété est liée à l'existence d'une symétrie, paire ou impaire, dans les coefficients du filtre RIF. Considérons, sans perte de généralités, un filtre RIF ayant un nombre pair $N = 2P$ de coefficients non nuls et tel que $h(i) = h(N - i)$ pour $i \in \{0, \dots, P\}$. En mettant $e^{-j\pi P f}$ en facteur, sa réponse en fréquence a pour expression :

$$\begin{aligned} H(f) &= e^{-j\pi P f} ((h(0)e^{j\pi P f} + h(N)e^{-j\pi P f}) + \dots) \\ &= e^{-j\pi P f} (2h(0) \cos(\pi P f) + 2h(1) \cos(\pi(P-1)f) + \dots) \end{aligned}$$

On voit donc que la phase est linéaire modulo π . On voit clairement que cette propriété est liée à la symétrie de $h(n)$.

Méthode de la fenêtre

Dans ce paragraphe, nous nous limitons à présenter, pour un filtre passe-bas, une méthode de synthèse des filtres RIF, appelée méthode de la fenêtre. Elle suppose donné le gain en fréquence $H(f) = \mathbf{1}_{(-f_0, f_0)}(f)$ du filtre à synthétiser. Dans ce cas la réponse impulsionnelle $\{h(n)\}$ peut être obtenue par la formule de transformation inverse :

$$h(n) = \int_{-1/2}^{1/2} H(f) e^{2j\pi n f} df = \int_{-f_0}^{f_0} H(f) e^{2j\pi n f} df = \frac{\sin(2\pi n f_0)}{\pi n}$$

La suite $\{h(n)\}$ est infinie. On la tronque en ne conservant que les $p = 2k + 1$ valeurs allant de $-k$ à $+k$. Cette troncature revient à multiplier la suite $\{h(n)\}$ par la *fenêtre rectangulaire* :

$$\begin{aligned} \pi_r(n) &= 1 \text{ pour } n \in \{-k, \dots, k\} \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned} \quad (4.13)$$

dont la transformée de Fourier a pour module une fonction de la forme $|\sin((k+1)\pi f)/\sin(\pi f)|$. Cette opération a pour effet d'introduire, par convolution, des ondulations sur le gain en fréquence. Ces ondulations peuvent même (phénomène de Gibbs) ne pas être évanescentes quand k tend vers l'infini. On retrouve là un résultat connu pour les séries de Fourier.

Il est possible de réduire l'amplitude de ces ondulations en pondérant la suite des coefficients obtenus à l'aide de fenêtres telles que celles vues lors de l'analyse spectrale (page 37). L'une des plus utilisées est la fenêtre de Hamming :

$$\pi_h(n) = 0,54 + 0,46 \cos(\pi n/k) \text{ pour } n \in \{-k, \dots, k\} \quad (4.14)$$

dont l'affaiblissement du premier lobe secondaire par rapport au lobe principal est d'environ 43dB tandis qu'il n'est que de 13 dB pour la fenêtre rectangulaire. Toutefois, la réduction des ondulations liée à la réduction de la hauteur des lobes secondaires s'accompagne toujours de l'élargissement de la bande de transition lié à l'élargissement du lobe principal qui est de $2/k$ pour la fenêtre de Hamming tandis qu'il n'est que de $1/k$ pour la fenêtre rectangulaire.

On pourra noter que, contrairement aux fenêtres vues pour l'analyse spectrale, celles utilisées ici doivent présenter une symétrie afin de respecter les contraintes de phase linéaire.

Type	Expression	Affaibl.	Lobe princ.	Aff. (dB/oct.)
Rectang.	$\Pi_N = \mathbf{1}_{[0, N-1]}$	-13 dB	$\frac{2}{N}$	-6
Triang. (Bartlett)	$\Pi_N \star \Pi_N$ -27 dB	-25 dB	$\frac{4}{N}$	-12
Hamming	$0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N-1}$ ($0 \leq n \leq N-1$)	-43 dB	$\frac{4}{N}$	-6
Hann (Hanning)	$0,5(1 - \cos(2\pi n/(N+1)))$ ($1 \leq n \leq N$)	-32 dB		-18
Blackman	$(0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/(N-1)) + 0,08 \cos(4\pi n/(N-1)))$ ($0 \leq n \leq N-1$)	-58 dB		-18

La méthode de la fenêtre est une méthode simple pour réaliser un filtre RIF. Elle présente toutefois deux inconvénients importants :

- les ondulations, en bande passante et en bande atténuée, ne sont pas constantes ; le gabarit doit donc être respecté pour la plus grande des ondulations.
- elle ne permet pas de contrôler séparément les ondulations en bande passante et en bande atténuée.

La méthode dite de Remez, qui n'a pas ces inconvénients, lui est souvent préférée.

Exemple 4.5 (filtre passe-bas demi-bande) Soit à réaliser le filtre dont le gain est $H(f) = 1$ pour $|f| < 1/4$. On en déduit que sa réponse impulsionnelle est infinie et a pour expression $h(n) = \sin(n\pi/2)/(n\pi)$. En se limitant aux valeurs de n appartenant à l'intervalle $\{-5, \dots, 5\}$, on obtient la suite des coefficients :

$$h(-5) = h(5) = \frac{1}{5\pi} \quad h(-3) = h(3) = -\frac{1}{3\pi} \quad h(-1) = h(1) = \frac{1}{\pi} \quad h(0) = 1/2$$

qui donne pour relation entrée-sortie :

$$y(n-5) = \frac{1}{5\pi}x(n) - \frac{1}{3\pi}x(n-2) + \dots + \frac{1}{5\pi}x(n-10)$$

On remarque que le filtre obtenu n'est pas à proprement parler causal. Toutefois, il peut être considéré comme tel, si l'on accepte un retard de 5 en sortie.

4.3 Quelques éléments sur les images

MATLAB[®] offre des fonctions de convolution 2D, `conv2` et `filter2` qui réalisent l'opération suivante :

$$y(k, \ell) = (x \star h)(k, \ell) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(k-m, \ell-n)h(m, n) \quad (4.15)$$

Leur utilisation se fait comme en 1D. Dans le cas du filtrage il faut donner le pendant de la réponse impulsionnelle dans le cas 2D, ou **fonction d'étalement ponctuel (FEP)** $h(m, n)$.

Exemple 4.6 (filtre passe-bas) On se donne comme FEP :

$$h = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et } h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

qui correspondent successivement à un filtrage passe-bas et à une opération de dérivation.

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```
%==== explef1.m filtrage passe-bas d'une image
img=imread('monimage.jpg','JPEG');
subplot(131), imagesc(img), axis('image')
% fonction d'etalement ponctuel passe-bas
fep=[0 0 1 0 0;0 1 1 1 0;1 1 1 1 1;0 1 1 1 0;0 0 1 0 0]/13;
imgf=filter2(fep,img);
subplot(132), imagesc(imgf), axis('image')
%==== derivation de Prewitt
fep=[1 0 -1;1 0 -1;1 0 -1];
imgf=filter2(fep,img);
subplot(133), imagesc(imgf), axis('image')
pause, colormap('gray')
```

Chapitre 5

Processus aléatoires SSL à temps discret

Mots-clés et notions à connaître :

- Processus aléatoire,
- Stationnarité, ergodicité,
- Covariance, densité spectrale des p.a. SSL,
- Filtrage des p.a. SSL,
- Modèles AR, MA,
- Prédiction.

5.1 Le modèle aléatoire

Jusqu'à présent, nous n'avons rencontré que des signaux déterministes $x(n)$, c'est-à-dire des fonctions telles que, à chaque instant n , on dispose d'une règle permettant d'évaluer la quantité $x(n)$. Cette règle peut être spécifiée, nous l'avons vu, sous forme d'une expression mathématique, ou d'une équation récurrente ou tout autre procédé de construction.

Les fonctions déterministes forment la base de l'analyse mathématique, mais la plupart des phénomènes que nous aurons à modéliser ne sont pas de cette nature.

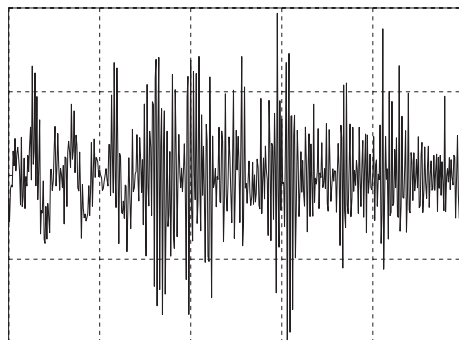


Figure 5.1: Visualisation d'un signal de parole sur une durée de 1/16 de seconde

Considérons le signal de parole représenté à la figure 5.1. Il est clair, à la vue de ce graphe, que l'on ne peut réduire ces observations à une fonction déterministe du temps. Nous pourrions peut-être trouver une fonction déterministe qui approxime correctement les valeurs observées sur un intervalle de temps $[0, T]$, mais cette fonction ne serait pas une approximation valable de l'observation à l'extérieur de cet intervalle, et cette propriété perdurerait indépendamment de la durée $[0, T]$ de l'observation. Le graphe 5.1 contient un très grand nombre d'irrégularités et ces irrégularités ne semblent pas respecter une évolution prédictible. Les observations ont un caractère aléatoire, dans le sens où nous ne savons pas déterminer, pour un instant donné, quelle sera la valeur précise de la mesure. Par contre, il est envisageable d'indiquer un intervalle de valeurs possibles et éventuellement de préciser comment ces valeurs sont distribuées à partir d'une certaine loi de probabilité.

La bonne façon de décrire le comportement du phénomène est donc de spécifier, à chaque instant n , une distribution de probabilité, permettant de décrire la *vraisemblance* de chaque observation. Dans le langage des probabilités, l'observation $X(n)$ observée sur le capteur à chaque instant n est une variable aléatoire et son évolution au cours du temps un processus aléatoire. Cet exemple est le prototype d'une large classe de phénomènes qui conduit à adopter, pour les modéliser, la définition du paragraphe qui suit.

Considérons maintenant la figure 5.2 représentant un enregistrement de la voyelle /i/.

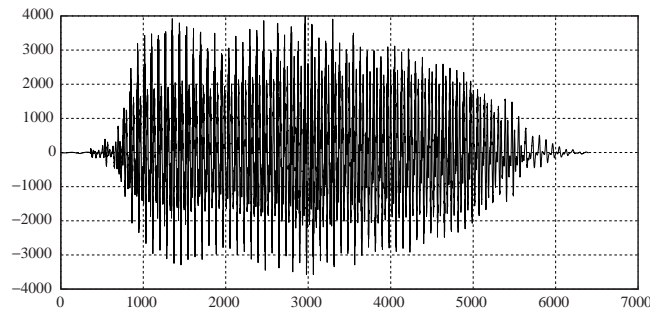


Figure 5.2: Voyelle /i/ isolée

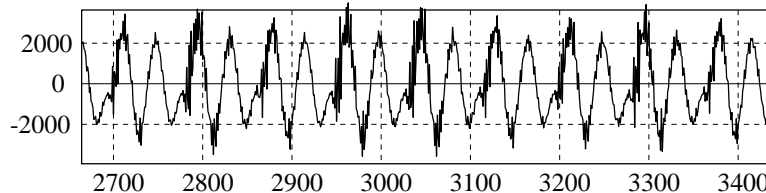


Figure 5.3: Voyelle /i/, loupe

Une effet de zoom sur la trajectoire montre que l'on a affaire à un signal "presque" périodique que l'on pourrait peut-être modéliser par une fonction, donc déterministe, à laquelle se superpose une composante qui présente beaucoup d'irrégularités, donc aléatoire.

5.2 Propriétés générales

5.2.1 Loi temporelle

Définition 5.1

Un processus aléatoire $\{X(n)\}$ est une famille de variables aléatoires indexées par $n \in \mathbb{Z}$ et définies sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . On parle de processus à temps discret. Chaque réalisation particulière (associée à une épreuve $\omega \in \Omega$) du processus est appelée une trajectoire.

Pour nous conformer aux usages habituels en théorie des probabilités, Ω est l'ensemble des épreuves, ω est une épreuve particulière, $X(n)$ est la variable aléatoire au temps n et $X(n, \omega)$ une réalisation particulière du processus pour l'épreuve ω . Pour chaque instant n , $X(n)$ est, par définition, une variable

aléatoire, c'est-à-dire une application (mesurable de Ω dans \mathbb{R}) prenant ces valeurs dans un certain ensemble, typiquement :

- \mathbb{R} ou un intervalle de \mathbb{R} si le processus est à valeurs continues,
- ou $\mathcal{S} = \{x_i, i \in \mathcal{I}\}$ où \mathcal{I} est un ensemble fini ou dénombrable, si le processus est à valeurs discrètes.

Cette variable aléatoire définit sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une mesure appelée loi de probabilité. Cette loi peut être caractérisée par l'intermédiaire de sa *fonction de répartition*.

Puisqu'un processus est une collection de variables aléatoires (correspondant aux valeurs prises par le processus à tous les instants temporels), nous nous intéressons aussi aux lois jointes des variables $(X(n_1), X(n_2), \dots, X(n_k))$ correspondant aux instants d'observations distincts (n_1, n_2, \dots, n_k) . Le choix des instants d'observation étant ici arbitraire, c'est bien de l'ensemble de ces lois jointes dont nous aurons besoin.

Définition 5.2

Nous appelons loi fini-dimensionnelle du processus $X(n)$ d'ordre k , l'ensemble des lois de probabilité des vecteurs aléatoires $(X(n_1), X(n_2), \dots, X(n_k))$ où (n_1, n_2, \dots, n_k) est un k -uplet arbitraire d'instant distincts.

La spécification des lois fini-dimensionnelles d'ordre 2 permet d'évaluer des expressions de la forme $\mathbb{P}\{X(n_1) \leq a, X(n_2) \leq b\}$ ou encore $\mathbb{E}\{f(X(n_1))g(X(n_2))\}$, où $f(x_1)$ et $g(x_2)$ sont des fonctions intégrables par rapport à la loi jointe de $X(n_1)$ et $X(n_2)$. De façon plus générale, la spécification des lois k -dimensionnelles permet d'évaluer des quantités faisant intervenir la loi conjointe du processus à k instants successifs.

Pour des variables aléatoires, la donnée de la loi équivaut à la donnée des *fonctions de répartition* :

$$F(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = \mathbb{P}\{X(n_1) \leq x_1, \dots, X(n_k) \leq x_k\} \quad (5.1)$$

Dans de nombreuses situations, les fonctions de répartition sont des fonctions différentiables par rapport aux variables (x_1, \dots, x_k) , ce qui revient à dire qu'il existe des fonctions positives $p_X(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k)$ telles que :

$$F(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} p_X(u_1, \dots, u_k; n_1, \dots, n_k) du_1 \dots du_k \quad (5.2)$$

La fonction positive $p_X(u_1, \dots, u_k; n_1, \dots, n_k)$ est appelée la *densité jointe* des variables $X(n_1), \dots, X(n_k)$.

Il est intéressant de remarquer que les fonctions de répartition 5.1 vérifient mécaniquement des *conditions de compatibilité*. Soit π une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. Nous devons avoir :

$$F(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = F(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}; n_{\pi(1)}, \dots, n_{\pi(k)}) \quad (5.3)$$

De la même façon, pour une coordonnée quelconque $i \in \{1, \dots, k\}$, nous avons :

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k; n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_k). \quad (5.4)$$

Définition 5.3 (Loi temporelle)

On appelle loi temporelle du processus l'ensemble des distributions fini-dimensionnelles à tout ordre ordre.

Notons que la donnée de la loi temporelle permet de spécifier la probabilité d'événements faisant intervenir un nombre arbitraire k , mais *fini*, de variables aléatoires $X(n_1), \dots, X(n_k)$. Par exemple :

$$\mathbb{P}\{f_1(X(n_1)) \leq a_1, f_2(X(n_2)) \leq a_2, \dots, f_k(X(n_k)) \leq a_k\}$$

où (f_1, f_2, \dots, f_k) sont k fonctions mesurables. La question difficile qui reste en suspens est maintenant la suivante : la loi temporelle permet-elle d'évaluer la probabilité d'événements faisant intervenir *un nombre infini* de variables aléatoires, comme par exemple la probabilité de dépassement d'un niveau (une question que l'on se pose souvent pour dimensionner des limiteurs) et qui peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{P}\left\{b \leq \sup_{n \in T} X(n) \leq a\right\} \quad (5.5)$$

L'évaluation de telles quantités nécessiterait de spécifier la loi de probabilité jointe de l'ensemble des variables aléatoires $\{X(n)\}$ qui constituent le processus. Lorsque l'ensemble des index T est infini dénombrable ($T = \mathbb{Z}$), nous avons à définir la loi de probabilité conjointe d'un ensemble infini de variables aléatoires.

Il peut donc sembler que, si nous cherchons à décrire la dynamique du processus, il soit nécessaire de considérer des distributions de probabilité infini-dimensionnelles. En fait, mais la démonstration de ces propriétés est tout-à-fait non-triviale, la donnée de la loi temporelle (ensemble des distributions fini-dimensionnelles) suffit pour définir l'ensemble des lois du processus. L'énoncé même du résultat fait appel à des constructions mathématiques avancées, qui vont au-delà du cours (voir [1], chapitre 7).

Il est aussi intéressant de formuler le problème en sens inverse. On se donne une famille de fonctions de répartition qui vérifient les conditions de compatibilité 5.3 et 5.4. Existe-t-il un espace de probabilité et un processus aléatoire défini sur cet espace de probabilité dont la loi temporelle coïncide précisément avec cette ensemble de fonctions de répartition. La réponse à cette question est affirmative et constitue un des résultats clefs de la théorie des processus aléatoires, le théorème de Kolmogorov.

Théorème 5.1 (Kolmogorov)

Soit $\mathcal{E} = \{F(\bullet; n_1, \dots, n_k), (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^n\}$ une famille compatible de fonctions de répartition. Alors, il existe un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) et un processus aléatoire défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) telle que \mathcal{E} soit la loi temporelle de $\{X(n)\}$.

5.2.2 Stationnarité

Il peut se faire que les variables aléatoires $X(n)$ aient toutes la même distribution de probabilité quel que soit l'instant d'observation n . On dit que le phénomène aléatoire est stationnaire dans la mesure où il présente une certaine permanence dans son évolution. De façon plus générale, on aboutit à la définition suivante.

Définition 5.4 (Stationnarité stricte)

Un processus aléatoire est stationnaire au sens strict si la loi temporelle est invariante par changement de l'origine des temps, c'est-à-dire, pour tout k -uplet $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$ et tout $\tau \in \mathbb{Z}$:

$$F(x_1, \dots, x_k; n_1, \dots, n_k) = F(x_1, \dots, x_k; n_1 + \tau, \dots, n_k + \tau)$$

Exemple 5.1 (Processus aléatoire binaire) On considère le processus aléatoire $X(n)$ à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$. On suppose que, pour tout n et toute suite d'instant $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$, les variables aléatoires $X(n_1), X(n_2), \dots, X(n_k)$ sont indépendantes. Sa loi temporelle est alors définie par la donnée de la suite $\alpha_n = \mathbb{P}\{X(n) = 1\}$ à valeurs dans $(0, 1)$. Si $\alpha_n = \alpha$ est indépendant de n , le processus est stationnaire au sens strict. On peut alors écrire que $\forall k, (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^n$:

$$\mathbb{P}\{X(n_1) = x_1, \dots, X(n_k) = x_k\} = \alpha^{\sum_{j=1}^k x_j} (1 - \alpha)^{k - \sum_{j=1}^k x_j}$$

Exemple 5.2 (Processus aléatoires gaussiens) Rappelons tout d'abord certaines définitions concernant les variables aléatoires gaussiennes.

Définition 5.5

On appelle variable aléatoire gaussienne ou normale une variable aléatoire dont la loi de probabilité a pour fonction caractéristique :

$$\phi_X(u) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u^2 + jmu\right) \quad (5.6)$$

On en déduit que $\mathbb{E}\{X\} = m$ et que $\text{var}(X) = \sigma^2$. Si $\sigma \neq 0$, la loi a pour densité de probabilité :

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.7)$$

Définition 5.6

Un vecteur aléatoire de dimension d est dit gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable aléatoire gaussienne.

On montre que la loi d'un vecteur aléatoire gaussien a pour fonction caractéristique $\phi_X(u_1, \dots, u_d) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^T \mathbf{R}u + jM^T u\right)$, que $\mathbb{E}\{X_k\} = M_k$ et que $\text{covar}(X_n, X_k) = \mathbb{E}\{(X_n - M_n)(X_k - M_k)\} = \mathbf{R}_{nk}$. Si $\det(\mathbf{R}) \neq 0$, la loi a pour densité de probabilité :

$$p_X(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\det(\mathbf{R})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - M)^T \mathbf{R}^{-1}(X - M)\right) \quad (5.8)$$

Définition 5.7

Un processus aléatoire est dit gaussien si et seulement si, quel que soit k et quelle que soit la suite des instants $(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^k$, le vecteur aléatoire à k dimensions $(X(n_1), X(n_2), \dots, X(n_k))$ est gaussien.

Propriété 5.1

- Un processus aléatoire gaussien est défini par la donnée de la fonction $m(n) = \mathbb{E}\{X(n)\}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et de la fonction $R_{XX}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\{(X(n_1) - m(n_1))(X(n_2) - m(n_2))\}$ où $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$. Pour obtenir sa loi temporelle, il suffit de remplacer dans l'expression 5.8, le vecteur M par $(m(n_1), \dots, m(n_k))^T$ et la matrice \mathbf{R} par la matrice d'élément $R_{mk} = R_{XX}(n_m, n_k)$.
- On en déduit qu'un processus gaussien est stationnaire au sens strict si et seulement si $m(n)$ est indépendante de n et $R_{XX}(n_1, n_2)$ ne dépend que de l'écart $(n_1 - n_2)$.
- La non corrélation des variables aléatoires $(X(n_1), X(n_2))$, pour tout couple d'instant (n_1, n_2) , entraîne que \mathbf{R} est une matrice diagonale et que les variables aléatoires $(X(n_1), X(n_2))$ sont aussi indépendantes. Si le processus est en plus stationnaire, $\mathbf{R} = R_{XX}(0)\mathbf{I}_n$.

Définition 5.8 (Processus indépendants)

On dit que deux processus $\{X(n)\}$ et $\{Y(m)\}$ définis sur un même espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) sont indépendants si et seulement si pour tout couple (n, m) et pour tout n -uplet $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{Z}^n$ et tout m -uplet $(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{Z}^m$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X(n_1) < x_1, \dots, X(n_k) < x_k, Y(u_1) < y_1, \dots, Y(u_m) < y_m\} \\ = \mathbb{P}\{X(n_1) < x_1, \dots, X(n_k) < x_k\} \mathbb{P}\{Y(u_1) < y_1, \dots, Y(u_m) < y_m\} \end{aligned}$$

Processus aléatoires complexes

Jusqu'ici nous n'avons considéré que des processus à valeurs réelles. Toutefois, les fonctions complexes jouent un rôle important dans la représentation des signaux de communication. Pour les signaux passe-bande et en particulier en communication pour les signaux modulés, la représentation dite en *enveloppe complexe* est très largement utilisée. Nous indiquons ci-dessous comment les définitions précédentes se transforment dans le cas des processus à valeurs complexes.

Un processus aléatoire $X(n)$ à valeurs complexes est défini par l'intermédiaire de deux processus aléatoires réels $U(n)$ et $V(n)$ suivant $X(n) = U(n) + jV(n)$. Pour le moment du premier ordre, on a :

$$\mathbb{E}\{X(n)\} = \mathbb{E}\{U(n)\} + j\mathbb{E}\{V(n)\} \quad (5.9)$$

Pour les propriétés du second ordre, deux moments peuvent être définis. Le premier a pour expression $N_{XX}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\{X(n_1)X(n_2)\}$ et le second $M_{XX}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\{X(n_1)X^*(n_2)\}$. Ces deux moments sont reliés simplement à ceux de $U(n)$ et $V(n)$ par :

$$\begin{aligned} N_{XX}(n_1, n_2) &= M_{UU}(n_1, n_2) - M_{VV}(n_1, n_2) + j(M_{UV}(n_1, n_2) + M_{VU}(n_1, n_2)) \\ M_{XX}(n_1, n_2) &= M_{UU}(n_1, n_2) + M_{VV}(n_1, n_2) + j(M_{UV}(n_1, n_2) - M_{VU}(n_1, n_2)) \end{aligned}$$

$M_{XX}(n_1, n_2)$ vérifie pour tout couple d'instant (n_1, n_2) la relation dite de *symétrie hermitienne* :

$$M_{XX}(n_1, n_2) = M_{XX}^*(n_2, n_1) \quad (5.10)$$

Définition 5.9

On appelle fonction d'autocovariance du processus aléatoire complexe $X(t)$, la fonction définie par :

$$R_{XX}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\{X_c(n_1)X_c^*(n_2)\} \quad (5.11)$$

où $X_c(t) = X(n) - \mathbb{E}\{X(t)\}$ désigne le processus centré.

Dans l'expression 5.11, la variable aléatoire centrée $X_c(n_2)$ est conjuguée. Cette conjugaison est importante puisque le produit scalaire $\mathbb{E}\{XY^*\}$ munit l'ensemble des variables aléatoires de carré intégrable ($\mathbb{E}|X|^2 < +\infty$) d'une structure d'espace de Hilbert.

Définition 5.10

On appelle fonction de covariance des processus aléatoires complexes $X(n)$ et $Y(n)$, la fonction définie par :

$$R_{XY}(n_1, n_2) = \mathbb{E}\{X_c(n_1)Y_c^*(n_2)\} \quad (5.12)$$

où $X_c(n) = X(n) - \mathbb{E}\{X(n)\}$ et $Y_c(n) = Y(n) - \mathbb{E}\{Y(n)\}$ désignent les processus centrés.

5.2.3 Propriétés du second ordre

Les propriétés qui suivent s'appliquent que les processus aléatoires soient réels ou complexes : dans le cas réel, il suffit de remplacer $X^*(n)$ par $X(n)$.

Propriété 5.2

La fonction d'autocovariance $R_{XX}(n_1, n_2)$ d'un processus aléatoire $X(n)$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $R_{XX}(n, n) \geq 0$, l'égalité ayant lieu si et seulement si $X(n)$ est presque sûrement une constante.
2. Symétrie hermitienne :

$$R_{XX}(n_1, n_2) = R_{XX}^*(n_2, n_1) \quad (5.13)$$

3. Inégalité de Schwarz

$$|R_{XX}(n_1, n_2)|^2 \leq R_{XX}(n_1, n_1)R_{XX}(n_2, n_2) \quad (5.14)$$

4. Caractère non négatif : pour tout k , pour toute suite d'instants (n_1, \dots, n_k) et pour toute suite de valeurs complexes $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ on a :

$$\sum_{i,j=1}^k \lambda_i \lambda_j^* R_{XX}(n_i, n_j) \geq 0 \quad (5.15)$$

Le point (1) pourra être montré à titre d'exercice. Pour obtenir le point (2), il suffit de conjuguer l'expression de définition de $R_{XX}(n_1, n_2)$. Pour montrer le point (3), il suffit d'appliquer l'inégalité de Schwarz aux variables aléatoires centrées $X_c(n_1) = X(n_1) - \mathbb{E}\{X(n_1)\}$ et $X_c(n_2) = X(n_2) - \mathbb{E}\{X(n_2)\}$. Montrons le point (4). Pour une suite quelconque de valeurs complexes $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, on a bien évidemment :

$$\mathbb{E}\left\{\left|\sum_{i=1}^k \lambda_i X_c(n_i)\right|^2\right\} \geq 0$$

où $X_c(n) = X(n) - \mathbb{E}\{X(n)\}$. En développant il vient :

$$\mathbb{E}\left\{\left|\sum_{i=1}^k \lambda_i X_c(n_i)\right|^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\sum_{i=1}^k \lambda_i X_c(n_i) \sum_{j=1}^k \lambda_j^* X_c^*(n_j)\right\} = \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \lambda_j^* \mathbb{E}\{X_c(n_i)X_c^*(n_j)\}$$

qui est le résultat annoncé.

La fonction de covariance entre deux processus aléatoires ne vérifie pas de propriété de positivité, mais on a les résultats suivants.

Propriété 5.3

La fonction de covariance $R_{XY}(n_1, n_2)$ des processus aléatoires $X(n)$ et $Y(n)$ vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Symétrie : $R_{XY}(n_1, n_2) = R_{YX}^*(n_2, n_1)$.
2. Inégalité de Schwarz : $|R_{XY}(n_1, n_2)|^2 \leq R_{XX}(n_1, n_1)R_{YY}(n_2, n_2)$.

5.3 Processus aléatoires SSL à temps discret

Définition 5.11 (processus aléatoires SSL à temps discret)

On appelle processus aléatoire Stationnaire au Sens Large (en abrégé SSL) une suite de variables aléatoires $X(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, définies sur le même espace de probabilité et telles que :

- $\mathbb{E}\{X(n)\} = m_X$ indépendant de n ,
- $\mathbb{E}\{|X(n)|^2\} < +\infty$,
- $R_{XX}(k) = \mathbb{E}\{X(n+k)X^*(n)\} - |m_X|^2$ ne dépend que de l'écart de temps $k \in \mathbb{Z}$.

Propriété 5.4

La fonction (suite) d'autocovariance d'un processus aléatoire SSL à temps discret vérifie :

1. Symétrie hermitienne: $R_{XX}(k) = R_{XX}^*(-k)$.
2. Caractère défini non négatif:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j^* R_{XX}(k_i - k_j) \geq 0$$

pour tout n , pour toute suite d'instants $\{k_1, \dots, k_n\}$ et pour toute suite de valeurs complexes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.

3. Valeur à l'origine: d'après l'inégalité de Schwarz, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $|R_{XX}(k)| \leq R_{XX}(0)$,
4. Matrice de covariance: considérons le vecteur aléatoire $\mathcal{X} = (X(n_0), X(n_0+1), \dots, X(n_0+k-1))^T$. \mathcal{X} a pour vecteur moyenne $\mathbb{E}\{\mathcal{X}\} = m_X(1, \dots, 1)^T$ et pour matrice de covariance:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_X &= \left[\mathbb{E}\{(X(n_0+k) - m_X)(X(n_0+p) - m_X)^*\} \right]_{0 \leq k \leq n-1, 0 \leq p \leq n-1} \\ &= \begin{bmatrix} R_{XX}(0) & R_{XX}(1) & \dots & R_{XX}(n-1) \\ R_{XX}^*(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{XX}(1) \\ R_{XX}^*(n-1) & \dots & R_{XX}^*(1) & R_{XX}(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rappelons que la matrice \mathbf{R}_X est hermitienne (elle est symétrique si $X(n)$ est réel) positive. On remarque, de plus, que \mathbf{R}_X a donc toutes ses parallèles à la diagonale principale constituées de termes constants: une telle matrice est dite de Toëplitz.

Preuve: voir exercice ??.

Définition 5.12

On considère un processus aléatoire $X(n)$ à temps discret ($n \in \mathbb{Z}$), SSL, de fonction d'autocovariance $R_{XX}(k)$. On suppose que $R_{XX}(k)$ est de module sommable. On appelle spectre ou densité spectrale de puissance (en abrégé d.s.p. ou dsp) du processus aléatoire $X(n)$, la transformée de Fourier à temps discret de sa fonction d'autocovariance :

$$S_{XX}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k) e^{-2j\pi f k} \quad (5.16)$$

On sait (voir propriété 3.1) que $S_{XX}(f)$ est une fonction continue de f et que, d'après l'expression 3.4, on a la formule inverse :

$$R_{XX}(k) = \int_{-1/2}^{+1/2} S_{XX}(f) e^{2j\pi f k} df \quad (5.17)$$

On en déduit que la puissance, définie par $P_X = R_{XX}(0) + |m_X|^2$, a pour expression :

$$P_X = \int_{-1/2}^{+1/2} S_{XX}(f) df + |m_X|^2 \quad (5.18)$$

Théorème 5.2

La d.s.p. d'un processus aléatoire SSL vérifie :

$$S_{XX}(f) \geq 0 \quad \forall f \quad (5.19)$$

Nous verrons, dans le paragraphe sur l'estimation de la d.s.p., que le périodogramme fournit une explication sur le fait que la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance est désignée par le terme de d.s.p. c'est-à-dire s'interprète comme une distribution de la puissance en fonction de la fréquence.

5.4 Filtrage des processus aléatoires SSL à temps discret

Théorème 5.3

Soit $X(n)$ un processus aléatoire à temps discret, SSL, de moyenne m_X et de fonction d'autocovariance $R_{XX}(k)$. Une condition suffisante pour que la somme :

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n-k)X(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)X(n-k)$$

existe, est que $g(n)$ soit de module sommable c'est-à-dire $\sum_s |g(k)| < +\infty$ ¹. Dans ce cas :

- $Y(n)$ est SSL,
- sa moyenne est donnée par $m_Y = m_X \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)$,
- sa fonction d'autocovariance a pour expression :

$$R_{YY}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)C_{gg}(m-k)$$

où $C_{gg}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k)g^*(k-m)$.

- et la fonction de covariance entre $Y(n)$ et $X(n)$ a pour expression :

$$R_{YX}(m) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k)g(m-k)$$

En particulier, si le processus aléatoire $X(n)$ SSL possède une d.s.p., on a :

$$S_{YY}(f) = G(f)G^*(f)S_{XX}(f) \quad (5.20)$$

$$S_{YX}(f) = G(f)S_{XX}(f) \quad (5.21)$$

où $G(f)$ désigne la transformée de Fourier à temps discret de $g(n)$.

5.5 Exemples de modèles de processus SSL à temps discret

5.5.1 Processus harmonique

Le processus harmonique est défini par :

$$X(n) = \sum_{k=1}^N A_k \exp(2j\pi f_k n) \quad (5.22)$$

¹ On rappelle que $\sum_s |g(k)| < +\infty \Rightarrow \sum_s |g(k)|^2 < +\infty$, mais que la réciproque est fausse.

où $\{A_k\}$ désigne une suite de N variables aléatoires complexes, centrées, non corrélées, de variance $\{\sigma_k^2\}$ et $\{f_k\}$ une suite de N valeurs non nulles appartenant à $I = (-1/2, 1/2)$. $X(n)$ est centré et sa fonction d'autocovariance est donnée par :

$$R_{XX}(m) = \mathbb{E}\{X(n+m)X^*(n)\} = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \exp(2j\pi f_k m)$$

On en déduit que :

$$R_{XX}(m) = \int_I e^{2j\pi f m} \mu_{XX}(df) \quad \text{où} \quad \mu_{XX}(\Delta) = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \mathbb{1}_{\Delta}(f_k) \quad (5.23)$$

La mesure $\mu_{XX}(\Delta)$, définie sur $\{I, \mathcal{B}(I)\}$, est appelée mesure spectrale du processus. Cette notion généralise celle de d.s.p., dans le sens où la d.s.p. est la densité (lorsqu'elle existe) de la mesure spectrale par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\{I, \mathcal{B}(I)\}$.

5.5.2 Bruit blanc

On appelle bruit blanc à temps discret un processus aléatoire SSL, centré, dont la d.s.p. est constante sur tout l'axe des fréquences.

Si on note η la d.s.p. d'un bruit blanc, un conséquence directe de la définition est que la fonction d'autocovariance d'un bruit blanc est la suite :

$$R_{XX}(k) = \mathbb{E}\{X(n+k)X(n)\} = \begin{cases} \eta & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (5.24)$$

C'est l'exemple le plus simple de processus à temps discret, celui d'un processus *sans mémoire*, dans le sens où la valeur du processus à l'instant n n'est pas corrélée (mais pas nécessairement indépendante) de la valeur du processus à l'instant $(n+k)$. La figure 5.4 montre une réalisation de $N = 500$ échantillons d'un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 = 1$.

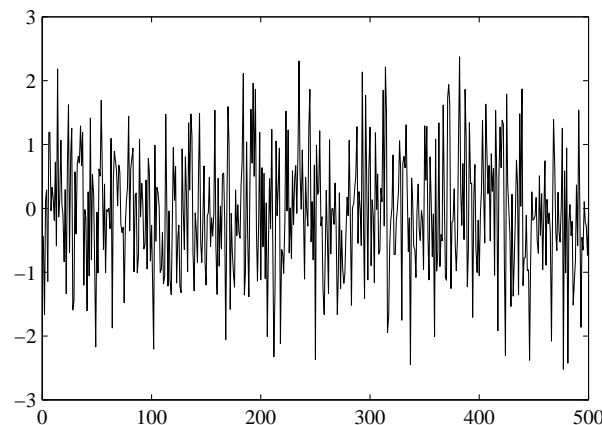


Figure 5.4: Trajectoire d'un bruit, blanc, gaussien de variance 1

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```

%==== explebr.m bruit blanc
N=1000;
%==== bruit blanc gaussien
sigma=1; brgaussien=sigma*randn(N,1);
subplot(121); plot(brgaussien)
%==== bruit blanc equireparti
brequirep=rand(N,1);
subplot(122); plot(brequirep)
    
```

Exemple 5.3 (Bruit de quantification) Considérons le dispositif de quantification qui associe à la suite de valeurs d'entrée $x(n)$ la suite de valeurs $y(n)$ suivant la règle :

$$y(n) = kq \Leftrightarrow x(n) \in (kq - q/2, kq + q/2)$$

q s'appelle le *pas de quantification*. Posons $y(n) = x(n) + \varepsilon(n)$.

En pratique une description déterministe de l'erreur de quantification $\varepsilon(n)$ n'est pas utile. Dans beaucoup de calculs rencontrés par l'ingénieur, il suffit de modéliser $\varepsilon(n)$ comme un processus aléatoire, que l'on désigne sous le terme de *bruit de quantification*, et on adopte les hypothèses suivantes : $\varepsilon(n)$ est une suite de variables aléatoires de loi uniforme sur l'intervalle $(-q/2, q/2)$ non corrélées entre elles. En remarquant que cette loi a pour densité de probabilité :

$$p_{\varepsilon_n}(e) = \frac{1}{q} \mathbb{1}_{[-q/2, q/2)}(e)$$

on déduit que $\mathbb{E}\{\varepsilon(n)\} = 0$, $\mathbb{E}\{\varepsilon(n)^2\} = q^2/12$ et $\mathbb{E}\{\varepsilon(n)\varepsilon(k)\} = 0$ pour $n \neq k$. Ainsi modélisé, le bruit de quantification est donc blanc et sa d.s.p. $S_{\varepsilon\varepsilon}(f) = q^2/12$.

5.5.3 Processus à moyenne ajustée d'ordre q

Définition 5.13

Le processus $\{X(n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, est dit à *moyenne ajustée*² d'ordre q (ce que l'on note $MA(q)$), si :

$$X(n) = Z(n) + b_1 Z(n-1) + \dots + b_q Z(n-q) \quad (5.25)$$

où $\{Z(n)\}$ est un bruit SSL blanc de puissance σ_Z^2 .

Un calcul simple donne pour la moyenne $m_X = 0$ et pour la fonction d'autocovariance :

$$R_{XX}(k) = \begin{cases} \sigma_Z^2 (b_k b_0 + b_{k+1} b_1 + \dots + b_q b_{q-k}) & 0 \leq k \leq q, \\ 0 & \text{autrement} \end{cases} \quad (5.26)$$

En pratique, pour estimer, à partir de l'observation (X_1, \dots, X_N) , la suite b_k , on substitue aux coefficients $R_{XX}(k)$ une estimation sous la forme des quantités :

$$\hat{R}_{XX}(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-|k|} X_c(j+k) X_c(j) \quad (5.27)$$

où $X_c(j) = X(j) - \bar{X}_N$ avec

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n)$$

On verra au paragraphe 5.6.2 que ces estimations convergent vers les vraies valeurs.

On note alors que la relation entre la suite des paramètres b_k de ce modèle et les coefficients d'autocovariance, est non linéaire. C'est pourquoi on préfère souvent à un modèle MA un modèle AR, qui, comme nous allons le voir, conduit à une relation linéaire entre les paramètres du modèle et les coefficients d'autocovariance.

5.5.4 Processus autorégressif d'ordre p

Partant encore du bruit blanc, une autre façon de procéder consiste à construire un modèle faisant apparaître une dépendance avec le passé de $X(n)$.

Définition 5.14 (Processus autorégressif d'ordre p)

Soit l'équation récurrente :

$$X(n) + a_1 X(n-1) + \dots + a_p X(n-p) = W(n) \quad (5.28)$$

²En anglais moyenne mobile se traduit par moving average

où $\{W(n)\}$ est un bruit blanc, centré, de variance σ_W^2 . On montre que cette équation possède une unique solution SSL si et seulement si le polynôme $A(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p$ n'a pas de racine sur le cercle unité, c'est-à-dire $A(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$. Cette solution $X(n)$, qui vérifie $\mathbb{E}\{X(n)\} = 0$, est appelée processus autorégressif d'ordre p (ce que l'on note AR- p). Elle a pour expression :

$$X(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)W(n-k) \quad (5.29)$$

où les coefficients $h(k)$ sont les coefficients du développement en z de la fonction $H(z) = 1/A(z)$, qui est analytique dans un voisinage du cercle unité. Il s'agit donc de la réponse impulsionnelle du filtre causal et stable de fonction de transfert $H(z)$. On a :

$$\frac{1}{A(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^k \quad \text{avec} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty, \quad h(0) = 1 \quad (5.30)$$

En particulier, si le polynôme $A(z)$ a toutes les racines à l'intérieur du cercle unité, c'est-à-dire $A(z) \neq 0$ pour $|z| \geq 1$, $X(n)$ s'exprime causalement en fonction de $W(n)$, ce qui s'écrit :

$$X(n) = W(n) + h(1)W(n-1) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)W(n-k) \quad (5.31)$$

Nous nous intéresserons uniquement dans la suite aux processus autorégressifs "causaux" c'est-à-dire tels que $A(z) \neq 0$ pour $|z| \geq 1$.

Propriété 5.5

Soit $X(n)$ le processus AR- p associé au polynôme $A(z)$, où $A(z) \neq 0$ pour $|z| \geq 1$ (stabilité et causalité). Alors pour tout $k \geq 1$:

$$\mathbb{E}\{X(n-k)W(n)\} = 0 \quad (5.32)$$

Il suffit d'utiliser 5.31 et le fait que $\mathbb{E}\{W(n)W(j)\} = 0$ pour $n \neq j$. Si on pose $X(n) = \hat{X}(n) + W(n)$, où $\hat{X}(n) = -\sum_{i=1}^p a_i X(n-i)$, on a, d'après 5.32 :

$$\mathbb{E}\left\{X(n-k)(X(n) - \hat{X}(n))\right\} = 0$$

ce qui signifie que l'écart $\epsilon(n) = X(n) - \hat{X}(n)$ est orthogonal à $X(n-1)$, $X(n-2)$, etc. Par conséquent $\hat{X}(n)$ est la meilleure régression linéaire en moyenne quadratique de $X(n)$. De là le terme d'autorégressif donné à ce type de processus.

Propriété 5.6

Soit $X(n)$ le processus AR- p associé au polynôme $A(z)$, où $A(z) \neq 0$ pour $|z| \geq 1$. On note $R(k) = \mathbb{E}\{X(n+k)X(n)\}$ la fonction d'autocovariance de $X(n)$. Alors on a :

$$R(k) + a_1 R(k-1) + \dots + a_p R(k-p) = 0 \quad \text{pour } k \geq 1 \quad (5.33)$$

$$R(0) = \sigma_W^2 + \sum_{i=1}^p a_i R(i). \quad (5.34)$$

Rappelons tout d'abord que $R(k)$ est paire c'est-à-dire $R(-k) = R(k)$ et qu'il suffit donc de considérer $k \geq 0$. Ecrivons, pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{E}\{X(n-k)W(n)\} = 0$ et remplaçons $W(n)$ par $X(n) + a_1 X(n-1) + \dots + a_p X(n-p)$. Il vient 5.33. Considérons $\mathbb{E}\{X(n)W(n)\}$. En remplaçant tout d'abord $X(n)$ par $W(n) - \sum_i a_i X(n-i)$ et en utilisant 5.32 il vient $\mathbb{E}\{X(n)W(n)\} = \sigma_W^2$. En remplaçant à présent $W(n)$ par $X(n) + \sum_i a_i X(n-i)$, il vient 5.34.

La suite des coefficients d'autocovariance du processus vérifie des équations de récurrence en tout point similaires à celles du processus. Il est donc possible d'engendrer récursivement les coefficients d'autocovariance. Cette propriété est utilisée pour estimer les paramètres du modèle et pour prolonger les séquences d'autocovariance.

En utilisant la propriété 5.5 et en se limitant aux valeurs de k allant de 1 à p , il vient, avec des notations matricielles évidentes :

$$\mathbf{R} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_W^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

où \mathbf{R} désigne la matrice $(p+1) \times (p+1)$ dont l'élément situé à la ligne i et à la colonne j est $R(j-i)$. C'est la matrice de covariance d'ordre $p+1$ dont on a vu (propriété 5.4) qu'elle était positive et de Töeplitz.

Dans la littérature l'expression 5.35 s'appelle *l'équation de Yule-Walker*. Elle relie, de façon linéaire, les coefficients d'un processus AR avec sa fonction d'autocovariance. Elle est utilisée pour estimer les coefficients du modèle à partir de l'estimation 5.27 des coefficients d'autocovariance, dont nous rappelons ici l'expression :

$$\hat{R}_{XX}(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-|k|} X_c(j+k)X_c(j)$$

où $X_c(j) = X(j) - \bar{X}_N$ avec $\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n)$. Comme la matrice de covariance estimée est de Töeplitz, il existe un algorithme rapide d'inversion connu sous le nom d'algorithme de Levinson.

Exemple 5.4 (Processus autorégressif d'ordre 1) On considère le processus AR-1, $X(n)$, défini par l'équation récurrente :

$$X(n) + aX(n-1) = W(n) \quad (5.36)$$

où $|a| < 1$ et où $W(n)$ est un bruit SSL, blanc, centré, de variance σ_W^2 .

On en déduit que :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a^k W(n-k) \quad (5.37)$$

En utilisant la propriété 5.5, on obtient l'expression de sa fonction d'autocovariance :

$$R(k) = (-1)^k a^{|k|} \frac{\sigma_W^2}{1-a^2}$$

Il peut paraître de prime abord surprenant, alors que le modèle 5.36 ne fait intervenir qu'une dépendance entre deux instants successifs, que la fonction d'autocovariance ne s'annule pas pour $|k| > 1$, mais au contraire tend vers 0 graduellement avec k . L'explication tient au fait que la corrélation entre $X(n)$ et $X(n-2)$ est non nulle car $X(n)$ est relié à $X(n-1)$ et que $X(n-1)$ est lui-même relié à $X(n-2)$, et ainsi de suite.

Partant de la fonction d'autocovariance, la densité spectrale de ce processus est donnée par :

$$S(f) = \frac{\sigma_W^2}{|1 + a \exp(-2j\pi f)|^2} \quad (5.38)$$

La trajectoire d'un processus AR-1, gaussien, centré, est représentée figure 5.5 pour $a = -0,5$ et pour $a = -0,9$.

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```

%==== expleAR1.m processus AR-1
N=500;
%==== bruit blanc gaussien
sigmaW=1; wn=sigmaW*randn(N,1);
%==== construction du processus
a=-0.5; xn1=filter(1,[1 a],wn);
a=-0.9; xn2=filter(1,[1 a],wn);
subplot(211); plot(xn1)
subplot(212); plot(xn2)

```

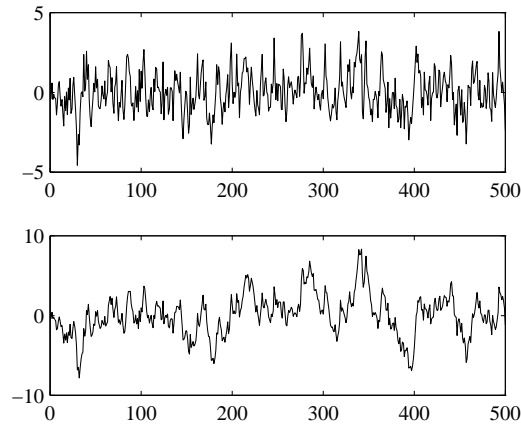



Figure 5.5: Trajectoires d'un processus $AR(1)$ gaussien pour deux valeurs de $a = -0,5$ et $a = -0,9$

Il est intéressant de remarquer que l'équation de récurrence 5.36 n'admet pas de solution stationnaire lorsque $a = \pm 1$. Prenons $a = -1$ et supposons qu'il existe une solution stationnaire $X(n)$ à l'équation de récurrence $X(n) = X(n-1) + W(n)$. En itérant l'équation de récurrence, nous avons, pour tout k , $X(n) = X(n-k) + \sum_{s=0}^{k-1} W(n-s)$, dont on déduit par élévation au carré et stationnarité :

$$R(0) = R(0) + k\sigma_W^2 + 2\mathbb{E} \left\{ X(n-k) \sum_{s=0}^{k-1} W(n-s) \right\}$$

Cette dernière relation implique donc que :

$$\mathbb{E} \left\{ X(n-k) \sum_{s=0}^{k-1} W(n-s) \right\} = -k\sigma_W^2/2.$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, nous avons aussi :

$$\left| \mathbb{E} \left\{ X(n-k) \sum_{s=0}^{k-1} W(n-s) \right\} \right|^2 \leq R(0)\sigma_W^2 k$$

ce qui, d'après la relation précédente, donnerait pour tout $k > 0$, $R(0) \geq k\sigma_W^2/4$. Ce qui est contraire à $R(0) < +\infty$.

Sinusoïde bruitée versus AR-2

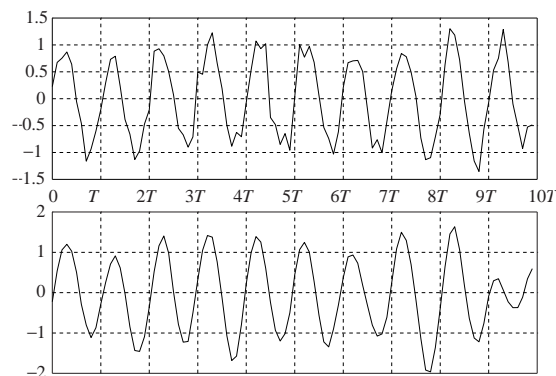


Figure 5.6: Fonction sinus bruitée versus processus $AR-2$

Figure 5.6 sont représentées la trajectoire d'une sinusoïde bruitée, graphe du haut, et celle d'un processus AR-2, graphe du bas. Pour l'AR-2 les pôles ont été choisis de façon à produire une pseudo-période de fréquence proche de celle de la sinusoïde. Nous voyons que la sinusoïde bruitée présente de fortes irrégularités mais, bien que les erreurs soient larges et apparaissent de façon erratique, l'analyse par périodogramme est applicable et, partant d'un nombre suffisant de périodes, celui-ci fournit une bonne approximation de la période. D'un autre côté, la trajectoire du graphe du bas ne présente pas de brusques variations d'amplitude : la courbe a un aspect lisse. Par contre l'amplitude varie dans de larges limites et la phase glisse continuellement. Quand l'observation présente un tel comportement le modèle AR est préférable à un modèle "sinusoïde plus bruit" mais le périodogramme n'est plus justifié. C'est cette remarque qui a conduit Yule à proposer le modèle AR pour les taches solaires alors que Schuster avait imaginé, quelques années plus tôt, le périodogramme pour cette même série de valeurs.

5.6 Eléments d'estimation

5.6.1 Estimation de la moyenne

Soit $\{X(n)\}$ un processus à temps discret stationnaire au second ordre, de moyenne $\mathbb{E}\{X(n)\} = m_X$, et de fonction d'autocovariance $R(k)$. Nous supposons dans la suite que $R(k)$ est sommable, c'est-à-dire $\sum |R(k)| < \infty$. Nous considérons ici que m_X et $R(k)$ sont inconnus et nous cherchons à estimer ces différentes quantités à partir de la donnée de N observations X_1, X_2, \dots, X_N . Nous commençons par étudier le problème le plus simple, à savoir l'estimation de la moyenne. Nous envisagerons ensuite le problème plus difficile de l'estimation des coefficients d'autocovariance.

Dans cette étude introductive, nous considérons uniquement l'approche élémentaire consistant à estimer m_X par la moyenne empirique :

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n) \quad (5.39)$$

Il s'ensuit que $\mathbb{E}\{\bar{X}_N\} = m_X$. On dit que \bar{X}_N est un estimateur *sans biais* de m_X . Pour étudier la dispersion de cet estimateur autour de la vraie valeur, nous considérons maintenant sa variance qui a pour expression :

$$\begin{aligned} \text{var}(\bar{X}) &= \mathbb{E} \left\{ \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n) - m_X \right)^2 \right\} = \frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N X(n)X(k) \right\} - m_X^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^N \mathbb{E}\{X(n)X(k)\} - m_X^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{s=1}^N \sum_{t=1}^N R(t-s) = \frac{1}{N} \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) R(r) \end{aligned} \quad (5.40)$$

On pourra montrer, à titre d'exercice, que :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{r=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|r|}{N}\right) R(r) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} R(r) = S(0) \quad (5.41)$$

où $S(f)$ désigne la d.s.p. du processus. On en déduit donc que la variance de \bar{X}_N tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. On dit que \bar{X}_N converge en moyenne quadratique (m.q.) vers m_X . Cette relation entre m_X et \bar{X}_N est importante. D'un côté, m_X est la moyenne (espérance mathématique) de $X(n)$ à tout instant. D'un autre côté, \bar{X}_N est la "moyenne temporelle" de la suite $\{X(n)\}$, calculée pour une trajectoire donnée sur N instants successifs. La convergence exprimée par 5.41 "justifie" d'estimer la moyenne statistique m_X par la moyenne temporelle \bar{X}_N , fait partie d'un ensemble de propriétés que l'on désigne sous le terme d'*ergodicité*.

5.6.2 Estimation des covariances

Pour estimer les coefficients $R(k)$, nous avons vu à l'équation 5.27, l'expression suivante :

$$\hat{R}_N(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|k|} (X(n+k) - \bar{X}_N)(X(n) - \bar{X}_N) \quad (5.42)$$

où \bar{X}_N est donné par :

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X(n) \quad (5.43)$$

Remarquons que le nombre d'observations dont nous disposons étant précisément égal à N , il n'existe pas de paires d'observations séparées de plus de $N-1$ intervalles de temps, et donc qu'il n'est pas possible d'estimer les valeurs de $R(k)$ pour $|k| \geq N$. Il est facile de voir que $\hat{R}_N(k)$ est asymptotiquement sans biais dans le sens où $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \{ \hat{R}_N(k) \} = R(k)$. Indiquons simplement que, sous des hypothèses adéquates (existence de moments d'ordre 4, stationnarité stricte), on peut montrer que :

$$\text{var}(\hat{R}_N(k)) \simeq \frac{1}{N} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (R^2(m) + R(m+k)R(m-k)), \quad (5.44)$$

Comme le montre l'expression 5.44, la variance de $\hat{R}_N(k)$ ³ est approximativement de l'ordre de $1/N$ pour $k \in \{-(N-1), \dots, (N-1)\}$ et tend donc vers zéro quand N tend vers l'infini. Là encore ce résultat joue un rôle pratique important : il est justifié d'estimer l'espérance mathématique $R(k)$ par la moyenne temporelle faite sur une trajectoire suffisamment longue.

5.6.3 Estimation de la d.s.p.

Soit $\{X(n)\}$ un processus aléatoire SSL de fonction d'autocovariance sommable. Sa densité spectrale est définie par $S(f) = \sum_k R(k) \exp(-2j\pi fk)$. Nous supposons dans la suite que la moyenne $\mathbb{E}\{X(n)\}$ est connue. On peut alors, sans perte de généralité, supposer que $\mathbb{E}\{X(n)\} = 0$. Dans ce cas, $R(k) = \mathbb{E}\{X(n+k)X(n)\}$.

Une façon naturelle d'estimer la densité spectrale consiste donc à tronquer la sommation précédente pour $k \in \{-(N-1), \dots, (N-1)\}$ et à substituer les coefficients d'autocovariance $R(k)$, par les estimateurs biaisés $\hat{R}_N(k) = N^{-1} \sum_{n=1}^{N-|k|} X(n+k)X(n)$. En notant $I_N(f) = \hat{S}_N(f)$, on obtient ainsi :

$$I_N(f) = \sum_{k=-(N-1)}^{(N-1)} \hat{R}_N(k) \exp(-2j\pi fk) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N X(n) \exp(-2j\pi fn) \right|^2 \quad (5.45)$$

qui est appelé le *périodogramme*. Nous avons :

$$\mathbb{E}\{I_N(f)\} = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R(k) \exp(-2j\pi kf) \quad (5.46)$$

et par suite, quand N tend vers l'infini, $\mathbb{E}\{I_N(f)\}$ tend vers $S(f)$: le périodogramme est donc un estimateur asymptotiquement sans biais de la densité spectrale.

Toutefois, le périodogramme est un "mauvais" estimateur de la densité spectrale : plus précisément, le périodogramme est un estimateur *inconsistant* de $S(f)$, dans le sens où $\text{var}(I_N(f))$ ne tend pas vers 0 quand $N \rightarrow \infty$. D'autre part, on montre que les amplitudes du périodogramme prises à deux fréquences de Fourier ($f = k/N$) distinctes sont asymptotiquement décorréélées. Ceci explique l'apparence extrêmement "erratique" du périodogramme (voir figure 5.7).

³ Le fait de supposer $\sum_m |R(m)| < \infty$ entraîne que $\sum_m |R(m+k)R(m-k)| < \infty$.

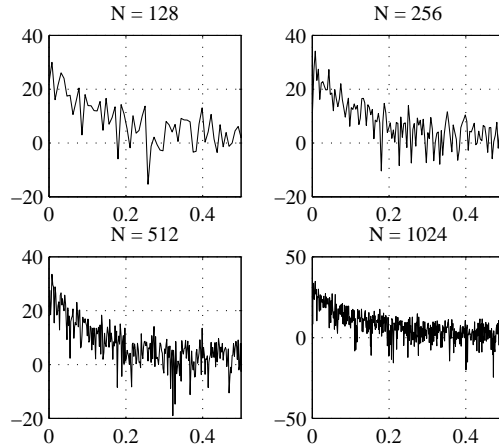


Figure 5.7: Périodogrammes d'un processus SSL pour $N = 128, 256, 512, 1024$

Périodogramme tronqué et périodogramme fenêtré

Une idée pour réduire la variance du périodogramme consiste à omettre dans la somme 5.45 un certain nombre de termes. En faisant cela, nous devrions réduire la variance de l'estimateur, mais, d'un autre côté, nous augmentons le biais (puisque nous négligeons un plus grand nombre de termes). Toutefois, puisque nous nous intéressons à des processus pour lesquels $\sum |R(s)| < \infty$, il est raisonnable de penser que l'augmentation de biais sera raisonnable. Ces idées suggèrent de considérer l'estimateur :

$$\hat{S}_M(f) = \sum_{s=-M}^M \hat{R}(s) \exp(-2j\pi s f). \quad (5.47)$$

où M est un entier tel que $M < (N - 1)$. Un tel estimateur est appelé un *périodogramme tronqué*. Nous n'étudierons pas précisément le biais et la variance de cet estimateur et nous contenterons d'une discussion heuristique. Comme le nombre de termes intervenant dans la somme est $(2M + 1)$ (contre $(2N + 1)$ pour le périodogramme non tronqué), il est aisé de se convaincre que la variance de cet estimateur est d'ordre $O(M/N)$. De plus :

$$\mathbb{E} \left\{ \hat{S}_M(f) \right\} = \sum_{s=-M}^M \left(1 - \frac{|s|}{N} \right) R(s) \exp(-2j\pi s f) \rightarrow S(f) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} R(s) \exp(-2j\pi s f) \quad (5.48)$$

lorsque $M \rightarrow \infty$. Donc, si l'on fait dépendre la valeur de M de la taille N de l'échantillon de telle sorte que $M \rightarrow \infty$ quand $N \rightarrow \infty$, alors $\hat{S}_M(f)$ est un estimateur (asymptotiquement) sans biais de $S(f)$.

Ces deux résultats suggèrent que si l'on fait croître M en fonction de N de telle sorte que $M \rightarrow \infty$ lorsque $N \rightarrow \infty$, mais suffisamment "lentement" pour que $M/N \rightarrow 0$, alors le biais et la variance de l'estimateur $\hat{S}_M(f)$ de $S(f)$ tendront simultanément vers 0, et nous aurons ainsi construit un estimateur consistant de $S(f)$, c'est-à-dire un estimateur dont la dispersion quadratique $\mathbb{E} \left\{ \hat{S}_M(f) - S(f) \right\}^2 \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Il est facile de voir que ces deux conditions sont réunies si l'on prend par exemple $M = N^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$. L'estimateur 5.47 peut être vu comme un cas particulier d'une classe plus générale d'estimateurs :

$$\hat{S}_\lambda(f) = \sum_{s=-(N-1)}^{(N-1)} \lambda(s) \hat{R}(s) \exp(2j\pi f s) \quad (5.49)$$

où $\lambda(s)$ est une fonction paire. Le périodogramme tronqué correspond au cas où la fenêtre de pondération des coefficients d'autocovariance est la fenêtre rectangulaire :

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1, & |s| \leq M \\ 0, & |s| > M \end{cases} \quad (5.50)$$

On peut bien entendu considérer des fenêtres plus générales, par exemple des fenêtres de pondération décroissant régulièrement vers 0 (plutôt qu'être constante sur une certaine plage et nulle au-delà). Pour de tels estimateurs, la contribution de la queue des coefficients d'autocovariance sera réduite (plutôt que purement et simplement éliminée), mais il est raisonnable d'espérer que si la $\lambda(s)$ décroît "suffisamment" vite, les estimateurs de la forme 5.49 seront consistants.

Bartlett (1950) a suggéré l'utilisation de la fenêtre triangulaire :

$$\lambda(s) = \begin{cases} 1 - |s|/M & |s| \leq M \\ 0 & |s| > M \end{cases} \quad (5.51)$$

Ici encore M détermine le point où la fonction d'autocovariance est tronquée. Toutefois, alors que dans l'exemple précédent les différents coefficients d'autocovariance étaient simplement tronqués, ici les coefficients d'autocovariance sont pondérés avec un poids décroissant linéairement avec l'index s . La fenêtre spectrale associée à la fenêtre temporelle 5.51 est donnée par

$$W(x) = \sum_{s=-M}^M (1 - |s|/M) \cos(2\pi s x) = F_M(x) \quad (5.52)$$

où $F_M(x)$ est le noyau de Fejèr. Notons que $F_M(x)$ est positive pour tout x , et donc que l'estimateur spectral construit avec cette fonction de pondération reste positif.

Chapitre 6

Numérisation d'un signal

Mots-clés et notions à connaître :

- Fréquence d'échantillonnage :

$$F_e \geq 2B$$

où le signal échantillonné est supposé réel, de spectre de largeur B autour de la fréquence 0,

- Rapport signal/bruit en quantification uniforme a pour expression :

$$\text{RSB}_Q \propto 6N + 10 \log_{10}(F_e/2B)$$

où N désigne le nombre de bits du quantificateur. On a donc un gain de 6 dB par bit et de 3 dB par doublement de la fréquence d'échantillonnage (voir remarque 2),

- Amélioration du RSB_Q : par mise en forme du bruit de quantification,
- Amélioration du RSB_Q : par quantification non uniforme en tenant compte de la distribution de probabilité du signal, par modèle de signal (exemple LPC en parole).

La numérisation d'un signal consiste en deux opérations : l'échantillonnage et la quantification.

6.1 Rappels et compléments sur l'échantillonnage

Signaux déterministes

On suppose que $x(t)$ est un signal réel dont la TF $X(F) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2j\pi Ft} dt = 0$ pour $|F| > B$. On note $x_e(n) = x(nT_e)$ et $X_e(f) = \sum_n x_e(n)e^{-2j\pi n f}$.

Si $F_e \geq 2B$, alors le signal peut être reconstruit à partir des échantillons et on a :

$$x(t) = \sum_n x_e(n)h_B(t - kT_e) \tag{6.1}$$

$$\text{où } h_B(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi F_e t} \Leftrightarrow H_B(F) = \frac{1}{F_e} \mathbf{1}_{(-B,B)}(F) \tag{6.2}$$

Partant de la suite $x_e(n)$ des échantillons ainsi que des valeurs de B et F_e , l'expression du spectre $X(F)$ du signal analogique s'obtient de la façon suivante :

1. On calcule la TFTD de $x_e(n)$,
2. On multiplie l'axe des fréquences par F_e ,
3. On multiplie les amplitudes par $1/F_e$,
4. On limite la bande à $(-B, B)$.

Plus précisément on a :

$$\{x_e(n) \Leftrightarrow X_e(f)\}, B, F_e \longrightarrow X(F) = \frac{1}{F_e} X_e(F/F_e) \mathbf{1}_{(-B, B)}(F)$$

Signaux aléatoires

On suppose que $x(t)$ est un processus aléatoire stationnaire au second ordre au sens large (SSL) réel, centré. On note $R(\tau) = \mathbb{E}\{x(t+\tau)x(t)\}$ sa fonction d'autocovariance. On suppose que $x(t)$ est de bande B c'est-à-dire tel que sa densité spectrale $S(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-2j\pi F\tau} d\tau = 0$ pour $|F| > B$.

On note $x_e(n) = x(nT_e)$ la suite de ses échantillons. $x_e(n)$ est un processus à temps discret, stationnaire au second ordre. Sa fonction d'autocovariance s'écrit :

$$R_e(n) = \mathbb{E}\{x_e(k+n)x_e(k)\} = \mathbb{E}\{x((k+n)T_e)x(kT_e)\} = R(nT_e)$$

et sa densité spectrale

$$S_e(f) = \sum_n R_e(n)e^{-2j\pi n f} = \sum_n R(nT_e)e^{-2j\pi n f T_e}$$

Alors, si $F_e \geq 2B$, on peut reconstruire le processus $x(t)$ à partir de ses échantillons et on a :

$$x(t) = \sum_n x_e(n)h_B(t - nT_e) \text{ où } h_B(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi F_e t}$$

où l'égalité est comprise dans le sens d'une convergence en moyenne quadratique. On en déduit l'expression du spectre du signal reconstruit :

$$S(F) = \frac{1}{F_e} S_e(F/F_e) \mathbf{1}_{(-B, B)}(F) \tag{6.3}$$

Partant de la suite des *covariances* des échantillons ainsi que des valeurs de B et F_e , l'expression du spectre du signal analogique s'obtient de la façon suivante :

1. On calcule la TFTD de la suite $\{R_e(n)\}$,
2. On multiplie l'axe des fréquences par F_e ,
3. On multiplie les amplitudes par $1/F_e$,
4. On limite la bande à $(-B, B)$.

Plus précisément on a :

$$\{R_e(n) \Leftrightarrow S_e(f)\}, B, F_e \longrightarrow S(F) = \frac{1}{F_e} S_e(F/F_e) \mathbf{1}_{(-B, B)}(F) \tag{6.4}$$

6.2 Quantification uniforme de pas q

Bruit de quantification

Un dispositif de quantification uniforme de pas q , figure 6.1 est un système qui associe à l'entrée $x_e(n)$ le signal $x_e^Q(n)$ suivant la règle :

$$x_e(n) \in \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)q, \left(k + \frac{1}{2}\right)q \right] \longrightarrow x_e^Q(n) = kq \quad (6.5)$$

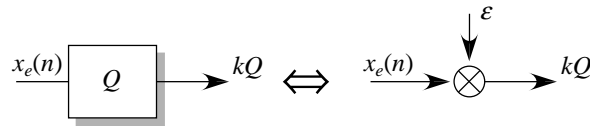


Figure 6.1: Quantificateur uniforme

On peut alors poser :

$$x_e^Q(n) = x_e(n) + \varepsilon_e(n) \quad (6.6)$$

Dans la littérature le signal $\varepsilon_e(n)$ est appelé le *bruit de quantification*. On retiendra que tout se passe comme on ajoutait au signal original le bruit de quantification. Cela revient donc à remplacer dans le schéma (voir figure 6.1) le quantificateur par un bruit additif.

Hypothèses sur le bruit de quantification $\varepsilon_e(n)$

On suppose dans la suite que $\varepsilon_e(n)$ est un bruit blanc, centré, de loi uniforme sur l'intervalle $(-q/2, q/2)$. On retiendra que l'hypothèse de répartition uniforme exige entre autre qu'il n'y ait pas d'*écrêtage*. De ces hypothèses il est facile de déduire les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{E} \{ \varepsilon_e(n) \} = 0$,
2. $\mathbb{E} \{ \varepsilon_e(k+n) \varepsilon_e(k) \} = \delta_n q^2 / 12$,
3. La d.s.p. de $\varepsilon_e(n)$ s'écrit :

$$S_{\varepsilon_e}(f) = q^2 / 12 \quad (6.7)$$

Expression du signal reconstruit

Le signal reconstruit à partir des échantillons quantifiés s'écrit comme la somme du signal original et d'un bruit dont on calculera la puissance. En effet, en appliquant la formule de reconstruction (6.1) aux échantillons quantifiés $x_e^Q(n)$, on obtient le signal suivant :

$$\begin{aligned} x^Q(t) &= \sum_n x_e^Q(n) h_B(t - nT_e) \\ &= \underbrace{\sum_n x_e(n) h_B(t - nT_e)}_{x(t)} + \underbrace{\sum_n \varepsilon_e(n) h_B(t - nT_e)}_{\varepsilon(t)=\text{bruit de quantification}} \end{aligned}$$

Le bruit de quantification sur le signal reconstruit a donc pour expression :

$$\varepsilon(t) = \sum_n \varepsilon_e(n) h_B(t - nT_e)$$

En utilisant l'équation (6.3) et l'expression (6.7) de la d.s.p. de $\varepsilon_e(n)$, on en déduit que la d.s.p. de $\varepsilon(t)$ a pour expression :

$$S_\varepsilon(F) = \frac{1}{F_e} \frac{q^2}{12} \mathbb{1}_{(-B, B)}(F)$$

Par conséquent la puissance du bruit de quantification est donnée par :

$$P_Q = \mathbb{E} \{ \varepsilon^2(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} S_\varepsilon(F) dF = \frac{2B}{F_e} \frac{q^2}{12} \quad (6.8)$$

RSB de quantification

Pour caractériser la qualité du dispositif de quantification, on part de l'expression $x^Q(t) = x(t) + \varepsilon(t)$ du signal reconstruit, et on définit le rapport signal sur bruit :

$$\text{RSB}_Q = \frac{\mathbb{E} \{ x^2(t) \}}{\mathbb{E} \{ \varepsilon^2(t) \}} \quad (6.9)$$

où on suppose que $x(t)$ est un processus aléatoire, stationnaire au second ordre, centré, de puissance $P_x = \mathbb{E} \{ x^2(t) \}$.

D'après (6.8), $\mathbb{E} \{ \varepsilon^2(t) \}$ est donné en fonction de q . En supposant à présent que le quantificateur utilise N bits pour coder les échantillons et que sa valeur crête maximale est A_c , on en déduit que le pas de quantification a pour expression :

$$q = \frac{2A_c}{2^N} \quad (6.10)$$

Reste à donner l'expression de la puissance $\mathbb{E} \{ x^2(t) \}$ du signal en fonction de la valeur crête A_c du quantificateur. Pour cela nous allons rappeler que le calcul de la puissance de bruit suppose l'absence d'écrêtage et, par conséquent, la puissance doit être telle que le signal ne "sorte" pas de l'intervalle $[-A_c, A_c]$. Bien sûr, en pratique, une telle contrainte est difficile à satisfaire. On peut toutefois faire en sorte que, sous certaines hypothèses sur la distribution de $x(t)$, la probabilité de sortir de cet intervalle soit inférieure à un niveau donné. On rappelle que, par exemple, dans le cas où le processus $x(t)$ est gaussien, centré, de variance P_x , la probabilité de dépasser la valeur $A_c = 3\sqrt{P_x}$ est inférieure à 1%. De manière plus générale on pourra poser :

$$A_c^2 = F^2 P_x \quad (6.11)$$

où F s'appelle le *facteur de forme*. Il peut en effet être déduit de la forme de la distribution de probabilité de $x(t)$. En portant l'expression 6.11 dans l'expression de 6.10, puis dans l'expression 6.9, on obtient :

$$\text{RSB}_Q = \frac{F_e}{2B} \frac{12P_x}{q^2} = 3 \frac{F_e}{2B} 2^{2N} \frac{1}{F^2}$$

Finalement, en passant en utilisant des décibels, on a :

$$\text{RSB}_{Q,dB} = 6N + 10 \log_{10}(F_e/2B) - 10 \log_{10}(F^2/3) \quad (dB) \quad (6.12)$$

On retiendra :

- que l'on gagne 6 dB par bit,
- que l'on gagne 3 dB quand on double la fréquence d'échantillonnage à condition que l'hypothèse de blancheur de $\varepsilon_e(n)$ soit vérifiée, ce qui n'est pas le cas si F_e est trop grand,
- que, quand on utilise au mieux la dynamique du codeur, une valeur typique de F est comprise entre 3 et 4.

Remarques :

1. Si l'on ne fait pas de quantification, il ne sert à rien d'échantillonner plus vite. D'après le théorème d'échantillonnage, toute l'information utile pour reconstruire sans erreur le signal est contenue dans les échantillons prélevés à $F_e = 2B$.

2. La formule (6.12) a été obtenue en supposant que le bruit de quantification est blanc. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, le gain peut être alors très inférieur. Il en est ainsi lorsque le facteur de sur-échantillonnage devient trop grand car, dans ce cas, l'hypothèse de non-corrélation des erreurs n'est plus vraiment vérifiée.
3. Il n'y a aucun sens à interpoler la suite à temps discret *déjà quantifiée* dans l'espoir d'obtenir les échantillons qui auraient été produits lors d'un échantillonnage plus rapide du signal à temps continu. Les écarts introduits par la procédure de quantification sont définitivement perdus et les échantillons reconstruits sont bruités de la même façon.

Exemple 6.1 (Parole en qualité téléphonique (300 – 3400 Hz)) la voix est échantillonnée à $F_e = 8000$ Hz et quantifiée sur 8 bits. On obtient un débit de 64 kbits/s, appelé MIC pour Modulation par Impulsions et Codage. Le $RSB \approx 48$ dB.

Exemple 6.2 (stereo-CD qualité (0 – 22000 Hz)) la voix est échantillonnée à $F_e = 44100$ Hz et quantifiée sur 16 bits. En monophonie, on obtient 705.6 kbits/s. Le $RSB \sim 96$ dB.

6.3 Mise en forme du bruit de quantification

Considérons le schéma de la figure 6.2.

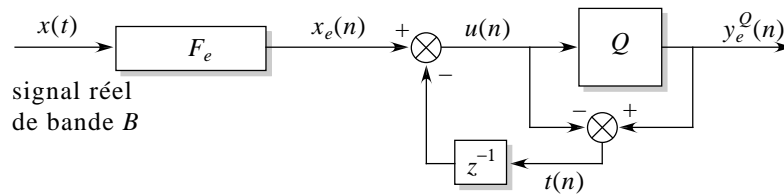


Figure 6.2: Mise en forme du bruit de quantification

Comme nous l'avons dit l'opération de quantification est équivalente à l'addition d'un bruit $\varepsilon_e(n)$ blanc, centré, de puissance $q^2/12$. Un calcul simple montre alors que :

$$y_e^Q(n) = x_e(n) + \underbrace{\varepsilon_e(n) - \varepsilon_e(n-1)}_{w_e(n)}$$

où $w_e(n)$ s'obtient par filtrage de gain complexe $G_e(f) = 1 - e^{-2j\pi f}$. Des formules de filtrage on déduit que :

$$S_{w_e}(f) = S_{\varepsilon_e}(f) |G_e(f)|^2 = \frac{q^2}{3} \sin^2(\pi f)$$

D'après la formule de reconstruction (6.1), on a donc :

$$y^Q(t) = \underbrace{\sum_n x_e(n) h_B(t - kT_e)}_{x(t)} + \underbrace{\sum_n w_e(n) h_B(t - kT_e)}_{w(t)=\text{bruit de quantification}}$$

En utilisant la formule (6.3) on peut écrire que :

$$S_w(F) = \frac{1}{F_e} S_{w_e}(F/F_e) \mathbb{1}_{(-B,B)}(F) = \frac{1}{F_e} \frac{q^2}{3} \sin^2(\pi F/F_e) \mathbb{1}_{(-B,B)}(F) \quad (6.13)$$

Par conséquent la puissance du bruit de quantification est à présent donnée par :

$$P_Q^{\text{MF}} = \frac{q^2}{3} \int_{-B/F_e}^{B/F_e} \sin^2(\pi f) df = \frac{q^2}{3} \left(\frac{2B}{F_e} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi B/F_e) \right)$$

Le gain par rapport à la valeur obtenue sans mise en forme du bruit est donné en dB par :

$$\rho = \frac{P_Q^{\text{MF}}}{q^2/12} = 4\tau - \frac{2}{\pi} \sin(\pi\tau)$$

où $\tau = 2B/F_e$. Par exemple si $F_e = 4B$, alors :

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.55, \text{ soit } -2.6\text{dB}$$

6.4 Quantification non uniforme

Il est clair que l'on peut réduire le bruit de quantification en "représentant" plus précisément les valeurs qui apparaissent plus souvent. De façon imagée, la grille de quantification doit être plus dense là où la densité de probabilité est grande.

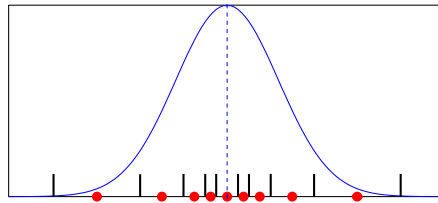


Figure 6.3: Grille de quantification adaptée à la distribution de probabilité

Quantification scalaire

Le schéma général d'une quantification scalaire sur N bits consiste à se donner :

1. une partition de \mathbb{R} en $K = 2^N$ intervalles I_k ,
2. et K valeurs de reconstruction notées μ_k .

La règle de codage d'une variable aléatoire x à valeurs dans \mathbb{R} est alors donnée par le schéma suivant :

si $x \in I_k$ alors on transmet la valeur k

qui représente le numéro de l'intervalle I_k . Evidemment k est codé sur N bits. A la règle de codage on ajoute la règle de décodage suivante qui consiste à associer :

à la valeur k la valeur de reconstruction μ_k

De bout en bout, on peut résumer les règles de codage et décodage par la fonction $\mu(x)$ définie par :

$$x \in I_k \rightarrow \mu(x) = \mu_k$$

Tout le problème de la quantification scalaire est de bien choisir les intervalles I_k et les valeurs de reconstruction μ_k de façon à minimiser un critère d'écart entre x et μ_k , comme par exemple $\mathbb{E}\{(x - \mu_k(x))^2\}$. Nous laissons à titre d'exercice la résolution de ce problème (on supposera que la loi de probabilité de x possède une densité de probabilité).

Loi de compression

Montrons à présent que la quantification non uniforme peut être remplacée par une fonction de transformation suivie d'une quantification uniforme. Pour cela considérons une valeur x à quantifier et le schéma de quantification (de bout en bout) non uniforme suivant :

$$x \in I_k \rightarrow x_Q = \mu_k \tag{6.14}$$

où les $I_k = [\alpha_{k-1}, \alpha_k[$ sont une suite de K intervalles, pas nécessairement de même longueur, et μ_k une suite de K valeurs de reconstruction pas nécessairement prises au milieu des intervalles I_k associés.

Considérons (voir figure 6.4) le schéma de quantification uniforme défini par les intervalles $J_k = [\beta_{k-1}, \beta_k[$ avec $\beta_k - \beta_{k-1} = q$ et soit f une fonction quelconque telle que :

$$f(\beta_k) = \alpha_k \text{ and } f(\nu_k) = \mu_k$$

alors (6.14) est équivalent à appliquer la fonction f à la valeur x à quantifier suivie d'une quantification uniforme suivant le schéma :

$$\text{si } y \in J_k \rightarrow y_Q = \nu_k$$

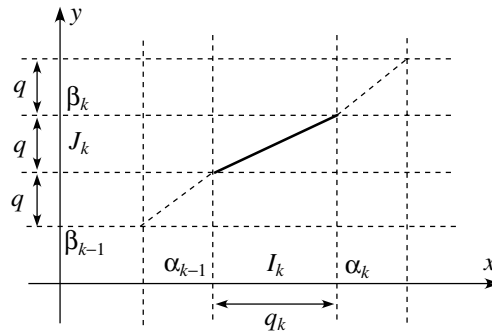


Figure 6.4: *Equivalence entre quantification non uniforme et loi de compression suivie d'une compression uniforme*

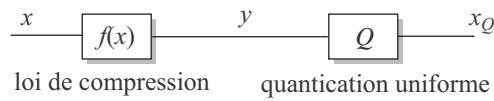


Figure 6.5: *Loi de compression : schéma de principe*

La fonction f est appelée la *loi de compression*. Nous avons représenté figure 6.6 la loi de compression logarithmique utilisé dans la compression téléphonique. Evidemment ce choix est adapté aux signaux de parole dont la distribution de valeurs est concentrée autour de 0. Il est donc raisonnable d'avoir une grille plus fine pour les petites amplitudes. La distorsion est donc plus petite pour les petites amplitudes et plus grande pour les grandes amplitudes. Toutefois, en moyenne, pour le même nombre de bits, le résultat est meilleur que la quantification linéaire. Des résultats numériques sont présentés figure 6.7.

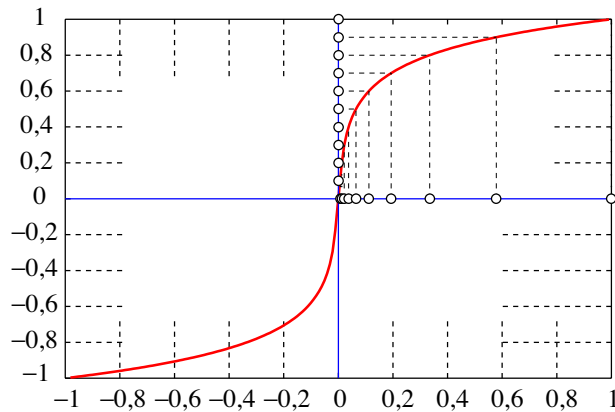


Figure 6.6: *Loi de compression logarithmique*

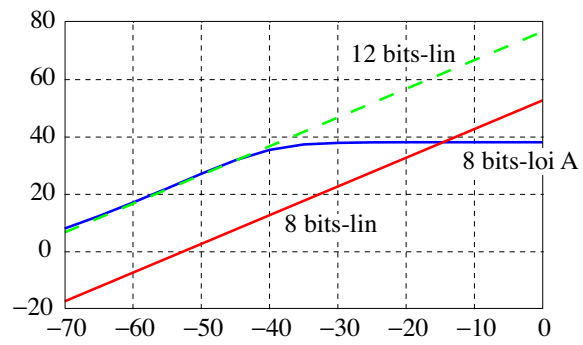


Figure 6.7: Courbe en bleu : RSB, obtenu avec 2s de parole, en fonction de $F^2 = A_c^2/P_x$ (rapport de la puissance crête et de la puissance efficace).

Chapitre 7

Changement de fréquence

L'interpolation d'un facteur entier M consiste à calculer $M - 1$ valeurs intermédiaires régulièrement espacées entre deux points consécutifs de la suite d'origine. L'opération d'interpolation est aussi appelée à tort sur-échantillonnage. Il n'est en effet pas possible de déterminer les échantillons que l'on "aurait pu" prélever sur le signal analogique à la fréquence MF_e .

Le sous-échantillonnage d'un facteur entier M consiste à calculer, à partir d'une suite échantillonnée à la fréquence F_e , les valeurs de la même suite qui aurait été échantillonnée à F_e/M . Cette opération ne se résume pas à prélever un échantillon sur M dans la suite initiale. Cette opération est aussi appelée décimation.

D'après le théorème d'échantillonnage, il peut sembler étrange d'interpoler un signal. Cependant il est parfois utile d'effectuer un changement de la cadence d'échantillonnage et cette opération passe souvent par une interpolation suivie par un sous-échantillonnage. Par exemple, pour passer de 42 kHz à 48 kHz, on peut commencer par sur-échantillonner d'un facteur 8 puis sous-échantillonner d'un facteur 7. Une autre application proche de la précédente est la translation d'un signal en temps par un décalage qui n'est pas un multiple de la période d'échantillonnage.

On retrouve encore ces opérations dans les traitements dits "multi-cadences" que l'on rencontre en particulier dans les techniques de bancs de filtres.

Dans la suite on fait souvent appel aux formules de passage du spectre du signal à temps continu à celui du signal à temps et inversement. Ces formules sont rappelées sous forme de règles section 6.1 page 71. Ces règles de passage seront appelées règles S dans la suite.

7.1 Interpolation

Construire la suite des échantillons obtenus par interpolation de la suite $x_e(n)$ avec le facteur M .

On note $x_e^{(M)}(n)$ la suite interpolée et $X_e^{(M)}(e^{2j\pi f})$ sa TFtd. D'après les règles S et notant que $T_e/T'_e = M$, on obtient la relation :

$$X_e^{(M)}(e^{2j\pi f}) = \begin{cases} MX_e(e^{2j\pi Mf}) & \text{si } f \in (-1/2M, +1/2M) \\ 0 & \text{si } 1/2M < |f| < 1/2 \end{cases} \quad (7.1)$$

Partant de la suite $x_e(n)$ considérons la suite :

$$y_e(n) = \begin{cases} x_e(n/M) & \text{si } n = 0 \text{ mod } M \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \text{ mod } M \end{cases}$$

où on a intercalé $(M - 1)$ zéros. On a alors :

$$Y_e(e^{2j\pi f}) = \sum_n y_e(n)e^{-2j\pi n f} = \sum_k x_e(k)e^{-2j\pi k M f} = X_e(e^{2j\pi M f})$$

Partant de (7.1), on en déduit que :

$$X_e^{(M)}(e^{2j\pi f}) = MY_e(e^{2j\pi f})\text{rect}_{(-1/2M, +1/2M)}(f)$$

Pour obtenir la suite $x_e^{(M)}(n)$, il suffit donc de filtrer la suite $y_e(n)$ par le filtre *numérique* de gain complexe :

$$H(e^{2j\pi f}) = M \text{rect}_{(-1/2M, +1/2M)}(f) \text{ (périodique de période 1)}$$

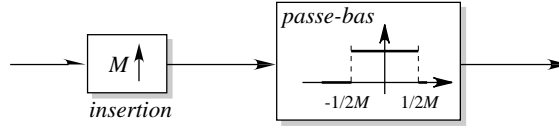


Figure 7.1: Interpolation d'ordre M : on insère $(M - 1)$ zéros entre chaque valeur et on filtre par $H(e^{2j\pi f}) = M \text{rect}_{(-1/2M, +1/2M)}(f)$.

Remarque 1: le filtrage passe-bas réalisé dans l'opération d'interpolation est précisément le "filtrage", mis sous forme échantillonnée, de celui qui apparaît dans la formule générale d'interpolation 2.3.

Remarque 2: évidemment en pratique, lors de la mise en œuvre du schéma de calcul de la figure 7.1, on fait en sorte de ne pas effectuer le grand nombre de multiplications par 0.

7.2 Décimation

Construire la suite des échantillons que l'on aurait obtenue si on avait échantillonné M fois moins vite.

On note $x_e^{(M)}(n)$ cette suite et $X_e^{(M)}(e^{2j\pi f})$ sa TFtd.

D'après les règles S :

$$X_e^{(M)}(e^{2j\pi f}) = \frac{1}{M} X_e(e^{2j\pi f/M}) \quad \text{si } f \in (-1/2, +1/2) \quad (7.2)$$

Rappelons que, par définition, la TFtd est périodique de période 1. Evidemment, à cause du repliement de spectre, il ne suffit pas de supprimer brutalement $(M - 1)$ points sur M . Rappelons que l'échantillonnage à la fréquence F_e/M nécessite un préfiltrage dans la bande $(-F_e/2M, F_e/2M)$. Etudions toutefois cette opération. Pour cela, partant d'une suite $y_e(n)$, considérons la suite :

$$t_e(n) = y_e(Mn)$$

Déterminons la relation qui lie leurs TFtd. Il vient :

$$\begin{aligned} T_e(e^{2j\pi f}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_e(n) e^{-2j\pi n f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_e(Mn) e^{-2j\pi n f} \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_e(p) \left(\sum_{r=0}^{M-1} \frac{1}{M} e^{2j\pi p r / M} \right) e^{-2j\pi p f / M} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} y_e(p) e^{-2j\pi p (f-r) / M} = \frac{1}{M} \sum_{r=0}^{M-1} Y_e(e^{2j\pi \frac{f-r}{M}}) \end{aligned}$$

Nous avons représenté figure 7.2 pour $M = 4$ les TFtd de la suite $y_e(n)$ et celle de la suite "décimée". On observe l'effet du repliement.

Toutefois on constate que, pour que $T_e(e^{2j\pi f}) = X_e^{(M)}(e^{2j\pi f})$, il suffit que $Y_e(e^{2j\pi f}) = X_e(e^{2j\pi f}) \text{rect}_{(-1/2M, +1/2M)}(f)$. Il faut donc **avant** décimation filtrer *numériquement* le signal $x_e(n)$. On aboutit au schéma de la figure 7.3.

Réalisation du filtre passe-bas idéal

Le filtre passe-bas idéal de gain complexe $H(e^{2j\pi f}) = \text{rect}_{(-1/2M, +1/2M)}(f)$ filtre peut être approché par un filtre RIF en utilisant la méthode de la fenêtre. Pour K fixé on prend :

$$h_e(n) = w(n) \frac{\sin(\pi n / M)}{(\pi n / M)} \quad \text{pour } n \in \{-K, \dots, 0, \dots, K\}$$

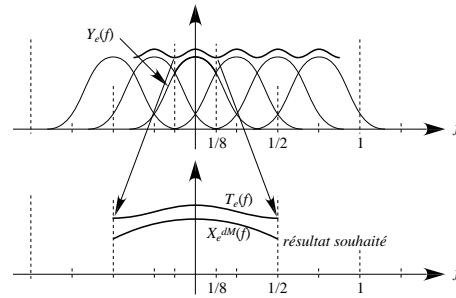


Figure 7.2: La décimation pour $M = 4$.

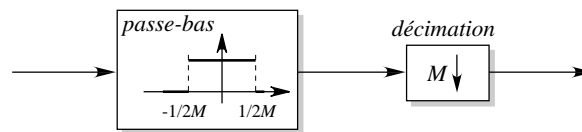


Figure 7.3: Décimation d'ordre M : on filtre par $H(e^{2j\pi f}) = \text{rect}_{(-1/2M, +1/2M)}(f)$ puis on décime $(M - 1)$ points sur M .

où $w(n)$ est une fenêtre de pondération, par exemple la fenêtre de Hamming dont l'expression est

$$w(n) = 0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{n\pi}{K}\right)$$

L'effet du filtrage passe-bas sur l'opération de décimation se voit particulièrement bien sur une image. Sans décimation le repliement modifie complètement le contenu spectral de l'image :

EXEMPLE DE PROGRAMME :

```

%==== explef2.m filtrage passe-bas d'une image
% exemple de sous-échantillonnage
N=32; tb=reshape([1;0;0;0]*ones(1,8),N,1)*ones(1,N);
tb2=ones(N,1)*reshape([0;0;0;0;0;0;0;1]*ones(1,4),1,N);
tb=tb+tb2; idx=find(tb==2); tb(idx)=ones(size(idx));
figure(1), subplot(121), imagesc(tb), colormap('gray'), axis('image')
fep=[0 0 1 0 0;0 1 1 1 0;1 1 1 1 0;0 1 1 1 0;0 0 1 0 0]/13;
tbf=filter2(fep,tb);
subplot(122), imagesc(tbf), colormap('gray'), axis('image')
%==== sous-échantillonnage
tb1=tb(1:N,1:3:N);
figure(2), subplot(121), imagesc(tb1), colormap('gray'), axis('image')
tbf1=tbf(1:N,1:3:N);
subplot(122), imagesc(tbf1), colormap('gray'), axis('image')
    
```


Chapitre 8

Annexe

8.1 Transformée de Fourier

Classiquement on s'intéresse à la transformée de Fourier sur trois espaces de fonctions :

1. L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide défini par :

- (a) $x(t)$ est de classe C^∞ ,
- (b) $\forall p, \forall n \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^p \frac{d^n x}{dt^n}(t) \right| \leq \alpha_{p,n}$

La TZ est une isométrie topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même. L'inverse existe en tout point t de continuité de x et donne :

$$\hat{x} = x(-t) = \check{x}$$

2. L'espace $L^1(\mathbb{R})$ présente une importance qui n'est pas seulement liée à l'existence de la TF. C'est aussi celui des signaux *stables*. La transformée de Fourier de telles fonctions donne alors des fonctions $\hat{x} \in C_0$ continues qui tendent vers 0 à l'infini mais dont on n'est pas sûr qu'elles soient intégrables. On sera obligé de supposer que $\hat{x} \in L^1$ (espace de Wiener) si on veut inverser cette transformée de Fourier. Dans ce cas la fonction de départ $x(t)$ est donc continue presque partout.
3. L'espace $L^2(\mathbb{R})$ que l'on désigne ici par espace des fonctions d'*énergie finie*. Ici aussi il y a un isomorphisme topologique de $L^2(\mathbb{R})$ sur lui-même. La transformée de Fourier devra cependant être définie de la façon suivante :

$$\hat{x}(f) = \text{l.i.m.} \int_{-A}^{+A} x(u) e^{-2\pi j f u} du \quad (8.1)$$

indiquant que cette convergence a lieu au sens de la norme de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

8.1.1 La transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Dans l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on peut définir la transformée :

$$\hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} x(u) e^{-2\pi j f u} du \quad (8.2)$$

La transformée est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Cette fonction est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. En effet :

1. dérivation sous le signe \int :

– $u \mapsto x(u) e^{-2\pi j f u}$ est mesurable comme produit de fonctions continues.

- $f \mapsto x(u)e^{-2\pi jfu}$ est dérivable.
- condition de domination uniforme par rapport à la variable f ; la dérivée est majorée de la façon suivante :

$$|-2\pi j u e^{-2\pi j f u} \leq 2\pi |u| |x(u)| \in L^1|$$

L'appartenance à L^1 est due au fait que $|u||x(u)|$ est dans l'ensemble des fonctions $\mathcal{O}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$. (décroissance rapide de x).

On peut donc dériver autant de fois qu'on le veut.

2. Considérons ensuite la multiplication par une fonction monome, par exemple :

$$(2\pi j f)^n \hat{x}(f) = \int_{\mathbb{R}} (2\pi j f)^n x(u) e^{-2\pi j f u} du = \widehat{x^{(n)}}$$

par intégrations successives par parties.

On déduit de tout cela que $\hat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Inversion

Le premier résultat énoncé est le *théorème de Poisson*.

Théorème 8.1 (Théorème de Poisson)

Si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) e^{2\pi j n t} \quad (8.3)$$

Pour $t = 0$, cette relation s'écrit aussi :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(n) \quad (8.4)$$

La démonstration passe par l'utilisation du développement en série de Fourier de $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t+n)$. Cette série converge car φ est à décroissance rapide et est donc dans $\mathcal{O}(1/t^2)$:

$$\psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t+n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\psi) e^{2\pi j k t} dt$$

avec :

$$c_k(\psi) = \int_0^1 \psi(t) e^{-2\pi j k t} dt = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t+n) e^{-2\pi j k t} dt$$

On intervertit les signes \int et \sum (application du théorème de Fubini). On vérifie en effet que l'intégrale qui suit converge :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\varphi(t+n)| dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} |\varphi(u)| du = \|\varphi\|_{L^1} < +\infty$$

On vérifie que $c_k(\psi) = \hat{\varphi}(n)$.

Pour prouver la formule d'inversion on utilise la fonction suivante :

$$\varphi(t) = x(t+\tau) e^{-2\pi j v t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (8.5)$$

dont on calcule la transformée de Fourier :

$$\hat{\varphi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) e^{-2\pi j v t} e^{-2\pi j f t} dt = e^{2\pi j \tau (f+v)} \hat{x}(f+v)$$

En utilisant 8.4 :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n + \tau) e^{-2\pi j n v} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi j \tau(n+v)} \hat{x}(n + v) \quad (8.6)$$

Le premier terme est un développement en série de Fourier d'une fonction de la variable v dont le coefficient en 0 est donné par $x(\tau)$. Ce coefficient est aussi obtenu en prenant l'intégrale \int_0^1 du deuxième terme de l'égalité 8.6 :

$$x(\tau) = \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi j \tau(n+v)} \hat{x}(n + v) dv$$

L'application du théorème de Fubini :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 |\hat{x}(n + v)| |e^{2\pi j \tau(n+v)}| dv = \int_{\mathbb{R}} |\hat{x}(u)| du < \infty$$

car $\hat{x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, permet d'écrire :

$$x(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{2\pi j \tau(n+v)} \hat{x}(n + v) dv = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_n^{n+1} e^{2\pi j \tau u} \hat{x}(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi j \tau u} \hat{x}(u) du$$

On peut montrer que dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, la relation de Parseval est valide :

$$\|x\|_{L^2} = \|\hat{x}\|_{L^2} \quad (8.7)$$

On repart de 8.6. On sait que :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n + \tau)|^2 &= \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n + \tau) e^{-2\pi j n v} \right|^2 dv \\ \Rightarrow \int_0^1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(n + \tau)|^2 d\tau &= \int_0^1 d\tau \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi j \tau(n+v)} \hat{x}(n + v) \right|^2 dv \end{aligned}$$

Comme précédemment, en permutant les signes \int et \sum pour l'expression de gauche, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(u)|^2 du$.

Pour l'expression de droite, on peut aussi utiliser Fubini :

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2\pi j \tau n} \hat{x}(n + v) \right|^2 d\tau dv = \int_0^1 \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{x}(n + v) \right|^2 dv = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{x}(u)|^2 du$$

en remarquant que la somme est une série de Fourier dont l'intégrale du carré entre 0 et 1 est égale à la somme de ses coefficients. Ensuite on permute \int et \sum (Fubini pour des séries à termes positifs).

8.1.2 La transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

Sachant que la transformée d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ est dans C^0 , on s'intéresse à l'inversion. On commence par prendre une fonction auxiliaire :

$$h_\lambda(t) = e^{-\pi\lambda|t|}, \quad \lambda > 0$$

La TF de cette fonction est :

$$\hat{h}_\lambda(f) = \frac{2\lambda}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + 4f^2}$$

Si on prend une fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned} (g \star \hat{h}_\lambda)(t) &= \int_{\mathbb{R}} g(t - u) \hat{h}_\lambda(u) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t - u) \left(\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(v) e^{-2\pi j u v} dv \right) du \end{aligned}$$

Pour avoir le droit de permuter les deux intégrales, on regarde l'expression :

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(t-u)| |h_{\lambda}(v)| \, dv \, du = \|h_{\lambda}\|_{L^1} \times \|g\|_{L^1} < \infty$$

d'où le résultat :

$$(g \star \hat{h}_{\lambda})(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(u) e^{2\pi j t u} e^{-\pi \lambda |u|} \, du \quad (8.8)$$

On fait tendre λ vers 0.

1. Dans la partie droite de 8.8, on a la majoration

$$\left| \hat{g}(u) e^{2\pi j t u} e^{-\pi \lambda |u|} \right| \leq |\hat{g}(u)|$$

Comme $\hat{g} \in L^1(\mathbb{R})$, la convergence dominée est assurée et on passe à la limite. On tombe alors sur la transformée de \hat{g} au point $-t$.

2. On doit maintenant regarder ce qui se passe pour l'expression de gauche, la convolution, lorsque $\lambda \rightarrow 0$. Montrons que $(g \star \hat{h}_{\lambda})$ tend vers g en moyenne au sens de L^1 , soit :

$$\|(g \star \hat{h}_{\lambda}) - g\|_{L^1} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

On peut remarquer que $\int_{\mathbb{R}} \hat{h}_{\lambda}(v) \, dv = 1$.

$$\begin{aligned} \|(g \star \hat{h}_{\lambda}) - g\|_{L^1} &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-u) - g(t)| \hat{h}_{\lambda}(u) \, du \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{h}_1(u) \|\tau_{\lambda u}(g) - g\|_{L^1} \, du \end{aligned}$$

où l'on a effectué le changement de variable $\lambda u = t$ et permuté les intégrales. $\tau_{\lambda u}$ indique la translation de λu .

La fonction $\lambda \rightarrow \|\tau_{\lambda u}(g) - g\|_{L^1}$ est continue et tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow 0$. En plus cette fonction est bornée, car $\|\tau_{\lambda u}(g) - g\|_{L^1} \leq 2\|g\|_{L^1}$. On peut utiliser alors le théorème de convergence dominée car il y a majoration indépendamment de λ .

8.1.3 La transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$

$L^2(\mathbb{R})$ pose un certain nombre de problèmes théoriques pour définir la transformée de Fourier, problèmes qui ne se posaient pas pour une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. La définition que l'on prend est la suivante :

$$\hat{x}(f) = \text{l.i.m.} \int_{-A}^{+A} x(u) e^{-2\pi j f u} \, du \quad (8.9)$$

définition que l'on justifiera par la suite.

En passant de $L^1(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$, on impose à la fonction des conditions locales plus contraignantes (toute restriction d'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ à un compact est $L^1(\mathbb{R})$ mais l'inverse n'est pas vrai) et on autorise des comportements en $t = \pm\infty$ un peu plus généraux. Dès lors, on peut s'interroger sur l'intérêt d'étudier les fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ plutôt que de $L^1(\mathbb{R})$. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'on sait qu'une fonction est pratiquement toujours observée sur une durée finie. La réponse à cette question peut être formulée de la façon suivante : outre le fait que les propriétés d'espace de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ sont fondamentales dans la théorie, elles ont un lien physique évident dans les applications puisque le carré de la norme d'un signal dans $L^2(\mathbb{R})$ n'est rien d'autre que son énergie. Le fait qu'en pratique les "signaux" observés soient dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ explique que l'on peut en général ne pas se préoccuper des subtilités entre transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$ et transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, mais, pour établir les résultats généraux que l'on utilise pour étudier les fonctions de carré sommable, il serait dommage de les énoncer dans le cas particulier $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors qu'ils sont valables dans $L^2(\mathbb{R})$, même si l'on doit pour cela donner des preuves qui peuvent apparaître plus abstraites.

8.1.4 Espace des fonctions de carré intégrable

Soit $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs complexes, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, de carré sommable c'est-à-dire telles que :

$$\int |x(t)|^2 dt < \infty$$

On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ pour la relation d'équivalence " $x \stackrel{p.p.}{=} y$ ". Pour I un sous ensemble borélien de \mathbb{R} (et en particulier, un intervalle), on peut définir de la même façon l'espace $\mathcal{L}^2(I)$ des fonctions de carré sommable sur I , $\int_I |x(t)|^2 dt < \infty$ et l'espace $L^2(I)$ des classes d'équivalence de $\mathcal{L}^2(I)$ par rapport à la relation d'équivalence d'égalité presque-partout.

Pour f et $g \in L^2(\mathbb{R})$, définissons :

$$\langle x, y \rangle_I = \int_I x(t)\bar{y}(t) dt \quad (8.10)$$

Lorsque $I = \mathbb{R}$, nous omettrons l'indice I . Cette intégrale est bien définie pour deux représentants de x et y car $|x(t)\bar{y}(t)| \leq (|x(t)| + |\bar{y}(t)|)/2$ et sa valeur ne dépend évidemment pas du choix de ses représentants. D'autre part, $L^2(I)$ est bien le plus "gros" espace fonctionnel sur lequel ce produit scalaire est défini puisqu'il impose justement $\langle x, x \rangle_I < \infty$. Mentionnons aussi que, de même que pour $(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$, $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet), où la norme $\|\cdot\|_2$ est définie par :

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\int |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Cette norme étant un norme induite par un produit scalaire, on dit que $(L^2(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace de Hilbert.

Théorème 8.2

L'ensemble des fonctions intégrables et de carré intégrable, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel dense de $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

INDICATIONS : Pour tout $x \in L^2(\mathbb{R})$, on note x_n la fonction égale à x sur $[-n, n]$ et nulle ailleurs. Alors $x_n \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout n , et par convergence monotone, $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ (on dit que x_n tend vers x au sens de $L^2(\mathbb{R})$). On en conclut que $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$. ■

Corollaire 8.1 Soient deux fonctions x et $y \in L^2(\mathbb{R})$. Si, pour toute fonction test ϕ dans \mathcal{S} , on a

$$\int x(t)\phi(t) dt = \int y(t)\phi(t) dt,$$

alors $x = y$ (au sens $L^2(\mathbb{R})$).

On utilisera par ailleurs le résultat qui suit :

Théorème 8.3

L'espace \mathcal{S} est un sous-espace vectoriel dense de $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

8.1.5 Transformée de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$

L'idée de base de la construction consiste à étendre la transformée de Fourier de $L^1(\mathbb{R})$ à $L^2(\mathbb{R})$ par un argument de densité.

Propriété 8.1

Soit x et y dans \mathcal{S} . On a :

$$\int \hat{x}(\xi)\bar{\hat{y}}(\xi)d\xi = \int x(t)\bar{y}(t)dt \quad \text{et} \quad \int |\hat{x}(\xi)|^2 d\xi = \int |x(t)|^2 dt.$$

INDICATIONS : Appliquons la formule d'échange. On pose $h(\xi) = \bar{g}(\xi)$. On a :

$$\int \hat{f}(\xi)h(\xi)d\xi = \int f(x)\hat{h}(x)dx$$

Mais $\bar{g}(\xi) = \overline{\mathcal{F}g}(\xi)$, d'où $\hat{h} = \bar{g}$. ■

Propriété 8.2

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, F complet, et G un sous-espace vectoriel dense dans E . Si A est un opérateur linéaire continu de G dans F , alors il existe un prolongement unique \tilde{A} linéaire continu de E dans F et la norme de \tilde{A} est égale à la norme de A .

INDICATIONS : Soit $x \in E$. Comme G est dense dans E , il existe une suite x_n dans G telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. La suite x_n étant convergente, elle est de Cauchy. L'opérateur A étant linéaire continu on a :

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leq \|A\| \|x_n - x_m\|$$

On en déduit que Ax_n est une suite de Cauchy de F qui est complet. La suite Ax_n est donc convergente vers un élément y de F . On vérifie facilement que y ne dépend pas de la suite x_n et on pose donc $Ax = y$. \tilde{A} est linéaire par construction et de plus on a :

$$\|\tilde{A}x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Ax_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\| \|x_n\| = \|A\| \|x\|$$

ce qui prouve que $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. Comme $\tilde{A}x = Ax$ pour tout $x \in G$, on a $\|\tilde{A}\| = \|A\|$. Enfin, G étant dense dans E , il est clair que \tilde{A} est unique. ■

D'après la proposition 8.1, \mathcal{F} est une isométrie sur \mathcal{S} muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On applique le résultat précédent avec $E = F = L^2(\mathbb{R})$, $G = \mathcal{S}$ (voir le théorème 8.3). On obtient :

Théorème 8.4

La transformation de Fourier \mathcal{F} (respectivement la transformation inverse $\overline{\mathcal{F}}$) se prolonge en une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Désignons toujours par \mathcal{F} (resp. $\overline{\mathcal{F}}$) ce prolongement. On a en particulier :

1. (Inversion) pour tout $x \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}x = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}x = x$,
2. (Plancherel) pour tout $x, y \in L^2(\mathbb{R})$, $\langle x, y \rangle = \langle \mathcal{F}x, \mathcal{F}y \rangle$
3. (Parseval) pour tout $x \in L^2(\mathbb{R})$, $\|x\|_2 = \|\mathcal{F}x\|_2$.

Remarquons que l'égalité de Parseval peut se réécrire, pour tout f et g dans $L^2(\mathbb{R})$,

$$\langle \mathcal{F}x, y \rangle = \langle x, \mathcal{F}y \rangle \tag{8.11}$$

Propriété 8.3

Le prolongement de \mathcal{F} sur \mathcal{S} par continuité à $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est compatible avec la définition de \mathcal{F} donnée précédemment sur $L^1(\mathbb{R})$. Plus précisément :

1. Pour tout $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}x$ défini par le théorème 8.4 admet un représentant $\hat{x} \in \mathcal{C}$ vérifiant

$$\hat{x}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi j\xi t} x(t) dt, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

2. Si $x \in L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}x$ est la limite dans $L^2(\mathbb{R})$ de la suite y_n , définie par $y_n(\xi) = \int_{-n}^n e^{-2\pi j\xi t} x(t) dt$.

INDICATIONS : Notons \hat{x} la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}x$ celle sur $L^2(\mathbb{R})$. Prenons $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. En appliquant la formule d'échange puis Parseval (voir (8.11)), on a pour tout $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\int \psi \hat{x} = \int \hat{\psi} x = \int \mathcal{F}(\psi) x = \int \psi \mathcal{F}(x)$$

d'où $\int (\hat{x} - \mathcal{F}(x))\psi = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{S}$. Le corollaire 8.1 fournit alors le premier résultat. Posons $x_n = x \times \mathbb{1}_{[-n,n]}$. Par convergence dominée, on a $\lim_n \|x_n - x\|_2^2 = 0$. Comme $x_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ on écrit $y_n = \hat{x}_n = \mathcal{F}(x_n)$ et par continuité il vient $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{F}x - y_n\|_2^2 = 0$.

■

8.2 La transformée en z , inversion

La formule générale d'inversion est donnée par 8.12 :

$$x(n) = \frac{1}{2j\pi} \oint_{(c)} X_z(z) z^{n-1} dz \quad (8.12)$$

où (c) désigne un contour de Cauchy situé dans le domaine de convergence entourant une fois l'origine dans le sens direct. En pratique le calcul de cette intégrale se fait par la *technique des résidus*, qui fait appel au théorème suivant dû à Cauchy.

Théorème 8.5

Si $F_z(z)$ est holomorphe dans un domaine D et si (c) est un contour fermé dans D alors, en notant a_k et b_k les singularités isolées respectivement intérieures et extérieures à D :

$$\frac{1}{2j\pi} \oint_{(c)} F_z(z) dz = \sum_k \text{Résidu}(F_z(z), a_k) = - \sum_k \text{Résidu}(F_z(z), b_k) - \text{Résidu}(F_z(z), \infty)$$

où $\text{Résidu}(F_z(z), z_0)$ désigne le résidu de $F_z(z)$ en z_0 .

En pratique les résidus proviennent soit des pôles à distance finie soit des pôles ou des zéros à l'infini. Les règles suivantes suffisent le plus souvent pour évaluer ces quantités :

1. z_0 est un pôle à distance finie d'ordre 1 alors : $\text{Résidu}(F_z(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) F_z(z)$,
2. z_0 est un pôle à distance finie d'ordre N alors : $\text{Résidu}(A_z(z)/B_z(z), z_0) = A(z_0)/B'(z_0)$,
3. z_0 est un pôle à distance finie d'ordre N alors :

$$\text{Résidu}(F_z(z), z_0) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{d^{N-1}(z - z_0)^N F_z(z)}{dz^{N-1}} \right)$$

4. z_0 est un zéro à l'infini d'ordre 1 alors : $\text{Résidu}(F_z(z), \infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} (-z F_z(z))$,
5. z_0 est un zéro à l'infini d'ordre ≥ 2 alors : $\text{Résidu}(F_z(z), \infty) = 0$,
6. z_0 est un pôle à l'infini alors : $\text{Résidu}(F_z(z), \infty) = -\text{Résidu}(z^2 F_z(1/z), 0)$.

Bibliographie

- [1] P. Billingsley. *Probability and Measure*. J. Wiley, 79.
- [2] G. Blanchet. *Commande et temps discret : illustration sous Matlab*. Hermès, 2003.
- [3] G. Blanchet and M. Charbit. *Signaux et images sous Matlab*. Hermès, 2001.
- [4] P. Brémaud. *Introduction aux Probabilités*. Springer-Verlag, 1988.
- [5] P. Brémaud. *Signaux Aléatoires*. Collection de l'X, Ellipses, 1993.
- [6] M. Charbit. *Systèmes de communications et théorie de l'information*. Hermès, 2003.
- [7] J.P. Delmas. *Éléments de Théorie du Signal : Signaux Déterministes*. Collection Pédagogique de Télécommunication, Ellipses, 1991.
- [8] J.P. Delmas. *Introduction aux Probabilités*. Collection Pédagogique de Télécommunication, Ellipses, 1993.
- [9] B. Porat. *Digital Processing of Random Signals, Theory and Methods*. Prentice Hall, 1994.

Index

- (*) aliasing (repliement), 23
- (*) moving average (moyenne ajustée), 60
- (*) sampling (échantillonnage), 21
- échantillonnage, 21
- échelon unité, 27
- énergie, 11
 - finie, 11
 - temps discret, 27
- équation
 - de Yule-Walker, 62
- échantillonnage
 - régulier, 21
- algorithme
 - de Levinson, 62
- amplificateur, 16
- analyse harmonique, 18
- AR, 61
- autocovariance, 55
- bande
 - du signal, 15
- bloqueur d'ordre 0, 26
- borné (signal), 15
- bruit
 - blanc, 59
 - de quantification, 60
- causal (filtre), 18
- CNA, 26
- convergence
 - en moyenne quadratique, 64
 - m.q., 64
- convertisseur
 - numérique-analogique, 26
- convolution, 14
 - circulaire, 32
- couronne de convergence (TZ), 39
- covariance, 56
- d.s.e., 15
- d.s.p. (ou dsp), 57
- décimation, 77, 78
- densité jointe, 53
- densité spectrale d'énergie, 15
- densité spectrale de puissance, 57
- distorsion
 - d'amplitude, 18
 - d'intermodulation, 19
 - de phase, 18
 - harmonique, 19
- domaine de convergence (TZ), 39
- dualité temps-fréquence, 15
- EBSB, 17
- espace
 - $L^2(\mathbb{R})$, 81
 - $L^1(\mathbb{R})$, 81
 - de Schwartz, 81
- exponentielle complexe, 17, 28, 43
- fenêtre
 - de Hamming, 35
- FEP, 49
- filtrage (p.a.), 58
- filtre
 - RIF, 47
 - à minimum de phase, 45
 - anti-repliement, 25
 - bande affaiblie, 47
 - bande atténuée, 47
 - bande passante, 47
 - causal, 18
 - du second ordre, 46
 - gabarit, 47
 - mémoire, 18
 - moyenleur, 44
 - passe-tout, 45
 - stationnaire, 16
 - temps de réponse, 18
- fonction
 - d'étalement ponctuel, 49
 - d'autocovariance, 55
 - de covariance, 56
 - de répartition, 53
- fonction d'autocovariance
 - non-négativité, 56, 57
 - symétrie hermitienne, 56, 57
- fonction de transfert, 43
- fonctions propres
 - filtrage, 17
- fonctions propres (filtre), 43
- fondamental, 12
- formule de Parseval, 13
- formule de Poisson, 21
- formules
 - de filtrage (p.a.), 58

- fréquence
 - de Nyquist, 22
- fréquence, 13
 - de résonance, 46
 - fondamentale, 12
 - harmonique, 12
- gabarit (d'un filtre), 47
- gain, 16
 - complexe, 17
- gain complexe, 17, 43
- harmonique, 12
- Hertz, 13
- Hz, 13
- impulsion unité, 27
- inégalité
 - de Schwarz, 56
- interpolation, 77
- invariance, 43
- invariance temporelle, 16
- Levinson, 62
- limite de Fourier, 35
- linéarité, 16, 43
- lobe
 - principal, 35
 - secondaire, 35
- loi
 - gaussienne, 54
 - normale, 54
- loi temporelle, 53
- mémoire (filtre), 18
- mélange harmonique, 12, 17, 43
- méthode de la fenêtre, 47
- MA, 60
- matrice
 - de Toëplitz, 57
- MIC, 25
- modulation
 - par impulsion et codage, 25
- moyenne ajustée, 60
- p.a. (processus aléatoire), 52
- périodogramme
 - tronqué, 66
- pôles (TZ), 39
- pas de quantification, 60
- passe-tout, 45
- phénomène de Gibbs, 29
- précision, 36
- processus
 - AR, 61
 - MA, 60
 - autorégressif d'ordre 1, 62
 - autoregressif, 61
 - processus aléatoire, 52
 - processus aléatoire SSL, 57
 - processus aléatoire
 - binaire, 54
 - gaussien, 54
 - produit
 - de convolution, 13, 14
 - puissance, 11
 - finie, 11
 - temps discret, 27
- quantification, 60
- réalisation, 52
- résolution en fréquence, 35
- réponse en fréquence, 17, 43
- réponse impulsionnelle, 43
- relation
 - de Parseval, 13, 30
- repliement, 23
- représentation
 - de Fourier, 12
 - fréquentielle, 12
- retardateur pur, 16
- RIF, 47
- série
 - de Fourier, 12
- second ordre, 46
- signal
 - à bande limitée, 15
 - à bande étroite, 24
 - anticausal, 40
 - borné, 15
 - causal, 40
 - d'énergie finie, 15
 - déterministe à temps discret, 27
 - de durée finie, 15, 39
 - exponentielle complexe, 28
 - numérique, 27
 - périodique, 12
 - passe-bande, 24
 - rectangle, 15
 - rectangulaire, 27
 - sinusoïdal, 28
- sous-échantillonnage, 77
- SSL, 57
- stabilité entrée bornée / sortie bornée, 17
- stationnaire (filtre), 16
- surtension, 46
- taux d'ondulation, 47
- temps
 - de réponse, 18
- TF, 13
- TFD-2D, 37
- TFTC, 13

TFTD, 28
théorème
 de Bernstein, 15
trajectoire, 52
transformée
 de Fourier, 13
 en z , 39
transformation de Fourier
 à temps discret, 28
 discrète, 31
TZ, 39

vraisemblance, 52

zéros (TZ), 39