Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Roland Badeau, Bertrand David

Lundi 29 octobre 2012

Le barème sera réparti sur les 4 parties. En conséquence, ne pas passer tout le contrôle sur une seule des parties.

Rappels et notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

- Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

- TFTC inverse

$$x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_a(f) e^{+2i\pi f t} df$$

- Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret $x(n)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

- TFTD inverse :

$$x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$$

- Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre M d'un signal discret fini $x_M(n)$:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-2i\pi \frac{k}{M} n}$$

- Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

- Fonction d'autocovariance d'un processus $X(n)$ stationnaire au sens large (SSL) réel :

$$R_X(k) = \mathbb{E}((X(n+k) - m_X)(X(n) - m_X)) \text{ indépendamment de } n, \text{ où } m_X = \mathbb{E}(X(n)) \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

- Densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus $X(n)$ SSL :

$$S_X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$$

- Filtrage des processus SSL : soit $Y(n)$ le processus obtenu par filtrage stable, de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de fonction de transfert $H(z)$, d'un processus SSL $X(n)$. Alors $Y(n)$ est un processus SSL :
  - de moyenne $m_Y = H(1)\, m_X$ (où $H(1)$ est la valeur de la réponse en fréquence en $\nu = 0$),
  - de fonction d'autocovariance $R_Y = h * \tilde{h} * R_X$ (où $\tilde{h}(n) = h(-n)^*$),
  - de DSP $S_Y(e^{2i\pi\nu}) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 S_X(e^{2i\pi\nu})$.
- Formule trigonométrique :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \tag{1}$$

1 Questions isolées (50')

1.1 Signaux déterministes

a) On considère des opérateurs qui à un signal discret $x(n)$ associent un signal discret $y(n)$. Les deux opérateurs suivants sont-ils linéaires ? sont-ils invariants par décalage temporel ?
   1) $x(n) \longrightarrow y(n) = x(2n-2)$
   2) $x(n) \longrightarrow y(n) = |x(n-3)|$

b) On considère un signal discret $x(n)$, à valeurs nulles en dehors de l'intervalle $\{0 \dots N-1\}$.
   1) Exprimer sa TFD $X_M(k)$ d'ordre M (avec $M \geq N$), en fonction de sa TFTD $X(e^{2i\pi\nu})$.
   2) Rappelez ce que sont les notions de "résolution spectrale" et de "précision spectrale", ainsi que leur dépendance par rapport aux deux paramètres N et M.

c) Soit un signal $x(n)$ tel que $x(n) = x^*(-n)$ (propriété de symétrie hermitienne). On veut utiliser cette propriété pour simplifier le calcul de sa TFTD $X(e^{2i\pi\nu})$.
   1) Soit $y(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0 \\ x(0)/2 & \text{si} \quad n = 0 \\ x(n) & \text{si} \quad n > 0 \end{cases}$.
   En remarquant que $x(n) = y(n) + y(-n)^*$, exprimer $X(e^{2i\pi\nu})$ en fonction de la TFTD $Y(e^{2i\pi\nu})$.
   2) En déduire une façon de calculer la transformée $X_M(k) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} x(n) e^{-2i\pi\frac{kn}{M}}$ (avec $M \geq 2N-1$) d'un signal $x(n)$ de support $[-N+1, N-1]$, à partir de la TFD d'ordre M d'un signal $y(n)$ de support $[0, N-1]$.

d) On considère le filtre différenciateur discret, qui à une entrée $x(n)$ associe la sortie $y(n) = x(n) - x(n-1)$.
   1) Exprimer sa réponse impulsionnelle $h(n)$ et sa fonction de transfert $H(z)$.
   2) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou infinie (RII) ? Est-il causal, stable, à phase linéaire ?

e) On considère le filtre causal défini par sa fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ avec $|a| < 1$.
   1) Ce filtre est-il stable ? Est-il RIF/RII ? Quelle est la relation entrée/sortie correspondante ?
   2) Donner le domaine de définition de $H(z)$ et calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ correspondante.

f) On considère le filtre moyenneur, de réponse impulsionnelle $g(n) = \frac{1}{2P+1} \mathbf{1}_{[-P,P]}(n)$, où $P \in \mathbb{N}^\star$.
   1) Ce filtre est-il RIF/RII ? Est-il causal ? stable ? à phase linéaire ?
   2) Calculer sa fonction de transfert et tracer approximativement sa réponse en fréquence $G(e^{2i\pi\nu})$ pour $\nu \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $P = 2$. Ce filtre est-il passe-haut / passe-bas ? Quelle est sa fréquence de coupure ν_c, définie comme la plus petite fréquence $\nu > 0$ telle que $G(e^{2i\pi\nu}) = 0$?

1.2 Processus aléatoires

a) Soient deux processus $X_1(n)$ et $X_2(n)$ indépendants, SSL, centrés, de fonctions d'autocovariance R_{X_1} et R_{X_2}, et de DSP S_{X_1} et S_{X_2}. Prouver que le processus $X(n) = X_1(n) + X_2(n)$ est aussi SSL, centré, de fonction d'autocovariance $R_X(k) = R_{X_1}(k) + R_{X_2}(k)$ et de DSP $S_X(e^{2i\pi\nu}) = S_{X_1}(e^{2i\pi\nu}) + S_{X_2}(e^{2i\pi\nu})$.

b) On considère le signal aléatoire $X(n) = a\cos(2\pi\nu n + \phi)$, où $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\nu \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ sont des constantes fixées, et ϕ est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi[$: $\phi \sim \mathcal{U}([0, 2\pi[)$.
   1) Prouver que $X(n)$ est de moyenne nulle $\forall n \in \mathbb{Z}$.
   2) Prouver que $X(n)$ est un processus SSL, et donner l'expression de sa fonction d'autocovariance $R_X(k)$ (on pourra utiliser la formule trigonométrique (1)).

c) On considère un processus aléatoire $Z(n)$ obtenu par filtrage d'un bruit blanc réel $B(n)$ de variance σ^2 par un filtre RIF réel dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ a pour support $[0 \dots M-1]$.
   1) Rappeler l'expression de la fonction d'autocovariance $R_B(k)$ et de la DSP $S_B(e^{2i\pi\nu})$ du bruit blanc.
   2) Démontrer ensuite que $Z(n)$ est un processus SSL centré, que sa fonction d'autocovariance est $R_Z(k) = \sigma^2 h \star \tilde{h}$ (où $\tilde{h}(n) = h(-n)$) et que sa densité spectrale de puissance est $S_Z(e^{2i\pi\nu}) = \sigma^2 |H(e^{2i\pi\nu})|^2$ (on pourra appliquer le théorème de filtrage des processus SSL).

d) Soit $\epsilon(n)$ un processus SSL réel centré, de DSP $S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})$. On définit $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}(\epsilon(n)^2)$. Prouver que $\sigma_\epsilon^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_\epsilon(e^{2i\pi\nu}) d\nu$.

2 Estimation de hauteur (20', processus aléatoires)

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\nu_1 = 1/N$. On considère le processus aléatoire $P(n) = \sum_{h=1}^{H} a_h \cos(2\pi\nu_h n + \phi_h)$, où $\forall h \in [1 \dots H]$, l'amplitude $a_h \in \mathbb{R}_+^*$ et la fréquence $\nu_h = h\nu_1$ sont des constantes fixées, la phase ϕ_h est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ ($\phi_h \sim \mathcal{U}([0, 2\pi[))$, et toutes les phases sont supposées indépendantes. L'objectif est d'estimer la période N à partir des échantillons $P(n)$.

a) Prouver que $P(n)$ est un processus stationnaire au sens large de moyenne nulle, et de fonction d'autocovariance $R_P(k) = \sum_{h=1}^{H} \frac{a_h^2}{2} \cos(2\pi\nu_h k)$ (on pourra utiliser les résultats des questions 1.2-a) et 1.2-b)).

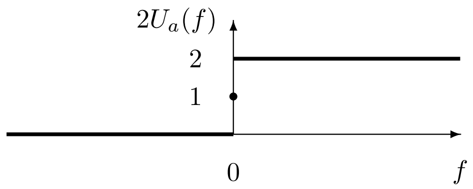
b) Quelle est la période de la fonction R_P ? Pour quelles valeurs de k cette fonction atteint-elle son maximum ? En déduire une méthode pour estimer la période N.

c) On suppose à présent que le signal observé n'est plus $P(n)$, mais un signal bruité $X(n) = P(n) + Z(n)$, où le bruit $Z(n)$ est modélisé comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc $B(n)$ de variance σ^2 par un filtre RIF dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ a pour support $[0 \dots M-1]$. En supposant que $B(n)$ est indépendant des phases ϕ_h, prouver que $X(n)$ est un processus SSL centré, et déterminer l'expression de $R_X(k)$ (on pourra admettre le résultat de la question 1.2-c).

d) Quel est le support de la fonction $R_Z(k)$? En déduire une condition sur M et N pour que la méthode d'estimation de la période N évoquée dans la question 2-b) reste applicable (en supposant M connu).

3 Filtre de Hilbert (45', signaux déterministes)

Soit $x_a(t)$ un signal réel à temps continu (analogique). Le signal *analytique* associé à $x_a(t)$ est le signal $z_a(t)$ dont la TFTC a pour expression $Z_a(f) = 2\,U_a(f) X_a(f)$, où $U_a(f)$ est la fonction échelon-unité, qui vaut 1 si $f > 0$, et 0 si $f < 0$. Pour des raisons de continuité, on prend $U_a(0) = \frac{1}{2}$. On donne le nom de filtre analytique au filtre dont le gain en fréquence est $2U_a(f)$.



(a) Quelle propriété vérifie la fonction $X_a(f)$? En déduire l'expression de $\frac{1}{2}(Z_a(f) + Z_a^*(-f))$ en fonction de $X_a(f)$, et prouver que la partie réelle de $z_a(t)$ est égale à $x_a(t)$. On pourra alors écrire $z_a(t) = x_a(t) + i y_a(t)$, où le signal réel $y_a(t)$ est défini comme la partie imaginaire de $z_a(t)$.

(b) Démontrer que $y_a(t)$ se déduit de $x_a(t)$ par un filtrage linéaire de réponse en fréquence $H_a(f) = -i\,\mathrm{signe}(f)$, où $\mathrm{signe}(f) = 1$ si $f > 0$, $\mathrm{signe}(f) = -1$ si $f < 0$, et $\mathrm{signe}(0) = 0$. Le filtre $H_a(f)$ porte le nom de *filtre de Hilbert*, et $y_a(t)$ est appelé *transformée de Hilbert* de $x_a(t)$.

Supposons que le signal $x_a(t)$ satisfait les hypothèses du théorème d'échantillonnage : il existe une fréquence F_e telle que le support de $X_a(f)$ soit inclus dans $]-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}[$. On considère alors les signaux échantillonnés $x(n) = x_a(nT_e)$ et $y(n) = y_a(nT_e)$, où $T_e = 1/F_e$. On rappelle la relation entre la TFTD $X(e^{2i\pi\nu})$ et la TFTC $X_a(f)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T_e} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu + k}{T_e}\right) \tag{2}$$

(c) Simplifier l'expression (2) lorsque $\nu \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Vérifier que $Y(e^{2i\pi\nu})$ satisfait une expression similaire. En déduire que le signal $y(n)$ peut aussi s'exprimer comme le résultat du filtrage discret de $x(n)$ par le filtre de réponse en fréquence $H(e^{2i\pi\nu}) = -i\,\mathrm{signe}(\nu)$, pour $\nu \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ (et $H(e^{2i\pi\nu}) = 0$ pour $\nu = \pm\frac{1}{2}$).

Remarque : le filtre discret $H(e^{2i\pi\nu})$ permet de calculer directement les échantillons $y(n)$ de la transformée de Hilbert à partir des échantillons $x(n)$, sans avoir à effectuer de conversion numérique / analogique.

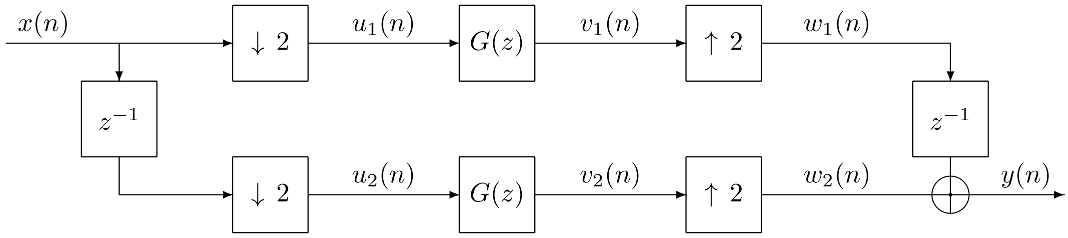
(d) En appliquant la TFTD inverse, prouver que la réponse impulsionnelle $h(n)$ vérifie $h(n) = \frac{2}{\pi n}$ si n est impair, et 0 si n est pair.

(e) Ce filtre est-il causal ? stable ? à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou infinie (RII) ?

(f) Pour un filtre discret de réponse impulsionnelle $g(n)$ et de fonction de transfert $G(z)$, quelle est la réponse impulsionnelle du filtre de fonction de transfert $G(z^2)$? En utilisant la nullité des coefficients pairs de $h(n)$, en déduire qu'il existe une fonction de transfert $G(z)$, telle que $H(z) = z^{-1}G(z^2)$. Que vaut la réponse impulsionnelle $g(n)$?

(g) On souhaite approcher le filtre $G(z)$ idéal en utilisant la méthode de la fenêtre, de façon à synthétiser un filtre RIF à phase linéaire, de type 4 (longueur N paire, $g(n)$ antisymétrique). Rappeler le principe de la méthode de la fenêtre, ses avantages et ses inconvénients.

(h) Question subsidiaire : l'objectif de cette question est de prouver que le schéma suivant fournit une implémentation efficace du filtre de Hilbert discret $H(z)$:



On rappelle que $U_1(z) = \frac{1}{2}(X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}}))$. Exprimer alors $U_2(z)$ en fonction de $X(z)$, puis $V_1(z)$ et $V_2(z)$ en fonction de $U_1(z)$ et $U_2(z)$, puis $W_1(z)$ et $W_2(z)$ en fonction de $V_1(z)$ et $V_2(z)$, et enfin $Y(z)$ en fonction de $W_1(z)$ et $W_2(z)$. Par substitution, retrouver la relation $Y(z) = H(z)X(z)$.