



Traitement des signaux déterministes

Master Sciences et Technologies
Parcours ATIAM - Module TSA





Partie I

Échantillonnage, filtrage



- Ondes électromagnétiques et mécaniques
- Fonction monodimensionnelle du temps
- Temps continu $x_a(t)$ vs temps discret $x_e(n)$
 - Discret \neq numérique (quantification)
- Signaux périodiques vs non périodiques
- Signaux déterministes vs aléatoires
- Programme du cours
- Supports de cours (en ligne)





Partie II

Filtrage discret, analyse de Fourier





Filtrage en temps discret

- Signaux discrets non périodiques
- Opérateur $T : x(n) \rightarrow y(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$)
 - Linéaire : $T[x_1 + x_2] = T[x_1] + T[x_2]$, $T[\lambda x] = \lambda T[x]$
 - Invariant dans le temps : $T[x(n - k)] = y(n - k)$
- Réponse impulsionnelle : $h = T[\delta]$
- Propriété : filtrage \Leftrightarrow convolution discrète

$$y(n) = h * x(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m)x(n - m)$$





Filtrage en fréquence

- Propriété : "diagonalisation" de T
- Si $x(n) = e^{2i\pi\nu_0 n}$, $y(n) = H(e^{i2\pi\nu_0})x(n)$, où

$$H(e^{i2\pi\nu_0}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)e^{-i2\pi\nu_0 n}$$

est la réponse en fréquence à ν_0

- Plus généralement, si $x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{i2\pi\nu})e^{+i2\pi\nu n} d\nu$

$$y(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \underbrace{H(e^{i2\pi\nu})X(e^{i2\pi\nu})}_{Y(e^{i2\pi\nu})} e^{+i2\pi\nu n} d\nu$$





En résumé

- Opération de filtrage $T : x \rightarrow y$
 - Dans le domaine temporel
 - produit de convolution $y = h * x$, où h est la réponse impulsionnelle du filtre
 - Dans le domaine fréquentiel
 - produit $Y = H \times X$, où H est la réponse en fréquence du filtre





Partie III

Transformée de Fourier Discrète





Convolution circulaire

- L'espace $E_N = \{\text{signaux discrets complexes de période } N\}$ est hermitien : $\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$
- Base orthonormée : $\left\{ e_k(n) = e^{2i\pi \frac{k}{N}n} \right\}_{k \in \{0 \dots N-1\}}$
- Opérateur de convolution circulaire :

$$(h \otimes x)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

- vecteurs propres : $(h \otimes e_k)(n) = H(k)e_k(n)$
- valeurs propres : $H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$





Transformée de Fourier discrète

- Inversion de la TFD :

$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \langle x, e_k \rangle e_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+2i\pi \frac{k}{N} n}$$

- Propriétés de la TFD : linéarité, plus

- si $y = h \otimes x$, alors $Y(k) = H(k)X(k)$
- Symétrie : $x(n)$ réel $\Rightarrow X(-k) = X^*(k)$
- Retard : $y(n) = x(n - n_0) \Rightarrow Y(k) = X(k) e^{-i2\pi \frac{k}{N} n_0}$
- Modulation : $y(n) = x(n) e^{i2\pi \frac{k_0}{N} n} \Rightarrow Y(k) = X(k - k_0)$

- Parseval : $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y(n)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$





Partie IV

Rappels sur la transformation de Fourier





Convolution (filtrage)

- Espaces de Lebesgue, norme p
- Convolution à temps discret (non périodique)

$$y(n) = h * x(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m)x(n - m)$$

- Convolution à temps continu (non périodique)

$$y(t) = h * x(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$$

- Propriétés :

- Commutativité, associativité, distributivité
- Relations entre espaces de Lebesgue (norme L^p/l^p)
 - $L^1 * L^1 \rightarrow L^1, L^1 * L^2 \rightarrow L^2,$
 - $L^1 * L^\infty \rightarrow L^\infty \cap C^0, L^2 * L^2 \rightarrow L^\infty \cap C^0$





Séries de Fourier (continu périodique)

- $L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$ est un espace de Hilbert :

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t) y(t)^* dt$$

- $\{e_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, où $e_k(t) = e^{i2\pi kt}$, est une base hilbertienne de $L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$
- Soit $x \in L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$, de période 1

- Série de Fourier de x :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{+i2\pi kt}$$

$$\text{où } X(k) = \langle x, e_k \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(t) e^{-i2\pi kt} dt \text{ car } x \in L^1 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$$





Séries de Fourier

- Propriété : isométrie de $L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$

- Formule de Parseval :

$$\|x\|_2^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |X(k)|^2$$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(t)y(t)^* dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X(k)Y(k)^*$$

- *Les séries de Fourier "transforment" un signal continu périodique en un signal discret non périodique*





Séries de Fourier

- Convergence de la série
 - Convergence simple si x est \mathcal{C}^1 PM
 - Convergence uniforme si x est \mathcal{C}^0 et \mathcal{C}^2 PM
- Propriétés réciproques :
 - Modulation / retard
 - Valeurs réelles / symétrie hermitienne
 - Convolution / produit
 - *Décroissance / régularité*





Transformée de Fourier à Temps Discret

- Discret non périodique
- Isométrie inverse, de $l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$
 - Soit un signal discret $x \in l^2(\mathbb{Z})$
 - TFTD directe : $X(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i2\pi\nu n}$
 - TFTD inverse : $x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{i2\pi\nu})e^{+i2\pi\nu n} d\nu$
 - Parseval, propriétés réciproques
 - *La TFTD transforme un signal discret non périodique en un signal continu périodique*





Transformée de Fourier à Temps Continu

- Continu non périodique
- Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

- Définition :

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

- Propriétés :

- Si $x \in L^1(\mathbb{R})$, $X \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R})$
- Si x et $h \in L^1(\mathbb{R})$, et si $y = h * x$, alors $Y = H \times X$
- Si de plus $X \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{+i2\pi ft} df$$

- Dans ce cas x et $X \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$





Transformée de Fourier à Temps Continu

- Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$
 - Extension par densité de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ à une isométrie de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$
 - Formule de Parseval :

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

$$\int_{\mathbb{R}} x(t) y(t)^* dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) Y(f)^* df$$

- *La TFTC transforme un signal continu non périodique en un signal continu non périodique*
- Propriétés réciproques





Résumé des propriétés

- Propriétés générales des transformations de Fourier :
 - Linéarité
 - Si $x \in L^1$, $X \in L^\infty \cap \mathcal{C}^0$
 - Isométrie de L^2 (formule de Parseval)
- Propriétés réciproques (à lire dans les 2 sens)
 - Périodique \leftrightarrow discret
 - Valeurs réelles \leftrightarrow symétrie hermitienne
 - Retard \leftrightarrow modulation
 - Convolution \leftrightarrow produit
 - Régularité \leftrightarrow décroissance





Récapitulatif

- TFD

- Séries de Fourier
$$\begin{cases} X(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(t) e^{-i2\pi kt} dt \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{+i2\pi kt} \end{cases}$$

- Transformée de Fourier à temps discret

$$\begin{cases} X(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i2\pi\nu n} \\ x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{i2\pi\nu}) e^{+i2\pi\nu n} d\nu \end{cases}$$

- Transformée de Fourier à temps continu

$$\begin{cases} X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{+i2\pi ft} df \end{cases}$$





Partie V

Conversion analogique / numérique





Théorème d'échantillonnage

- Exemple de l'interpolation linéaire
- Théorème de Nyquist
 - Soit $x(t)$ un signal L^1 tel que $t^2x(t)$ est L^1 et dont la TF $X_a(f)$ a un support inclus dans $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$. Alors $x(t)$ peut être reconstruit en interpolant ses échantillons :

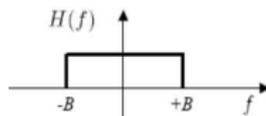
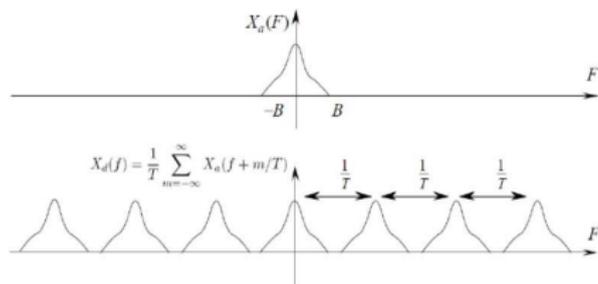
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h_T(t - nT)$$

où $h_T(t) = \text{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$

- Condition : $B < F_e/2$ (fréquence de Nyquist)



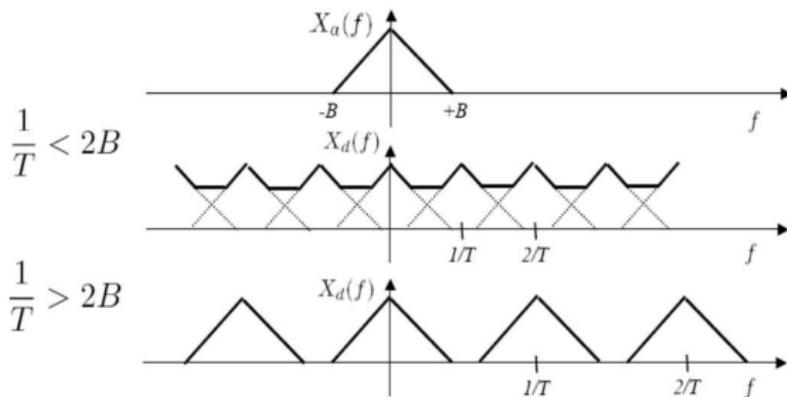
- Preuve :
 - Identifier $x_e(n) = x_a(nT)$ par IFFT
 - Identifier $Y(f)$ et $X(f)$ par FFT
- Périodisation du spectre / reconstruction





Repliement et pré-filtrage

- Deux situations possibles :



- Schémas de CAN et de CNA





Partie VI

Filtrage, transformées





Partie VII

Filtrage discret





Causalité et stabilité

■ Causalité :

- $y(n)$ ne dépend que de $x(k)$, $k \leq n$
- CNS : $h(n) = 0$ si $n < 0$
- Propriété : entrée causale \Rightarrow sortie causale

■ Stabilité :

- Définition : entrée bornée \Rightarrow sortie bornée
- CNS : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$ (h dans $l^1(\mathbb{Z})$)
- Remarque : réponse fréquentielle continue

■ Exemples : filtres idéaux





Filtres idéaux

■ Filtre passe-bas (spectre périodique)

- Réponse en fréquence : $H(e^{2i\pi\nu}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| < \nu_c \\ 0 & \text{si } |\nu| > \nu_c \end{cases}$
- Réponse impulsionnelle : $h(n) = 2\nu_c \operatorname{sinc}(2\nu_c n)$

■ Filtre passe-bande

- Réponse en fréquence : $H(e^{2i\pi\nu}) = \begin{cases} 1 & \text{si } ||\nu| - |\nu_0|| < \nu_c \\ 0 & \text{si } ||\nu| - |\nu_0|| > \nu_c \end{cases}$
- Réponse impulsionnelle : $h(n) = 4\nu_c \operatorname{sinc}(2\nu_c n) \cos(2\pi\nu_0 n)$

■ Causalité ? Inversibilité ?





Régimes transitoire et stationnaire

■ Exemple :

- $x(n)$ est un échelon : $x(n) = 1_{[0,+\infty[}(n)$
- $h(n)$ est un filtre moyenneur : $h(n) = \frac{1}{N}1_{[0,N-1]}(n)$
- De $n = 0$ à $N - 1$: régime transitoire (rampe)
- De $n = N$ à $+\infty$: régime stationnaire ou permanent (constante)





Retards de phase et de groupe

- Réponse en fréquence : $H(e^{i2\pi\nu}) = H_R(\nu)e^{i\phi(\nu)}$
- Retards de phase et de groupe (on suppose $\phi(0) = 0$)

$$\begin{cases} \tau_p(\nu_0) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\phi(\nu_0)}{\nu_0} \\ \tau_g(\nu_0) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{d\nu}(\nu_0) \end{cases}$$

- Réponse en fréquence au voisinage de $n\nu_0$

$$H(e^{i2\pi\nu}) \simeq H_R(\nu_0) e^{-i2\pi(\nu_0\tau_p(\nu_0) + (\nu - \nu_0)\tau_g(\nu_0))}$$

- Filtrage d'un signal à bande étroite ($y = h * x$)

$$x(n) = a(n)e^{i2\pi\nu_0 n} \Rightarrow y(n) \simeq H_R(\nu_0)a(n - \tau_g(\nu_0))e^{i2\pi\nu_0(n - \tau_p(\nu_0))}$$

- Filtres à phase linéaire (retard constant)





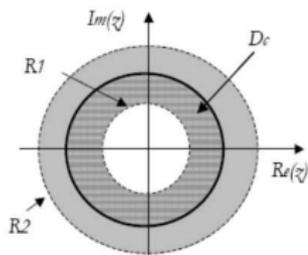
Partie VIII

Transformée en Z



Transformée en Z

- Définition : $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$, appelée **Fonction de Transfert**
- Domaine de convergence : $\mathcal{D} = \{z / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)||z|^{-n} < +\infty\}$
- Cas causal : $R = \inf\{|z|, z \in \mathbb{C} / \sum h(n)z^{-n} < +\infty\}$, $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$



$$z = 1 \text{ en } \nu = 0$$
$$z = i \text{ en } \nu = 1/4$$

- Filtres RIF : $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus 0$ ou ∞
- Anti-causalité : \mathcal{D} est un disque
- **Causalité** : \mathcal{D} est le complémentaire d'un disque
- Cas général : \mathcal{D} est une couronne (ou \emptyset)





Propriétés élémentaires

- **Stabilité** : l'anneau \mathcal{D} contient le cercle unité
 - La TZ coïncide avec la TFTD sur le cercle unité
- **Linéarité** : $a_1 h_1 + a_2 h_2 \rightarrow a_1 H_1 + a_2 H_2$ ($\mathcal{D} \supset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$)
- **Retard** : $h(n - k) \rightarrow z^{-k} H(z)$
- **Inversion du sens du temps**
 - Si $f(n) = h(-n)$, $F(z) = H(1/z)$ et $\mathcal{D}_F = 1/\mathcal{D}_H$
- **Produit de convolution**
 - Si $y = h * x$, $Y(z) = H(z)X(z)$, $\mathcal{D}_y \supset \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_x$
- **Filtre inverse**
 - Si $h * h_i = \delta$, $H(z)H_i(z) = 1$ pour $z \in \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{h_i}$





Exemples de TZ

- $h(n) = \delta(n) \Rightarrow H(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $h(n) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \forall |z| > 1$
- $h(n) = \mathbf{1}_{[0\dots N-1]}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad \forall z \neq 0$
- Filtre AR1 :
 - $h(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| > |a|\}$
 - $h(n) = \begin{cases} -a^n & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}, \mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < |a|\}$





Partie IX

Filtres récursifs





Filtres récursifs

- Relation entrée-sortie : $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$
- Calcul de la sortie (implémentation causale)

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

- Fonction de transfert : $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1-c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1-d_k z^{-1})}$





Exemples de filtres récursifs

- Filtres Auto-Régressifs (si $M = 0$, AR d'ordre N)

$$y(n) = \frac{b_0}{a_0} x(n) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k)$$

- Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie

- Si $N = 0$, filtre RIF de taille M

$$h(n) = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & \text{si } n = 0 \dots M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Filtres causaux, inconditionnellement stables
- Si la RI est symétrique ou antisymétrique, la phase est linéaire





Filtres récursifs

■ Fonction de transfert d'un filtre récursif

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

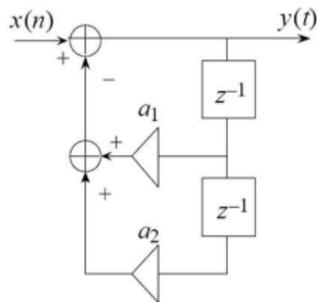
- Définition des pôles et des zéros
- Domaine de convergence : \mathcal{D} est un anneau limité par 2 pôles, et n'en contenant aucun
- Filtres **stables** : \mathcal{D} est le plus grand anneau contenant le cercle unité et aucun pôle
- Filtres **stables et causaux** : dont tous les pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité
- Si les a_k et b_k sont réels, les pôles et zéros sont soit réels, soit vont par paires conjuguées



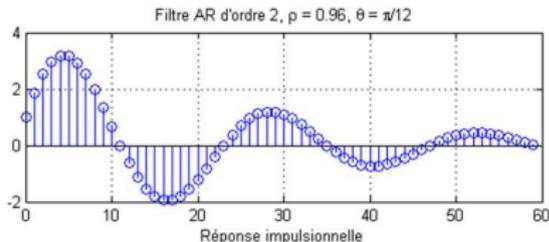


Filtre AR du second ordre

$$H(z) = \frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{1}{(1-\rho z^{-1})(1-\rho^* z^{-1})} \text{ avec } |\rho| < 1$$



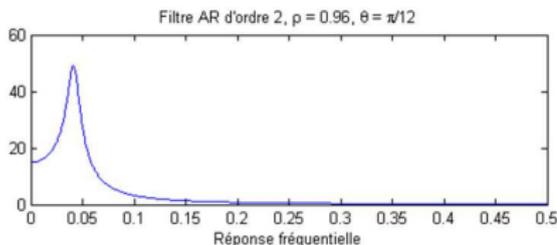
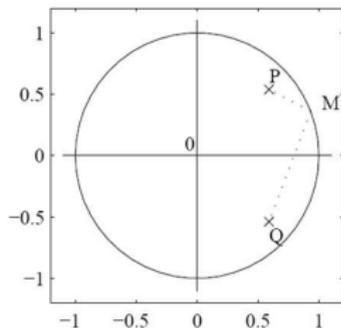
$$h(n) = \rho^n \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \mathbf{1}_{n \geq 0} \text{ où } \rho = \rho e^{i\theta}$$





Filtre AR du second ordre

$$H(z) = \frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{1}{(1-\rho z^{-1})(1-\rho^* z^{-1})}$$



$$|H(z)| = \frac{1}{PM \times QM}$$
$$\arg H(z) = 2 \arg(OM) - \arg(PM) - \arg(QM)$$





Filtres récursifs

- Si $H(z)$ n'a que des pôles simples et $M \geq N$

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}}$$

- Réponse impulsionnelle causale :

$$h(n) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta(n-r) + \sum_{k=1}^N A_k d_k^n \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(n)$$

- Réponse impulsionnelle stable : $h(n) =$

$$\sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta(n-r) + \sum_{|d_k| < 1} A_k d_k^n \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(n) - \sum_{|d_k| > 1} A_k d_k^n \mathbf{1}_{]-\infty,-1]}(n)$$





Factorisation spectrale

- Factorisation de la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

- Réponse en amplitude ($z = e^{2i\pi\nu}$)

$$|H(e^{2i\pi\nu})|^2 = H(z)H(1/z^*)^* = \left| \frac{b_0}{a_0} \right|^2 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z)}$$

- Pôles de $|| < 1$: stabilité + causalité
- Zéros de $|| < 1$: phase minimale





Filtres passe-tout

■ Définition : $H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{z^{-1} - c_k^*}{1 - c_k z^{-1}}$ où $|c_k| < 1 \forall k$

■ $H(z)$ est passe-tout, **causal** et stable

■ Propriétés (si $y = h * x$) :

■
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y(n)|^2$$

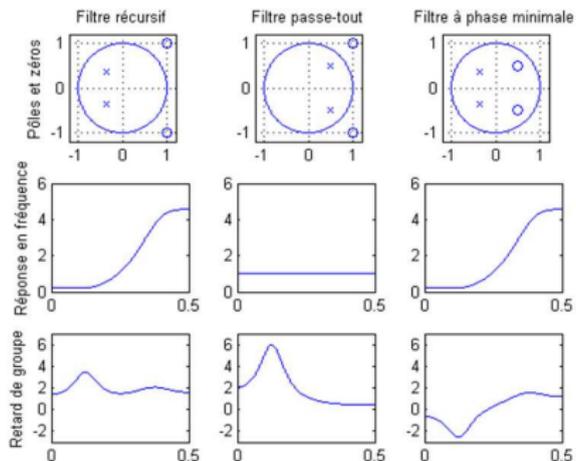
■ Un filtre passe-tout vérifie
$$\sum_{n=-\infty}^N |x(n)|^2 \geq \sum_{n=-\infty}^N |y(n)|^2$$

Preuve : $x_N(n) = x(n) \times \mathbf{1}_{]-\infty, N]}(n)$





Filtres à phase minimale





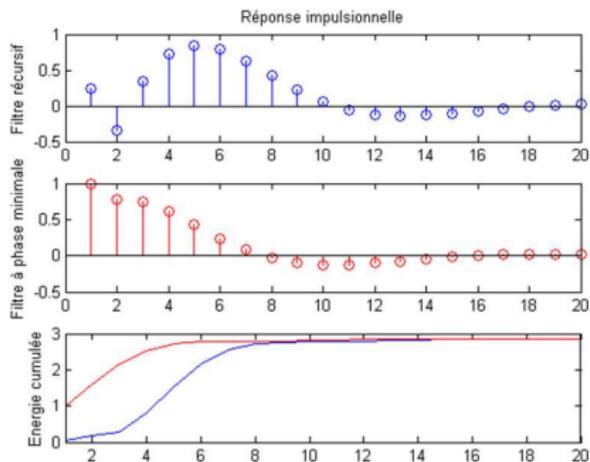
Filtres à phase minimale

- Définition : filtre dont tous les pôles et les zéros sont à l'intérieur du cercle unité
- Tout filtre récursif causal et stable est produit d'un filtre passe-tout et d'un filtre à phase minimale
- Propriétés (si $y = g * x$ et $|G| = |G_m|$) :
 - Le filtre inverse est stable et causal
 - $\sum_{n=-\infty}^N |y_m(n)|^2 \geq \sum_{n=-\infty}^N |y(n)|^2$
 - g_m a le plus petit retard de phase et de groupe





Filtres à phase minimale





Partie X

Observation spectrale





Observation spectrale

- $x(n), n \in \mathbb{Z} \longrightarrow x(n), n \in 0 \dots P - 1$
- $\tilde{x}(n) = w(n)x(n)$ où w est un rectangle
- Exemple : $x(n) = e^{2i\pi\nu_0 n}$ et $w(n) = \mathbf{1}_{[0 \dots P-1]}(n)$
- TFTD d'un signal fenêtré :

$$\tilde{X}(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)w(n)e^{-i2\pi n\nu} = X * W(e^{i2\pi\nu})$$

où $w(n)$ est une fenêtre de support $[0 \dots P - 1]$

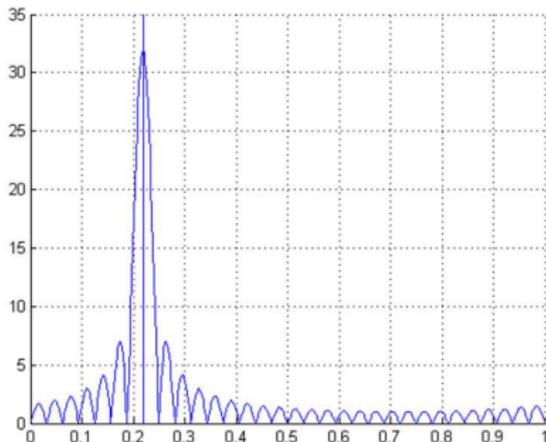
- TFD de longueur $N \geq P$: $\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)e^{-i2\pi n \frac{k}{N}}$
- N joue sur la **précision** du tracé de X
- P et w sont liés à la **résolution** fréquentielle





TFTD d'un sinus complexe

$$\begin{cases} x(n) = e^{2i\pi\nu_0 n} \\ w(n) = \mathbf{1}_{[0 \dots P-1]}(n) \end{cases}$$
$$\downarrow$$
$$|\tilde{X}(e^{2i\pi\nu})| = \left| \frac{\sin(P\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))} \right|$$

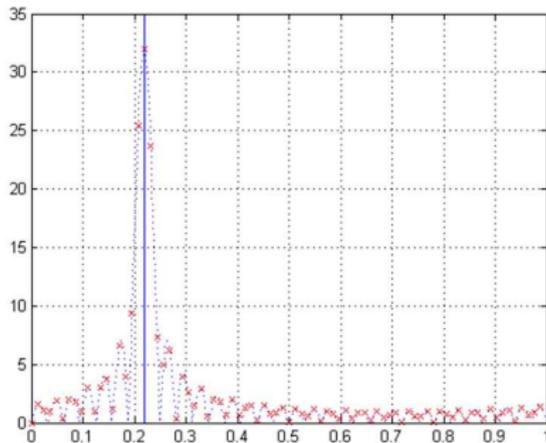


- TFTD avec $\nu_0 = 7/32$ et $P = 32$ (w rectangle)





TFD d'un sinus complexe



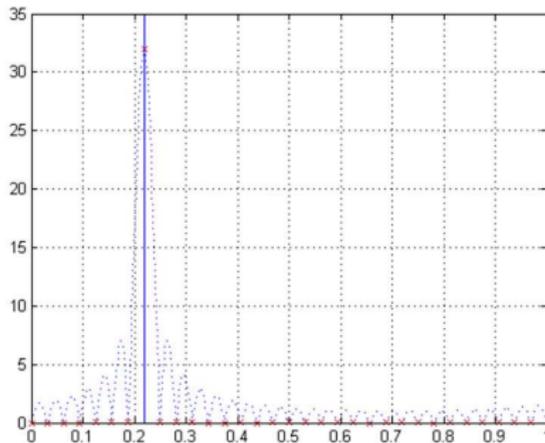
■ TFD avec $\nu_0 = 7/32$, $P = 32$ et $N = 82$

$$\left| \tilde{X}(k) \right| = \left| \frac{\sin(P\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))}{\sin(\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))} \right|$$





TFD d'un sinus complexe



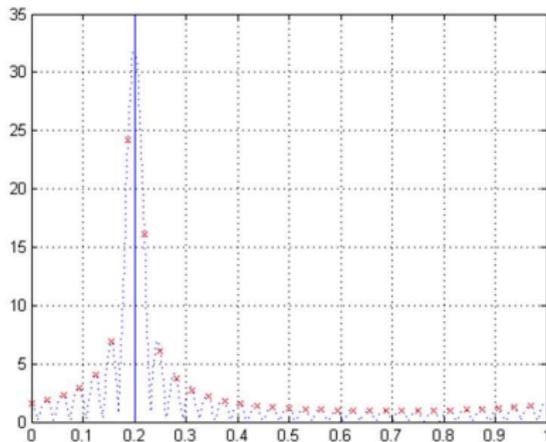
■ TFD avec $\nu_0 = 7/32$ et $N = P = 32$

$$\left| \tilde{X}(k) \right| = \left| \frac{\sin(P\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))}{\sin(\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))} \right|$$





TFD d'un sinus complexe



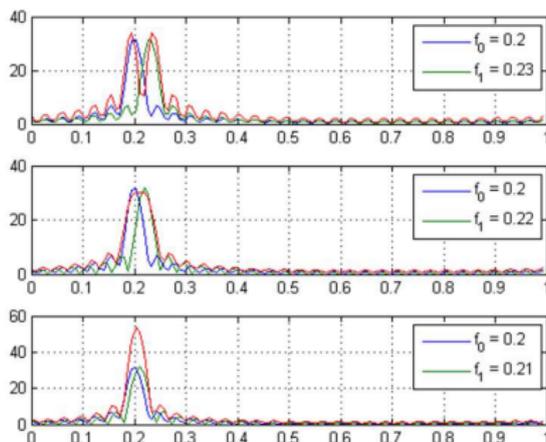
■ TFD avec $\nu_0 = 0.2$ et $N = P = 32$

$$\left| \tilde{X}(k) \right| = \left| \frac{\sin(P\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))}{\sin(\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))} \right|$$





Résolution spectrale



■ TFD avec $P = 32$ et $N = 128$

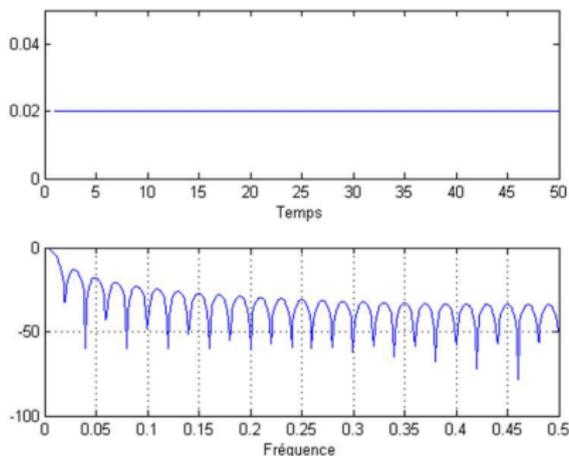




Fenêtre rectangulaire

$$w(n) = \mathbf{1}_{[0 \dots P-1]}(n)$$

- Largeur : $2/P$, 2ème lobe : -13 dB, décroissance : -6 dB / octave

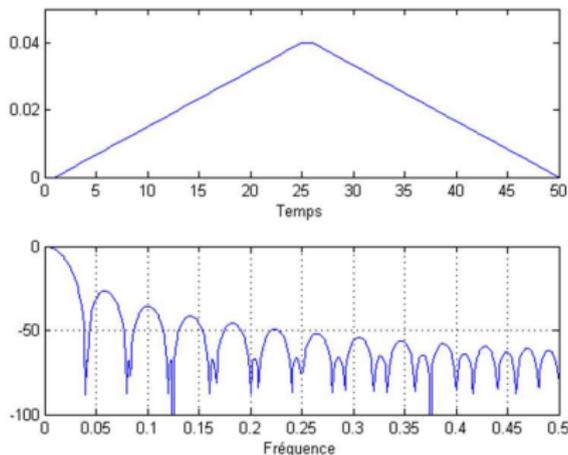




Fenêtre de Bartlett

$$w(n) = 1 - \left| \frac{2n}{P-1} - 1 \right|$$

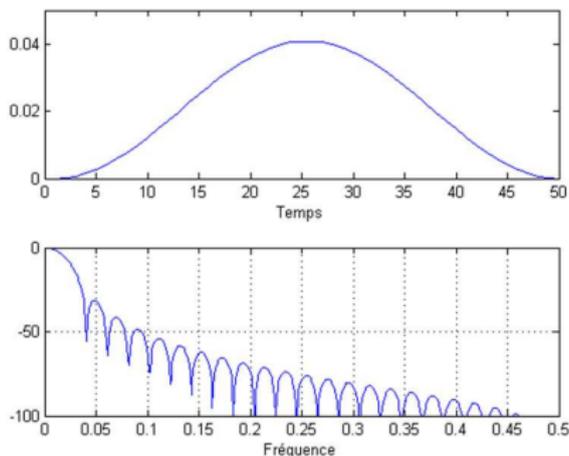
- Largeur : $4/P$, 2ème lobe : -26 dB, décroissance : -12 dB / octave



Fenêtre de Hann

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / (P - 1))$$

- Largeur : $4/P$, 2ème lobe : -31 dB, décroissance : -18 dB / octave

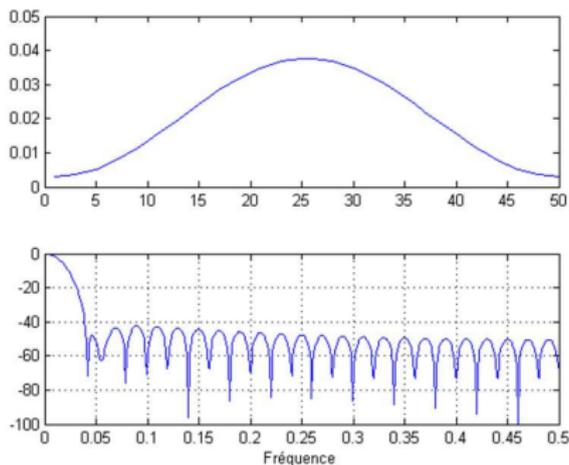




Fenêtre de Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / (P - 1))$$

- Largeur : $4/P$, 2ème lobe : -41 dB, décroissance : -6 dB / octave

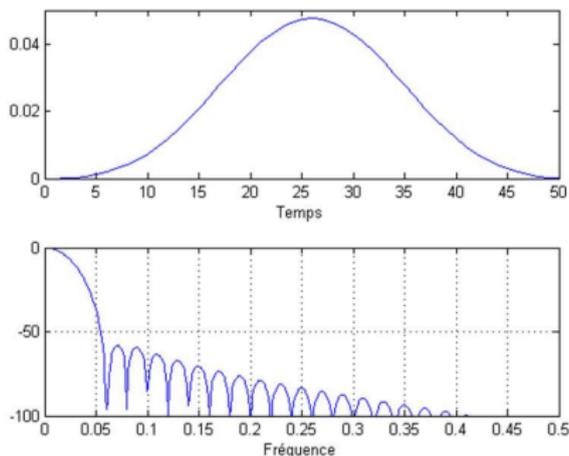




Fenêtre de Blackman

$$w(n) = 0.4266 - 0.4965 \cos(2\pi n/(P - 1)) + 0.076 \cos(4\pi n/(P - 1))$$

- Largeur : $6/P$, 2ème lobe : -57 dB, décroissance : -18 dB / octave





Partie XI

Synthèse de filtres

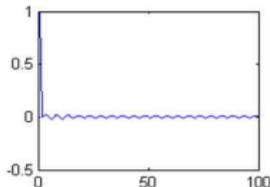
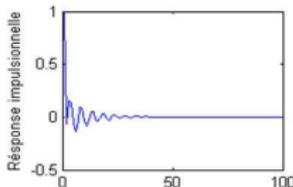
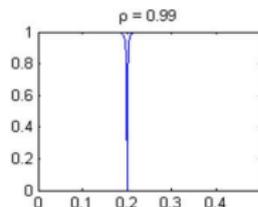
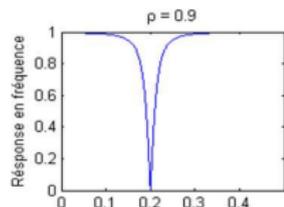




Filtre réjecteur (effet Larsen)

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1 - e^{+i2\pi\nu_C} z^{-1}}{1 - \rho e^{+i2\pi\nu_C} z^{-1}} \frac{1 - e^{-i2\pi\nu_C} z^{-1}}{1 - \rho e^{-i2\pi\nu_C} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - 2 \cos(2\pi\nu_C) z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\rho \cos(2\pi\nu_C) z^{-1} + \rho^2 z^{-2}} \end{aligned}$$

- Remarque : la RI est longue si $\rho \rightarrow 1$





Partie XII

Synthèse de filtres RIF





Filtres RIF à phase linéaire

- Réponse impulsionnelle : $h(n)$, $n = 0 \dots N - 1$
- Réponse en fréquence : $H(e^{j2\pi\nu}) = e^{j2\pi(\beta - \alpha\nu)} H_R(\nu)$
- Retards de groupe et de phase constants et égaux
- Avantages : toujours **causaux et stables**, conservent la forme d'onde d'un signal à bande étroite
- Inconvénient : complexité de calcul élevée





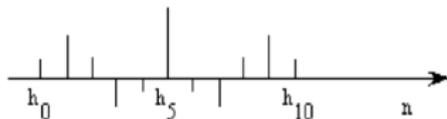
Caractérisation

- **1 - périodicité** de $H(e^{2i\pi\nu}) \Rightarrow \alpha = p/2, p \in \mathbb{Z}$ et $H_R(\nu)$ est 2-périodique
- **Symétrie hermitienne** $\Rightarrow d = e^{2i\pi\beta} = 1$ ou i
et $G(z) = H_R(z^2)$ est paire ou impaire
- On peut donc écrire $H(z^2) = dz^{-p}G(z)$
- On choisit $p = N - 1$ pour un filtre causal
- **4 possibilités** selon d et la parité de N :
 - $d = 1, N$ pair ou impair : $h(n) = h(N - 1 - n)$
 - $d = i, N$ pair ou impair : $h(n) = -h(N - 1 - n)$



Types de filtres

- Type 1 : N impair, symétrique ($d = 1$)

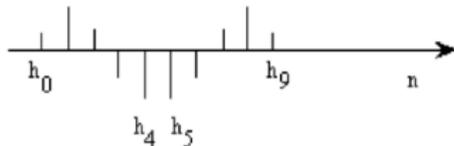


$$H(e^{i2\pi\nu}) = e^{-i2\pi\nu\frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(2\pi\nu n)$$

- Utilisation : passe-bas, passe-haut, passe-bande

Types de filtres

- Type 2 : N pair, symétrique ($d = 1$)



$$H(e^{j2\pi\nu}) = e^{-j2\pi\nu \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} b_n \cos\left(2\pi\nu \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$$

- Propriété : $H(-1) = 0$ ($\nu = \frac{1}{2}$)
- Utilisation : passe-bas, passe-bande

Types de filtres

- Type 3 : N impair, antisymétrique ($d = i$)

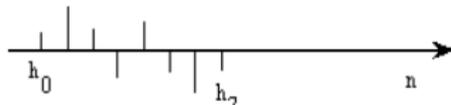


$$H(e^{i2\pi\nu}) = i e^{-i2\pi\nu \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c_n \sin(2\pi\nu n)$$

- Propriété : $H(1) = H(-1) = 0$ ($\nu = 0$ ou $\frac{1}{2}$)
- Utilisation : différenciateur, transformateur de Hilbert sous forme de passe-bande

Types de filtres

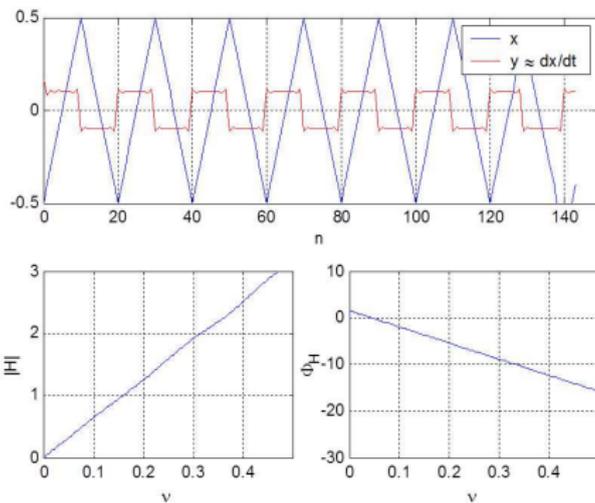
- Type 4 : N pair, antisymétrique ($d = i$)



$$H(e^{i2\pi\nu}) = i e^{-i2\pi\nu \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} d_n \sin(2\pi\nu (n - \frac{1}{2}))$$

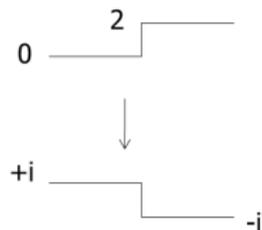
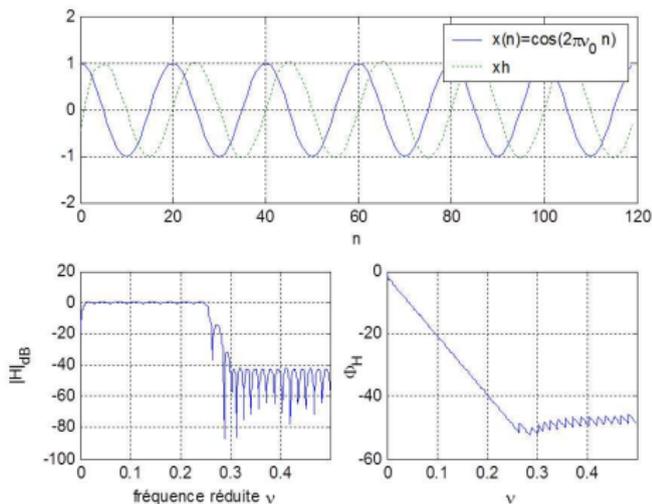
- Propriété : $H(1) = 0$ ($\nu = 0$)
- Utilisation : différenciateur, transformateur de Hilbert sous forme de passe-haut

Différenciateurs





Transformateur de Hilbert

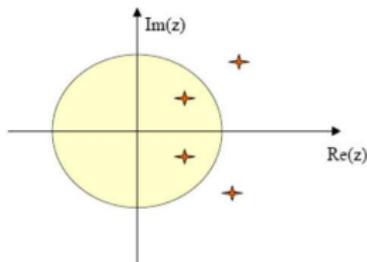




Position des zéros

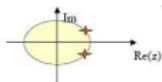
- Zéros complexes hors du cercle unité :

$$(1 - \rho e^{i\theta} z^{-1})(1 - \rho e^{-i\theta} z^{-1})(1 - \frac{1}{\rho} e^{i\theta} z^{-1})(1 - \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} z^{-1})$$

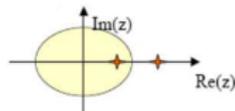


Position des zéros

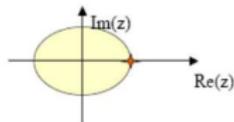
- Zéros sur le cercle unité



- Zéros réels

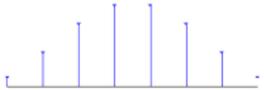
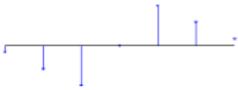


- Zéro réel sur le cercle unité





En résumé

Type I N impair symétrique		-	Passe-bas Passe-Haut Passe-Bande
Type II N pair symétrique		$H(-1) = 0$	Passe-bas, Passe-bande
Type III N impair antisym.		$H(1) = 0$ $H(-1) = 0$	Différenciateur, Transformateur de Hilbert, Passe-bande
Type IV N pair antisym.		$H(1) = 0$	Différenciateur, Transformateur de Hilbert, Passe Haut





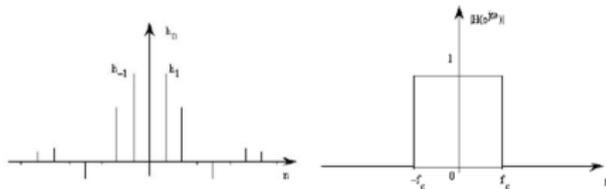
Partie XIII

Méthode de la fenêtre

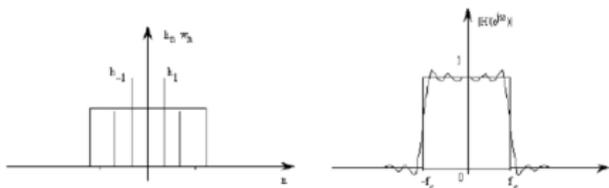


Méthode de la fenêtre

- Exemple : le filtre passe-bas
- Filtre passe-bas idéal : $h(n) = 2\nu_C \text{sinc}(2\nu_C n)$
 - La réponse est RII non causale, non stable

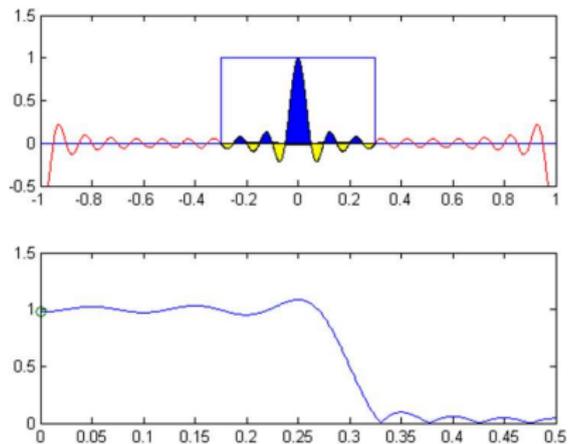


- Synthèse d'un filtre RIF causal de type I
 - Troncature et décalage temporel



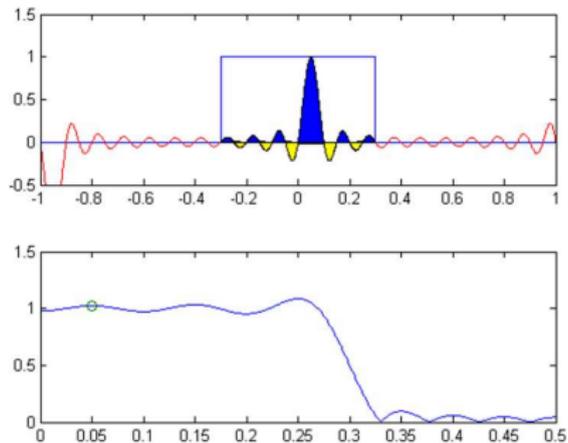


Phénomène de Gibbs



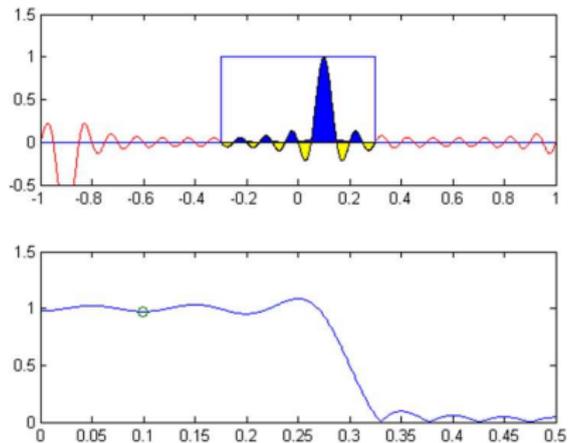


Phénomène de Gibbs



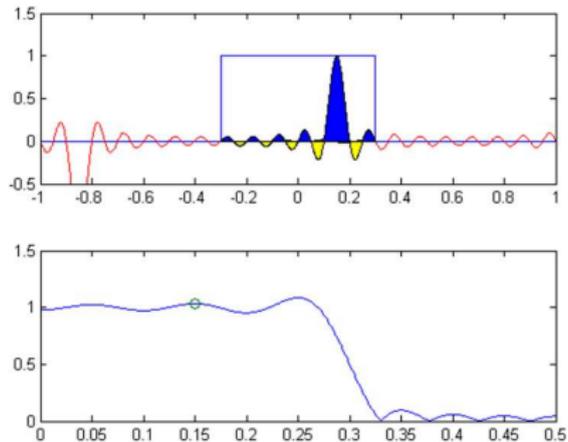


Phénomène de Gibbs



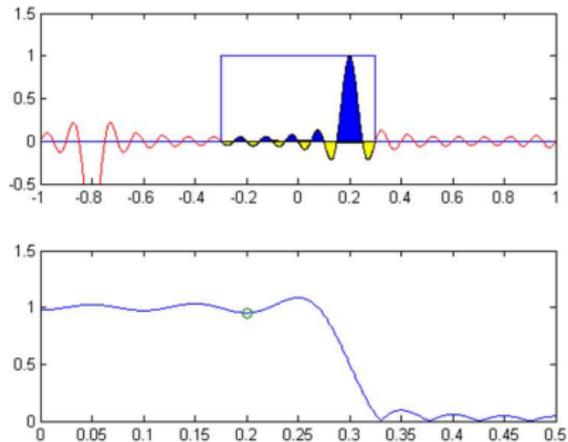


Phénomène de Gibbs



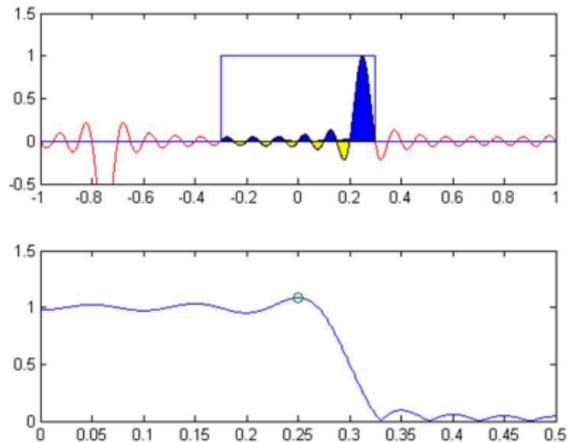


Phénomène de Gibbs



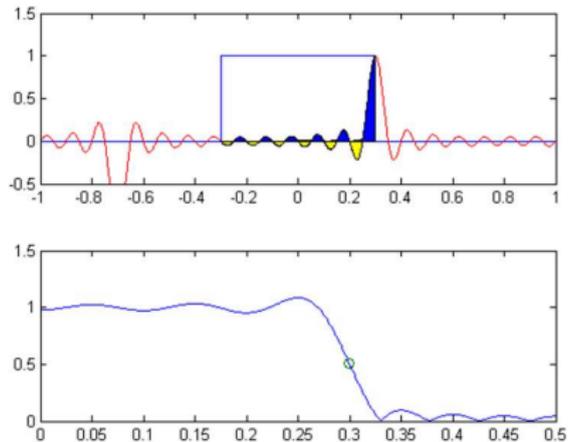


Phénomène de Gibbs



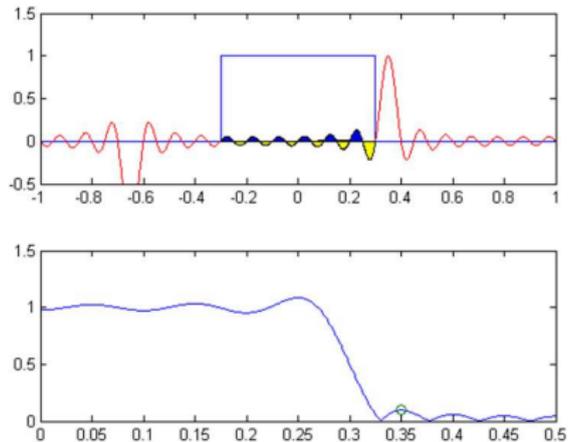


Phénomène de Gibbs



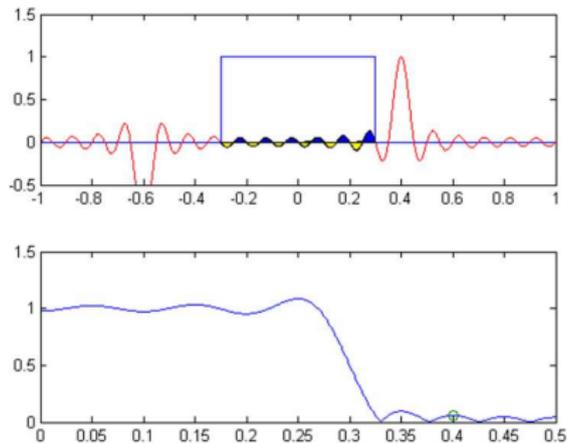


Phénomène de Gibbs



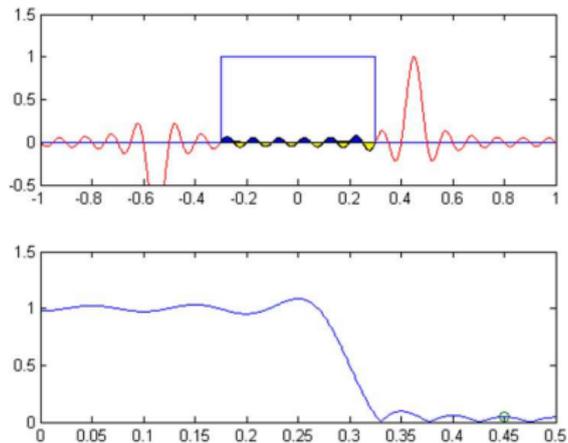


Phénomène de Gibbs



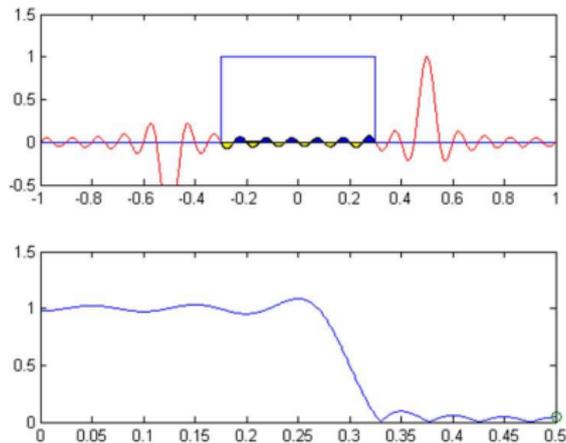


Phénomène de Gibbs





Phénomène de Gibbs

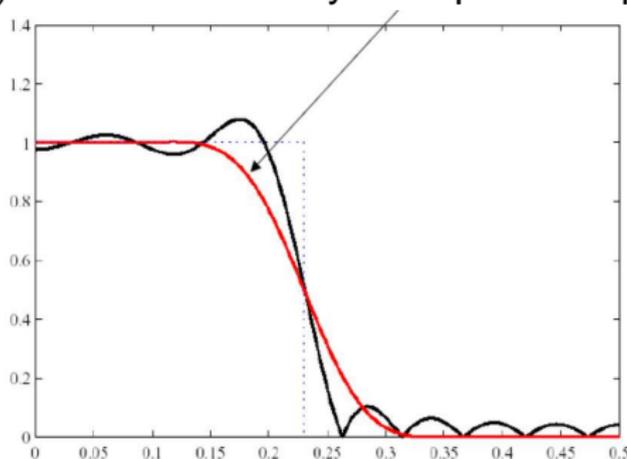




Choix d'une fenêtre adéquate

$$h(n) = 2\nu_c \operatorname{sinc}(2\nu_c n) w(n)$$

où $w(n)$ est une fenêtre symétrique de support fini





Méthode de la fenêtre

■ Avantages :

- Stabilité, causalité
- Filtre à phase linéaire si fenêtre symétrique

■ Inconvénients :

- les bandes de transition sont élargies
- les ondulations parasites
 - sont dues aux lobes secondaires
 - n'ont pas une amplitude constante
 - sont les mêmes en bandes passante et atténuée





Partie XIV

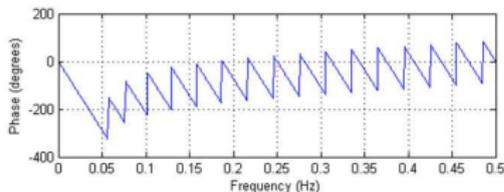
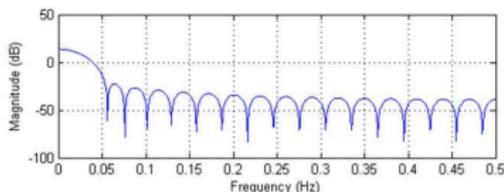
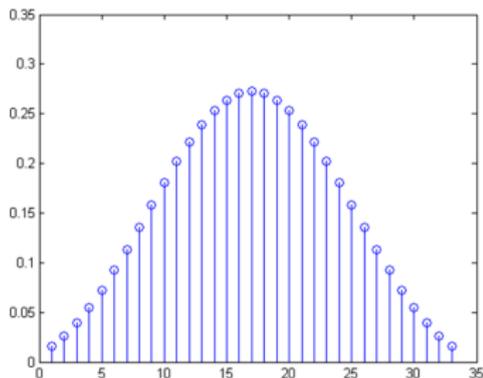
Méthodes aux valeurs propres





Séquences prolates sphéroïdes

- Soit $h(n)$ passe-bas RIF, réel, causal
- **Optimisation sous contrainte** : on maximise $\int_{-\nu_c}^{\nu_c} |H(e^{i2\pi\nu})|^2 d\nu$
sous la contrainte $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |H(e^{i2\pi\nu})|^2 d\nu = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)^2 = 1$



$$H = e(\nu)^H h, J = h^T [\int_{-\nu_c}^{+\nu_c} e(\nu)e(\nu)^H] h$$





Filtres propres optimaux

- Ajout d'une **bande de transition** $[\nu_C, \nu_A]$
- On minimise $E = \alpha E_c + (1 - \alpha) E_a$ où $\alpha \in]0, 1[$
où E_a est l'erreur en bande atténuée :

$$E_a = 2 \int_{\nu_a}^{1/2} |H(e^{i2\pi\nu})|^2 d\nu$$

et E_c est l'erreur en bande passante :

$$E_c = 2 \int_0^{\nu_c} |H(1) - H(e^{i2\pi\nu})|^2 d\nu$$





Partie XV

Méthodes itératives



■ Avantages

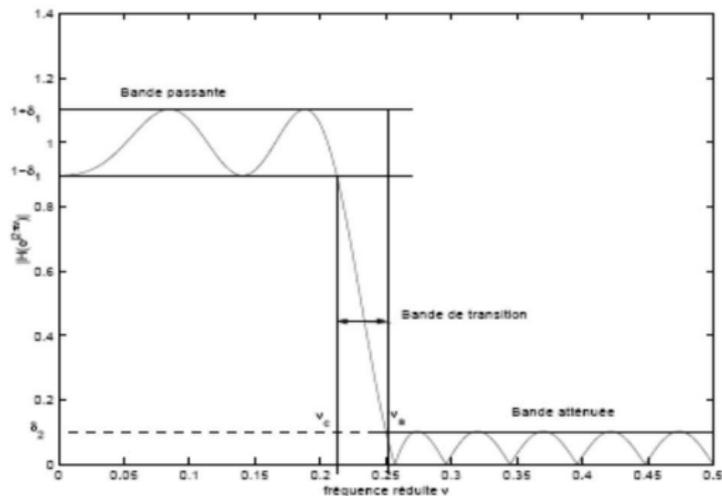
- Design optimal
- Méthode flexible
- Ondulations d'amplitude constante
- Ordre minimum pour un gabarit donné

■ Inconvénients

- Synthèse coûteuse en temps de calcul
- Pas approprié pour du temps-réel
- Pas exploitable pour des filtres longs (problèmes numériques)



Gabarit d'un filtre





Paramétrisation de H_R

- Factorisation : $H_R(\nu) = P(\nu)Q(\nu)$

$H_R(\nu)$	$P(\nu)$	$Q(\nu)$
$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(2\pi\nu n)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(2\pi\nu n)$	1
$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b_n \cos\left(2\pi\nu\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} b'_n \cos(2\pi\nu n)$	$\cos(\pi\nu)$
$\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c_n \sin(2\pi\nu n)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} c'_n \cos(2\pi\nu n)$	$\sin(2\pi\nu)$
$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d_n \sin\left(2\pi\nu\left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} d'_n \cos(2\pi\nu n)$	$\sin(\pi\nu)$





Méthode de Remez

- Formulation du problème : minimisation de l'erreur

$$E(\nu) = W(\nu)|H_D(\nu) - H_R(\nu)|$$

à N , ν_c et ν_a fixés

- On pose $W(\nu) = 1/\delta_1$ en bande passante, $W(\nu) = 1/\delta_2$ en bande atténuée, et $W(\nu) = 0$ en bande de transition
- Avec $P(\nu) = \sum_{n=0}^M a_n \cos(2\pi\nu n)$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\nu) &= W(\nu)(H_D(\nu) - P(\nu) Q(\nu)) \\ &= W'(\nu)(H'_D(\nu) - P(\nu)) \end{aligned}$$





Théorème d'alternance

- Minimisation au sens de Chebyshev :

$$H(e^{i2\pi\nu}) = \min_H \|E(\nu)\|_\infty$$

sur un ensemble fermé de fréquences B

- **Théorème d'alternance** : l'unique et meilleure approximation est obtenue lorsque il existe $M + 2$ fréquences $\nu_0 \dots \nu_{M+1}$ dans B telles que $E(\nu_k) = \pm(-1)^k \delta$ où $\delta = \|E(\nu)\|_\infty$





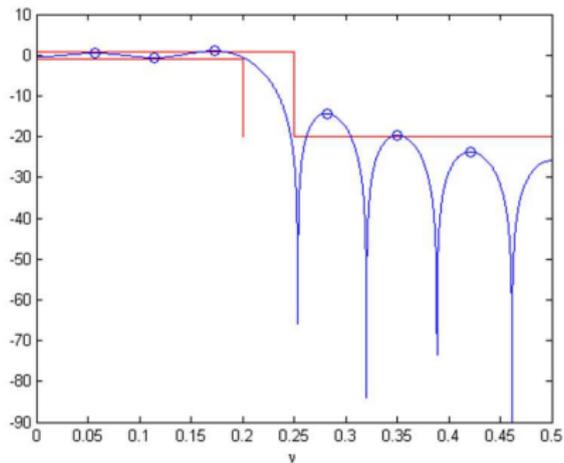
Algorithme de Remez

- Initialisation : on fixe les $M + 2$ alternances uniformément dans B
- Itération
 - Résolution directe du système linéaire
$$\sum_{n=0}^M a_n \cos(2\pi\nu_k n) + \frac{(-1)^k \delta}{W(\nu_k)} = H_D(\nu_k)$$
(ou solution par interpolation Lagrangienne)
 - Recherche des extrema de ce polynôme
 - Choix des nouvelles valeurs des ν_k
- Convergence en quelques itérations



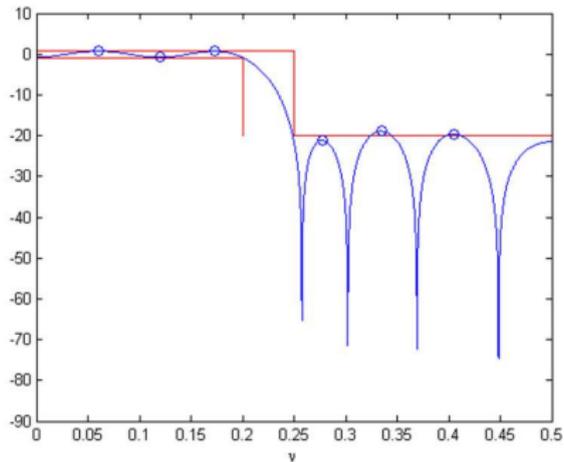


Méthode de Remez



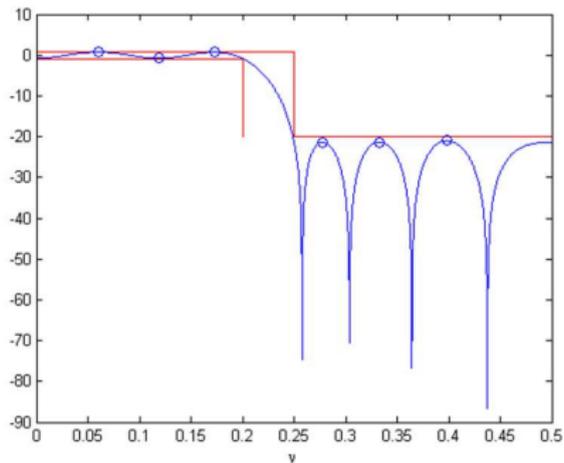


Méthode de Remez



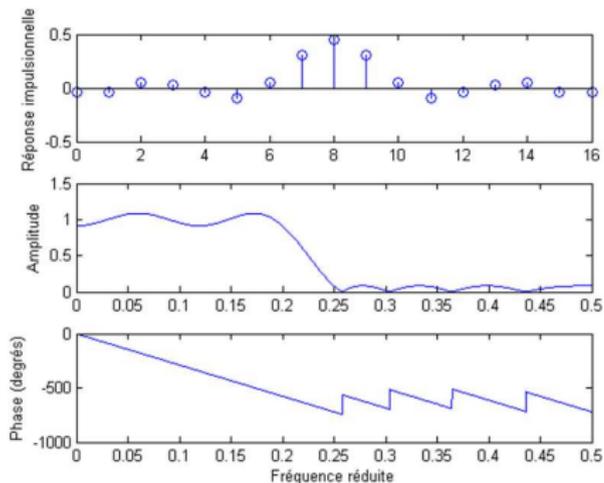


Méthode de Remez





Méthode de Remez



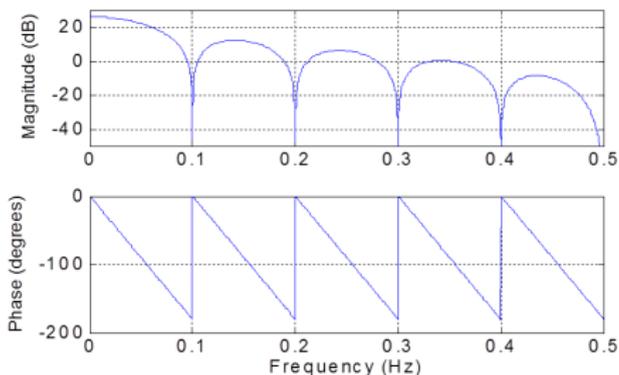


Partie XVI

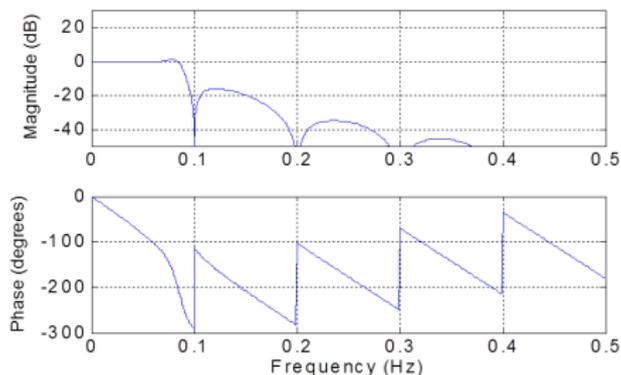
Synthèse de filtres récursifs



- Exemple : $N(z) = \prod_k (1 - z_k z^{-1})$ avec des zéros aux fréquences 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5



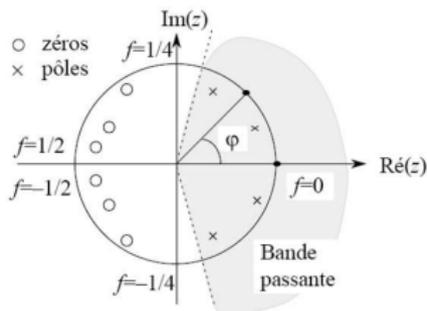
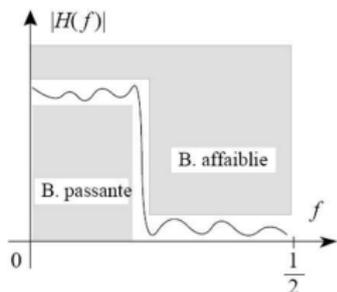
- Exemple : $H(z) = N(z)/D(z)$ où $D(z) = (1 - pz^{-1})(1 - p^*z^{-1})$,
avec $p = 0.95e^{i2\pi 0.085}$





Filtres récursifs passe-bas

■ Position des pôles et des zéros





Transformation bilinéaire

- Filtres analogiques : $H_a(p)$ où $p = 2i\pi f$
- Filtres numériques : $H(z)$ où $z = e^{2i\pi\nu}$
- Méthode des trapèzes pour approcher

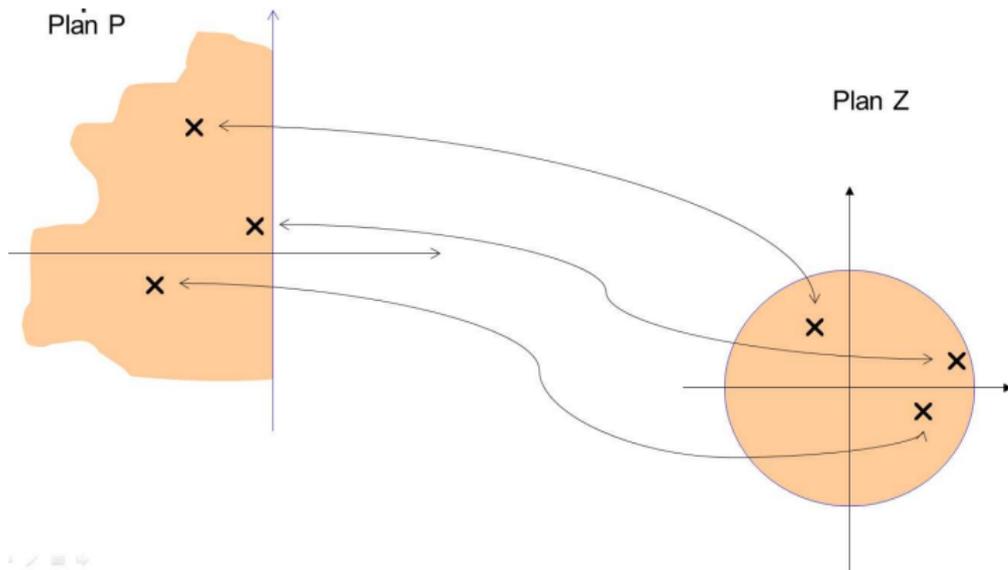
$$y(nT) = y((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} y'(t) dt$$

- Exemple du système $y(t) = x'(t)$ (filtre dérivateur)
- Transformée bilinéaire : $p = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
- Lien fréquentiel : $f = \frac{1}{\pi T} \tan(\pi\nu)$



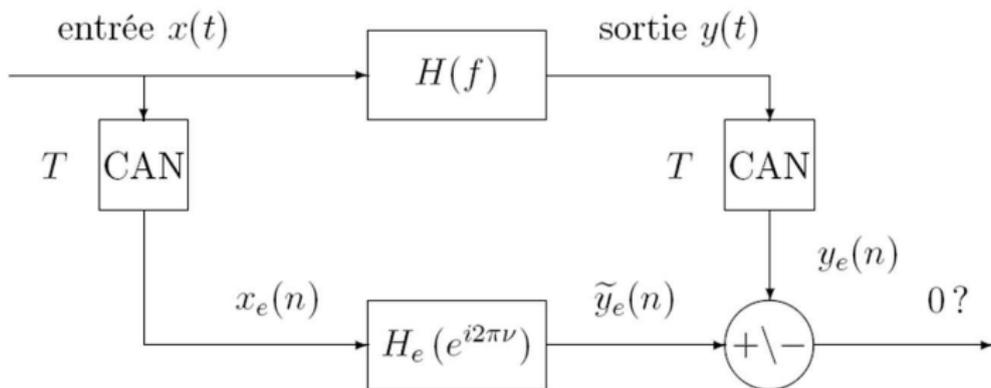


Transformation bilinéaire





Passage du continu au discret





Partie XVII

Conversion de fréquence





Sur-échantillonnage

- Soit $x(n) = x_a(nT)$, où $\text{supp}(X_a(f)) \subset [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$
- Formule de reconstruction (Nyquist)

$$x_a(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) \text{sinc} \left(\frac{t}{T} - m \right)$$

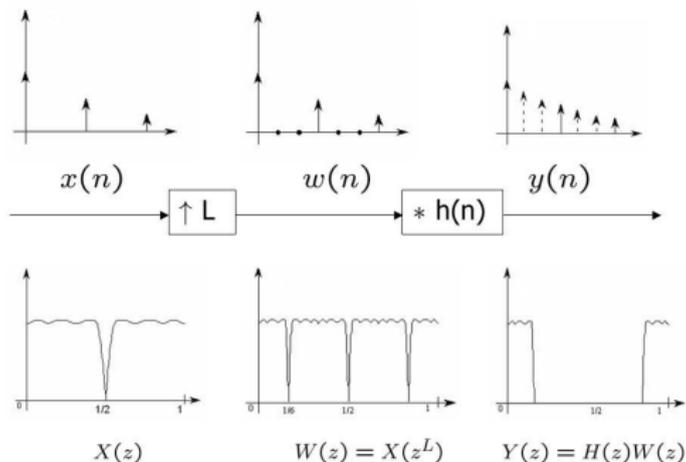
- Soit $y(n) = x_a(n\frac{T}{L})$ le signal interpolé $\times L$

$$y(n) = h * w(n), \text{ où } \begin{cases} \forall n \in L\mathbb{Z}, w(n) = x\left(\frac{n}{L}\right) \\ \forall n \notin L\mathbb{Z}, w(n) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{Z}, h(n) = \text{sinc}\left(\frac{n}{L}\right) \end{cases}$$



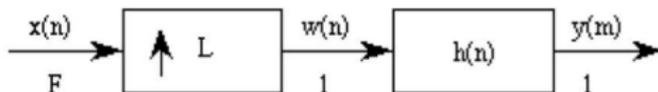


Sur-échantillonnage





Sur-échantillonnage

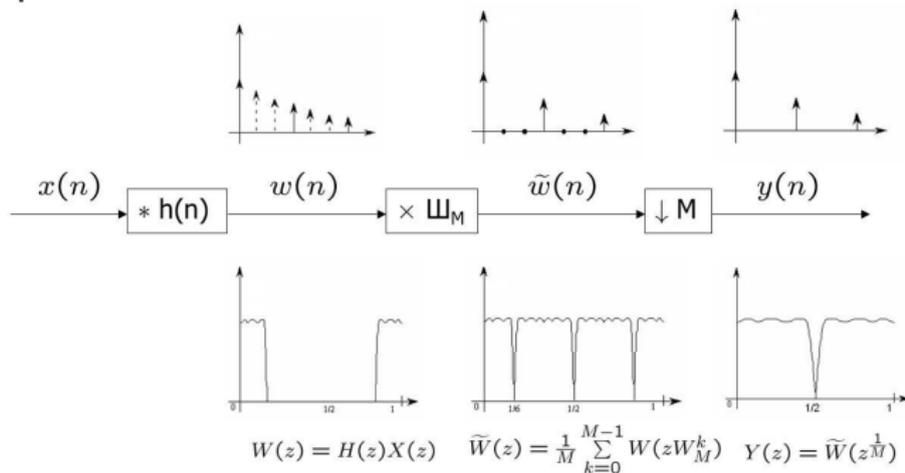


- $W(e^{j2\pi\nu}) = X(e^{j2\pi L\nu})$
- $\begin{cases} H(e^{j2\pi\nu}) = L & \forall |\nu| < \frac{1}{2L} \\ H(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \frac{1}{2L} < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$
- $\Rightarrow \begin{cases} Y(e^{j2\pi\nu}) = LX(e^{j2\pi L\nu}) & \forall |\nu| < \frac{1}{2L} \\ Y(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \frac{1}{2L} < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$



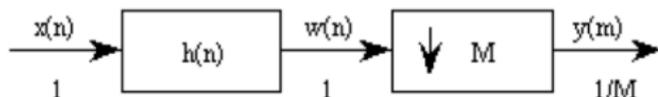


Sous-échantillonnage





Sous-échantillonnage

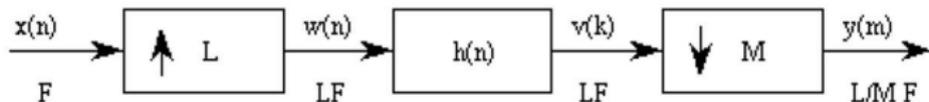


- $$\begin{cases} H(e^{j2\pi\nu}) = 1 & \forall |\nu| < \frac{1}{2M} \\ H(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \frac{1}{2M} < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$$
- $$Y(e^{j2\pi\nu}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W\left(e^{j2\pi\left(\frac{\nu-k}{M}\right)}\right)$$
- $$\Rightarrow Y(e^{j2\pi\nu}) = \frac{1}{M} X(e^{j2\pi\frac{\nu}{M}}) \quad \forall |\nu| < \frac{1}{2}$$





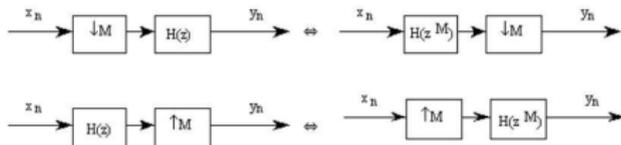
Ré-échantillonnage



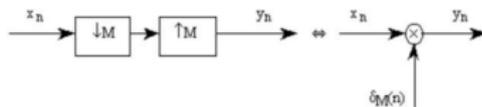
- $$\begin{cases} H(e^{j2\pi\nu}) = L & \forall |\nu| < \min\left(\frac{1}{2L}, \frac{1}{2M}\right) \\ H(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \min\left(\frac{1}{2L}, \frac{1}{2M}\right) < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$$
- $$Y(e^{j2\pi\nu}) = \frac{L}{M} X(e^{j2\pi\frac{L}{M}\nu}) \quad \forall |\nu| < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{M}{2L}\right) \text{ (et 0 ailleurs)}$$



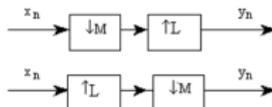
■ Échange filtre / décimation ou insertion



■ Simplification insertion / décimation

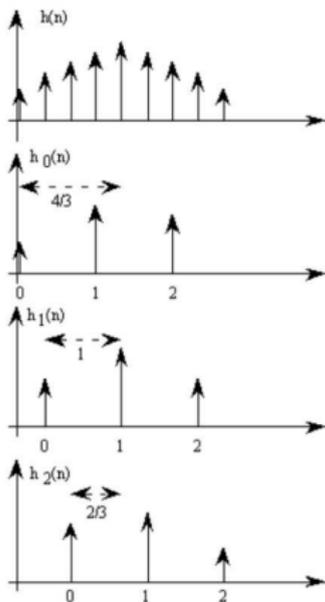


■ Permutation insertion / décimation ?





Composantes polyphases



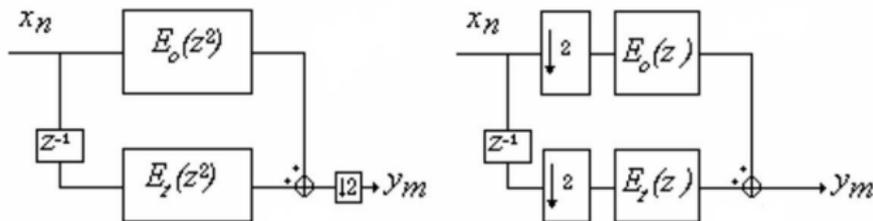
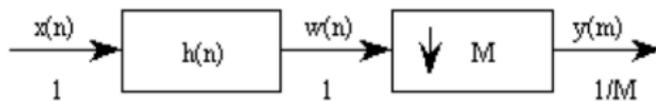
- Si h est un passe-bas idéal
 - h_0 , h_1 , h_2 sont passe-tout
 - h_0 , h_1 , h_2 diffèrent par leur phase





Polyphases de type I

- Définition : $H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} E_m(z^M)z^{-m}$
- Structure efficace pour une décimation





Polyphases de type II

- Définition : $H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} R_l(z^L)z^{-(L-1-l)}$
- Structure efficace pour une interpolation

