Borne d'Ingleton et fonctions entropiques représentables linéairement

Laurent Guillé

Mardi 12 février 2008

- Chaque fonction entropique h d'un ensemble de variables $\{X_1, ...X_n\}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{2^n-1}$: les coordonnées sont les entropies conjointes et $\mathbb{R}^{2^n-1}$ est appelé l'espace entropique.

$$h = (h(X_1), h(X_2), ...h(X_1, X_2), ..., h(X_1...X_n))$$

- Chaque fonction entropique h d'un ensemble de variables $\{X_1, ...X_n\}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{2^n-1}$: les coordonnées sont les entropies conjointes et $\mathbb{R}^{2^n-1}$ est appelé l'espace entropique.

  $$h = (h(X_1), h(X_2), ...h(X_1, X_2), ..., h(X_1...X_n))$$

- $\Gamma_n^* \subset \mathbb{R}^{2^n-1}$: Ensemble des fonctions entropiques de variables aléatoires.

- Chaque fonction entropique h d'un ensemble de variables $\{X_1, ...X_n\}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{2^n-1}$: les coordonnées sont les entropies conjointes et $\mathbb{R}^{2^n-1}$ est appelé l'espace entropique.

  $$h = (h(X_1), h(X_2), ...h(X_1, X_2), ..., h(X_1...X_n))$$

- $\Gamma_n^* \subset \mathbb{R}^{2^n-1}$: Ensemble des fonctions entropiques de variables aléatoires.

- Chaque inégalité linéaire de théorie de l'information est une inégalité linéaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2^n-1}$.

- Chaque fonction entropique h d'un ensemble de variables $\{X_1, ...X_n\}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{2^n-1}$: les coordonnées sont les entropies conjointes et $\mathbb{R}^{2^n-1}$ est appelé l'espace entropique.

  $$h = (h(X_1), h(X_2), ...h(X_1, X_2), ..., h(X_1...X_n))$$

- $\Gamma_n^* \subset \mathbb{R}^{2^n-1}$: Ensemble des fonctions entropiques de variables aléatoires.

- Chaque inégalité linéaire de théorie de l'information est une inégalité linéaire dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{2^n-1}$.

- Exemple:
  $I(X_i; X_j|X_k) \geq 0 \Leftrightarrow h(X_i, X_k) + h(X_j, X_k) - h(X_k) - h(X_i, X_j, X_k) \geq 0$

- $\Sigma_1 = \{I(X_i; X_j | W_\alpha) \geq 0, i \neq j, W_\alpha \subset \{X_1, ...X_n\} \setminus \{X_i, X_j\}\}$

  $\Sigma_2 = \{H(X_i | Q_i) \geq 0, Q_i = \{X_1, ...X_n\} \setminus \{X_i\}\}$

  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ est l'ensemble élémentaire des inégalités basiques.

  Nombre d'inégalités basiques: $|\Sigma| = |\Sigma_1| + |\Sigma_2| = \binom{n}{2} 2^{n-2} + n$

- $\Sigma_1 = \{I(X_i; X_j|W_\alpha) \geq 0, i \neq j, W_\alpha \subset \{X_1, ...X_n\} \setminus \{X_i, X_j\}\}$

  $\Sigma_2 = \{H(X_i|Q_i) \geq 0, Q_i = \{X_1, ...X_n\} \setminus \{X_i\}\}$

  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ est l'ensemble élémentaire des inégalités basiques.

  Nombre d'inégalités basiques: $|\Sigma| = |\Sigma_1| + |\Sigma_2| = \binom{n}{2}2^{n-2} + n$

- Un vecteur de $\mathbb{R}^{2^n-1}$ est un polymatroïde s'il vérifie toutes les inégalités de Σ.

  Γ_n: Ensemble des polymatroïdes ($\Gamma_n^* \subset \Gamma_n$).

- **Définition**: Une fonction entropique h est représentable linéairement s'il existe une suite $(E_1, ...E_n)$ de sous-espaces vectoriels sur un corps fini $GF(q)$, telle que

$$\forall \alpha \subset [1, n], h(\{X_i, i \in \alpha\}) = (\log q) \dim(\sum_{i \in \alpha} E_i)$$

$$h(X_1) = (\log q) \dim(E_1), h(X_2) = (\log q) \dim(E_2), ...$$
$$h(X_1, X_2) = (\log q) \dim(E_1 + E_2), ...$$

- **Définition**: Une fonction entropique h est représentable linéairement s'il existe une suite $(E_1, ...E_n)$ de sous-espaces vectoriels sur un corps fini $GF(q)$, telle que

  $$\forall \alpha \subset [1, n], h(\{X_i, i \in \alpha\}) = (\log q) \dim(\sum_{i \in \alpha} E_i)$$

  $$h(X_1) = (\log q) \dim(E_1), h(X_2) = (\log q) \dim(E_2), ...$$
  $$h(X_1, X_2) = (\log q) \dim(E_1 + E_2), ...$$

- Υ_n : Ensemble des fonctions entropiques représentables linéairement ($\Upsilon_n \subset \Gamma_n^*$).

- **Définition**: Une fonction entropique h est représentable linéairement s'il existe une suite $(E_1, \ldots E_n)$ de sous-espaces vectoriels sur un corps fini $GF(q)$, telle que

  $$\forall \alpha \subset [1, n], h(\{X_i, i \in \alpha\}) = (\log q) \dim(\sum_{i \in \alpha} E_i)$$

  $$h(X_1) = (\log q) \dim(E_1), h(X_2) = (\log q) \dim(E_2), \ldots$$
  $$h(X_1, X_2) = (\log q) \dim(E_1 + E_2), \ldots\ldots$$

- Υ_n : Ensemble des fonctions entropiques représentables linéairement ($\Upsilon_n \subset \Gamma_n^*$).

- Exemple 1: X_1 et X_2 sont **indépendantes** si et seulement si $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$, ie si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

- Exemple 2: X_1 est une **fonction** de X_2 si et seulement si $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_2)$, ie si et seulement si $E_1 \subset E_2$.

Pourquoi peut-on se permettre de ne considérer que les fonctions entropiques représentables linéairement ?

- Codage de réseau: Les fonctions entropiques induites par les codes linéaires sont représentables linéairement.

Pourquoi peut-on se permettre de ne considérer que les fonctions entropiques représentables linéairement ?

- Codage de réseau: Les fonctions entropiques induites par les codes linéaires sont représentables linéairement.

- Codage de réseau: En se limitant à des codes linéaires, la région définissant la capacité d'un réseau dépend de l'ensemble des fonctions entropiques représentables linéairement.

Pourquoi peut-on se permettre de ne considérer que les fonctions entropiques représentables linéairement ?

- Codage de réseau: Les fonctions entropiques induites par les codes linéaires sont représentables linéairement.
- Codage de réseau: En se limitant à des codes linéaires, la région définissant la capacité d'un réseau dépend de l'ensemble des fonctions entropiques représentables linéairement.
- Théorie de l'information: L'ensemble des fonctions entropiques représentables par les groupes permet de décrire totalement $\overline{\Gamma_n^*}$.

- Une inégalité d'Ingleton est une inégalité linéaire impliquant quatre sous-ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 de l'ensemble $\{X_1, ...X_n\}$:

$$h(V_1V_2) + h(V_1V_3) + h(V_1V_4) + h(V_2V_3) + h(V_2V_4)$$
$$-h(V_1) - h(V_2) - h(V_3V_4) - h(V_1V_2V_3) - h(V_1V_2V_4) \geq 0$$

Notation: $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$

- Une inégalité d'Ingleton est une inégalité linéaire impliquant quatre sous-ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 de l'ensemble $\{X_1, ...X_n\}$:

  $$h(V_1V_2) + h(V_1V_3) + h(V_1V_4) + h(V_2V_3) + h(V_2V_4)$$
  $$-h(V_1) - h(V_2) - h(V_3V_4) - h(V_1V_2V_3) - h(V_1V_2V_4) \geq 0$$

  Notation: $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$

- Γ_n^{In}: Ensemble des vecteurs vérifiant les inégalités d'Ingleton.

- Une inégalité d'Ingleton est une inégalité linéaire impliquant quatre sous-ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 de l'ensemble $\{X_1, ...X_n\}$:

  $$h(V_1V_2) + h(V_1V_3) + h(V_1V_4) + h(V_2V_3) + h(V_2V_4)$$
  $$-h(V_1) - h(V_2) - h(V_3V_4) - h(V_1V_2V_3) - h(V_1V_2V_4) \geq 0$$

  Notation: $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$

- Γ_n^{In}: Ensemble des vecteurs vérifiant les inégalités d'Ingleton.

- **Théorème**: Une fonction entropique représentable linéairement vérifie les inégalités d'Ingleton, ie $\Upsilon_n \subset \Gamma_n^{In}$.

- Γ_n^{In} est un cône polyédrique dans $\mathbb{R}^{2^n-1}$.

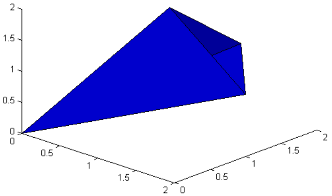

Figure: Représentation de Γ_n^{In}.

- Γ_n^{In} est un cône polyédrique dans $\mathbb{R}^{2^n-1}$.

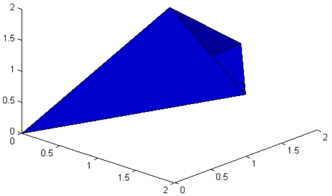

Figure: Représentation de Γ_n^{In}.

- Echanger les sous-ensembles $V_1 \leftrightarrow V_2$ ou $V_3 \leftrightarrow V_4$ ne change pas l'inégalité résultante.

- Γ_n^{In} est un cône polyédrique dans $\mathbb{R}^{2^n-1}$.

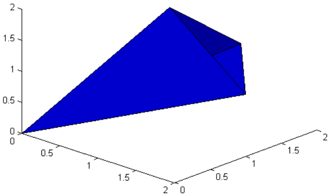

Figure: Représentation de Γ_n^{In}.

- Echanger les sous-ensembles $V_1 \leftrightarrow V_2$ ou $V_3 \leftrightarrow V_4$ ne change pas l'inégalité résultante.
- Γ_n^{In} est caractérisé par $\frac{(2^n)^4}{4} = 2^{4n-2} = O(16^n)$ inégalités $\longrightarrow$ difficile à calculer, même pour un ordinateur !

Certaines inégalités d'Ingleton peuvent être mises de côté pour étudier la borne.

$$h(V_1V_2) + h(V_1V_3) + h(V_1V_4) + h(V_2V_3) + h(V_2V_4)$$
$$-h(V_1) - h(V_2) - h(V_3V_4) - h(V_1V_2V_3) - h(V_1V_2V_4) \geq 0$$

- Inégalités inutiles:
  $J(V_1, V_1, V_1, V_1) = 0 \Rightarrow 0 \geq 0$...

Certaines inégalités d'Ingleton peuvent être mises de côté pour étudier la borne.

$$h(V_1V_2)+h(V_1V_3)+h(V_1V_4)+h(V_2V_3)+h(V_2V_4)$$
$$-h(V_1)-h(V_2)-h(V_3V_4)-h(V_1V_2V_3)-h(V_1V_2V_4)\geq 0$$

- Inégalités inutiles:
  $J(V_1,V_1,V_1,V_1)=0 \Rightarrow 0\geq 0$...
- Inégalités basiques élémentaires:
  $$\begin{aligned} J(X_1,X_2,\emptyset,V_4) &= h(X_1V_4)+h(X_2V_4)-h(V_4)-h(X_1X_2V_4) \\ &= I(X_1;X_2|V_4) \end{aligned}$$
  Conséquence: $\Gamma_n^{In}\subset\Gamma_n$

Certaines inégalités d'Ingleton peuvent être mises de côté pour étudier la borne.

$$h(V_1V_2)+h(V_1V_3)+h(V_1V_4)+h(V_2V_3)+h(V_2V_4)$$
$$-h(V_1)-h(V_2)-h(V_3V_4)-h(V_1V_2V_3)-h(V_1V_2V_4)\geq 0$$

- Inégalités inutiles:
  $J(V_1,V_1,V_1,V_1)=0\Rightarrow 0\geq 0...$
- Inégalités basiques élémentaires:
  $$\begin{aligned} J(X_1,X_2,\emptyset,V_4) &= h(X_1V_4)+h(X_2V_4)-h(V_4)-h(X_1X_2V_4)\\ &= I(X_1;X_2|V_4)\end{aligned}$$
  Conséquence: $\Gamma_n^{In}\subset\Gamma_n$
- Inégalités basiques:
  $J(X_1,X_2,X_1X_2,X_4)=I(X_1;X_4|X_2)+I(X_2;X_4|X_1)$

Pour de nombreux choix de $V_1, V_2, V_3, V_4 \subset \{X_1, ...X_n\}$, l'inégalité d'Ingleton résultante $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques.

- But: Avoir un moyen de déceler quelles inégalités sont impliquées par les inégalités basiques.

Pour de nombreux choix de $V_1, V_2, V_3, V_4 \subset \{X_1, ...X_n\}$, l'inégalité d'Ingleton résultante $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques.

- But: Avoir un moyen de déceler quelles inégalités sont impliquées par les inégalités basiques.
- **Théorème**: Une inégalité d'Ingleton $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques si et seulement si un des quatre ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 est inclus dans la réunion des trois autres.

Pour de nombreux choix de $V_1, V_2, V_3, V_4 \subset \{X_1, ...X_n\}$, l'inégalité d'Ingleton résultante $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques.

- But: Avoir un moyen de déceler quelles inégalités sont impliquées par les inégalités basiques.
- **Théorème**: Une inégalité d'Ingleton $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques si et seulement si un des quatre ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 est inclus dans la réunion des trois autres.
- Exemple 1: $J(X_1X_2X_3, X_1X_4, X_2X_5, X_3X_6) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques.

Pour de nombreux choix de $V_1, V_2, V_3, V_4 \subset \{X_1, ... X_n\}$, l'inégalité d'Ingleton résultante $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques.

- But: Avoir un moyen de déceler quelles inégalités sont impliquées par les inégalités basiques.
- **Théorème**: Une inégalité d'Ingleton $J(V_1, V_2, V_3, V_4) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques si et seulement si un des quatre ensembles V_1, V_2, V_3, V_4 est inclus dans la réunion des trois autres.
- Exemple 1: $J(X_1X_2X_3, X_1X_4, X_2X_5, X_3X_6) \geq 0$ est impliquée par les inégalités basiques.
- Exemple 2: $J(X_1X_6, X_2X_3, X_2X_4, X_5X_6) \geq 0$ n'est pas impliquée par les inégalités basiques.

Mais nous sommes encore loin du compte.

- Caractérisation complète de Γ_n^{In}.

Mais nous sommes encore loin du compte.

- Caractérisation complète de Γ_n^{In}.
- Enumération des inégalités, sans avoir besoin de vérifier les 2^{4n-2}.

Soit $\Psi = \{J(A_1 W, A_2 W, A_3 W, A_4 W) \geq 0$ tel que A_1, A_2, A_3, A_4 sont tous non vides et A_1, A_2, A_3, A_4, W sont tous disjoints$\}$

- Aucune inégalité de Ψ n'est impliquée par les inégalités basiques.

Soit $\Psi = \{J(A_1 W, A_2 W, A_3 W, A_4 W) \geq 0$ tel que
A_1, A_2, A_3, A_4 sont tous non vides et
A_1, A_2, A_3, A_4, W sont tous disjoints$\}$

- Aucune inégalité de Ψ n'est impliquée par les inégalités basiques.
- Les inégalités de Ψ sont faciles à énumérer.

Soit $\Psi = \{J(A_1W, A_2W, A_3W, A_4W) \geq 0$ tel que
A_1, A_2, A_3, A_4 sont tous non vides et
A_1, A_2, A_3, A_4, W sont tous disjoints$\}$

- Aucune inégalité de Ψ n'est impliquée par les inégalités basiques.
- Les inégalités de Ψ sont faciles à énumérer.
- **Théorème**:

$\Psi \cup \Sigma$ est l'ensemble minimal d'inégalités caractérisant Γ_n^{In}.

- Γ_n^{In} est de dimension maximale.

- Γ_n^{In} est de dimension maximale.
- L'ensemble des inégalités basiques élémentaires est inclus dans l'ensemble minimal des inégalités d'Ingleton.

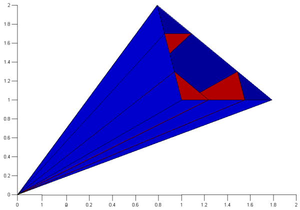

Figure: Représentation en dimension 3.

Chaque face de Γ_n contient une face de Γ_n^{In}.

Combien d'inégalités nécessaires pour caractériser Γ_n^{In} ?

- Nombre d'inégalités basiques élémentaires: $|\Sigma| = \binom{n}{2}2^{n-2} + n$

Combien d'inégalités nécessaires pour caractériser Γ_n^{In} ?

- Nombre d'inégalités basiques élémentaires: $|\Sigma| = \binom{n}{2}2^{n-2} + n$
- Nombre d'inégalités d'Ingleton élémentaires (non basiques): $|\Psi| = \frac{1}{4}6^n - 5^n + \frac{3}{2}4^n - 3^n + \frac{1}{4}2^n$

Combien d'inégalités nécessaires pour caractériser Γ_n^{In} ?

- Nombre d'inégalités basiques élémentaires: $|\Sigma| = \binom{n}{2}2^{n-2} + n$
- Nombre d'inégalités d'Ingleton élémentaires (non basiques): $|\Psi| = \frac{1}{4}6^n - 5^n + \frac{3}{2}4^n - 3^n + \frac{1}{4}2^n$
-

n	$\lvert\Sigma\rvert$	$\lvert\Psi\rvert$
4	28	6
5	85	120
6	246	1470
7	679	14280
8	1800	121086
...		

Conclusion:

$\Psi \cup \Sigma$ est l'unique ensemble minimal d'inégalités d'Ingleton.

Inégalités faciles à énumérer: Partition d'un sous-ensemble de $\{X_1, ...X_n\}$ en quatre parties non vides, plus un sous ensemble du complémentaire.

Complexité de la borne: $O(16^n) \rightarrow O(6^n)$! $(\ln(16) = 2.77$, $\ln(6) = 1.79)$.