Codes identifiants dans les graphes

David Auger

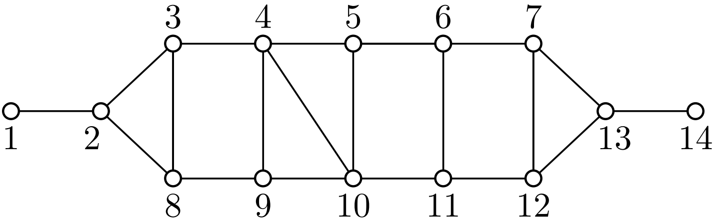
10 Janvier 2008

Première Partie

Définitions

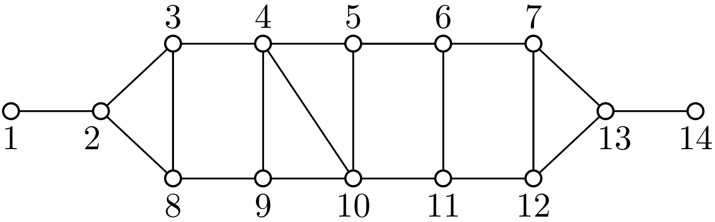
Graphes et codes

- $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, sans boucles ni arêtes multiples.



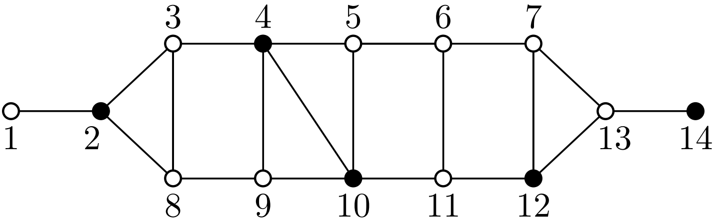
Graphes et codes

- $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, sans boucles ni arêtes multiples.
- Un *code* est une partie $\mathcal{C}$ de l'ensemble des sommets V.



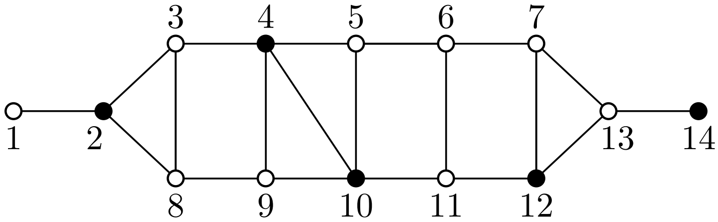
Graphes et codes

- $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, sans boucles ni arêtes multiples.
- Un *code* est une partie $\mathcal{C}$ de l'ensemble des sommets V.



Graphes et codes

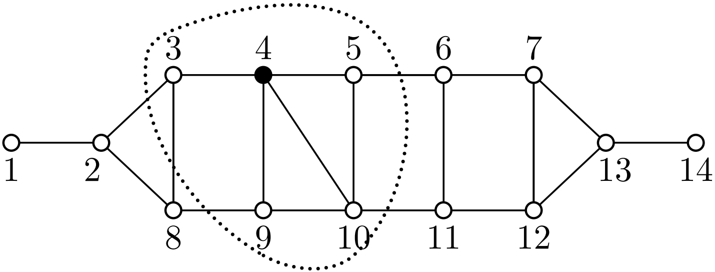
- $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, sans boucles ni arêtes multiples.
- Un *code* est une partie $\mathcal{C}$ de l'ensemble des sommets V.
- Les éléments de $\mathcal{C}$ sont les *mots de code*.



Notion de couverture

- Un mot de code $c \in \mathcal{C}$ **couvre** un sommet $v \in V$ si

$$d(v, c) \leq 1.$$



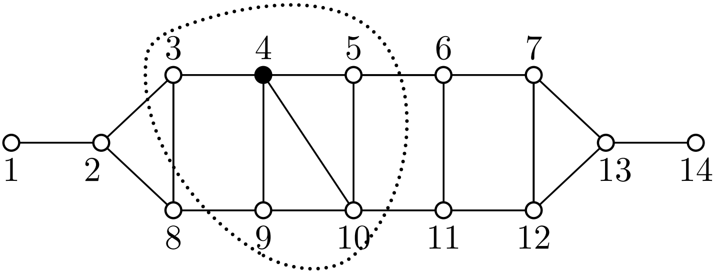
Notion de couverture

- Un mot de code $c \in \mathcal{C}$ **couvre** un sommet $v \in V$ si

$$d(v, c) \leq 1.$$

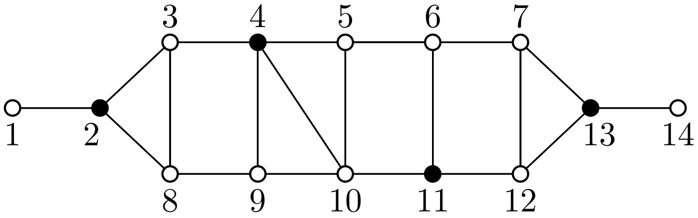
- Plus généralement pour $r \geq 1$:

$$c \ r\text{-couvre } v \iff d(v, c) \leq r$$



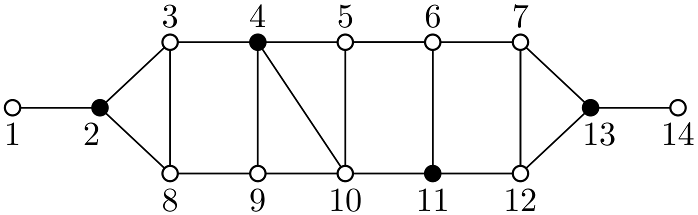
Notion de couverture

- Un *code couvrant* (resp. r-couvrant) est une partie $\mathcal{C} \subset V$ telle que tout sommet $v \in V$ soit couvert (resp. r-couvert) par au moins un un mot de code $c \in C$.



Notion de couverture

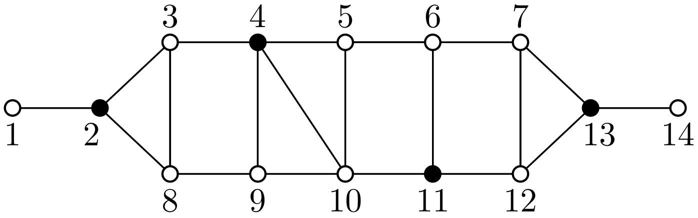
- Un *code couvrant* (resp. r-couvrant) est une partie $\mathcal{C} \subset V$ telle que tout sommet $v \in V$ soit couvert (resp. r-couvert) par au moins un un mot de code $c \in C$.



On note $I_{\mathcal{C}}(v)$ l'ensemble des mots de code qui couvrent le sommet $v \in V$.

Notion de couverture

- Un *code couvrant* (resp. r-couvrant) est une partie $\mathcal{C} \subset V$ telle que tout sommet $v \in V$ soit couvert (resp. r-couvert) par au moins un un mot de code $c \in C$.

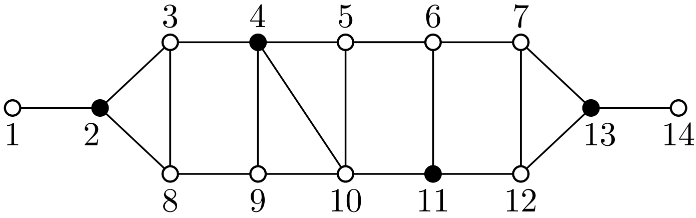


On note $I_{\mathcal{C}}(v)$ l'ensemble des mots de code qui couvrent le sommet $v \in V$.

$$\text{e.g.} \quad I_{\mathcal{C}}(3) = \{2; 4\}$$

Notion de couverture

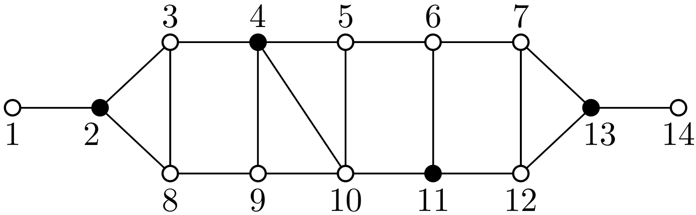
- Un *code couvrant* (resp. r-couvrant) est une partie $\mathcal{C} \subset V$ telle que tout sommet $v \in V$ soit couvert (resp. r-couvert) par au moins un un mot de code $c \in C$.



$$I_{\mathcal{C}}(v) = B(v, r) \cap \mathcal{C}$$

Notion de couverture

- Un *code couvrant* (resp. r-couvrant) est une partie $\mathcal{C} \subset V$ telle que tout sommet $v \in V$ soit couvert (resp. r-couvert) par au moins un un mot de code $c \in C$.

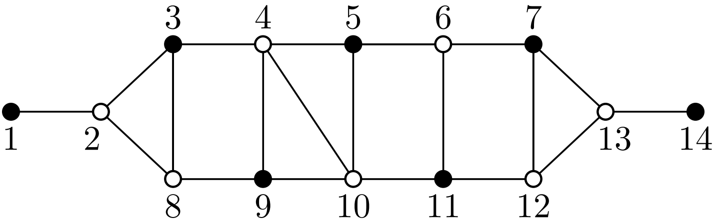


$\mathcal{C}$ code couvrant $\iff$ pour tout sommet v on a $I_{\mathcal{C}}(v) \neq \emptyset$

Code identifiant

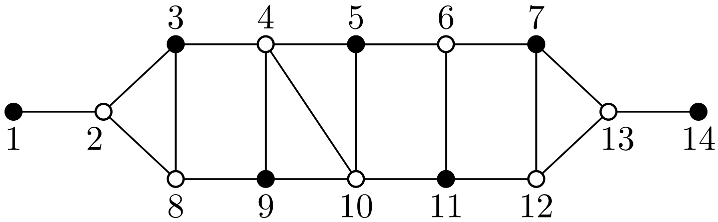
Un *code identifiant* du graphe $G = (V, E)$ est une partie $\mathcal{C} \subset V$ telle que :

- tout sommet $v \in V$ soit couvert par au moins un mot de code ;
- pour tout couple de sommets distincts, l'ensemble des mots de codes qui les couvrent sont distincts.



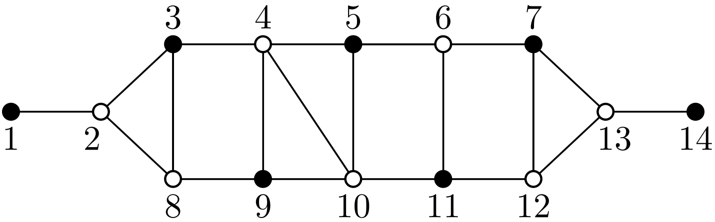
Code identifiant

$\mathcal{C}$ identifiant $\Longleftrightarrow$ les ensembles $I_{\mathcal{C}}(v)$ sont non-vides et distincts.



Code identifiant

$I_{\mathcal{C}}(1) = \{1\}$	$I_{\mathcal{C}}(2) = \{1; 3\}$	$I_{\mathcal{C}}(3) = \{3\}$
$I_{\mathcal{C}}(4) = \{3; 5; 9\}$	$I_{\mathcal{C}}(5) = \{5\}$	$I_{\mathcal{C}}(6) = \{5; 7; 11\}$
$I_{\mathcal{C}}(7) = \{7\}$	$I_{\mathcal{C}}(8) = \{3; 9\}$	$I_{\mathcal{C}}(9) = \{9\}$
$I_{\mathcal{C}}(10) = \{5; 9; 11\}$	$I_{\mathcal{C}}(11) = \{11\}$	$I_{\mathcal{C}}(12) = \{7; 11\}$
$I_{\mathcal{C}}(13) = \{7; 14\}$	$I_{\mathcal{C}}(14) = \{14\}$	



Deuxième Partie

Quelques exemples

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 :

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 : n'est pas 2-identifiable

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 : n'est pas 2-identifiable
- C_6 :

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 : n'est pas 2-identifiable
- C_6 : minimum $=$ 5 mots de code

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 : n'est pas 2-identifiable
- C_6 : minimum $=$ 5 mots de code
- C_7 :

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 : n'est pas 2-identifiable
- C_6 : minimum $=$ 5 mots de code
- C_7 : minimum $=$ 4 mots de code

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 : n'est pas 2-identifiable
- C_6 : minimum $= 5$ mots de code
- C_7 : minimum $= 4$ mots de code

Plus généralement :

- C_n est r-identifiable $\iff n \geq 2r + 2$;

Codes r-identifiants sur les cycles

Exemples : codes 2-identifiants sur

- C_5 : n'est pas 2-identifiable
- C_6 : minimum $= 5$ mots de code
- C_7 : minimum $= 4$ mots de code

Plus généralement :

- C_n est r-identifiable $\iff n \geq 2r+2$;
- Pour $n = 2r+2$ le cardinal minimum d'un code r-identifiant sur C_{2r+2} est $2r+1$;

Cardinaux minimums des codes r-identifiants sur le cycle C_n

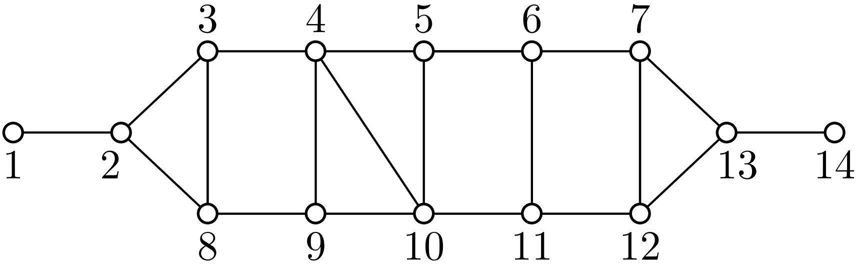
$$r = 1$$

n impair		n pair	
n	1-code min	n	1-code min
$n = 3$	5	$n \geq 4$	$\frac{n}{2}$
$n \geq 5$	$\frac{n+1}{2} + 1$		

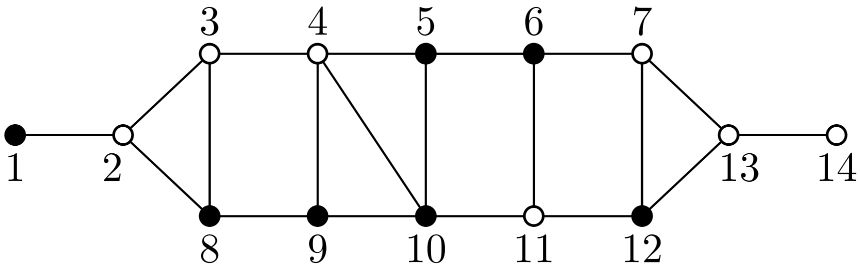
Cardinaux minimums des codes r-identifiants sur le cycle C_n ($r \geq 2$)

n impair		n pair	
n	r-code min	n	r-code min
$n = 2r+3$	$\left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$	$n = 2r+2$	$n-1$
$2r+5 \leq n \leq 3r+1$	?	$2r+4 \leq n$	$\frac{n}{2}$
$3r+3 \leq n \leq 4r+1$	$\text{pgcd}(2r+1,n) \cdot \left\lceil \frac{n}{2\text{pgcd}(2r+1,n)} \right\rceil$		
$4r+5 \leq n \leq 8r+1$ et $\text{pgcd}(2r+1,n) = 1$	$\frac{n+1}{2}$		
$4r+5 \leq n \leq 8r+1$ et $\text{pgcd}(2r+1,n) \neq 1$	$\text{pgcd}(2r+1,n) \cdot \left\lceil \frac{n}{2\text{pgcd}(2r+1,n)} \right\rceil$		
$8r+3 \leq n$ et $\text{pgcd}(2r+1,n) = 1$	?		
$8r+3 \leq n$ et $\text{pgcd}(2r+1,n) \neq 1$	$\text{pgcd}(2r+1,n) \cdot \left\lceil \frac{n}{2\text{pgcd}(2r+1,n)} \right\rceil$		

Autre exemple



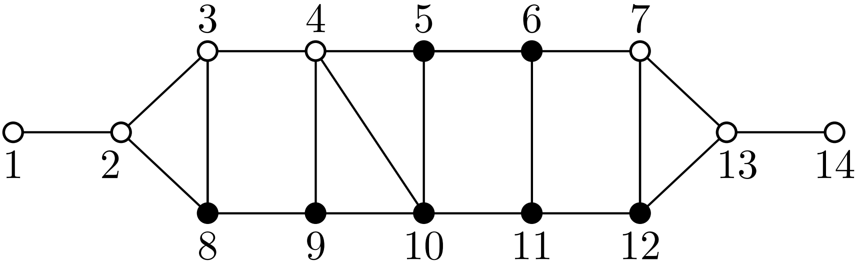
Autre exemple



$\mathcal{C}_1^2$

trois codes 2-identifiants de cardinal minimum $= 7$

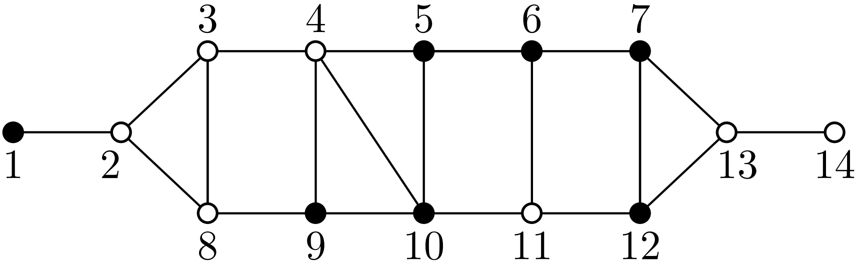
Autre exemple



$\mathcal{C}_2^2$

trois codes 2-identifiants de cardinal minimum = 7

Autre exemple



$\mathcal{C}_3^2$

trois codes 2-identifiants de cardinal minimum = 7

Troisième Partie

Un résultat de complexité

Recherche d'un code identifiant de cardinal minimum

Soit $r \geq 1$ un entier.

<u>MINIMISATION D'UN CODE r-IDENTIFIANT</u>

<u>*Instance :*</u> Un graphe $G = (V, E)$; un entier $k \geq 1$.
<u>*Question :*</u> Existe-t-il un code r-identifiant de G de cardinal inférieur ou égal à k ?

Recherche d'un code identifiant de cardinal minimum

Soit $r \geq 1$ un entier.

MINIMISATION D'UN CODE r-IDENTIFIANT

Instance : Un graphe $G = (V, E)$; un entier $k \geq 1$.
Question : Existe-t-il un code r-identifiant de G de cardinal inférieur ou égal à k ?

Théorème

Le problème MINIMISATION D'UN CODE r-IDENTIFIANT *est* $\mathcal{NP}$*-complet.*

Recherche d'un code identifiant de cardinal minimum

Soit $r \geq 1$ un entier.

MINIMISATION D'UN CODE r-IDENTIFIANT

Instance : Un graphe $G = (V, E)$; un entier $k \geq 1$.
Question : Existe-t-il un code r-identifiant de G de cardinal inférieur ou égal à k ?

Théorème

Le problème MINIMISATION D'UN CODE r-IDENTIFIANT *est* $\mathcal{NP}$*-complet.*

Théorème

Le problème MINIMISATION D'UN CODE r-IDENTIFIANT, *restreint à la classe des graphes planaires dont le degré maximal est inférieur ou égal à 3, est* $\mathcal{NP}$*-complet.*

Preuve

Réduction de Karp à partir du problème :

MIN VERTEX COVER PLANAIRE DE DEGRÉ MAXIMAL ≤ 3

Instance : Un graphe $G = (V, E)$; un entier $k \geq 1$.
Question : Existe-t-il un Vertex Cover de G de cardinal inférieur ou égal à k ?

Preuve

Réduction de Karp à partir du problème :

Min Vertex Cover planaire de degré maximal ≤ 3

Instance : Un graphe $G = (V, E)$; un entier $k \geq 1$.
Question : Existe-t-il un Vertex Cover de G de cardinal inférieur ou égal à k ?

Théorème

(Garey,Johnson) Le problème Min Vertex Cover planaire de degré maximal ≤ 3 *est* $\mathcal{NP}$*-complet.*

Rappels informels sur la $\mathcal{NP}$-complétude

Définition : Un problème de décision est dans la classe $\mathcal{P}$ s'il existe un algorithme qui le résout en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

Définition : Un problème de décision est dans la classe $\mathcal{NP}$ s'il existe un algorithme qui puisse vérifier l'exactitude d'une solution en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

Définition : un problème de décision est $\mathcal{NP}$-complet si

- il appartient à la classe $\mathcal{NP}$;
- il est *plus difficile* que tout problème de la classe $\mathcal{NP}$.

Rappels informels sur la $\mathcal{NP}$-complétude

Proposition

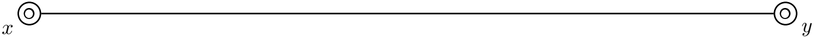
Pour montrer qu'un problème est $\mathcal{NP}$-complet, il suffit de montrer qu'il est dans la classe $\mathcal{NP}$ et qu'il est plus difficile qu'un problème $\mathcal{NP}$-complet donné.

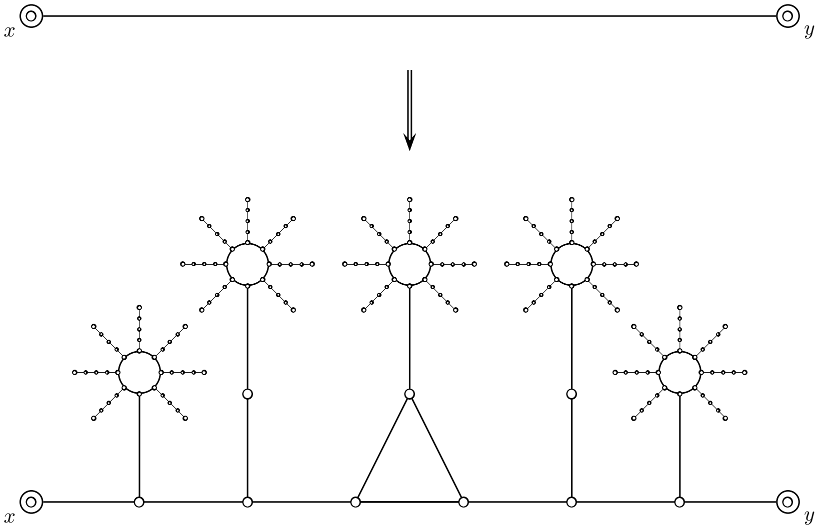
Preuve : cas $r = 3$

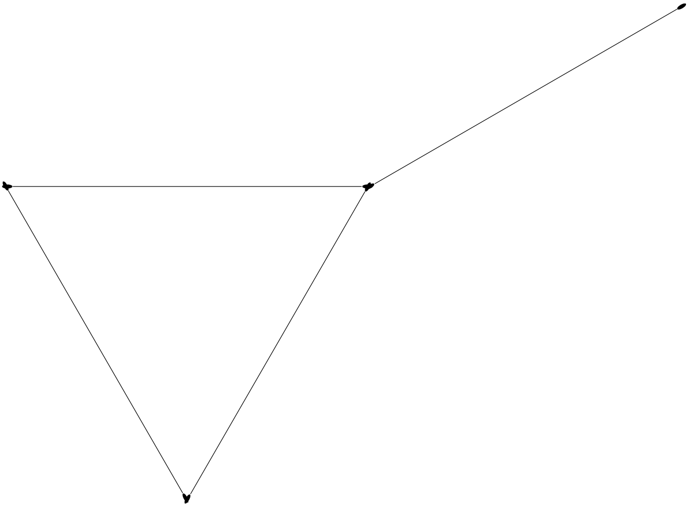
Transformation :

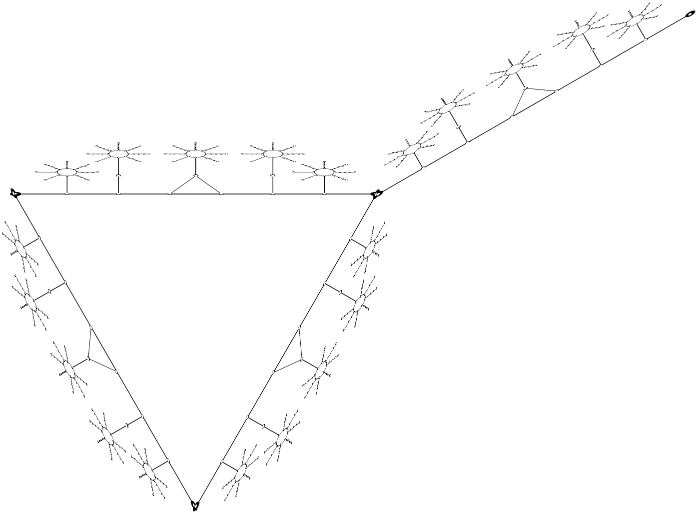
Soit G un graphe planaire de degré maximal au plus 3.
On construit un graphe G' à partir de G en remplaçant chaque arête xy de G par une certaine structure.

$$G \text{ instance de } \textsc{Vertex Cover plan} \leq 3$$
$$\Downarrow$$
$$G' \text{ instance de } \textsc{Code } r\text{-}\textsc{Id plan} \leq 3$$


x
y


x
y
x
y





On peut verifier que :

- G' est constructible *en temps polynomial à partir de* G. Si G a n sommets et m arêtes, alors G' a $n' = n + 189m$ sommets et $m' = 196m$ arêtes.

On peut verifier que :

- G' est constructible *en temps polynomial à partir de* G. Si G a n sommets et m arêtes, alors G' a $n' = n + 189m$ sommets et $m' = 196m$ arêtes.
- si G est planaire et de degré inférieur maximal ou égal à 3, c'est aussi le cas de G' ;

On peut verifier que :

- G' est constructible *en temps polynomial à partir de* G. Si G a n sommets et m arêtes, alors G' a $n' = n + 189m$ sommets et $m' = 196m$ arêtes.
- si G est planaire et de degré inférieur maximal ou égal à 3, c'est aussi le cas de G' ;
- enfin, pour tout $k \geq 1$ on a

Propriété

G admet un vertex cover de cardinal inférieur ou égal à k si et seulement G' admet un code r-identifiant de cardinal inférieur ou égal à $k + 70m$.

Quatrième Partie

Plus longues chaînes dans les graphes sans jumeaux

Propriété

La chaîne à n sommets P_n est sans r-jumeaux pour $n \geq 2r + 1$

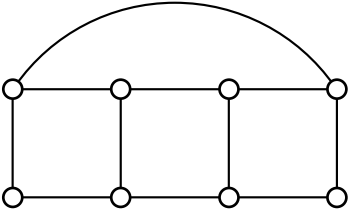
exemple : P_9 est sans 4-jumeaux

Théorème

Si G est un graphe sans r-jumeaux, alors G contient une chaîne à $2r+1$ sommets en tant que sous-graphe partiel.

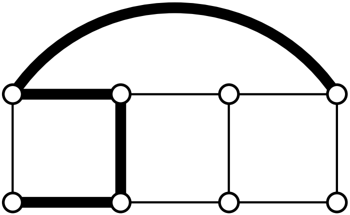
Théorème

Si G est un graphe sans r-jumeaux, alors G contient une chaîne à $2r+1$ sommets en tant que sous-graphe partiel.



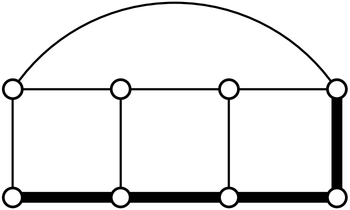
Théorème

Si G est un graphe sans r-jumeaux, alors G contient une chaîne à $2r+1$ sommets en tant que sous-graphe partiel.



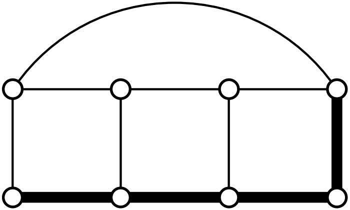
Théorème

Si G est un graphe sans r-jumeaux, alors G contient une chaîne à $2r+1$ sommets en tant que sous-graphe partiel.



Conjecture

Si G est un graphe sans r-jumeaux, alors G contient une chaîne à $2r+1$ sommets P_{2r+1} en tant que sous-graphe (i.e. sans cordes).



Erdös, Saks et Sós (1986) :

Théorème

Soit G un graphe de rayon $r \geq 1$. Alors G contient une chaîne P_{2r-1} en tant que sous-graphe .

Erdös, Saks et Sós (1986) :

Théorème

Soit G un graphe de rayon $r \geq 1$. Alors G contient une chaîne P_{2r-1} en tant que sous-graphe .

Nous démontrons :

Théorème

Soit G un graphe de rayon r, qui admet un centre c dont aucun voisin n'est central. Alors G contient une chaîne P_{2r+1} en tant que sous-graphe.