

Champs moyens des processus de transport à valeurs mesures.

Applications à la file avec clients impatientes et au système pur délai

Pascal Moyal

Ceremade, Université Paris Dauphine

ENST Paris - 01/03/2007



Outline

- 1 Les processus de transport à valeurs mesures
- 2 La file EDF avec clients impatientes
- 3 La file à une infinité de serveurs
 - Loi des grands nombres fonctionnelle
 - Théorème central limite fonctionnel



Définition

Processus Markovien (ν_t) à valeurs

$$\mathcal{M}_p := \{\text{Mesures de comptage simples sur } \mathbb{R}\}.$$

Pour tout t :

$$\nu_t = \sum_{i=1}^{\nu_t(\mathbb{R}_+^*)} \delta_{t_i(\nu_t)} + \sum_{i=1}^{\nu_t(\mathbb{R}_-)} \delta_{t_{-i}(\nu_t)}.$$



Pour toute fonction f càdlàg, $\langle \tau_y \vartheta, f \rangle := \langle \vartheta, f(\cdot - y) \rangle$.

Générateur Infinitésimal (informel)

Pour tout $t \geq 0$, $A_t \sim \varepsilon(\lambda)$ et $B_t \sim \varepsilon(\mu)$. D , v.a. de distribution α . Pour tout $h > 0$:

$$\nu_{t+h} = \begin{cases} \tau_h \nu_t & \text{si } A_t > h \text{ et } B_t > h, \\ \tau_h \nu_t - G(\tau_h \nu_t) & \text{si } A_t > h \text{ et } B_t < h, \\ \tau_h \nu_t + \delta_d & \text{si } A_t < h \text{ et } B_t > h. \end{cases}$$

Pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t := \sigma \{ \nu_s(\mathfrak{B}), s \leq t, \mathfrak{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \}$.

Proposition (et définition formelle)

(ν_t) est un $\mathcal{F}_t$ -processus de Feller-Dynkin dans $\mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{M}_f^+)$ de générateur:

$$\mathfrak{A}F(\nu) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\tau_h \nu) - F(\nu)}{h} - \left(\lambda + \mu \right) F(\nu) \\ + \mu F(\nu - G(\nu)) + \lambda \int F(\nu + \delta_x) d\alpha(x),$$

pour tout F dans

$$\mathcal{D}(\mathfrak{A}) := \mathcal{C}(\mathcal{M}_f^+, \mathbb{R}) \cap \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\tau_h \cdot) - F}{h} \text{ existe} \right\}.$$

Propriété de Martingale

En vertu du lemme de Dynkin:

Corollaire

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$, il existe une $\mathcal{F}_t$ -martingale càdlàg $M_\phi \in \mathbf{L}^2$ t.q.

$$\begin{aligned} \langle \nu_t, \phi \rangle = \langle \nu_0, \phi \rangle &- \int_0^t \langle \nu_s, \phi' \rangle ds \\ &- \mu \int_0^t \langle G(\nu_s), \phi \rangle ds + \lambda t \langle \alpha, \phi \rangle + M_\phi(t). \end{aligned}$$

Pour toutes $\phi, \psi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\langle M_\phi, M_\psi \rangle_t = \mu \int_0^t \langle G(\nu_s), \phi \rangle \langle G(\nu_s), \psi \rangle \mathbf{1}_{\{\nu_s(\mathbb{R}_+^*) > 0\}} ds + \lambda t \langle \alpha, \phi \psi \rangle.$$

Changement d'échelle LFGN

Soit $\{\nu^n\}$ correspondant à $\{\lambda^n, \mu^n, G, \alpha^n\}$.



Changement d'échelle LFGN

Soit $\{\nu^n\}$ correspondant à $\{\lambda^n, \mu^n, G, \alpha^n\}$.

Normalisation de $\{\nu^n\}$:

$$\bar{\nu}_t^n(\mathfrak{B}) := \frac{1}{n} \nu_{nt}^n(n\mathfrak{B}),$$

$n \in \mathbb{N}^*, t \geq 0, \mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.



Loi des grands nombres fonctionnelle

- relative **compacité**: tension de $(\bar{\nu}^n, n \in \mathbb{N}^*)$ dans $\mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{M}_f^+)$,



Loi des grands nombres fonctionnelle

- relative **compacité**: tension de $(\bar{\nu}^n, n \in \mathbb{N}^*)$ dans $\mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{M}_f^+)$,
- **unicité** de la valeur d'adhérence.



Tension dans $\mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{M}_f^+)$

Le critère de Dawson-Jakubowsky

$\{\bar{\nu}^n\}$ est tendue si:

- (DJ1) Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$, $\{\langle \bar{\nu}^n, \phi \rangle\}$ est tendue dans $\mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{R})$,
- (DJ2) Pour tout $T > 0$ et $0 < \eta < 1$, il existe un compact $\mathbf{K}_{T,\eta}$ de $\mathcal{M}_f^+$ tel que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} [\bar{\nu}_t^n \in \mathbf{K}_{T,\eta} \forall t \in [0, T]] \geq 1 - \eta.$$

Preuve de DJ1

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds + M_{\phi(\cdot/n)/n}^n(nt).\end{aligned}$$



Preuve de DJ1

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds + M_{\phi(\cdot/n)/n}^n(nt).\end{aligned}$$

Preuve de DJ1

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \bar{\alpha}^*, \phi \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds + M_{\phi(\cdot/n)/n}^n(nt).\end{aligned}$$

Preuve de DJ1

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds + M_{\phi(\cdot/n)/n}^n(nt).\end{aligned}$$

Preuve de DJ1

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds + M_{\phi(\cdot/n)/n}^n(nt).\end{aligned}$$

Preuve de DJ1

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds + M_{\phi(\cdot/n)/n}^n(nt).\end{aligned}$$

Preuve de DJ1

Pour toute $\phi \in \mathcal{C}_b^1$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds.\end{aligned}$$

Unicité?

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle = \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds. \end{aligned}$$

Supposons que:

(H) Il existe un processus déterministe $(\bar{R}_t^*) \in \mathcal{C}([0, \infty), \mathcal{M}_f^+)$,

$$(G(\bar{\nu}_t^n)) \xrightarrow{w} (\bar{R}_t^*). \quad (1)$$

Unicité?

$$\begin{aligned}\langle \bar{\nu}_t^n, \phi \rangle &= \langle \bar{\nu}_0^n, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^n, \phi' \rangle ds + \lambda^n t \langle \alpha^n, \phi(\cdot/n) \rangle \\ &\quad - \mu^n \int_0^t \langle G(\bar{\nu}_s^n), \phi \rangle ds.\end{aligned}$$

sous l'hypothèse **(H)**, toute valeur d'adhérence $\bar{\nu}^*$ de $\{\bar{\nu}^n\}$ s'écrit pour tout $t \leq T$:

$$\langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle = \langle \bar{\nu}_0^*, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^*, \phi' \rangle ds + \lambda t \langle \bar{\alpha}^*, \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \bar{R}_s^*, \phi \rangle ds.$$

L'équation de transport intégrale dans $\mathcal{S}'$

$$\langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle = \langle \bar{\nu}_0^*, \phi \rangle - \int_0^t \langle \bar{\nu}_s^*, \phi' \rangle ds + \lambda t \langle \bar{\alpha}^*, \phi \rangle - \mu \int_0^t \langle \bar{R}_s^*, \phi \rangle ds.$$

L'équation de transport intégrale dans $\mathcal{S}'$

$$\bar{\nu}_t^* = \bar{\nu}_0^* + \mathcal{I}((\bar{\nu}^*)')_t + \lambda t \bar{\alpha}^* - \mu \mathcal{I}(\bar{R}^*)_t.$$

Théorème (Decreusefond-M., 2004)

Soit $\xi \in \mathcal{S}'$ et $(\vartheta_t, t \geq 0) \in \mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{S}')$. L'équation :

$$\nu_t = \xi + \mathcal{I}(\nu')_t + \vartheta_t, \quad t \geq 0$$

admet dans $\mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{S}')$ l'unique solution donnée pour tout $t \geq 0$ par :

$$\nu_t = \tau_t \xi + \vartheta_t + \mathcal{N}(\vartheta_t).$$

Loi des grands nombres

Nous obtenons :

Théorème 1

Si **(H)** est vérifiée,

$$(\bar{\nu}_t^n) \xrightarrow{w} (\bar{\nu}_t^*) \text{ dans } \mathcal{D}([0, T], \mathcal{S}'),$$

donné pour tout $t \geq 0$ et toute $\phi \in \mathcal{S}$ par :

$$\langle \bar{\nu}_t^*, \phi \rangle = \langle \tau_t \bar{\nu}^*, \phi \rangle + \lambda \int_0^t \langle \tau_s \bar{\alpha}^*, \phi \rangle ds - \mu \int_0^t \langle \tau_{t-s} \bar{R}^*, \phi \rangle ds.$$

Outline

- ① Les processus de transport à valeurs mesures
- ② La file EDF avec clients impatientes
- ③ La file à une infinité de serveurs
 - Loi des grands nombres fonctionnelle
 - Théorème central limite fonctionnel



La file EDF avec clients impatientes

File $M_\lambda/M_\mu/1/\infty$:

- Les clients ont une **patience** initiale D de loi α ,
- Discipline de service **Earliest Deadline First** (EDF) : pour toute mesure ponctuelle ν ,

$$G(\nu) = t_1(\nu) \mathbf{1}_{\nu(\mathbb{R}_+^* > 0)}.$$

(i.e. le plus petit atome positif de ν pourvu qu'il existe).

On décrit la file par le processus de transport

$$\nu_t = \sum_{i=1}^{\nu_t(\mathbb{R}_+^*)} \delta_{t_i(\nu_t)} + \sum_{i=1}^{\nu_t(\mathbb{R}_-)} \delta_{t_{-i}(\nu_t)},$$

où $t_i(\nu_t) =$ patience résiduelle à t du client correspondant.



La file EDF avec clients impatientes

Hypothèses pour le n -ième système

- input M_{λ^n}/M_{μ^n} ,
- Patience initiale D^n , t.q. $D^n/n \xrightarrow{\mathbb{P}} d$ déterministe,
- $d^{-1} < \mu < \lambda$,
- Initialement $n + 1$ client de patience nd .



La file EDF avec clients impatientes

Proposition

Pour tout $T > 0$,

$$\mathbf{P} [\text{la file se vide avant } nT] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$



La file EDF avec clients impatientes

Proposition

$$\left(\frac{t_1(\nu_{nt}^n)}{n} \right) \xrightarrow{w} (\bar{r}_t^*) \text{ in } \mathcal{D}([0, \infty), \mathbb{R}),$$

où pour tout $t \geq 0$,

$$\bar{r}_t^* = \left\{ d - t \mathbf{1}_{\{t \leq \mu^{-1}\}} - \left(\frac{\rho - 1}{\rho} t + \frac{1}{\lambda} \right) \mathbf{1}_{\{t > \mu^{-1}\}} \right\}^+.$$

La file EDF avec clients impatientes

Théorème

$$(\bar{\nu}_t^n) \xrightarrow{w} (\bar{\nu}_t^*) \text{ dans } \mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{M}_f^+),$$

où pour tout $t \geq 0$ et toute f càdlàg:

$$\langle \bar{\nu}_t^*, f \rangle = f(d - t) - \mu \int_0^t f(\bar{r}_s^* + s - t) ds + \lambda \int_0^t f(d - s) ds.$$

La file EDF avec clients impatientes

Théorème

$$(\bar{\nu}_t^n) \xrightarrow{w} (\bar{\nu}_t^*) \text{ dans } \mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{M}_f^+),$$

où pour tout $t \geq 0$ et toute f càdlàg:

$$\langle \bar{\nu}_t^*, f \rangle = f(d - t) - \mu \int_0^t f(\bar{r}_s^* + s - t) ds + \lambda \int_0^t f(d - s) ds.$$

En particulier :

Limites fluides des processus de congestion et de perte

Pour tout $t \geq 0$,

$$\bar{Q}_t^* := \bar{\nu}^*(\mathbb{R}_+^*) = \{1 + (\lambda - \mu)t\} \mathbf{1}_{\left\{t \leq \frac{\rho d - \mu - 1}{\rho - 1}\right\}} + \lambda d \mathbf{1}_{\left\{t \geq \frac{\rho d - \mu - 1}{\rho - 1}\right\}},$$

$$\bar{L}_t^* := \bar{\nu}^*(\mathbb{R}-) = (1 + \lambda(t - d) - \mu t) \mathbf{1}_{\{t > \frac{\rho d - \mu - 1}{\rho - 1}\}}.$$

Outline

- ① Les processus de transport à valeurs mesures
- ② La file EDF avec clients impatientes
- ③ La file à une infinité de serveurs
 - Loi des grands nombres fonctionnelle
 - Théorème central limite fonctionnel



La file à une infinité de serveurs

Soit une suite de systèmes $M_{\lambda^n}/GI/\infty$. Pour le n -ième:

- Processus d'entrée Poissonien d'intensité λ^n ,
- Temps de services i.i.d. de loi α^n ,
- Initialement n clients demandant des temps de service = n -échantillon de la loi α^n .

On décrit le système par le processus de transport

$$\zeta_t^n = \sum_{i=1}^{\zeta_t^n(\mathbb{R}_+^*)} \delta_{t_i(\zeta_t^n)} + \sum_{i=1}^{\zeta_t^n(\mathbb{R}_-)} \delta_{t_{-i}(\zeta_t^n)},$$

où $t_i(\zeta_t^n) =$ **temps de service résiduel** du client correspondant.



La file à une infinité de serveurs

Soit une suite de systèmes $M_{\lambda^n}/GI/\infty$. Pour le n -ième:

- Processus d'entrée Poissonien d'intensité λ^n ,
- Temps de services i.i.d. de loi α^n ,
- Initialement n clients demandant des temps de service = n -échantillon de la loi α^n .

On décrit le système par le processus de transport

$$\zeta_t^n = \sum_{i=1}^{\zeta_t^n(\mathbb{R}_+^*)} \delta_{t_i(\zeta_t^n)} + \sum_{i=1}^{\zeta_t^n(\mathbb{R}_-)} \delta_{t_{-i}(\zeta_t^n)},$$

où $t_i(\zeta_t^n) =$ **temps de service résiduel** du client correspondant.

$\Rightarrow$ L'hypothèse **(H)** est vide dans ce cas.



Outline

- 1 Les processus de transport à valeurs mesures
- 2 La file EDF avec clients impatientes
- 3 La file à une infinité de serveurs
 - Loi des grands nombres fonctionnelle
 - Théorème central limite fonctionnel



Limite fluide

Théorème

$$(\bar{\zeta}_t^n) \xRightarrow{w} (\bar{\zeta}_t^*),$$

où pour tout $t \geq 0$ et toute f càdlàg,

$$\langle \bar{\nu}_t^*, f \rangle = \langle \tau_t \bar{\alpha}^*, f \rangle + \lambda \int_0^t \langle \tau_s \bar{\alpha}^*, f \rangle ds.$$

Limite fluide

Théorème

$$(\bar{\zeta}_t^n) \xRightarrow{w} (\bar{\zeta}_t^*),$$

où pour tout $t \geq 0$ et toute f càdlàg,

$$\langle \bar{\nu}_t^*, f \rangle = \langle \tau_t \bar{\alpha}^*, f \rangle + \lambda \int_0^t \langle \tau_s \bar{\alpha}^*, f \rangle ds.$$

Limites fluides des processus de congestion et de charge

$$\bar{X}_t^* := \bar{\nu}_t^*(\mathbb{R}_+^*) = \mathbf{P}[\sigma > t] + \lambda \int_0^t \mathbf{P}[\sigma > s] ds,$$

$$\bar{W}_t^* := \langle \bar{\nu}_t^*, \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*} \rangle = \mathbf{E}[(\sigma - t)^+] + \lambda \int_0^t \mathbf{E}[(\sigma - s)^+] ds.$$

Outline

- ① Les processus de transport à valeurs mesures
- ② La file EDF avec clients impatientes
- ③ La file à une infinité de serveurs
 - Loi des grands nombres fonctionnelle
 - Théorème central limite fonctionnel



Le processus des écarts

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \geq 0$:

$$\mathcal{Y}_t^n = \sqrt{n} (\bar{\zeta}_t^n - \bar{\zeta}_t^*),$$

$$\langle \mathcal{M}_t^n, \phi \rangle = \sqrt{n} M_{\phi(\cdot/n)/n}^n(nt), \phi \in \mathcal{S}.$$

On a alors pour toute $\phi \in \mathcal{S}$:

$$\langle \mathcal{Y}_t^n, \phi \rangle = \langle \mathcal{Y}_0^n, \phi \rangle + \int_0^t \langle (\mathcal{Y}_s^n)', \phi \rangle ds + \sqrt{n} \{ \langle \lambda^n t \bar{\alpha}^n - \lambda t \bar{\alpha}^*, \phi \rangle \} + \langle \mathcal{M}_t^n, \phi \rangle.$$

Autrement dit:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_t^n &= \mathcal{Y}_0^n + \mathcal{I}((\mathcal{Y}_s^n)') + \sqrt{n} \{ \lambda^n t \bar{\alpha}^n - \lambda t \bar{\alpha}^*, \phi \} + \mathcal{M}_t^n \\ &= \tau_t \mathcal{Y}_0^n + \sqrt{n} (\lambda^n - \lambda) t \bar{\alpha}^n - \lambda t \sqrt{n} (\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^n) + \mathcal{M}_t^n \\ &+ \sqrt{n} (\lambda^n - \lambda) \mathcal{N}(\cdot, \bar{\alpha}^n)_t - \lambda \{ \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^*)_t - \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^n)_t \} + \mathcal{N}(\mathcal{M}^n)_t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_t^n &= \tau_t \mathcal{Y}_0^n + \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)t\bar{\alpha}^n - \lambda t\sqrt{n}(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^n) + \mathcal{M}_t^n \\ &+ \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)\mathcal{N}(\cdot, \bar{\alpha}^n)_t - \lambda \{ \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^*)_t - \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^n)_t \} + \mathcal{N}(\mathcal{M}^n)_t. \end{aligned}$$



$$\mathcal{Y}_t^n = \tau_t \mathcal{Y}_0^n + \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)t\bar{\alpha}^n - \lambda t\sqrt{n}(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^n) + \mathcal{M}_t^n \\
+ \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)\mathcal{N}(\cdot, \bar{\alpha}^n)_t - \lambda \{ \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^*)_t - \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^n)_t \} + \mathcal{N}(\mathcal{M}^n)_t.$$

$$\mathcal{Y}_t^n = \tau_t \mathcal{Y}_0^n + \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)t\bar{\alpha}^n - \lambda t\sqrt{n}(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^n) + \mathcal{M}_t^n \\ + \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)\mathcal{N}(\cdot, \bar{\alpha}^n)_t - \lambda \{ \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^*)_t - \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^n)_t \} + \mathcal{N}(\mathcal{M}^n)_t.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_t^n &= \tau_t \mathcal{Y}_0^n + \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)t\bar{\alpha}^n - \lambda t \sqrt{n}(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^n) + \mathcal{M}_t^n \\ &+ \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)\mathcal{N}(\cdot, \bar{\alpha}^n)_t - \lambda \{ \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^*)_t - \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^n)_t \} + \mathcal{N}(\mathcal{M}^n)_t. \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}_t^n = \tau_t \mathcal{Y}_0^n + \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)t\bar{\alpha}^n - \lambda t\sqrt{n}(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^n) + \mathcal{M}_t^n \\
+ \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)\mathcal{N}(\cdot, \bar{\alpha}^n)_t - \lambda \{ \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^*)_t - \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^n)_t \} + \mathcal{N}(\mathcal{M}^n)_t.$$

$$\mathcal{Y}_t^n = \tau_t \mathcal{Y}_0^n + \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)t\bar{\alpha}^n - \lambda t\sqrt{n}(\bar{\alpha}^* - \bar{\alpha}^n) + \mathcal{M}_t^n \\
+ \sqrt{n}(\lambda^n - \lambda)\mathcal{N}(\cdot, \bar{\alpha}^n)_t - \lambda \{ \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^*)_t - \mathcal{N}(\sqrt{n} \cdot, \bar{\alpha}^n)_t \} + \mathcal{N}(\mathcal{M}^n)_t.$$

TLC Fonctionnel

Théorème

$$(\mathcal{Y}_t^n) \xRightarrow{w} (\mathcal{Y}_t^*) \text{ dans } \mathcal{D}([0, \infty), \mathcal{S}'),$$

défini pour tout t par:

$$\mathcal{Y}_t^* = \tau_t \mathcal{Y}_0 + \mathcal{M}_t^* + \mathcal{N}(\mathcal{M}^*)_t,$$

où la $\mathcal{S}'$ -martingale locale $\mathcal{M}^*$ est caractérisée par:

$$\langle\langle \mathcal{M}^* \rangle\rangle_t(\phi, \psi) = \lambda t \langle \bar{\alpha}^*, \phi \psi \rangle, \phi, \psi \in \mathcal{S}.$$