Maximum de la distance des transferts entre deux partitions

Irène Charon[1], Lucile Denœud[1,2], Alain Guénoche[3] et Olivier Hudry[1]

[1]ENST Paris

[2]CERMSEM Université PARIS 1

[3]IML, Marseille

Introduction

Motivation

Comparer ou valider des méthodes de classification : besoin de définir la distance entre deux partitions

Introduction

Motivation

Comparer ou valider des méthodes de classification : besoin de définir la distance entre deux partitions

Distance des transferts

Distance des transferts entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$: nombre minimum de transferts d'un élément d'une classe dans une autre (éventuellement vide) nécessaires pour transformer $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$.
Inconvénient : distance non normalisée.

Définitions et notations (1)

Soient $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ...P_p\}$ et $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, ...Q_q\}$ deux partitions sur $X = \{1, ..., n\}$.
Soit Σ l'ensemble des couplages entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ et $\sigma \in \Sigma$.

σ-concordance

$$c_\sigma(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{(P_i, Q_j) \in \sigma} \mid P_i \cap Q_j \mid$$

Concordance

$$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \max_{\sigma \in \Sigma} c_\sigma(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \max_{\sigma \in \Sigma} \sum_{(P_i, Q_j) \in \sigma} \mid P_i \cap Q_j \mid$$

Exemple (1)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.

$\cap$	$Q_1 = \{1, 3, 5, 6\}$	$Q_2 = \{2, 7, 9\}$	$Q_3 = \{4\}$	$Q_4 = \{8\}$
$P_1 = \{1, 2, 3\}$	2	1	0	0
$P_2 = \{4, 5, 6\}$	2	0	1	0
$P_3 = \{7, 8, 9\}$	0	2	0	1

Exemple (1)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.

$\cap$	$Q_1 = \{1, 3, 5, 6\}$	$Q_2 = \{2, 7, 9\}$	$Q_3 = \{4\}$	$Q_4 = \{8\}$
$P_1 = \{1, 2, 3\}$	2	1	0	0
$P_2 = \{4, 5, 6\}$	2	0	1	0
$P_3 = \{7, 8, 9\}$	0	2	0	1

$$\sigma = \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3)\}$$

$$c_\sigma(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = |P_1 \cap Q_1| + |P_2 \cap Q_2| + |P_3 \cap Q_3| = 2$$

Exemple (1)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.

$\cap$	$Q_1 = \{1, 3, 5, 6\}$	$Q_2 = \{2, 7, 9\}$	$Q_3 = \{4\}$	$Q_4 = \{8\}$
$P_1 = \{1, 2, 3\}$	2	1	0	0
$P_2 = \{4, 5, 6\}$	2	0	1	0
$P_3 = \{7, 8, 9\}$	0	2	0	1

$$\sigma = \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P_3, Q_3)\}$$

$$c_\sigma(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = |P_1 \cap Q_1| + |P_2 \cap Q_2| + |P_3 \cap Q_3| = 2$$

$$\hat{\sigma} = \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_3), (P_3, Q_2)\}$$

$$c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = |P_1 \cap Q_1| + |P_2 \cap Q_3| + |P_3 \cap Q_2| = 5 = c(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$$

Définitions et notations (2)

Soient $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, ...P_p\}$ et $\mathcal{Q} = \{Q_1, Q_2, ...Q_q\}$ deux partitions sur $X = \{1, ..., n\}$.
Soit Σ l'ensemble des couplages entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ et $\sigma \in \Sigma$.

Distance des transferts

$$\theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \min_{\sigma \in \Sigma}(n - \sum_{(P_i, Q_j) \in \sigma} \mid P_i \cap Q_j \mid)$$

Exemple (2)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.

$\cap$	$Q_1 = \{1, 3, 5, 6\}$	$Q_2 = \{2, 7, 9\}$	$Q_3 = \{4\}$	$Q_4 = \{8\}$
$P_1 = \{1, 2, 3\}$	2	1	0	0
$P_2 = \{4, 5, 6\}$	2	0	1	0
$P_3 = \{7, 8, 9\}$	0	2	0	1

$$\hat{\sigma} = \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_3), (P_3, Q_2)\}$$
$$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 5$$
$$\theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 9 - 5 = 4$$

Exemple (2)

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.

$\cap$	$Q_1 = \{1, 3, 5, 6\}$	$Q_2 = \{2, 7, 9\}$	$Q_3 = \{4\}$	$Q_4 = \{8\}$
$P_1 = \{1, 2, 3\}$	2	1	0	0
$P_2 = \{4, 5, 6\}$	2	0	1	0
$P_3 = \{7, 8, 9\}$	0	2	0	1

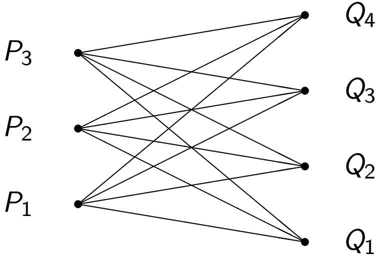
$$\hat{\sigma} = \{(P_1, Q_1), (P_2, Q_3), (P_3, Q_2)\}$$
$$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 5$$
$$\theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 9 - 5 = 4$$

$$(1, 2, 3 \mid 4, 5, 6 \mid 7, 8, 9) \to (1, 3 \mid 4, 5, 6 \mid 2, 7, 8, 9) \to (1, 3, 5 \mid 4, 6 \mid 2, 7, 8, 9)$$
$$\to (1, 3, 5, 6 \mid 4 \mid 2, 7, 8, 9) \to (1, 3, 5, 6 \mid 4 \mid 2, 7, 9 \mid 8).$$

Calcul de la distance des transferts

Le calcul de la concordance revient au calcul d'un couplage maximum dans un graphe biparti.

Exemple : $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.

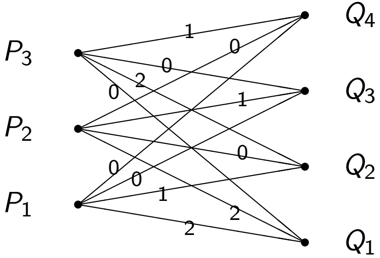


Résolution : méthode hongroise, H.W. Kuhn, 1955 : $O(\max(p, q)^3)$

Calcul de la distance des transferts

Le calcul de la concordance revient au calcul d'un couplage maximum dans un graphe biparti.

Exemple : $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.

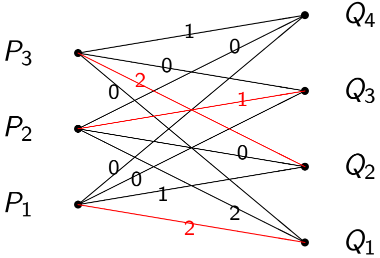


Résolution : méthode hongroise, H.W. Kuhn, 1955 : $O(\max(p, q)^3)$

Calcul de la distance des transferts

Le calcul de la concordance revient au calcul d'un couplage maximum dans un graphe biparti.

Exemple : $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$\mathcal{P} = (1, 2, 3|4, 5, 6|7, 8, 9)$, $\mathcal{Q} = (1, 3, 5, 6|2, 7, 9|4|8)$.



Résolution : méthode hongroise, H.W. Kuhn, 1955 : $O(\max(p, q)^3)$

Maximum de la distance des transferts

$\approx$ Minimum de la concordance.

- $c_{min} = \min\{c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}), \mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ partitions sur $X\} = 1$
  (partition à 1 classe et partition à n classes) ;

Maximum de la distance des transferts

$\approx$ Minimum de la concordance.

- $c_{min} = \min\{c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}), \mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ partitions sur $X\} = 1$ (partition à 1 classe et partition à n classes) ;
- ? $c_{\min}(p, q) = \min\{c(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pour $\mathcal{P}$ à p classes et $\mathcal{Q}$ à q classes $\}$;
- ? $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min_{\mathcal{Q}}\{c(\mathcal{P}, \mathcal{Q})\}$;
- ? $c_{\min}(\mathcal{P}, \leqslant q) = \min\{c(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pour $\mathcal{Q}$ à au plus q classes $\}$.

Minimum de la concordance entre deux partitions à p et q classes ($c_{min}(p, q)$)

Théorème

Soit X un ensemble fini à n éléments. Soient p et q deux entiers tels que $p \leqslant q \leqslant n$.

- Si $n \leqslant p + q - 2$,
$$c_{min}(p, q) = p + q - n.$$
- Si $p + q - 1 \leqslant n \leqslant (p - 1)q$,
$$c_{min}(p, q) = \left\lceil \frac{n + q - p}{q} \right\rceil.$$
- Si $(p - 1)q < n$,
$$c_{min}(p, q) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil.$$

Schéma de la preuve

Démonstration des lemmes suivants :

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux partitions à p et q classes.

- Lemme 1 : Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.
- Lemme 2 : Si $n \leqslant p + q - 2$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant p + q - n$.
- Lemme 3 : Si $p + q - 1 \leqslant n \leqslant pq - q$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.

Il existe deux partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ à p et q classes telles que :

- Lemme 4 : $n \leqslant p + q - 2$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p + q - n$.
- Lemme 5 : $p + q - 1 \leqslant n \leqslant pq - q$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.
- Lemme 6 : $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Preuve du lemme 1 (1) : Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

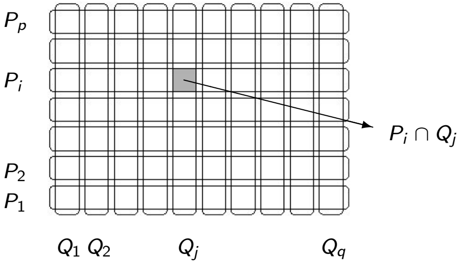
On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.

Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

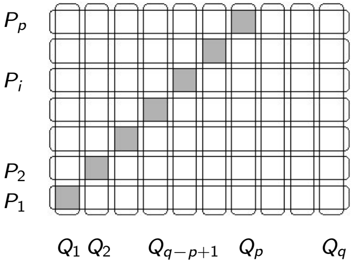
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.

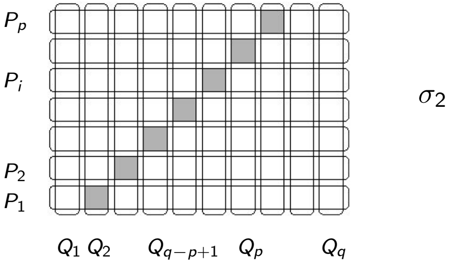


σ_1

Preuve du lemme 1 (1) : Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

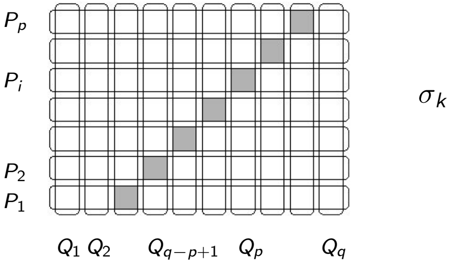
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

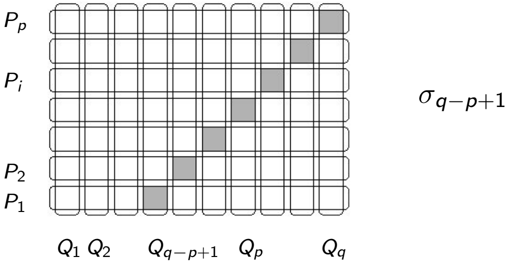
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) : Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

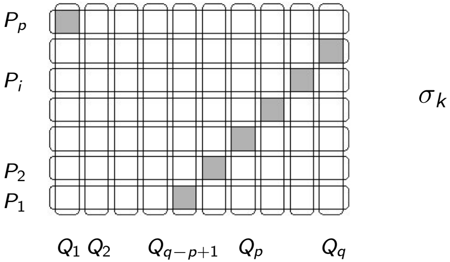
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

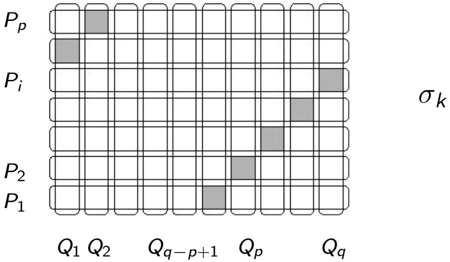
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

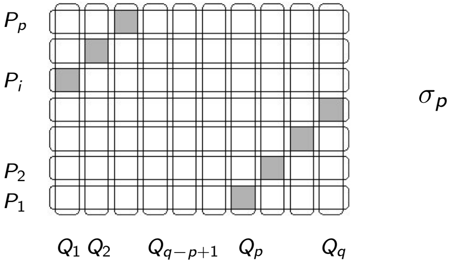
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

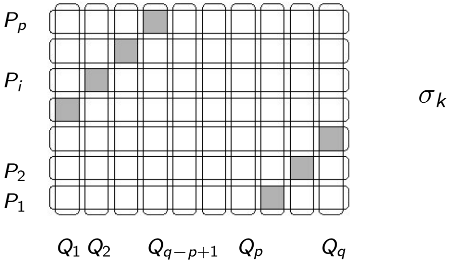
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

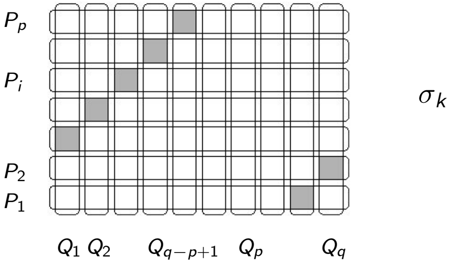
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) : Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

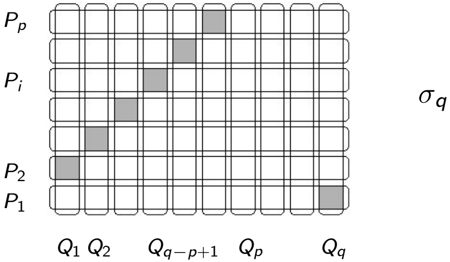
- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (1) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

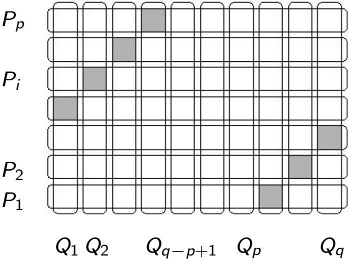
On considère q couplages σ_k, $k \in \{1, \ldots, q\}$, entre les classes de $\mathcal{P}$ et celles de $\mathcal{Q}$ définis par :

- si $i + k - 1 \leqslant q$, σ_k couple P_i avec Q_{i+k-1}
- si $i + k - 1 > q$, σ_k couple P_i avec $Q_{i+k-1-q}$.



Preuve du lemme 1 (2) :

Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

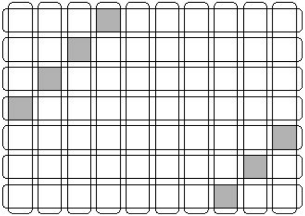


$$c_k = c_{\sigma_k}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{(P_i, Q_j) \in \sigma_k} \mid P_i \cap Q_j \mid$$

$= \sum$ cardinaux des ensembles grisés.

Preuve du lemme 1 (2) :

Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.



$$c_k = c_{\sigma_k}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \sum_{(P_i, Q_j) \in \sigma_k} | P_i \cap Q_j |$$

$$= \sum \text{cardinaux des ensembles grisés.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{q} c_k = \sum_{k=1}^{q} \sum \text{cardinaux des ensembles grisés correspondant à } \sigma_k$$

$$= \sum \text{cardinaux de toutes les intersections} = n.$$

Preuve du lemme 1 (3) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

$$\sum_{j=1}^{q} c_j = n \Rightarrow \exists j_0 \in \{1, \ldots, q\} \text{ tel que } c_{j_0} \geqslant \frac{n}{q}.$$

Preuve du lemme 1 (3) :
Si $p \leqslant q \leqslant n$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

$$\sum_{j=1}^{q} c_j = n \Rightarrow \exists j_0 \in \{1, \ldots, q\} \text{ tel que } c_{j_0} \geqslant \frac{n}{q}.$$

Et ainsi

$$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \max_{\sigma} c_{\sigma}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant c_{j_0} \geqslant \frac{n}{q}$$

et puisque $c_{j_0} \in \mathbb{N}$, on obtient :

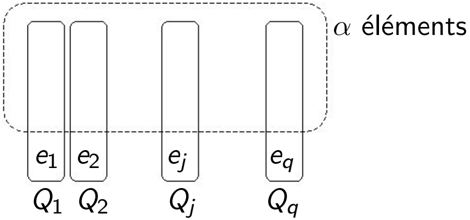
$$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil.$$

Preuve du lemme 2 (1) :
Si $n \leqslant p + q - 2$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant p + q - n$.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux partitions quelconques à p et q classes vérifiant $n \leqslant p + q - 2$. On pose $n = q + \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p - 2$.
Les classes de $\mathcal{Q}$ sont non vides : $X = \{e_1, e_2, ...e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_\alpha\}$

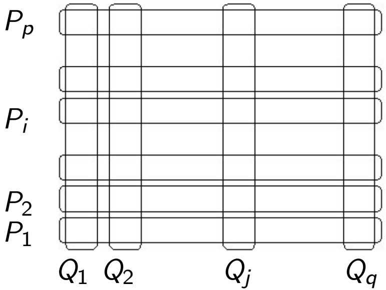
Preuve du lemme 2 (1) : Si $n \leqslant p+q-2$, alors : $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \geqslant p+q-n$.

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux partitions quelconques à p et q classes vérifiant $n \leqslant p+q-2$. On pose $n = q+\alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p-2$.
Les classes de $\mathcal{Q}$ sont non vides : $X = \{e_1, e_2, ...e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_\alpha\}$



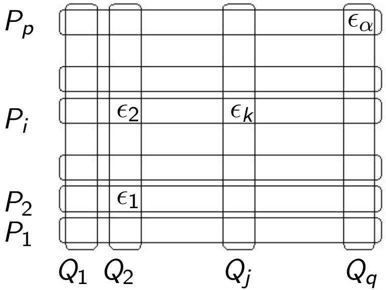
Preuve du lemme 2 (2) :
Si $n \leqslant p + q - 2$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant p + q - n$.

On pose $n = q + \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p - 2$ et $X = \{e_1, e_2, ...e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_\alpha\}$



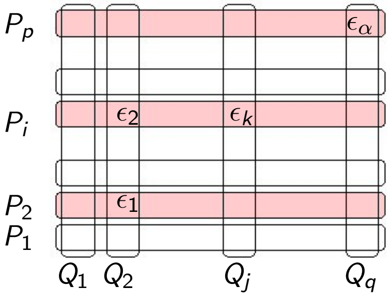
Preuve du lemme 2 (2) :
Si $n \leqslant p+q-2$, alors : $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \geqslant p+q-n$.

On pose $n = q + \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p-2$ et $X = \{e_1, e_2, ... e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_\alpha\}$



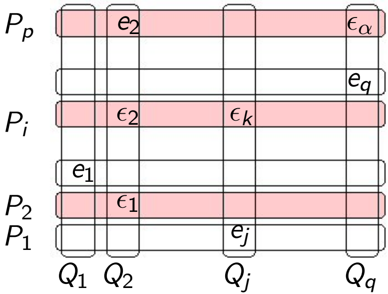
Preuve du lemme 2 (2) :
Si $n \leqslant p + q - 2$, alors : $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant p + q - n$.

On pose $n = q + \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p - 2$ et $X = \{e_1, e_2, ...e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_\alpha\}$



Preuve du lemme 2 (2) :
Si $n \leqslant p+q-2$, alors : $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \geqslant p+q-n$.

On pose $n = q + \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p-2$ et $X = \{e_1, e_2, \ldots e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_\alpha\}$

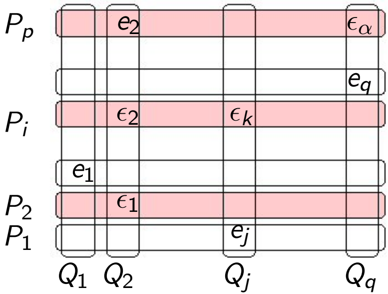


Les classes de $\mathcal{P}$

ne sont pas vides.

Preuve du lemme 2 (2) :
Si $n \leqslant p+q-2$, alors : $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \geqslant p+q-n$.

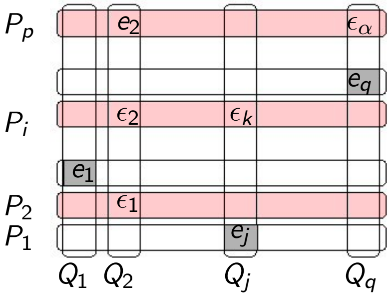
On pose $n = q+\alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p-2$ et $X = \{e_1, e_2, \ldots e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_\alpha\}$



au plus α classes de $\mathcal{P}$ rosées $\Rightarrow$ au moins $p-\alpha$ classes non rosées.

Preuve du lemme 2 (2) :
Si $n \leqslant p+q-2$, alors : $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \geqslant p+q-n$.

On pose $n = q + \alpha$ avec $0 \leqslant \alpha \leqslant p-2$ et $X = \{e_1, e_2, ...e_q, \epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_\alpha\}$



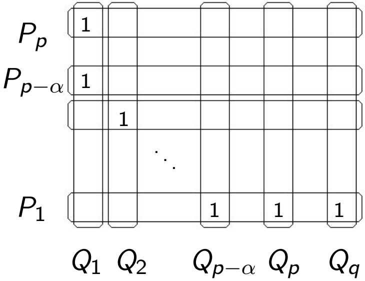
au plus α classes de $\mathcal{P}$ rosées $\Rightarrow$ au moins $p-\alpha$ classes non rosées.
Le couplage σ vérifie donc :

$$c_\sigma(\mathcal{P},\mathcal{Q}) \geqslant p - \alpha = p + q - n.$$

Preuve du lemme 4 :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $n \leqslant p + q - 2$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p + q - n$.

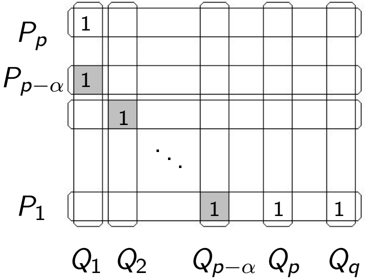
On pose $n = q + \alpha$.

On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :



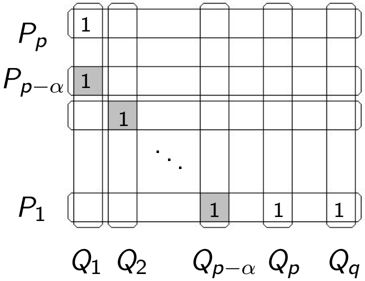
Preuve du lemme 4 :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $n \leqslant p + q - 2$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p + q - n$.

On pose $n = q + \alpha$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :



Preuve du lemme 4 : Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $n \leqslant p + q - 2$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p + q - n$.

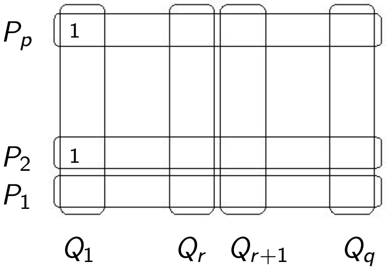
On pose $n = q + \alpha$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :



$$c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p - \alpha = p + q - n.$$

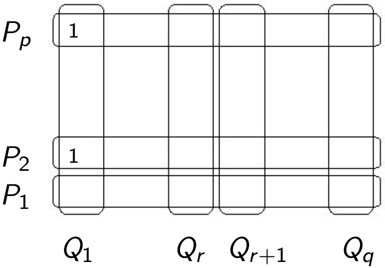
Preuve du lemme 5 :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $p + q - 1 \leqslant n \leqslant pq - q$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.

On pose $n = p - 1 + kq + r$ avec $k \geqslant 1$ et $r \in \{0, ..., q-1\}$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :



Preuve du lemme 5 :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $p+q-1 \leqslant n \leqslant pq-q$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.

On pose $n = p-1+kq+r$ avec $k \geqslant 1$ et $r \in \{0, \ldots, q-1\}$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :

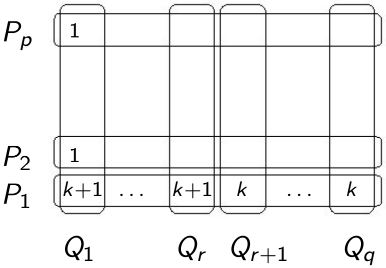


restent $n-(p-1)$ éléments à placer.
$n-(p-1) = kq+r$, $r \in \{0, \ldots, q-1\}$.

Preuve du lemme 5 :

Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $p+q-1 \leqslant n \leqslant pq-q$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.

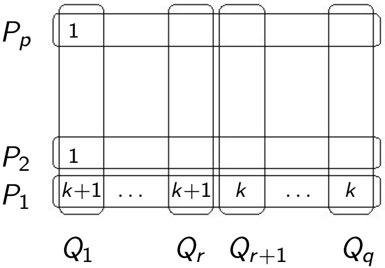
On pose $n = p-1+kq+r$ avec $k \geqslant 1$ et $r \in \{0, ..., q-1\}$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :



restent $n-(p-1)$ éléments à placer.
$n-(p-1) = kq+r$, $r \in \{0, ..., q-1\}$.

Preuve du lemme 5 : Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $p+q-1 \leqslant n \leqslant pq-q$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.

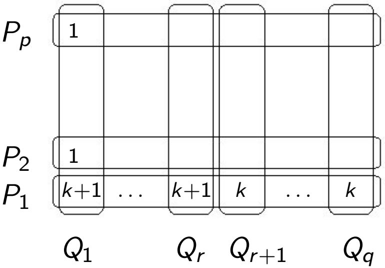
On pose $n = p-1+kq+r$ avec $k \geqslant 1$ et $r \in \{0, ..., q-1\}$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :



	$r \in \{0,1\}$	$r > 1$
$c(\mathcal{P},\mathcal{Q})$	k+1	k+2

Preuve du lemme 5 :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $p+q-1 \leqslant n \leqslant pq-q$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.

On pose $n = p-1+kq+r$ avec $k \geqslant 1$ et $r \in \{0, \dots, q-1\}$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :

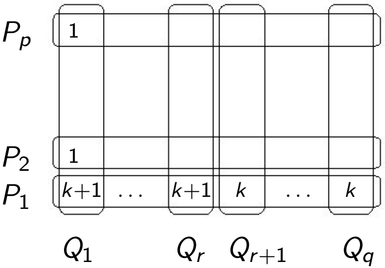


	$r \in \{0,1\}$	$r > 1$
$c(\mathcal{P},\mathcal{Q})$	k+1	k+2

$$B = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil = \left\lceil \frac{(k+1)q+r-1}{q} \right\rceil$$

Preuve du lemme 5 :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $p+q-1 \leqslant n \leqslant pq-q$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil$.

On pose $n = p-1+kq+r$ avec $k \geqslant 1$ et $r \in \{0,\ldots,q-1\}$.
On considère les partitions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ suivantes :

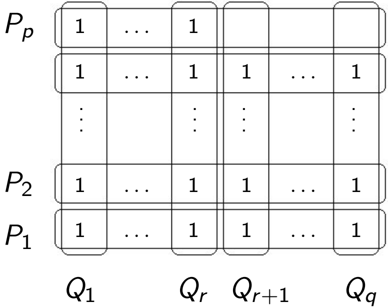


	$r \in \{0,1\}$	$r > 1$
$c(\mathcal{P},\mathcal{Q})$	k+1	k+2
B	k+1	k+2

$$B = \left\lceil \frac{n+q-p}{q} \right\rceil = \left\lceil \frac{(k+1)q+r-1}{q} \right\rceil$$

Preuve du lemme 6 (1) :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Cas 1 : $(p-1)q < n < pq$. On pose $n = (p-1)q + r$, avec $1 \leqslant r \leqslant q-1$.
On considère les deux partitions suivantes :



Preuve du lemme 6 (1) :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

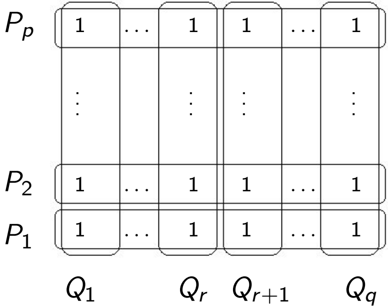
Cas 1 : $(p-1)q < n < pq$. On pose $n = (p-1)q + r$, avec $1 \leqslant r \leqslant q-1$.
On considère les deux partitions suivantes :

P_p	1	$\dots$	1			
	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_2	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
P_1	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
	Q_1		Q_r	Q_{r+1}		Q_q

$$c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = p = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$$

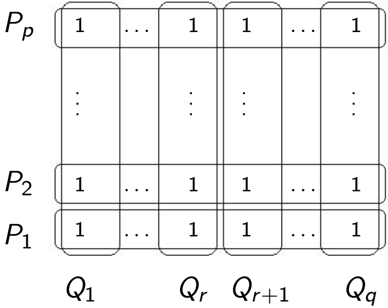
Preuve du lemme 6 (2) :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Cas 2 : $n \geqslant pq$. On pose $n = kq + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $k \geqslant p$.
On considère les deux partitions suivantes :



Preuve du lemme 6 (2) :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Cas 2 : $n \geqslant pq$. On pose $n = kq + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $k \geqslant p$.
On considère les deux partitions suivantes :



restent $n - pq = kq + r - pq =(k-p)q + r$ éléments à placer

Preuve du lemme 6 (2) :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Cas 2 : $n \geqslant pq$. On pose $n = kq + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $k \geqslant p$.
On considère les deux partitions suivantes :

P_p	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_2	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
P_1	k-p+1	$\dots$	k-p+1	k-p+1	$\dots$	k-p+1
	Q_1		Q_r	Q_{r+1}		Q_q

restent $n - pq = kq + r - pq = (k-p)q + r$ éléments à placer
$\rightarrow$ on ajoute $k - p$ éléments dans chaque $P_1 \cap Q_j$, $1 \leqslant j \leqslant q$

Preuve du lemme 6 (2) :

Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P},\mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Cas 2 : $n \geqslant pq$. On pose $n = kq + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $k \geqslant p$.
On considère les deux partitions suivantes :

P_p	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_2	1	$\dots$	1	1	$\dots$	1
P_1	k-p+1	$\dots$	k-p+1	k-p+1	$\dots$	k-p+1
	Q_1		Q_r	Q_{r+1}		Q_q

restent r éléments à placer

Preuve du lemme 6 (2) :

Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Cas 2 : $n \geqslant pq$. On pose $n = kq + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $k \geqslant p$.
On considère les deux partitions suivantes :

P_p	1	$\ldots$	1	1	$\ldots$	1
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_2	1	$\ldots$	1	1	$\ldots$	1
P_1	k-p+2	$\ldots$	k-p+2	k-p+1	$\ldots$	k-p+1
	Q_1		Q_r	Q_{r+1}		Q_q

restent r éléments à placer
$\rightarrow$ on les place dans $P_1 \cap Q_j$, $j \leqslant r$

Preuve du lemme 6 (2) :
Il existe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que $(p-1)q < n$ et $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$.

Cas 2 : $n \geqslant pq$. On pose $n = kq + r$, avec $0 \leqslant r \leqslant q-1$ et $k \geqslant p$.
On considère les deux partitions suivantes :

P_p	1	...	1	1	...	1
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_2	1	...	1	1	...	1
P_1	k-p+2	...	k-p+2	k-p+1	...	k-p+1
	Q_1		Q_r	Q_{r+1}		Q_q

$$c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = (k-p+2) + (p-1) = k+1 = \left\lceil \frac{n}{q} \right\rceil$$

Minimum de la concordance avec une partition $\mathcal{P}$ donnée ($c_{\min}(\mathcal{P})$)

Théorème 1

Soit $\mathcal{P}$ une partition à p classes possédant respectivement $n_1, n_2, ..., n_p$ éléments avec $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_p$. Alors

$$c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p.$$

On note $f(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p$.

On considère une partition $\mathcal{P}$ sur X et un élément $a \in P_k$.
On note alors $\mathcal{P} \ominus a$ la partition sur $X \setminus \{a\}$ définie par :
- si $P_k = \{a\}$, $\mathcal{P} \ominus a$ est constituée des classes P_i, $i \neq k$.
- sinon $\mathcal{P} \ominus a$ est constituée des classes P_i, $i \neq k$, ainsi que de la classe $P_k \setminus \{a\}$.

Lemme 7

On considère une partition $\mathcal{P}$ sur X et un élément $a \in X$. Alors :

$$c_{\min}(\mathcal{P}) \geqslant c_{\min}(\mathcal{P} \ominus a)$$

Preuve du lemme 7 : $c_{\min}(\mathcal{P}) \geqslant c_{\min}(\mathcal{P}\ominus a)$

Soit $\mathcal{Q}$ une partition quelconque sur X.

- $c_{\min}(\mathcal{P}\ominus a) \leqslant c(\mathcal{P}\ominus a, \mathcal{Q}\ominus a) = c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}\ominus a, \mathcal{Q}\ominus a)$.

On étend $\hat{\sigma}$ à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

- $c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}\ominus a, \mathcal{Q}\ominus a)$
- $c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \max_{\sigma} c_{\sigma}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$. Finalement : $\forall \mathcal{Q}$

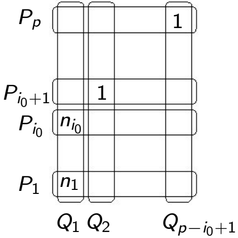
$$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}\ominus a, \mathcal{Q}\ominus a) \geqslant c_{\min}(\mathcal{P}\ominus a)$$

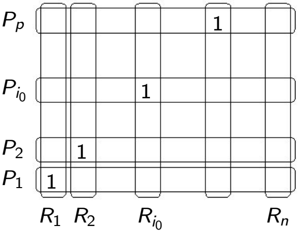
$$\Rightarrow c_{\min}(\mathcal{P}) = \min_{Q} c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) \geqslant c_{\min}(\mathcal{P}\ominus a).$$

Preuve du théorème 1 (1) : $(n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p)$ $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p \; (= f(\mathcal{P}))$

- montrons que $\forall \mathcal{P}$, $c_{\min}(\mathcal{P}) \leqslant f(\mathcal{P})$.

Soit i_0 l'indice vérifiant $n_{i_0} - i_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)$.
Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux partitions définies comme suit :

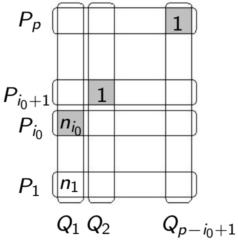


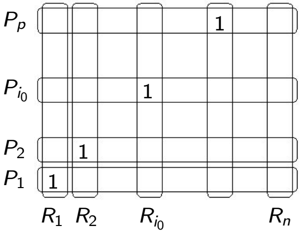


Preuve du théorème 1 (1) : $(n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p)$ $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p$ $(= f(\mathcal{P}))$

- montrons que $\forall \mathcal{P}$, $c_{\min}(\mathcal{P}) \leqslant f(\mathcal{P})$.

Soit i_0 l'indice vérifiant $n_{i_0} - i_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)$.
Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux partitions définies comme suit :



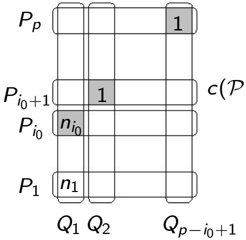


Preuve du théorème 1 (1) : $(n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p)$ $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p \; (= f(\mathcal{P}))$

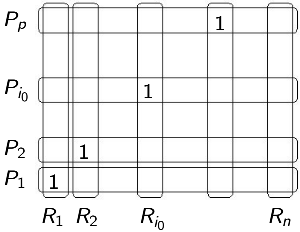
- montrons que $\forall \mathcal{P}$, $c_{\min}(\mathcal{P}) \leqslant f(\mathcal{P})$.

Soit i_0 l'indice vérifiant $n_{i_0} - i_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)$.

Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux partitions définies comme suit :



$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p - i_0 + n_{i_0}$

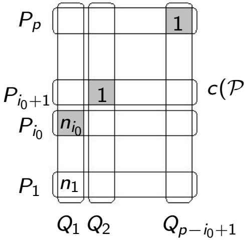


Preuve du théorème 1 (1) : $(n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p)$ $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p \ (= f(\mathcal{P}))$

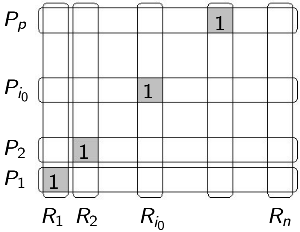
- montrons que $\forall \mathcal{P}$, $c_{\min}(\mathcal{P}) \leqslant f(\mathcal{P})$.

Soit i_0 l'indice vérifiant $n_{i_0} - i_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)$.

Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux partitions définies comme suit :



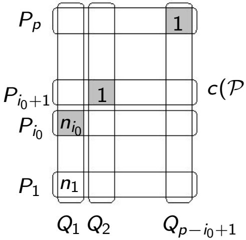
$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p - i_0 + n_{i_0}$



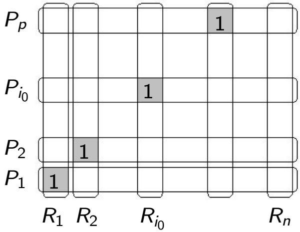
Preuve du théorème 1 (1) : $(n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p)$ $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1\leqslant i\leqslant p}(n_i - i)] + p \ (= f(\mathcal{P}))$

- montrons que $\forall \mathcal{P}$, $c_{\min}(\mathcal{P}) \leqslant f(\mathcal{P})$.

Soit i_0 l'indice vérifiant $n_{i_0} - i_0 = \min_{1\leqslant i\leqslant p}(n_i - i)$.
Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux partitions définies comme suit :



$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p - i_0 + n_{i_0}$

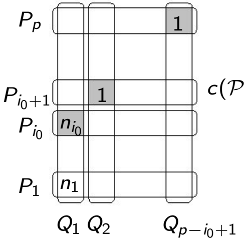


$c(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = p$

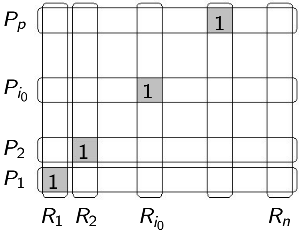
Preuve du théorème 1 (1) : ($n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p$) $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p \; (= f(\mathcal{P}))$

- montrons que $\forall \mathcal{P}$, $c_{\min}(\mathcal{P}) \leqslant f(\mathcal{P})$.

Soit i_0 l'indice vérifiant $n_{i_0} - i_0 = \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)$.
Soient $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux partitions définies comme suit :



$c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = p - i_0 + n_{i_0}$



$c(\mathcal{P}, \mathcal{R}) = p$

$$c_{\min}(\mathcal{P}) \leqslant \min[c(\mathcal{P}, \mathcal{Q}), c(\mathcal{P}, \mathcal{R})] = \min[p, p + \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] = f(\mathcal{P}).$$

Preuve du théorème 1 (2) : $(n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p)$ $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p \; (= f(\mathcal{P}))$

• montrons que $\forall \mathcal{P}$, $c_{\min}(\mathcal{P}) \geqslant f(\mathcal{P})$.

On raisonne par récurrence :

- **Initialisation :** si $n = 1$, l'ensemble des partitions sur X est réduit à la partition à une classe à un élément et donc il est clair que $c_{\min}(\mathcal{P}) = 1$. De plus puisque $p = 1$ et $n_1 = 1$, on a

$$f(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p = 1$$

et donc $c_{\min}(\mathcal{P}) = f(\mathcal{P})$.

Preuve du théorème 1 (3) : $(n_1 \leqslant \ldots \leqslant n_p)$ $c_{\min}(\mathcal{P}) = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p \; (= f(\mathcal{P}))$

- **Hérédité : - cas 1 :** $n_1 \geqslant 2$

Soit $a \in P_1$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \ominus a$.
$\mathcal{P}'$ possède toujours p classes P'_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$, et $n'_1 \leqslant n'_2 \ldots \leqslant n'_p$.
D'après l'hypothèse de récurrence,

$$c_{\min}(\mathcal{P}') = \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n'_i - i)] + p = \min[0, \min_{2 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i), n_1 - 2] + p.$$

Puisque $n_1 - 2 \geqslant 0$, on a donc

$$c_{\min}(\mathcal{P}') = f(\mathcal{P}).$$

Or, d'après le lemme 7, on sait que $c_{\min}(\mathcal{P}) \geqslant c_{\min}(\mathcal{P}')$ et donc on obtient finalement

$$c_{\min}(\mathcal{P}) \geqslant f(\mathcal{P}).$$

Minimum de la concordance avec une partition $\mathcal{P}$ donnée et une partition à au plus q classes ($c_{\min}(\mathcal{P}, \leqslant q)$)

Théorème 2

Soit $\mathcal{P}$ une partition à p classes sur X et q un entier vérifiant $p \leqslant q$. On note n_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$, les cardinaux des classes de $\mathcal{P}$ et r_i, $i \in \{1, \ldots, p\}$, les restes respectifs de la division entière des n_i par q et on suppose que les classes sont indicées dans l'ordre croissant des r_i ($r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_p$). Alors

$$c_{\min}(\mathcal{P}, \leqslant q) = \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor + \min(0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p} (r_i - i)) + p.$$

On pose $f(\mathcal{P}, q) = \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor + \min(0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(r_i - i)) + p$.

Schéma de la preuve du théorème 2 (1) :

$$c_{\min}(\mathcal{P}, \leqslant q) = \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor + \min(0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(r_i - i)) + p \; (= f(\mathcal{P}, q))$$

On pose $\forall i \in \{1, ..., p\}$, $|P_i| = n_i = t_i q + r_i$ avec $r_i \in \{0, ..., q-1\}$.
Soit la partition $\hat{\mathcal{Q}}$ suivante : Chaque classe $\hat{Q}_j$ contient $t_i + \epsilon_{i,j}$ éléments appartenant à la classe P_i, $\forall i \in \{1, ..., p\}$, avec $\epsilon_{i,j} = 1$ si $r_i \geqslant j$ et $\epsilon_{i,j} = 0$ si $r_i < j$.

P_p	$t_p+\epsilon_{p,1}$	$t_p+\epsilon_{p,2}$	$t_p+\epsilon_{p,j}$	$t_p+\epsilon_{p,q}$
P_i	$t_i+\epsilon_{i,1}$	$t_i+\epsilon_{i,2}$	$t_i+\epsilon_{i,j}$	$t_i+\epsilon_{i,q}$
P_2	$t_2+\epsilon_{2,1}$	$t_2+\epsilon_{2,2}$	$t_2+\epsilon_{2,j}$	$t_2+\epsilon_{2,q}$
P_1	$t_1+\epsilon_{1,1}$	$t_1+\epsilon_{1,2}$	$t_1+\epsilon_{1,j}$	$t_1+\epsilon_{1,q}$
	$\hat{Q}_1$	$\hat{Q}_2$	$\hat{Q}_j$	$\hat{Q}_n$

Schéma de la preuve du théorème 2 (2) :

$$c_{\min}(\mathcal{P}, \leqslant q) = \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor + \min(0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p} (r_i - i)) + p \; (= f(\mathcal{P}, q))$$

- $c_{\min}(\mathcal{P}, \leqslant q) = f(\mathcal{P}, q)$
  On montre que $\hat{\mathcal{Q}}$ vérifie : $c(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{Q}}) = f(\mathcal{P}, q)$
- $c_{\min}(\mathcal{P}, \geqslant q) = f(\mathcal{P}, q)$
  démontré par récurrence de façon similaire au théorème 1.

Théorème 2 : Exemple

$|X| = 12$, $q = 4$, $\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$\hat{\mathcal{Q}} = (\qquad \mid \qquad \mid \qquad \mid \quad)$

Théorème 2 : Exemple

$|X| = 12$, $q = 4$, $\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$$\mathcal{P} = ({\color{red}1\ 2\ 3\ 4} \mid {\color{blue}5\ 6\ 7\ 8\ 9} \mid {\color{green}10\ 11\ 12})$$

$$\hat{\mathcal{Q}} = ({\color{red}1} \quad \mid {\color{red}2} \quad \mid {\color{red}3} \quad \mid {\color{red}4}\ )$$

Théorème 2 : Exemple

$|X| = 12$, $q = 4$, $\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$\hat{\mathcal{Q}} = (159 \quad \mid 26 \quad \mid 37 \quad \mid 48)$

Théorème 2 : Exemple

$|X| = 12$, $q = 4$, $\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$$\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$$

$$\hat{\mathcal{Q}} = (15910 \mid 2611 \mid 3712 \mid 48)$$

Théorème 2 : Exemple

$|X| = 12,\ q = 4,\ \mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$$\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$$

$$\hat{\sigma}$$

$$\hat{\mathcal{Q}} = (15910 \mid 2611 \mid 3712 \mid 48)$$

$$c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{Q}}) = 2 + 1 + 1 = 4.$$

Théorème 2 : Exemple

$|X| = 12,\ q = 4,\ \mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$$\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$$

$$\hat\sigma$$

$$\hat{\mathcal{Q}} = (1 5 9 10 \mid 2 6 11 \mid 3 7 12 \mid 4 8)$$

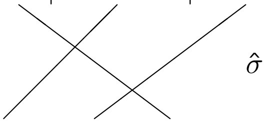
$$c_{\hat\sigma}(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{Q}}) = 2 + 1 + 1 = 4.$$

i	1	2	3
n_i	4	5	3
$\left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor$	1	1	0
r_i	0	1	3
$r_i - i$	-1	-1	1

Théorème 2 : Exemple

$|X| = 12,\ q = 4,\ \mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$

$$\mathcal{P} = (1\ 2\ 3\ 4 \mid 5\ 6\ 7\ 8\ 9 \mid 10\ 11\ 12)$$



$$\hat{\mathcal{Q}} = (1 5 9 10 \mid 2 6 11 \mid 3 7 12 \mid 4 8)$$

$$c_{\hat{\sigma}}(\mathcal{P}, \hat{\mathcal{Q}}) = 2 + 1 + 1 = 4.$$

i	1	2	3
n_i	4	5	3
$\left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor$	1	1	0
r_i	0	1	3
$r_i - i$	-1	-1	1

$$f(\mathcal{P}, q) = \sum_{i=1}^{p} \left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor + \min(0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p} (r_i - i)) + p$$

$$= 2 - 1 + 3 = 4.$$

Récapitulatif des résultats en termes de distance

$\mathcal{P}$ quelconque	$\mathcal{Q}$ quelconque	$\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - 1$
$\mathcal{P}$ possède p classes	$\mathcal{Q}$ possède q classes ($p \leqslant q$)	• si $n \leqslant p + q - 2$, $\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 2n - p - q$ • si $p + q - 1 \leqslant n \leqslant (p-1)q$, $\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - \lceil \frac{n+q-p}{q} \rceil$ • si $(p-1)q < n$, $\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - \lceil \frac{n}{q} \rceil$
$\mathcal{P}$ possède au plus p classes	$\mathcal{Q}$ possède au plus q classes ($p \leqslant q$)	$\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - \lceil \frac{n}{q} \rceil$
$\mathcal{P}$ possède p classes dont les cardinaux $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont fixés	$\mathcal{Q}$ quelconque	On suppose que $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_p$ $\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - p - \min[0, \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} (n_i - i)]$
$\mathcal{P}$ possède p classes dont les cardinaux $n_1, n_2, \ldots, n_p$ sont fixés ; $r_1, r_2, \ldots, r_p$ désignent les restes de la division entière des n_i par q	$\mathcal{Q}$ possède au plus q classes ou exactement q classes avec $q \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} n_i$	• si $p \leqslant q$, on suppose que $r_1 \leqslant r_2 \leqslant \ldots \leqslant r_p$ $\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - \sum\limits_{i=1}^{p} \left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor - \min(0, \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} (r_i - i)) - p$ • si $p > q$, on suppose que les q plus grosses classes de $\mathcal{P}$ sont indicées de 1 à q et dans l'ordre croissant des r_i $\max \theta(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = n - \sum\limits_{i=1}^{q} \left\lfloor \frac{n_i}{q} \right\rfloor - \min(0, \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant q} (r_i - i)) - q$

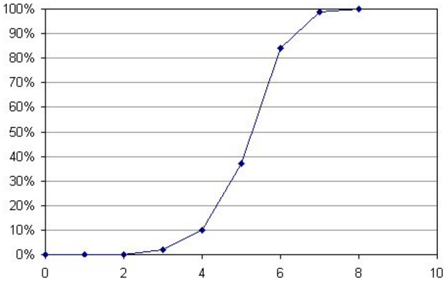
La distance des transferts : point de vue expérimental

$n = 10$, Soit $\mathcal{P}$ la partition à deux classes de 5 éléments. On énumère toutes les partitions de X (115975) et on calcule leur distance à $\mathcal{P}$.

Distance de transferts de $\mathcal{P}$	1	2	3	4	5	6	7	8
Nb de partitions	20	225	1720	9112	31361	54490	17500	1546

% cumulés

de partitions

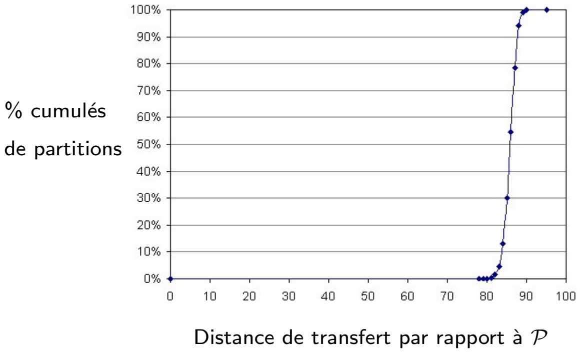


Distance de transfert par rapport à $\mathcal{P}$

remarque : $\theta_{max}(\mathcal{P}) = n - c_{min}(\mathcal{P}) = n - \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p = 10 - 2 = 8$.

La distance des transferts : point de vue expérimental

$n = 100$, soit $\mathcal{P}$ la partition à 5 classes de 20 éléments. On ne peut plus énumérer toutes les partitions de X ; on fait donc un échantillonnage en tirant 5000 partitions au hasard et on calcule leur distance à $\mathcal{P}$.



remarque : $\theta_{max}(\mathcal{P}) = n - c_{min}(\mathcal{P}) = n - \min[0, \min_{1 \leqslant i \leqslant p}(n_i - i)] + p = 100 - 5 = 95$.