Directeurs de stage :
MM A. Arabia et Z. Mebkhout
Master 2 de Mathématiques fondamentales
Université Paris 7, Denis Diderot
Septembre 2009

DÉCOMPOSITION DU COMPLEXE DE DE RHAM

MÉMOIRE DE MASTER 2

MATTHIEU RAMBAUD

UFR de mathématiques de Paris 7

DÉCOMPOSITION DU COMPLEXE DE DE RHAM

MÉMOIRE DE MASTER 2

MATTHIEU RAMBAUD

Directeurs de stage :
MM A. Arabia et Z. Mebkhout
Master 2 de Mathématiques fondamentales
Université Paris 7, Denis Diderot

Septembre 2009

Résumé. — Soit X un schéma propre sur $S = \operatorname{Spec} k$. La suite spectrale "de Hodge vers de Rham" $H^q(X, \Omega^p_{X/S}) \Rightarrow \boldsymbol{H}^{p+q}(X, \Omega^\bullet_{X/S})$ stationne en E_1 si et seulement si l'égalité correspondante des dimensions $\sum_{p+q=l} h^{p,q} = h^l$ est vérifiée pour tout l.

On montre cette égalité quand k est parfait de caractéristique $p > 0$, X lisse sur k de dimension $< p$ (et même $\leqslant p$) et admet un relèvement lisse sur $\operatorname{Spec} W_2(k)$.

On étend le résultat à un schéma propre et lisse sur K corps de caractéristique 0.

On montre enfin que dans le cas d'un schéma projectif et lisse sur $\mathbf{C}$, cette égalité se déduit également de la théorie de Hodge.

TABLE DES MATIÈRES

§1. Introduction

1.1. Décomposition du complexe de de Rham en caractéristique $p > 0$. — Soit k un corps de caractéristique $p > 0$ et $f : X \to S$ un schéma lisse sur $S = \operatorname{Spec} k$. On définit l'endomorphisme de Frobenius $F_X : X \to X$ comme l'identité sur l'espace topologique et l'élévation à la puissance p sur les sections de $\mathcal{O}_X$. Soit $X' := S \times_{F_S : S \to S} X$; le *Frobenius relatif* $F : X \to X'$ est alors le morphisme qui factorise F_X et f :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "F"] \arrow[rr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ & S^{(p)} \arrow[r, "F_S"] & S . \end{tikzcd}$$

Le complexe de de Rham de X sur S devient $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire, on étudie désormais $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$. On a *l'isomorphisme de Cartier* au niveau des $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres graduées :

$$C^{-1} : \bigoplus \Omega^i_{X'/S} \xrightarrow{\sim} \bigoplus \mathcal{H}^i F_*\Omega^i_{X/S}.$$

Peut-on factoriser l'isomorphisme de Cartier à travers un *morphisme de complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules $\varphi^\bullet$*, ou à défaut un morphisme dans la catégorie dérivée ?

$$\begin{tikzcd} & F_*\Omega^\bullet_{X/S} \arrow[dr, dotted, "\text{proj.}"] & \\ C^{-1} : \bigoplus \Omega^i_{X'/S}[-i] \arrow[ur, dotted, "\varphi"] \arrow[rr, "C^{-1}"] & & \bigoplus \mathcal{H}^i F_*\Omega^i_{X/S}[-i] \end{tikzcd}$$

Cela fournirait une décomposition du complexe de de Rham. L'article [**5**] apporte certaines réponses dans le cas où il existe un *relèvement de X sur $W_2(k)$*, elles sont résumées dans le tableau suivant (la dernière colonne est expliquée plus loin).

	X relevable sur $W_2(k)$ et k parfait	**Conditions supplémentaires**		**Existence de φ**	**Hodge**
1	non	**X' relevable**	$\Leftrightarrow$	en degrés $\leqslant 1$ dans $D(\mathcal{O}_{X'})$	non
2	oui	**F relevable**	$\Rightarrow$	en tout degré **dans $C(\mathcal{O}_{X'})$**	non
3	oui	–	$\Rightarrow$	en degrés $< p$ dans $D(\mathcal{O}_{X'})$	oui
3'	oui	**$\dim X \leqslant p$**	$\Rightarrow$	en degrés $\leqslant p$ dans $D(\mathcal{O}_{X'})$	oui
		Questions ouvertes			
4	*oui*	–	$\Rightarrow$	*en tout degré ?*	*oui*
5	*non*			*?*	*oui*

1, non traité, est établi dans l'article [**5**] (corollaire §3.6). La stratégie pour construire l'isomorphisme dans $D(\mathcal{O}_{X'})$ de **3** consiste d'abord à étudier la situation locale où F se relève, c'est l'objet de la démonstration du théorème 3.1 à l'étape (b). On en isole **2**, soulignée dans le Corollaire 3.6, qui est très forte puisque $\varphi^\bullet$ est un vrai morphisme de complexes défini en tout degré. Il dépend naturellement de X et *a priori* du choix du relèvement $\widetilde{X}$. La question ouverte **4** est en particulier vraie dans ce cas. L'étape suivante est de recoller ces morphismes locaux en un morphisme global φ de $D(\mathcal{O}_{X'})$, valable en degrés $< p$, qui dépend canoniquement du choix du relèvement de X (et pas des relèvements locaux). **3'**, détaillé dans 3.7, s'appuie sur **3** et utilise la dualité de Grothendieck pour démontrer l'existence d'une décomposition jusqu'au degré p quand $\dim X \leqslant p$ mais ne donne pas de construction canonique. Toutes ces constructions utilisent crucialement l'hypothèse que X se relève sur $W_2(k)$, il est donc légitime de se demander si une décomposition du complexe de de Rham existe en général.

1.2. Le théorème **3'** fournit donc une décomposition des groupes de cohomologie

$$(*) \qquad \bigoplus_{l=i+j\leqslant p} H^j(X, \Omega^i_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{H}^l(X, \Omega^\bullet_{X/S}).$$

Pour tout schéma X de dimension $\leqslant p$ se relevant sur $W_2(k)$. La démonstration montre qu'en degrés $< p$ elle est au moins naturelle par rapport au relèvement de X, en revanche elle ne fournit aucune information sur l'isomorphisme en degré p. En particulier la suite spectrale de Hodge vers de Rham :

$$E_1^{i,j} = H^j(X, \Omega^i_{X/S}) \Rightarrow H^\bullet_{DR}(X/S)$$

dégénère en E_1 en degrés $\leqslant p$.

On a même le résultat général ("dégénérescence de Hodge", I.4.1) : si K est de caractéristique 0 et X propre et lisse sur K, alors la suite spectrale de Hodge vers de Rham dégénère en E_1 en tout degré. L'article **[5]** déduit ce résultat d'une conséquence de **3** : si p est choisi suffisamment grand, on peut décomposer le complexe de de Rham d'un schéma X lisse sur k de caractéristique p en degré suffisamment grand (ici, en degré $< p$). C'est la propriété désignée par "Hodge" dans le tableau. Elle se déduit des théorèmes **3** et **3'** mais pas directement des théorèmes **1** et **2**. En revanche la preuve du résultat ne débouche pas sur un isomorphisme de type (*).

L'idée est que X étant propre, les dimensions des groupes de cohomologie de faisceaux cohérents sont finies donc il suffit d'établir l'égalité *numérique* $\sum_{i+j=l} h^{i,j} = h^l$ pour que la suite dégénère en E_1. On considère alors K comme limite inductive de ses sous $\mathbf{Z}$-algèbres A_α de type fini et on montre que X s'y relève en un $X_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} A_\alpha$ avec de bonnes propriétés : propre et lisse sur A_α, tel que les $R^j f_{\alpha *}\Omega^i_{X_\alpha/A_\alpha}$ soient libres de rang $h^{i,j}$ sur A_α. On exhibe alors un point fermé $\mathfrak{m} \in X_\alpha$ de corps résiduel k de caractéristique p suffisamment grande et parfait. La fibre de X_α en $\mathfrak{m}$ est un schéma lisse sur k, en choisissant A_α lisse sur $\mathbf{Z}$ elle se relève sur $W_2(k)$ et son complexe de de Rham se décompose en degré supérieur à d la dimension de X, par "Hodge", pour p choisi assez grand. On en déduit l'égalité numérique $\sum_{i+j=l} h^{i,j} = h^l$ en degrés $\leqslant d$ sur cette fibre, qu'on peut transporter par changement de base à X.

1.3. La théorie de Hodge des variétés analytiques compactes. — est le cadre dans lequel a été établi une décomposition *canonique* des groupes de cohomologie de de Rham des variétés *kählériennes* X (II.3.8) :

$$H^l_{DR}(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{i+j=l} H^j(X, \Omega^i_{X/\mathbf{C}}).$$

Ce résultat est donc plus fort que la simple dégénérescence de la suite spectrale déduite de **3**. En particulier une variété analytique projective étant kählérienne, [GaGa] (II.1.3) permet d'en déduire cette décomposition pour tout schéma projectif et lisse sur $\mathbf{C}$.

CHAPITRE 1

DÉCOMPOSITION À L'AIDE D'UN RELÈVEMENT MODULO p^2

§1. La suite spectrale de Hodge vers de Rham

Soit k un corps et X un schéma sur $S = \operatorname{Spec} k$, ses groupes de cohomologie de de Rham sont les k-espaces vectoriels $\boldsymbol{H}^i(X, \boldsymbol{\Omega}^\bullet_{X/S})$. On peut par exemple les obtenir à l'aide des résolutions fonctorielles de Godement $(\mathcal{C}^{i,\bullet}, \delta^{i,\bullet})$ de chaque $\Omega^i_{X/S}$, qui fournissent un bicomplexe $\mathcal{C}^{i,j}$ à composantes flasques dont les colonnes augmentées par Ω^i sont exactes. Le complexe $\Omega^\bullet_{X/S}$ est donc quasi-isomorphe au complexe simple associé : $\mathcal{C}^\bullet = \Big((\sum_{i+j=\bullet} \mathcal{C}^{i,j})^\bullet,\ D^l = \bigoplus_{i+j=l}((-1)^i \delta^{i,j} + d^{i,j}) \Big)$, qui est à composantes flasques donc $\boldsymbol{H}^\bullet(X, \mathcal{C}^\bullet) = h^\bullet(\Gamma(X, \mathcal{C}^\bullet))$.

De façon générale, soit $K^{\bullet,*}$ un bicomplexe du premier quadrant (ici $\Gamma(X, \mathcal{C}^{\bullet,*})$) de modules sur un anneau. Pour calculer la cohomologie de son complexe simple associé $K^\bullet$, on en fait un module différentiel filtré gradué

$$F^p K^l = \bigoplus_{p \leqslant j \leqslant l} K^{j,l-j}$$

d'où une filtration induite sur ses groupes de cohomologie

$$F^p h^l(K^\bullet) := F^p Z^l / B^l$$

Définissons pour chaque p le gradué (différentiel) $\mathrm{G}^p K^\bullet$ associé à $F^p K^\bullet$ par

$$\mathrm{G}^p K^l = \big(F^p K^l\big) / \big(F^{p+1} K^l\big) = K^{p,l-p}$$

et de même les gradués des groupes de cohomologie :

$$\mathrm{G}^p h^l(K^\bullet) = \big(F^p h^l(K^\bullet)\big) / \big(F^{p+1} h^l(K^\bullet)\big)$$

que l'on peut calculer grâce à la proposition suivante ([?] XX 9.3) :

1.1 Proposition : *Il existe une suite spectrale $(E_r^{p,q})_{p,q,r}$ qui aboutit à $E_\infty^{p,q} = \mathrm{G}^p h^{p+q}(K)$, telle que*

$$E_0^{p,q} = G^p K^{p+q}$$
$$E_1^{p,q} = h^{p+q}_{D^\bullet}(\mathrm{G}^p K^\bullet)$$

Dans le cas particulier de notre double complexe, $E_0 = K^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{C}^{p,q})$.

De même $\mathrm{G}^p K^l = K^{p,l-p}$, qui s'inclut dans le gradué différentiel $\mathrm{G}^p K^\bullet = K^{p,\bullet-p}$ avec la différentielle induite "$D^\bullet | F^p$ modulo F^{p+1}". Cette dernière se réduisant à

$(-1)^p\delta^{\bullet-p}$, $E_1^{p,q} = h^{p+q}_{\delta^{\bullet-p}}K^{p,\bullet-p} = h^q_{\delta^q}(K^{p,\bullet})$. Mais la résolution de Godement $\mathcal{C}^{p,\bullet}$ calcule la cohomologie du faisceau $\Omega^p_{X/S}$ donc

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/S}). \tag{1.1.1}$$

Enfin $E_\infty^{p,q} = \mathrm{G}^p(h^{p+q}(K^\bullet))$ donc $\bigoplus_{p+q=l} E_\infty^{p,q} = h^{p+q}(K^\bullet) = \boldsymbol{H}^{p+q}(X, \Omega^\bullet_{X/S})$, d'où l'isomorphisme (non canonique) :

$$\bigoplus_{p+q=l} E_\infty^{p,q} \cong H^l_{DR}(X/S). \tag{1.1.2}$$

1.2. Si $X \to S$ est propre de dimension n, il est de type fini donc les $\Omega^i_{X/S}$ sont des faisceaux cohérents et les $H^i(X, \Omega^j_{X/S})$ sont des k-espaces vectoriels de dimension finie, notée $h^{p,q}$, d'après EGA III 3.2.1 (admis) (théorème de Serre [**8**] III.5.2 dans le cas projectif). Par la convergence de la suite spectrale, les groupes $H^n_{\mathrm{DR}}(X/S)$ sont aussi de dimension finie h^n. L'inégalité $\dim E_\infty^{p,q} \leqslant \dim E_r^{p,q}$ a donc un sens, avec égalité ssi la suite stationne en (p,q) à partir de l'étape r [1]. En particulier elle stationne globalement en E_1 ssi pour chaque $l \in [0,n]$, $\sum_{p+q=l} \dim E_\infty^{p,q} = \sum_{p+q=l} \dim E_1^{p,q}$, soit en vertu de (1.1.1) et (1.1.2) :

$$h^l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}. \tag{1.2.1}$$

§2. Frobenius et isomorphisme de Cartier

2.1. Soit S un schéma de caractéristique p. Le morphisme de Frobenius $F_S : S \to S$ est défini comme l'identité sur l'espace topologique et l'élévation à la puissance p sur les sections de $\mathcal{O}_S$ [2]. Il est fonctoriel, c'est à dire que pour tout S-schéma $f : X \to S$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_X"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ S \arrow[r, "F_S"] & S \end{tikzcd} \tag{2.1.1}$$

Soit $X \to S$ un S-schéma, X' le produit fibré $S^{(p)} \times_S X$ ($S^{(p)}$ explicite que S est vu comme S-schéma via F_S). Le *Frobenius relatif de X sur S*, $F_{X/S} : X \to X'$ (ou F

1. En fait X est de type fini sur k donc de dimension finie donc la suite spectrale est concentrée dans le carré $[0,n] \times [0,n]$ à partir de $r = 1$ puisque par le théorème de finitude de Grothendieck ([**8**] III.2.7), $E_1^{p,q} = 0$ pour $q \geqslant n+1$. Donc elle stationne *globalement* en un r fini.

2. Compatible à la localisation et morphisme local sur les tiges donc morphisme d'espaces localement annelés

quand c'est clair), est l'unique morphisme qui factorise F_X et f :

(2.1.2)
$$\begin{tikzcd}
X^{(p)} \arrow[r, dotted, "F_{X/S}"] \arrow[rr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[r, "(F_S)_X"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
 & S^{(p)} \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}$$

($X^{(p)}$ explicite que X est vu comme $S^{(p)}$-schéma, le $\square$ veut dire cartésien). On vérifie que l'espace topologique X muni du faisceau $f^{-1}(\mathcal{O}_S)^{(p)} \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)} \mathcal{O}_X$ [3] satisfait à la propriété universelle de X'. Le Frobenius relatif $F_{X/S}$ s'explicite alors comme l'identité sur l'espace topologique et $\mathrm{id} \otimes F_X$ sur les faisceaux [4].

2.2 Exemple : Pour $S = \operatorname{Spec} A$ et $X = \operatorname{Spec} A[X_1, \dots, X_n]$, $X' = \operatorname{Spec} B'$ avec $B' = A^{(p)} \otimes_A A[X_1, \dots, X_n] = A^{(p)} \otimes_A A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{(\mathrm{id} \otimes F_A, \mathrm{id})} A^{(p)}[X_1, \dots, X_n]$ Avec cette identification [5],

$$\begin{tikzcd}
A^{(p)}[X_1, \dots, X_n] & A^{(p)}[X_1, \dots, X_n] \arrow[l, dotted, "F_{B/A}"'] & A[X_1, \dots, X_n] \arrow[l, "F_A{,}\mathrm{id}"'] \arrow[ll, bend right, "F_B"'] \\
 & A^{(p)} \arrow[ul, "i"] \arrow[u, "i"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & A \arrow[l, "F_A"] \arrow[u, "i"'] .
\end{tikzcd}$$

Donc $F_{B/A}$ est le morphisme qui est l'identité sur $A^{(p)}$ et envoie X_i sur X_i^p.

Le morphisme déduit de $F_{X/S}^\sharp$ par fonctorialité sur les différentielles [6] est nul :

$$\begin{aligned} \Omega(F_{X/S}^\sharp) : \Omega_{X'/S^{(p)}} &\to F_{X/S*}\Omega_{X/S} \\ 1 \otimes dr &\to 1.d(r^p) = 0 \text{ donc} \end{aligned}$$

2.3 Propriété : *la différentielle du complexe $F_{X/S*}\Omega^\bullet_{X^{(p)}/S^{(p)}}$ est $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire* [7] [8].

---

3. *[personnel : $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ désigne ici le sous-anneau image inverse $f^\sharp(f^{-1}(\mathcal{O}_S))$, où $f^\sharp$ est le morphisme de faisceaux associé à f.]*

4. *[personnel : et $(F_S)_X^\sharp = (1, \mathrm{id}_{\mathcal{O}_X})$, $p_1^\sharp = (f^\sharp, 1) = (\text{"}\mathrm{id}_{f^{-1}(\mathcal{O}_S)^{(p)}}\text{"}, 1)$.]*

5. Ici, $X' \cong X^{(p)}$ comme $S^{(p)}$-schémas. Ce n'est pas toujours le cas, *cf.* A.1.1

6. *[personnel : les $\{1 \otimes dr,\ r \in \mathcal{O}_X\}$ engendrent bien $f^{-1}(\mathcal{O}_S)^{(p)}$-linéairement $\Omega_{X'/S}$ par compatibilité de Ω aux changements de base.]*

7. *[personnel : ou dit autrement, la différentielle de $\Omega^\bullet_{X^{(p)}/S^{(p)}}$ est $F_{X/S}^{-1}(\mathcal{O}_{X'})$-linéaire, en particulier*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X^{(p)}} \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "①"] & \\
\Omega_{X^{(p)}/S^{(p)}} \arrow[r, shift left] & \Omega_{X^{(p)}/X'} \arrow[l, dotted, shift left, "②"]
\end{tikzcd}$$

elle se factorise en degré 1 par ② ∘ ① (propriété universelle de $\Omega_{X^{(p)}/X'}$). Donc la deuxième suite exacte fondamentale est scindée à droite mais elle ne l'est pas à gauche en général ! (cf. note suivante)]

8. $\Omega(F_{X/S}^\sharp)$ s'étend en un morphisme de complexes $\Omega^\bullet_{X'/S^{(p)}} \to F_{X/S*}\Omega^\bullet_{X/S}$ (fait général) mais ne s'étend pas en un morphisme de complexes "$F_{X/S}^*\Omega^\bullet_{X'/S^{(p)}} \to \Omega^\bullet_{X/S}$" puisque le "complexe" de gauche n'existe pas en général. Il faudrait au moins que la deuxième suite exacte fondamentale soit scindée à gauche (pour le prolongement en degré 0 et 1), ce qui n'est pas le cas avec $X = \operatorname{Spec} B$ pour $B = A[X_1 \dots X_n]$: $B \otimes \Omega_{B/A} = \Omega_{B/A} \xrightarrow{\Omega F_{B/A}} \Omega_{B/A}$ n'est pas injective car nulle sur les dT_i.

Une conséquence très importante est que les faisceaux de cycles Z^i et de bords B^i sont des $\mathcal{O}_{X'}$-modules et, comme B^i est (toujours) stable par le produit extérieur ($da \wedge db = d(a \wedge db)$), on en déduit que *le faisceau de cohomologie* $\bigoplus \mathcal{H}^i F_* \Omega^\bullet_{X/S}$ *est lui aussi une* $\mathcal{O}_{X'}$*-algèbre graduée alternée* (anticommutative quand $p = 2$).

2.4 Proposition : *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme* lisse *entre schémas de caractéristique* p*. Alors le Frobenius relatif* $F_{X/S} : X \to X'$ *est fini et plat et la* $\mathcal{O}_{X'}$*-algèbre* $F_*\mathcal{O}_X$ *est localement libre de rang* p^n*. En particulier si* f *est étale,* $F_{X/S}$ *est un isomorphisme.*

Démonstration : De façon générale un morphisme lisse $f : X \to S$ se décompose localement en $X \xrightarrow{g} \mathbf{A}^n_S \xrightarrow{h} S$ où g est étale et h la projection standard. Soit $Z = \mathbf{A}^n_S$. Sachant que les propriétés à vérifier sont stables par composition et changement de base, il suffit de les vérifier pour $F_{X/Z}$ et $F_{Z/S}$ (9). Pour le dernier c'est clair : l'exemple précédent montre que $B = S[X_1, \dots X_n]$ est localement libre sur $Z' = Z$ de base les $\prod X_i^{m_i}$ avec $0 \leqslant m_i \leqslant p - 1$.

(2.4.1)
$$\begin{tikzcd}
X^{(p)} \arrow[r, "F_{X/Z}"] \arrow[rr, bend left, "F_X"] \arrow[dr, "g \text{ ét.}"'] & X' \arrow[r, "(F_Z)_X"] \arrow[d, "p_1" , "\text{ét.}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "g", "\text{ét.}"'] \\
 & Z^{(p)} \arrow[r, "F_Z"] & Z
\end{tikzcd}$$

Pour le premier, il suffit de montrer que $F_{X/Z}$ est un isomorphisme (ce sera de toutes façons utilisé pour démontrer l'isomorphisme de Cartier). Je le vérifie dans le cas qui nous intéresse, *i.e.* quand S est le spectre de k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. Il reste sûrement des arguments à simplifier. $F_{X/Z}$ est étale car le composé $(X' \to Z^{(p)}) \circ F_{X/Z} = (X^{(p)} \to Z^{(p)})$ est étale et $(X' \to Z^{(p)})$ est non ramifié (étale). $F_{X/Z}$ est fini puisque la composée $(F_Z)_X \circ F_{X/Z} = F_X$ est finie [F_X étant affine et "fini" étant une propriété locale sur la base, vraie ici car X est localement de type fini sur k et k est parfait]. Ensuite, on sait qu'un morphisme étale fini $g : X \to Z$ est localement de la forme $\mathcal{O}_{Z,z} = B \to C = \frac{B[X]}{P} = \mathcal{O}_{X,x}$, où P est unitaire et (P, P') engendrent $B[X]$ (10). Cela n'est pas indispensable mais servira à alléger les

9. Par un changement de base explicite sur le diagramme suivant, dont il est immédiat de vérifier qu'il commute et que ses trois carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "g"'] & X'^{/S} \arrow[l] \arrow[d, dotted, "g \otimes F_S"] & X'^{/Z} \arrow[l, dotted] \arrow[d, "p_1"] & X^{(p)} \arrow[l, "F_{X/Z}"'] \arrow[ll, bend right, "F_{X/S}"'] \arrow[dl, "g"] \\
Z \arrow[d] & Z'^{/S} \arrow[l] \arrow[d, "p_1"] & Z^{(p)} \arrow[l, "F_{Z/S}"'] \arrow[ll, bend right, "F_Z"'] \arrow[dl] & \\
S & S^{(p)} \arrow[l, "F_S"'] & &
\end{tikzcd}$$
.

10. $\boxed{\Leftarrow}$: P étant unitaire, C est libre sur B de base $\overline{X^i}$ avec $i < \deg(P_n)$ donc plat. Pour vérifier "non ramifié", *i.e.* $\Omega_{C/B} = 0$, on peut par exemple montrer que dans la première suite

notations. La situation est $F_{C/B} : C' \to C^{(p)}$, *i.e.* $\mathrm{id} \otimes F_C : \big(B^{(p)} \otimes \frac{B[T]}{P}\big) \to \frac{B[T]^{(p)}}{P}$ (11). $C^{(p)}$ est de présentation finie comme C'-algèbre (12) :

$$\big(B^{(p)} \otimes \frac{B[T]}{P}\big)[Y] \twoheadrightarrow \frac{B[T]}{P}$$
$$Y \to T$$

de noyau $< P(Y), Y^p - T >$, et même de présentation finie *comme C'-module* :

$$\big(B^{(p)} \otimes \frac{B[T]}{P}\big)[1, Y, \ldots, Y^{p-1}] \twoheadrightarrow \frac{B[T]}{P}$$
$$Y^i \to T^i$$

de noyau $\langle \sum_{i \leqslant p-1} a_i Y^i + T \rangle$ où les a_i sont les coefficients de P. Or par hypothèse $F_{C/B}$ est étale donc plat. Donc d'après [?] XVI.3.8 et 3.9, $C^{(p)}$ est un C'-module libre (moins cher que si $C^{(p)}$ était seulement de type fini).

D'autre part l'hypothèse "$F_{C/B}$ étale" implique que $C^{(p)}$ est non ramifié sur C', c'est à dire que l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{C'}$ ne se ramifie pas : $\mathfrak{m}_{C'} C^{(p)} = \mathfrak{m}_{C^{(p)}}$ et l'extension résiduelle $k(C^{(p)})/k(C')$ est finie séparable. Donc $C^{(p)}/\mathfrak{m}_{C'} C^{(p)}$ est un corps, extension finie séparable de $C'/\mathfrak{m}_{C'} C'$ et *radicielle (i.e. injectif et à extensions résiduelles séparables) de degrés multiples de p* car $F_{C/B}$ est radiciel (13). Ces deux hypothèses ne sont compatibles que si l'extension est l'identité : $C^{(p)}/\mathfrak{m}_{C'} C^{(p)} = C'/\mathfrak{m}_{C'} C'$. Le module $C^{(p)}$ étant fini sur C', il est donc engendré par $1_{C'}$ par Nakayama *i.e.* de la forme C'/I. Mais on a vu qu'il est libre donc $C^{(p)} = C'$.

□

$\Omega^i_{X/S}$ étant localement libre sur $\mathcal{O}_X$ de rang C^i_n (f est lisse), on en déduit que *$F_* \Omega^i_{X/Y}$ est localement libre sur $\mathcal{O}_{X'}$ de rang $p^n C^i_n$.*

2.5 Théorème (Isomorphisme de Cartier) : *Soient S de caractéristique p et $X \to S$.*

(a) *Il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres graduées*

$$\gamma : \bigoplus \Omega^i_{X'/S} \to \bigoplus \mathcal{H}^i F_* \Omega^\bullet_{X/S} \text{ tel que}$$

(i) $\underline{i = 0}$: $\gamma = F^\sharp : \mathcal{O}_{X'} \to F_* \mathcal{O}_{X^{(p)}}$

(ii) $\underline{i = 1}$: $\gamma : 1 \otimes dr \to \overline{r^{p-1} dr}$

(b) *Si f lisse, γ est un isomorphisme, noté C^{-1}*

---

exacte fondamentale (de C-modules) : $\frac{P}{P^2} \xrightarrow{d} C.dX \to \Omega_{C/B} \to 0$, la première flêche est surjective. Vrai car la classe $\overline{P}$ s'envoie sur $\overline{P'}.dX = 1.dX \pmod P$ qui engendre $C.dX$. *[personnel : en fait isomorphisme puisque la C-algèbre $\frac{P}{P^2}$ est engendrée par $\overline{P}$, elle s'envoie sur $\overline{P'}.dX = 1.dX$* (mod P) *qui engendre* librement $C.dX$.*]*Pour $\boxed{\Rightarrow}$, on utilise seulement "non ramifié" (et même seulement que l'extention résiduelle est finie et séparable donc monogène) et "fini" (pour appliquer Nakayama à $\mathcal{O}_{X,x}$ fini sur $\mathcal{O}_{Z,z}$).

11. *[personnel : puisque le produit tensoriel est compatible à la localisation et aux $\varinjlim$.]*

12. la structure d'algèbre est donnée par $F_{C/B} = \mathrm{id} \otimes F_C$

13. à simplifier : d'après EGAI 3.5.6, car le composé $F_C = (F_B)_C \circ F_{C/B}$ est entier, surjectif et radiciel

La preuve est détaillée dans A.1.2. Il suffit de définir γ en degré 1 puisque il est à valeurs dans $\bigoplus \mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ qui est une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre graduée anticommmutative d'après la conséquence de 2.3. On se ramène à $X = Z = \mathbf{A}^1_{\mathbf{F}_p} \to \mathbf{F}_p$: $\{1, T, \dots, T^{p-1}\}$ forment une base de $F_{Z*}\mathcal{O}_{Z^{(p)}}$ sur $\mathcal{O}_Z$ et la différentielle $d_{Z^{(p)}/\mathbf{F}_p}$ ($\mathcal{O}_Z$-linéaire) : $F_{Z*}\mathcal{O}_Z \to F_{Z*}\Omega^1_Z = (F_{Z*}\mathcal{O}_Z)dT$ envoie T^i sur $iT^{i-1}dT$ donc H^0 est libre sur $\mathcal{O}_{Z'}$ de base 1 et H^1 est libre sur $\mathcal{O}_{Z'}$ de base $T^{p-1}dT$. Or $\mathcal{O}_{Z'}$ est libre de base 1 et $\Omega^1_{Z'/\mathbf{F}_p}$ libre de base $1 \otimes dT$ donc γ est un isomorphisme.

2.6 Conséquence : *En particulier les $\mathcal{H}^i$ sont localement libres de type fini sur $\mathcal{O}_{X'}$* [14]

14. *[personnel : de la conséquence de 2.3, je déduis par récurrence décroissante sur i que les faisceaux de cocycles $Z^iF_*\Omega^\bullet_{X/S}$ et cobords $B^iF_*\Omega^\bullet_{X/S}$ sont localement libres de type fini. En fait cela ne servira pas lors de l'étude des complexes tronqués au 3.7]*

§3. Décomposition du complexe de de Rham

3.1 Théorème : *Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $S = \operatorname{Spec} k$, $\widetilde{S} = \operatorname{Spec} W_2(k)$, X un S-schéma lisse. À tout $\widetilde{S}$-schéma lisse $\widetilde{X}$ relevant X* [15]*, est associé canoniquement un isomorphisme de $D(\mathcal{O}_{X'}) := D(\mathcal{O}_{X'}\text{–Mod})$:*

$$\varphi_{\widetilde{X}} : \bigoplus_{i<p} \Omega^i_{X'/S}[-i] \overset{\sim}{\to} \tau_{<p} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$$

tel que $\mathcal{H}^i \varphi_{\widetilde{X}} = (C^{-1})^{①}$ (l'isomorphisme de Cartier $(C^{-1})^{①}$ en degré i) pour $i < p$.

Un "relèvement" signifie un diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \widetilde{X} \arrow[d] \\ S \arrow[r, "i"] & \widetilde{S} \end{tikzcd}$$

avec i (et donc j) immersions fermées modulo p

(a) Réduction à la définition de $\boldsymbol{\varphi^1_{\widetilde{X}}}$: dans $D(\mathcal{O}_{X'})$ on n'a plus le bifoncteur $\bigwedge$. $\Omega^1_{X'/S}$ est localement libre (de type fini) donc plat sur $\mathcal{O}_{X'}$, de même que les $F_*\Omega^a_{X/S}$, donc $\overset{L}{\otimes}$ coïncide avec $\otimes$ pour $(\Omega^1_{X'/S}[-1])^{\overset{L}{\otimes} i}$ et $(F_*\Omega^a_{X/S})^{\overset{L}{\otimes} i}$ ([**7**] prop II.1.2 et lemme II.4.1, admis). On définit φ^1 via "l'antisymétrisation" $\mathfrak{a} : \Omega^i_{X'/S}[-i] \to (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}[-i] : \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_i \to \frac{1}{i!} \sum_{\sigma \in \sigma_i} sgn(\sigma) \omega_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \omega_{\sigma(i)}$, **définie pour $\boldsymbol{i < p}$**, qui est clairement une section du produit antisymétrique $(F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\otimes i} \underset{\mathfrak{a}}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$:

$$\begin{tikzcd} (\Omega^1_{X'/S})^{\otimes i}[-i] \arrow[r, "(\varphi^1_{\widetilde{X}})^{\otimes i}"] & (F_*\Omega^\bullet_{X/S})^{\otimes i} \arrow[d, "\substack{\text{produit} \\ \text{antisym.}}"] \\ \Omega^i_{X'/S}[-i] \arrow[u, "\mathfrak{a}[-i]"] \arrow[r, dotted, "\varphi^i_{\widetilde{X}}"] & F_*\Omega^\bullet_{X/S} \end{tikzcd}$$

Cette technique ne permet de définir $\varphi^i_{\widetilde{X}}$ que pour $i < p$.

(b) Cas où $\boldsymbol{F : X \to X'}$ se relève globalement :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{F}"] & \widetilde{X'} \\ X \arrow[u, "j"] \arrow[r, "F"] & X' \arrow[u, "j'"'] \end{tikzcd}$$

On veut construire $\varphi^1_{\widetilde{X'}} : \Omega_{X'/S}[-1] \to F_{X/S*}\Omega^\bullet_{X/S}$ tel que $h^1(\varphi^1_{\widetilde{X'}}) = (C^{-1}_{X/S})^{①}$. L'idéal serait de poser pour tout $r \in \mathcal{O}_X$ "$\varphi^1(1 \otimes dr) = d_{X/S} \frac{r^p}{p} = d_{X/S} \frac{F^\sharp(1\otimes r)}{p}$". C'est impossible puisque on est en caractéristique p mais l'existence du relèvement global $\widetilde{F}$ va permettre la même chose formellement, en écrivant "$\boldsymbol{p}^{-1}\widetilde{F}$" à la place de $\frac{F^\sharp(1\otimes r)}{p}$,

15. *[personnel : il suffit que $\widetilde{X}$ soit plat sur $\widetilde{S}$: d'après le critère de lissité par fibres il suffit de vérifier que $\widetilde{X}_{(p)} = X$ est lisse sur $k((p)) = k$, qui est l'hypothèse. Si $\widetilde{S}$ était le spectre de V un anneau de valuation discrète (comme $W(k)$), donc intègre, il faudrait aussi que la fibre générique $X_{(0)}$ soit lisse sur* $\operatorname{Frac}(W(k))$.*]*

où $\boldsymbol{p}$ sera l'isomorphisme $j_*F_*\Omega_{X/S} \xrightarrow{\boldsymbol{p}\,\sim} p\tilde{F}_*\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$ induit par la multiplication par p :

3.2 Propriété : *L'image du morphisme canonique* $\Omega(\tilde{F}^\sharp) : \Omega_{\tilde{X}'/\tilde{S}} \to F_*\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$ *est dans* $pF_*\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$

Démonstration :

$$\begin{array}{ccc} & \Omega^1_{\tilde{X}'/\tilde{S}} \xrightarrow{\Omega(\tilde{F}^\sharp)} F_*\Omega^1_{\tilde{X}/\tilde{S}} & \\ \pi' = \Omega(\mathrm{mod} p\mathcal{O}_{X'}) : \; bda \to \bar{b}d\bar{a} \; \big\downarrow & & \big\downarrow \; \pi = \Omega(\mathrm{mod} p\mathcal{O}_X) \\ & j'_*\Omega^1_{X'/S} \xrightarrow{0} j_*F_*\Omega^1_{X/S} & \end{array}$$

Ω est un foncteur donc le diagramme commute donc $\pi \circ \Omega(\tilde{F}^\sharp) = 0$

□

3.3 Propriété fondamentale : $\boldsymbol{p} : j_*\Omega_{X/S} \xrightarrow{\sim} p\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$

Démonstration : $j_*\Omega_{X/S} = j_*\Omega_{(\mathcal{O}_{\tilde{X}}\otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} j_*\mathcal{O}_S)/j_*\mathcal{O}_S} = j_*\mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$ or $j_*\mathcal{O}_S \overset{\boldsymbol{p}}{\simeq} p\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ car k est parfait. Donc $j_*\Omega_{X/S} \xrightarrow{\boldsymbol{p}\,\sim} p\mathcal{O}_{\tilde{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$.

Reste à voir que $p\mathcal{O}_{\tilde{S}} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}} \xrightarrow{\sim} p\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$. C'est toujours vrai pour $\Omega^0_{\tilde{X}/\tilde{S}} = \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ car $\widetilde{X}$ est en particulier *plat* sur $W_2(k)$.

Mais $\widetilde{X}$ étant lisse sur $W_2(k)$, $\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}}$ est localement libre par [**1**] 4.2.7 c). Donc il est plat sur $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ donc plat sur $\mathcal{O}_{\tilde{S}}$ par transitivité.

□

La preuve montre que cette propriété est en fait équivalente à l'existence d'un relèvement global de X lisse sur $W_2(k)$ (16).

3.4 Définition : du morphisme "déduit de $\Omega(\tilde{F}^\sharp)$ par division par p"

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{\tilde{X}'/\tilde{S}} & \xrightarrow{\Omega(\tilde{F}^\sharp)} & p\tilde{F}_*\Omega_{\tilde{X}/\tilde{S}} \\ {\scriptstyle \pi'}\big\downarrow & & \big\uparrow {\scriptstyle \boldsymbol{p}\,\sim} \\ j'_*\Omega_{X'/S} & \overset{f}{\dashrightarrow} & j_*F_*\Omega_{X/S} \end{array}$$

[détail : $f : \omega \to$ un relevé $\widetilde{\omega}$ de $\omega \to$image par $\Omega(\tilde{F}^\sharp) \to$image par $\boldsymbol{p}^{-1}$ bien définie car si $\widetilde{\omega_1}$ et $\widetilde{\omega_2}$ diffèrent d'un $p\Omega_{\tilde{X}'/\tilde{S}}$ la différence est tuée par $\Omega(\tilde{F}^\sharp)$]

3.5 Propriété : *l'image de* f *est contenue dans* $Z^1F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ *et le composé avec la projection sur* $\mathcal{H}^1F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ *est l'isomorphisme de Cartier* (C^{-1})① *en degré 1.*

16. Par le critère suivant : M est plat sur $W := W_2(k)$ ssi la multiplication par p induit un isomorphisme $M/pM \xrightarrow{\boldsymbol{p}\,\sim} pM$. En effet par [GaGa] 21.3, M est plat sur W ssi pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset W$, $\mathrm{Tor}_1^W(W/\mathfrak{a}, M) = 0$ ssi $\mathfrak{a} \otimes M \to \mathfrak{a}M$ est un isomorphisme. Le seul idéal non nul de W est pW et la suite exacte $0 \to pW \to W \xrightarrow{\boldsymbol{p}} pW \to 0$ tensorisée par M fournit toujours $M/pM \xrightarrow{\boldsymbol{p}\,\sim} p \otimes M$. Donc $M/pM \to pM$ est un isomorphisme ssi M est plat sur W. Ce critère montre par exemple que $W_2(k)$ est plat sur $W_2(\mathbf{F}_p)$ pour k parfait.

Démonstration : en effet si a est une section locale de $\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ de réduction a_0 mod p,

$$\tilde{F}^\sharp(1 \otimes a) = a^p + pb(a) \tag{3.5.1}$$

pour un certain $b(a) \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ (ou de façon équivalente un $\boldsymbol{p}(u(a_0))$, $u(a_0) := \overline{b(a)}$ mod $p \in \mathcal{O}_X$) car la réduction mod$p$ de $\tilde{F}^\sharp(1 \otimes a)$ est $F^\sharp(1 \otimes a_0) = a_0^p$. Donc $\Omega(\tilde{F}^\sharp)(1 \otimes da) = pa^{p-1}da + pdb(a)$ [17]. f étant déterminé de manière unique par division par p,

$$f(1 \otimes da_0) = a_0^{p-1}da_0 + du(a_0). \tag{3.5.2}$$

□

En particulier,

$$df = 0 \tag{3.5.3}$$

donc f définit un morphisme $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire de complexes $f : \Omega_{X'/S}[-1] \to F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ tel que $\mathcal{H}^1(f) = (C^{-1})^{\textcircled{1}}$ (complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules car la différentielle de $F_*\Omega^1_{X/S}$ est $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire). Dans ce cas particulier, la flèche $\varphi^1_{\widetilde{X}} = f$ de $D(\mathcal{O}_{X'})$ est en fait un morphisme de complexes. Mais dans la catégorie des complexes, $\Lambda^i F_*\Omega^1_{X/S} \cong F_*\Omega^i_{X/S}$. Donc on peut même construire un morphisme $\varphi^i_{\widetilde{X}}$ pour tout $i \in N$: $\varphi^i_{\widetilde{X}} := \Lambda^i\varphi^1_{\widetilde{X}}$. L'isomorphisme de Cartier C^{-1} étant multiplicatif, $\varphi^i_{\widetilde{X}}$ suivi de la projection sur $\mathcal{H}^i F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est aussi $(C^{-1})^{\textcircled{1}}$.

(c) Comparaison de deux relèvements : soient $\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ deux $S^{(p)}$-morphismes relevant F. Alors $\tilde{F}_2^\sharp - \tilde{F}_1^\sharp : \mathcal{O}_{\widetilde{X}'} \to p\tilde{F}_{i*}\mathcal{O}_{\widetilde{X}}$ est une différence de deux morphismes de $\mathcal{O}_{S'}$-algèbres dans un idéal nilpotent donc est une dérivation D. D'où une dérivation δ déduite par division par p qui se factorise en h_{12} :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\widetilde{X}'} \arrow[rr, "D"] \arrow[d] & & p\tilde{F}^\sharp\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \\
j'_*\mathcal{O}_{X'} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "d"'] & & j_*F_*\mathcal{O}_X \arrow[u, "\boldsymbol{p}\ \sim"'] \\
& j'_*\Omega^1_{X'/S} \arrow[ur, dotted, "h_{12}"] &
\end{tikzcd}$$

Si comme en (b), pour $a \in \mathcal{O}_{\widetilde{X}}$, $\tilde{F}_i^\sharp(1 \otimes a) = a^p + \boldsymbol{p}u_i(a)$ alors directement par construction : $h_{12}(da_0 \otimes 1) = u_2(a) - u_1(a)$ et donc d'après (3.5.2)

$$f_2 - f_1 = dh_{12}. \tag{3.5.4}$$

Egalement par construction :

$$h_{12} + h_{23} + h_{31} = 0 \tag{3.5.5}$$

17. *[personnel : détermine entièrement f puisque les $1 \otimes da$ engendrent $\mathcal{O}_{X'}$-linéairement $\Omega_{\tilde{X}'/\tilde{S}}$ et que la différentielle de $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est $\mathcal{O}_{X'}$-linéaire.]*

(d) Cas général : $\widetilde{X}$ est lisse sur $\widetilde{S}$ donc par changement de base $\widetilde{X}'$ est lisse sur $\widetilde{S}$ donc F admet partout localement un relèvement $\tilde{F}$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j\ (p^2=0)"] \arrow[d, "F"'] & \widetilde{X} \arrow[d, dotted, "\tilde{F}"] \arrow[dd, bend left, ""] \\ X' \arrow[r] & \widetilde{X}' \arrow[d, "lisse"'] \\ & \widetilde{S} \end{tikzcd} \quad \text{vu autrement :} \quad \begin{tikzcd} & & \widetilde{X}' \arrow[dd, "lisse"] \\ & X' \arrow[ur] & \\ X \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "(p^2=0)"'] & \widetilde{X} \arrow[uur, dotted, "\tilde{F}"'] \arrow[r] & \widetilde{S} \end{tikzcd}$$

Soit un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X et pour tout i un relèvement $\tilde{F}_i$: $\widetilde{U_i} \to \widetilde{U_i}'$ (pas de problème puisque $X, X', \widetilde{X}$ et $\widetilde{X'}$ ont mêmes espaces sous-jacents), dont on déduit pour chaque i $f_i : \Omega^1_{X'/S}|_{U'_i} \to F_*\Omega^1_{U_i/S}$ et sur les intersections h_{ij} : $\Omega^1_{X'/S}|_{U'_{ij}} \to F_*\Omega^1_{U_{ij}/S}$. D'après (3.5.3),(3.5.4) et (3.5.5) :

(3.5.6) $$df_i = 0\,; \qquad f_j - f_i = dh_{ij}\,; \qquad h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0.$$

Soit le double complexe de Čech : $\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$, $d_h = d_{\mathrm{DR}}$ et $d_v = \delta$ de complexe simple associé noté $\check{\mathcal{C}}^\bullet$, $D_n = \bigoplus_{i+j=n}(d_{ij} + (-1)^i\delta_{ij})$. De manière générale il fournit le quasi-isomorphisme [18]

(3.5.7) $$\varepsilon : F_*\Omega^\bullet_{X/S} \to F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S}).$$

Soit $\phi^1_{(\mathcal{U},(\widetilde{F_i}))} = (\phi_{0,1}, \phi_{1,0}) : \Omega^1_{X'/S} \to F_*\check{\mathcal{C}}^{①}(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S}) = F_*\check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \oplus F_*\check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}, \Omega^1_{X/S})$ défini par $(\phi_{0,1}(\omega))_{ij} = h_{ij}(\omega|_{U'_{ij}})$ et $(\phi_{1,0}(\omega))_i = f_i(\omega|_{U'_i})$. (3.5.6) impliquent que c'est un morphisme de complexes [vérifié lorsqu'on peut indicer le recouvrement avec un ensemble totalement ordonné, avec la convention U_{ij} indexé par la paire (i,j) ordonnée $i<j$]

(3.5.8) $$\phi^1_{(\mathcal{U},(\widetilde{F_i}))} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \to F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{X/S})$$

on peut finalement construire

(3.5.9) $$\phi^1_{\widetilde{X}} : \Omega^1_{X'/S}[-1] \to F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

dans $D(\mathcal{O}_{X'})$ comme composée de (3.5.8) et de l'inverse de (3.5.7). Vérifions qu'il ne dépend ni du recouvrement ni des relèvements :

- *(i)* (3.5.9) ne change pas si on remplace $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ par un recouvrement $\mathcal{V} = (V_j)_j$ plus fin avec les relèvements induits par les mêmes $\widetilde{F_i}$: pour chaque j on choisit un $\theta(j) \in I$ au hasard tel que $V_j \subset U_{\theta(j)}$. Ce choix définit un morphisme de bicomplexes

$$\begin{aligned} \theta^* : \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^*_{X/S}) &\to \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}_I, \Omega^*_{X/S}) \\ \alpha &\to (\theta^*\alpha)_{j_1\ldots j_n} = \alpha_{\theta(j_1)\ldots\theta(j_n)}|_{V_{j_1\ldots j_n}} \end{aligned}$$

(morphisme de bicomplexes car clairement compatible aux d_{DR} et aux δ de Čech) donc induit un morphisme de complexes simples associés. D'où le diagramme (déduit

18. Car F est affine donc F_* est exact sur les faisceaux cohérents

de (3.5.7))

$$\begin{tikzcd}
 & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{V},\Omega^\bullet_{X/S}) \\
F_*\Omega^\bullet_{X/S} \arrow[ur, "\varepsilon_{\mathcal{V}}", "q.iso"'] \arrow[r, "\varepsilon_{\mathcal{U}}", "q.iso"'] & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\Omega^\bullet_{X/S}) \arrow[u, "\theta^*"']
\end{tikzcd}$$

clairement commutatif. Est-ce que l'autre diagramme (déduit de (3.5.8))

$$\begin{tikzcd}
 & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{V},\Omega^\bullet_{X/S}) \\
\Omega^1_{X'/S}[-1] \arrow[ur, "\phi^1_{(\mathcal{V},(\widetilde{F_i}))}"] \arrow[r, "\phi^1_{(\mathcal{U},(\widetilde{F_i}))}"'] & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\Omega^\bullet_{X/S}) \arrow[u, "\theta^*"']
\end{tikzcd}$$

commute aussi ?

$$\begin{tikzcd}
 & \Big(\Big(h_{\theta(a)\theta(b)}\big(\omega|_{U_{\theta(a)\theta(b)}}\big)_{|V_{ab}}\Big)_{ab},\ \Big(f_{\theta(a)}\big(\omega|_{U_{\theta(a)}}\big)_{|V_a}\Big)_a\Big) \\
\omega \arrow[ur, dotted, "\phi^1_{(\mathcal{V},(\widetilde{F_i}))}", "commute\,?"'] \arrow[r, "\phi^1_{(\mathcal{U},(\widetilde{F_i}))}"'] & \Big(\big(h_{ij}(\omega|_{U_{ij}})\big)_{ij}, \big(f_i(\omega|_{U_i})\big)_i\Big) \arrow[u, "\theta^*"']
\end{tikzcd}$$

C'est vrai car les relèvements sont induits par les mêmes $\widetilde{F_i}$. Finalement :

$$\begin{tikzcd}
 & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{V},\Omega^\bullet_{X/S}) & \\
\Omega^1_{X'/S}[-1] \arrow[ur, "\phi^1_{(\mathcal{V},(\widetilde{F_i}))}"] \arrow[r, "\phi^1_{(\mathcal{U},(\widetilde{F_i}))}"] & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\Omega^\bullet_{X/S}) \arrow[u, "\theta^*"'] & F_*\Omega^\bullet_{X/S} \arrow[ul, "\varepsilon_{\mathcal{V}}"', "q.iso"] \arrow[l, "\varepsilon_{\mathcal{U}}", "q.iso"']
\end{tikzcd}$$

commute donc le grand triangle commute dans $D(\mathcal{O}_{X'})$.

- *(ii)* Soient deux recouvrements $(\mathcal{U},\widetilde{F}_i)_I$, $(\mathcal{V},\widetilde{F_j})_J$ associés à des relèvements locaux de F différents, ils *raffinent* tous les deux le recouvrement $\Big((\mathcal{U}\coprod\mathcal{V})_{I\coprod J}$, $(\widetilde{F_i})_I\coprod(\widetilde{F_j})_J\Big)$. Les raisonnements précédents s'appliquent :

$$\begin{tikzcd}
 & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U},\Omega^\bullet_{X/S}) & \\
\Omega^1_{X'/S}[-1] \arrow[ur, "\phi^1_{\mathcal{U}}"] \arrow[r, "\phi^1_{\mathcal{U}\coprod\mathcal{V}}"] \arrow[dr, "\phi^1_{\mathcal{V}}"'] & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}\coprod\mathcal{V},\Omega^\bullet_{X/S}) \arrow[u, "i_I^*"] \arrow[d, "i_J^*"'] & F_*\Omega^\bullet_{X/S} \arrow[ul, "\varepsilon_{\mathcal{U}}"', "q.iso"] \arrow[l, "(\varepsilon_{\mathcal{U}},\varepsilon_{\mathcal{V}})"', "q.iso"] \arrow[dl, "\varepsilon_{\mathcal{V}}", "q.iso"'] \\
 & F_*\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{V},\Omega^\bullet_{X/S}). &
\end{tikzcd}$$

Cela montre que φ^1 dépend canoniquement du relèvement $\widetilde{X}$ et va surtout permettre de conclure qu'il répond à la question, *i.e.* que son composé avec la projection sur $\mathcal{H}^1$ réalise l'isomorphisme de Cartier $(C^{-1})^{①}$ en degré 1. Maintenant que $\varphi^1_{\widetilde{X}}$ est construit globalement, il suffit de vérifier cette propriété localement. Sur un voisinage U convenable de chaque point $x \in X$, F se relève globalement en $\widetilde{F}$. Comme la définition de $\varphi^1_{\widetilde{X}}|_U$ ne dépend pas du choix du recouvrement de U ni des relèvements, on choisit le recouvrement $\{U\}$ et le relèvement $\{\widetilde{F}\}$, pour lesquels $\varphi^1_{\widetilde{X}}|_U$ redevient le morphisme f défini en (b).

3.6 Corollaire de la preuve : *Soit X est lisse sur k admettant un relèvement $\widetilde{X}$ lisse sur $W_2(k)$. Alors si F se relève globalement il existe un isomorphisme de* complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules :

$$\varphi_{\widetilde{X}} : \bigoplus_{i \in \mathbf{N}} \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

tel que $\mathcal{H}^i\varphi_{\widetilde{X}} = (C^{-1})^{ⓘ}$ (l'isomorphisme de Cartier en degré i) en tous degrés i.

C'est exactement démontré dans (a) et (b). En effet un relèvement global de F entraîne l'existence du morphisme f "déduit par division par p". Attention ! Si X est seulement plat sur k avec un relèvement $\widetilde{X}$ plat sur $W_2(k)$, la preuve ne marche plus ($\widetilde{X}$ n'est plus lisse sur $W_2(k)$ donc $\Omega_{\widetilde{X}/\widetilde{S}}$ n'est plus forcément localement libre donc plat). Contre-exemple : $k = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, $W = W_2(k) = \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$, $X = \operatorname{Spec} A$, $A = k[X]/(X^p - 1)$ et $\widetilde{X} = \operatorname{Spec} \widetilde{A}$, $\widetilde{A} = W[X]/(X^p - 1)$ qui plat sur W car il vérifie le critère $\widetilde{A}/p\widetilde{A} \xrightarrow{\boldsymbol{p}\,\sim} p\widetilde{A}$ (*cf.* note dans 3.3). Par contre $M := \Omega_{\widetilde{A}/W}$ n'est pas plat sur W car il ne vérifie pas ce critère. En effet M/pM vaut $\Omega_{A/W}$ alors que $\Omega_{\widetilde{A}/W}$ est engendré par dX qui vérifie $d(X^p - 1) = 0$ d'où $pdX = 0$ donc $p\Omega_{\widetilde{A}/W} = 0$.

3.7 Corollaire : *Soit X un k-schéma lisse de dimension $n \leqslant \boldsymbol{p}$ relevable sur $W_2(k)$. Alors le complexe $F_*\Omega^\bullet_{X/S}$ est isomorphe dans $D(\mathcal{O}_{X'}$*–Mod) *à un complexe à différentielle nulle.*

Démonstration : Par le théorème 3.1, le résultat est vrai sur le sous-schéma fermé formé des composantes irréductibles de X de dimension $< p$. On peut donc supposer que X est partout de dimension $n = p$.

Première observation fondamentale : on a l'accouplement parfait

$$(*) \qquad F_*\Omega^i_{X/S} \times F_*\Omega^{n-i}_{X/S} \to \mathcal{H}^n F_*\Omega^\bullet_{X/S}$$

donné par $\wedge$ suivi de la projection sur $\mathcal{H}^n$. On se servira en particulier du fait que, pour cette dualité, l'adjoint de d est d à un signe près (car $\overline{d(\alpha \wedge \beta)} = 0$). Démontrons-la : on remarque que $\mathcal{H}^n F_*\Omega_{X'/S}$ est localement isomorphe au module libre de rang 1 $\langle t_1^{p-1} \cdots t_n^{p-1} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n \rangle$ (avec la description locale de 2.4). En effet $t_i^{q \not\equiv (p-1)} t^I$, I ne contenant pas l'indice i, a une classe de cohomologie nulle car il s'intègre en $(-1)^i \frac{t_i^{q+1}}{q+1} t^I dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt_i} \cdots \wedge dt_n$.

(1) injectivité de $F_*\Omega^i_{X/S} \to \mathcal{H}om(F_*\Omega^{n-i}_{X/S}, \mathcal{H}^n)$: on considère une section locale u de $F_*\Omega^i_{X/S}$ dont le produit extérieur avec toute section locale v de $F_*\Omega^{n-i}_{X/S}$ a sa classe dans $\mathcal{H}^n$ nulle, *i.e.* $\overline{u \wedge v} = 0$. Sur un ouvert trivialisant elle s'écrit $u = \sum_{|J|=i} \mu_{I,J} t^I dt_J$, où I est un multiindice qui signifie $t^I = \prod_{k \in \{0,\ldots,n\}} t_k^{m_k}$, $m_k \in \{0, \ldots, p-1\}$ et J signifie $dt_J = dt_{j_1} \wedge \cdots \wedge dt_{j_i}$. Montrons que $u = 0$, *i.e.*

montrons que chaque $\mu_{I,J}$ est nul : on considère $v = t^{\complement I} dt_{\complement J}$, où $\complement I$ et ^{C}J désignent les indices *complémentaires* de I et J (*i.e.* tels que $t^I t^{\complement I} = t_1^{p-1} \cdots t_n^{p-1}$ et $dt_{\complement J} dt_J = (-1)^{\varepsilon(J, \complement J)} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$). Alors $\mu_{I,J} = \pm \overline{u \wedge v} = 0$.

(2) surjectivité : soit λ une section locale de $\mathcal{H}om(F_* \Omega^{n-i}_{X/S}, \mathcal{H}^n)$ sur un ouvert trivialisant. Elle est déterminée par chaque $\lambda(t^I dt_J) = a_{I,J} t_1^{p-1} \cdots t_n^{p-1} dt_1 \wedge \cdots \wedge dt_n$, elle est donc réalisée par le produit extérieur avec la forme $v = \sum_{I,|J|=i} \varepsilon(J, {}^C J) \lambda_{I,J} t^{\complement I} dt_{\complement J}$ (où $\varepsilon(J, {}^C J)$ désigne le signe de la permutation $\{1, \ldots, n\} \to \{J, {}^C J\}$), suivi de la projection sur $\mathcal{H}^n$.

Une interprétation de cette dualité avec la forme trace est donnée en appendice.

En supposant désormais que $n = p$, on considère le triangle de $D(\mathcal{O}_{X'})$ engendré par la suite :

$$(\dagger) \qquad \tau_{\leqslant p-1} F_* \Omega^\bullet_{X/S} \to F_* \Omega^\bullet_{X/S} \to \mathcal{H}^p[-p] \xrightarrow{e} \ldots$$

[19] $\tau_{\leqslant p-1} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$ étant décomposable, la conclusion est équivalente au fait que ce triangle est scindé. La deuxième remarque fondamentale est que c'est vrai ssi le morphisme

$$e : \mathcal{H}^p[-p] \to \Big(\bigoplus_{i<p} \mathcal{H}^i[-i] \Big)[1]$$

est nul. C'est démontré dans Astérisque 239 p100 (en utilisant qu'on a la suite exacte longue des Ext^i pour tout triangle dans une catégorie triangulée quelconque).

Les composantes e_i $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$ de e sont à valeurs dans $H^{p-i+1}(X', \ldots)$:

$$e_i \in \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{O}_{X'})}(\mathcal{H}^p[-p], \mathcal{H}^i[-i+1]) = H^{p-i+1}(X', \mathcal{H}om(\mathcal{H}^p, \mathcal{H}^i)),$$

où l'égalité est détaillée dans l'appendice 2.4.

Le triangle $(\dagger)$ s'envoie dans le triangle

$$(\ddagger) \qquad \tau_{[1,p-1]} F_* \Omega^\bullet_{X/S} \to \tau_{\geqslant 1} F_* \Omega^\bullet_{X/S} \to \mathcal{H}^p[-p] \xrightarrow{e} \ldots$$

par projection sur $\tau_{\geqslant 1}$. On utilise la première remarque fondamentale : le dual de $F_* \Omega^\bullet_{X/S}$ est $F_* \Omega^{p-\bullet}_{X/S}$ *avec la même différentielle d donc les mêmes faisceaux de cohomologie* donc l'obstruction à décomposer $(\ddagger)$ est $\bigoplus_{i=1}^{p-1} e_i$ avec les *mêmes* e_i. D'autre part, $\tau_{\leqslant p-1} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$ est décomposable dans $D(\mathcal{O}_{X'})$ donc par dualité de Grothendieck $\tau_{\geqslant 1} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$ est aussi somme de ses $\mathcal{H}^i[-i]$, *i.e.* est décomposable. La dernière affirmation provient de deux propriétés :

(1) $\tau_{\leqslant p-1} F_* \Omega^\bullet_{X/S} = R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\tau_{\leqslant p-1} F_* \Omega^\bullet_{X/S}, \mathcal{H}^p F_* \Omega^\bullet_{X/S})$ [20] ;

(2) La décomposabilité est préservée par $R\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(-, \mathcal{H}^p F_* \Omega^\bullet_{X/S})$ [21].

19. La première flèche est une inclusion et la deuxième flèche est définie par la projection $F_* \Omega^\bullet_{X/S} \to \{\Omega^{p-1}/Z^{p-1} \to Z^p\} \xrightarrow{\text{projection (q.iso)}} \mathcal{H}^p[-p]$. Donc ce sextuplet est quasi-isomorphe à une suite exacte de complexes, qui engendre à son tour un triangle par le cône de son premier morphisme.

20. $\tau_{\leqslant p-1} F_* \Omega^\bullet_{X/S}$ n'est pas nécessairement à composantes localement libres car son dernier terme est un noyau et celui-ci n'est pas forcément transformé en conoyau par $\mathcal{H}om(-, \mathcal{H}^p F_* \Omega^\bullet_{X/S})$.

21. "Décomposable" signifie isomorphe dans $D(\mathcal{O}_{X'})$ à un complexe décomposé. Mais le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(-, \mathcal{H}^p F_* \Omega^\bullet_{X/S})$ ne préserve pas toujours les quasi-isomorphismes, d'où l'utilisation de son foncteur dérivé.

Elles sont vérifiées pour la raison suivante : le foncteur $\mathcal{H}om^{\bullet}_{\mathcal{O}_{X'}}(-,\mathcal{H}^p)$ induit un ∂-foncteur additif de $K(Coh(\mathcal{O}_{X'}))$ dans lui-même [22]. Par **[7]** I.5.1 il admet un foncteur dérivé $I\!D$ qui est un ∂-foncteur contravariant de $D(Coh(\mathcal{O}_{X'}))$ dans lui-même. $I\!D$ préserve donc les triangles et aussi les quasi-isomorphismes -donc la décomposabilité. Enfin, $\mathcal{H}^pF_*\Omega^{\bullet}_{X/S}$ étant localement libre, on a $I\!D(\mathcal{E}^{\bullet}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}^{\bullet},\mathcal{H}^pF_*\Omega^{\bullet}_{X/S})$ pour tout complexe $\mathcal{E}^{\bullet}$ de $\mathcal{O}_{X'}$-modules localement libres (par les mêmes arguments que A.2.4 et A.2.5). On abrège désormais $\mathcal{H}^pF_*\Omega^{\bullet}_{X/S}$ en "$\mathcal{H}^p$". Par cette dernière propriété, on connaît en particulier $I\!D(\mathcal{H}^p) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^p)$ et $I\!D(F_*\Omega^{\bullet}_{X/S},\mathcal{H}^p) = \mathcal{H}om^{\bullet}_{\mathcal{O}_{X'}}(F_*\Omega^{\bullet}_{X/S},\mathcal{H}^p)$ donc en renversant la numérotation dans la ligne du bas :

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\leqslant p-1}F_*\Omega^{\bullet}_{X/S} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "I\!D"] & F_*\Omega^{\bullet}_{X/S} \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "I\!D"] & \mathcal{H}^p[-p] \arrow[r] \arrow[d, squiggly, "I\!D"] & {} \\
{} & I\!D(\tau_{\leqslant p-1}F_*\Omega^{p-\bullet}_{X/S})[p] \arrow[l] & \mathcal{H}om(F_*\Omega^{p-\bullet}_{X/S},\mathcal{H}^p)[p] \arrow[l] & \mathcal{H}om(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^p)[p] \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Par dualité (*), $\mathcal{H}om^{\bullet}(F_*\Omega^{p-\bullet}_{X/S},\mathcal{H}^p)[p]$ est isomorphe à $F_*\Omega^{\bullet}_{X/S}[p]$. D'autre part $D(\mathcal{O}_{X'})$ est triangulée donc l'axiomatique des triangles fournit un quasi-isomorphisme *u non canonique* [23] entre $I\!D(\tau_{\leqslant p-1}F_*\Omega^{p-\bullet}_{X/S})[p]$ et le cône de i :

$$\begin{tikzcd}
{} & I\!D(\tau_{\leqslant p-1}F_*\Omega^{p-\bullet}_{X/S})[p] \arrow[l] \arrow[d, dotted, "u"] & \mathcal{H}om(F_*\Omega^{\bullet}_{X/S},\mathcal{H}^p)[p] \arrow[l] \arrow[d, "(*)\text{ isom.}"] & \mathcal{H}om(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^p)[p] \arrow[l] \arrow[d, equal] \\
{} & \hat{\mathbf{c}}(i)[p] \arrow[l] & F_*\Omega^{\bullet}_{X/S}[p] \arrow[l] & \mathcal{H}om(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^p)[p] \arrow[l, "i^{\bullet}"']
\end{tikzcd}$$

Identifions $i^{\bullet}$: par la dualité (*) et par exactitude à gauche de $\mathcal{H}om(-,\mathcal{H}^p)$, la suite exacte $\{\cdots \overset{d^{p-2}}{\to} F_*\Omega^{p-1}_{X/S} \overset{d^{p-1}}{\to} F_*\Omega^{p}_{X/S} \xrightarrow{\textbf{conoyau}} \mathcal{H}^pF_*\Omega^{\bullet}_{X/S} \to 0\}$ devient

$$\cdots \overset{d^1}{\leftarrow} F_*\Omega^1_{X/S} \overset{d^0}{\leftarrow} F_*\Omega^0_{X/S} \xleftarrow{i\,:=\textbf{noyau}} \mathcal{H}om(\mathcal{H}^p,\mathcal{H}^p) \leftarrow 0.$$

Donc $i^{\bullet}$ est le morphisme de complexes prolongeant la flèche i noyau de d^0. Exprimons le conoyau $Z^{\bullet}$ de $i^{\bullet}$:

$$0 \leftarrow Z^{\bullet} \xleftarrow{\text{conoyau}} F_*\Omega^{\bullet}_{X/S}[p] \overset{i^{\bullet}}{\leftarrow} Ker(d^0)[p] \leftarrow 0$$

donc $Z^{\bullet} = \left\{0 \leftarrow F_*\Omega^p_{X/S}[p] \overset{d^{p-1}}{\leftarrow} \cdots \overset{d^1}{\leftarrow} F_*\Omega^1_{X/S}[p] \overset{d^0}{\leftarrow} F_*\Omega^0_{X/S}[p]/Ker(d^0)\right\} \xrightarrow{\text{q.iso}} \tau_{\geqslant 1}F_*\Omega^{\bullet}_{X/S}[p]$.

D'autre part, le cône de $i^{\bullet}$ s'envoie quasi-isomorphiquement dans $Z^{\bullet}$ [24]. Finalement, $I\!D(\tau_{\leqslant p-1}F_*\Omega^{p-\bullet}_{X/S})[p] \xrightarrow{\text{u, q.iso}} \hat{\mathbf{c}}(i)[p] \xrightarrow{\text{q.iso}} Z^{\bullet} \xrightarrow{\text{q.iso}} \tau_{\geqslant 1}F_*\Omega^{\bullet}_{X/S}[p]$. Donc les propriétés (1) et (2) sont valables donc $\tau_{\geqslant 1}F_*\Omega^{\bullet}_{X/S}[p]$ est décomposable.

22. À valeur dans les complexes de faisceaux cohérents car si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont cohérents, l'équivalence de catégories entre $\mathcal{O}_{X'}$-modules cohérents et $A := \mathcal{O}_{X'}(U)$-modules sur un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}\,(A)$ fournit $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{F},\mathcal{G})|_U = \widetilde{\mathrm{Hom}_A(M,N)}$ (faux si $\mathcal{F}$ n'est plus de type fini)

23. TR3 affirme l'existence d'un u non canonique qui fait de l'ensemble un morphisme de triangles. Les 2 premières flèches étant des (quasi-)isomorphismes, u est aussi un quasi-isomorphisme par la proposition I.1.1 c) de **[7]**.

24. Grâce aux suites exactes longues de cohomologie et au lemme des 5.

Donc par la deuxième remarque fondamentale, $e_i = 0$ pour $i \neq 0$. Enfin pour $i = 0$, $e_0 \in H^{p+1}(X', \cdots)$ est aussi nul car $\dim X = p$. Ce raisonnement ne marche donc plus pour $\dim X > p$.

$\square$

3.8 Décomposition des groupes de cohomologie en caractéristique $p > 0$

Soit X propre et lisse de dimension $\leqslant p$ relevable sur $W_2(k)$, on a un isomorphisme de k-espaces vectoriels $\bigoplus_{i+j=l} H^j(X, \Omega^i_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{H}^l(X, \Omega^\bullet_{X/S})$. En particulier la suite spectrale de Hodge vers de Rham $E_1^{ij} = H^j(X, \Omega^i_{X/k}) \Rightarrow H^\bullet_{\mathrm{DR}}(X/k)$ dégénère en E_1.

La preuve, formelle, est détaillée dans A.2.6 (utilise que F est affine donc que F_* est exact ; le changement de base pour le calcul de Ω et le changement de base plat $S \leftarrow S^{(p)}$).

L'isomorphisme en degré $< p$ dépend naturellement de X et *a priori* du choix du relèvement $\widetilde{X}$ sur $W_2(k)$ puisque il se déduit du quasi-isomorphisme du théorème 3.1. En revanche on n'a aucune information sur l'isomorphisme en degré p tel qu'il est construit dans le corollaire 3.7 précédent.

Sans hypothèse sur la dimension, la suite spectrale vérifie $E_1^{ij} = E_\infty^{ij}$ pour $i+j < p$ (mais pas p) puisque on ne peut plus appliquer le corollaire précédent.

§4. Dégénérescence de Hodge en caractéristique 0

4.1 Théorème : *Soit K un corps de caractéristique 0 et X un K-schéma propre et lisse. Alors la suite spectrale de Hodge vers de Rham stationne en E_1 en tout degré.*

Démonstration : X étant propre sur K, les dimensions sur k des groupes de cohomologie h^{ij} sont finies (admis). Il suffit donc de vérifier le critère numérique $\sum_{i+j=l} h^{i,j} = h^l$. K est la limite inductive de ses sous-$\mathbf{Z}$-algèbres de type fini $(A_\lambda)_{\lambda\in L}$ donc par les théorèmes de relèvement 4.4, il existe $\alpha \in L$ et un S_α-schéma propre et lisse X_α tel que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "v_\alpha"] \arrow[d, "f_K"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\ \operatorname{Spec} K \arrow[r, "u_\alpha"] & S_\alpha. \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Spec} S_\alpha$ étant un schéma intègre de type fini sur $\mathbf{Z}$, la proposition 2.2 affirme qu'il a un ouvert non vide lisse sur $\mathbf{Z}$ donc quitte à remplacer A_α par un localisé $A_\alpha[t^{-1}]$, on peut supposer S_α lisse sur $\mathbf{Z}$.

On abrège désormais S_α par S, $\mathfrak{X} = X_\alpha$, $A := A_\alpha$ et $f : \mathfrak{X} \to S$ remplace f_α. Les $R^j f_* \Omega^i_{\mathfrak{X}/S}$ ont leur tige au point générique libre de dimension h^{ij} (ce sont des espaces vectoriels) donc ils sont libres sur un voisinage $S' = \operatorname{Spec} A[s^{-1}]$ du point générique [(25)] :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S. \end{tikzcd}$$

Leur rang est nécessairement h^{ij} par l'isomorphisme $g^* R^j f_* \Omega^i_{\mathfrak{X}/S} \xrightarrow{\sim} R^j f'_* \Omega^i_{\mathfrak{X}'/S'}$ déduit du changement de base $g : S' \to S$ (précisé dans 4.2 c)). On abrège désormais S' en S et $\mathfrak{X}'$ en $\mathfrak{X}$.

Par lissité de $\mathfrak{X}$ sur S, $\Omega_{\mathfrak{X}/S}$ est localement libre de type fini et son rang est majoré par une constante d car $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Mais ce rang en chaque point x, appelé dimension relative de f en x, est égal à la dimension de la composante irréductible de $\mathfrak{X}_{f(x)}$ contenant x donc la dimension des fibres de $\mathfrak{X}$ sur S est majorée par d. C'est en particulier le cas pour X qui est la fibre générique. Soit N le produit des nombres premiers $p' \leqslant d$. L'ouvert $Z = \operatorname{Spec} A[1/N] \subset S$ contient un point fermé $\mathfrak{m}$ (par densité des points fermés, *cf.* 2.1 a)), qui ne contient pas NA donc aucun des $\{p'A,\ p' \leqslant d\}$ donc son corps résiduel $k := k(\mathfrak{m})$, qui est fini par 2.1 b), est nécessairement de caractéristique $p > d$.

On considère l'immersion fermée de carré nul $j : \operatorname{Spec} k \xrightarrow{p^2=0} \operatorname{Spec}(W_2(k))$ (car k est fini donc parfait). S étant lisse sur $\mathbf{Z}$, le morphisme $\operatorname{Spec} k \to S$ (d'immersion fermée au dessus de $\mathbf{Z}$) se factorise par j en un morphisme $g : W_2(k) \to S$, par le critère de lissité formelle. Notons $Y := \mathfrak{X}_\mathfrak{m}$ la fibre de $\mathfrak{X}$ en $\mathfrak{m}$ et Y_1 le schéma déduit

25. On quotiente suffisamment A pour tuer les relations linéaires (en nombre fini) entre les générateurs de $R^j f_* \Omega^i_{\mathfrak{X}/S}$.

de $\mathfrak{X}$ par changement de base g. On obtient les carrés cartésiens

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[l] \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, "j"] \arrow[rr, bend right] & W_2(k) \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[ur, phantom, "\square"] & S & \operatorname{Spec} K \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Le grand rectangle de gauche étant cartésien, le carré de gauche est aussi cartésien. Finalement, Y est propre et lisse sur k de dimension $< p$ car inférieure à d, relevé sur $W_2(k)$ donc $\sum_{i+j=l} h^{ij}_{Y/k} = h^l_{Y/k}$ en tout degré l. On conclut à nouveau par les changements de base 4.2 c) et d).

□

La suite détaille les théorèmes qui viennent d'être utilisés.

4.2 Proposition ([**4**] 6.6) : *Soient S un schéma affine noethérien intègre et $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse.*

(a) *Les faisceaux $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ et $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ sont cohérents. Il existe un ouvert non vide U de S tel que, pour tout (i,j) et tout n, les restrictions à U de ces faisceaux soient localement libres de type fini.*

(b) *Pour tout $i \in Z$ et pour tout morphisme $g : S' \to S$, si $f' : X' \to S'$ désigne le schéma déduit de X par le changement de base g, les flèches canoniques de $D(\mathcal{O}_{S'})$ (dites de changement de base)*

$$Lg^* Rf_* \Omega^i_{X/S} \to Rf'_* \Omega^i_{X'/S'} \tag{4.2.1}$$

$$Lg^* Rf_* \Omega^\bullet_{X/S} \to Rf'_* \Omega^\bullet_{X'/S'} \tag{4.2.2}$$

sont des isomorphismes.

(c) *Fixons $i \in \mathbf{Z}$ et supposons que pour tout j, le faisceau $R^j f_* \Omega^i_{X/S}$ soit localement libre sur S de rang constant h^{ij}. Alors pour tout j, la flèche de changement de base (déduite de (4.2.1) (26))*

$$g^* R^j f_* \Omega^i_{X/S} \to R^j f'_* \Omega^i_{X'/S'} \tag{4.2.3}$$

est un isomorphisme. En particulier $R^j f'_* \Omega^i_{X'/S'}$ est localement libre de rang h^{ij}.

(d) *Supposons que pour tout n, $R^n f_* \Omega^\bullet_{X/S}$ soit localement libre de rang constant h^n. Alors pour tout n, la flèche de changement de base (déduite de (4.2.2)) est un isomorphisme. En particulier, $R^n f'_* \Omega^\bullet_{X'/S'}$ est localement libre de rang h^n.*

"Propre" est essentiel dans a) et assure, dans b), que f est séparé donc que $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^i_{X/S})$ est f_*-exact pour un recouvrement affine. "Lisse" garantit dans b) que les $\Omega^i_{X/S}$ sont localement libres donc plats. L'hypothèse "propre et lisse" ne sert pas dans (c) et (d) (27)

26. Explicite dans la démonstration de b)

27. Par contre pour la preuve de ces deux dernières affirmations, j'ai dû admettre le lemme suivant : Soient A un anneau noethérien et E un complexe de A-modules tel que $H^i(E)$ soit projectif de type fini pour tout i et nul pour presque tout i. Alors :

(a) E est isomorphe dans $D(A)$ à un complexe borné à composantes projectives de type fini ;

À un système inductif d'anneaux quelconques $\left\{(A_i)_{i\in I}, (A_i \xrightarrow{u^\sharp_{i,j}} A_j)_{i\leqslant j}\right\}$ correspond le système projectif de schémas $\left\{S_i = \mathrm{Spec}\,(A_i), \mathrm{Spec}\,(A_j) \xrightarrow{u_{i,j}} \mathrm{Spec}\,(A_i), i \leqslant j\right\}$ de limite projective $S = \mathrm{Spec}\,(A)$. Le dernier théorème concentre la difficulté :

4.3 Théorème : *Soit X un S-schéma de présentation finie. On suppose que X est propre (resp. lisse). Alors il existe $i_0 \in I$ et un S_{i_0}-schéma X_{i_0} de présentation finie et propre (resp. lisse).*

La démonstration est entièrement contenue dans EGA IV, je donne les arguments les plus directs possibles. Si $(X_i, v_{ij} : X_j \to X_i)$ est un système projectif de S_i-schémas, on dit que ce système est "cartésien" pour $i \geqslant i_0$ ssi pour chaque $i_0 \leqslant i \leqslant j$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_j \arrow[r, "v_{i,j}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_i \arrow[d] \\ S_j \arrow[r, "u_{i,j}"] & S_i \end{tikzcd}$$

est cartésien. Dans ce cas, le produit fibré $X = S \times_{S_i} X_i$ est la limite projective des X_i (valable pour tout indice $i \geqslant i_0$). Si (Y_i) est un second système projectif de S_i schémas, cartésien pour $i \geqslant i_0$, de limite projective Y $(= S \times_{S_{i_0}} Y_{i_0})$ alors les $\mathrm{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i)$ forment un système inductif de limite $\mathrm{Hom}_S(X,Y)$: pour $(j \geqslant i)$, un morphisme $f_i : X_i \to Y_i$ s'envoie sur $f_j = \mathrm{id}_{S_j} \times_{S_i} f_i : X_j \to Y_j$ et chaque f_i s'envoie dans la limite inductive sur $f = \mathrm{id}_S \times_{S_i} f_i X \to Y$. Par la propriété universelle de la $\varinjlim$ ces données fournissent un morphisme canonique

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{S_i}(X_i, Y_i) \to \mathrm{Hom}_S(X,Y) \tag{4.3.1}$$

Le théorème suivant détermine sous quelles conditions on peut relever un S-schéma, resp. un S-morphisme sur un des S_i. Il est démontré dans EGA IV 8.8.2 de façon auto-contenue, à l'exception de résutats (que j'admets) sur les parties constructibles d'un schéma.

4.4 Théorème : *(a) Si X est un S-schéma de présentation finie*[(28)], *il existe $i_0 \in I$ et un S_{i_0}-schéma X_{i_0} de présentation finie dont X se déduit par changement de base.*
(b) Si (X_i) , (Y_i) sont deux systèmes projectifs de S_i-schémas, cartésiens pour $i \geqslant i_0$,

---

(b) si E est borné et à composantes projectives de type fini, alors, pour toute A-algèbre B et pour tout i, le morphisme canonique

$$B \otimes_A H^i(E) \to H^i(B \otimes_A E)$$

est un isomorphisme (car projectif de type fini entraîne localement libre donc plat).

[personnel : On utilise aussi la propriété de relèvement d'un module localement libre de présentation finie sur une limite inductive d'anneaux dans un cas très simple.][à détailler ?]

28. *[personnel : on dit qu'un morphisme de schémas $X \to Y$ est de* présentation finie *ssi il est* localement *de présentation finie et "quasi-compact et quasi-séparé", ce qui signifie que X est réunion finie d'ouverts affines U_α au dessus d'un ouvert affine V_α de Y et que les intersections $U_\alpha \cap U_\beta$ ont la même propriété; si Y est noethérien, X est de présentation finie sur Y ssi X est de type fini sur Y, i.e. localement de type fini et quasi-compact sur Y (donc noethérien)]*

et si X_{i_0} *et* Y_{i_0} *sont de présentation finie sur* S_{i_0}*, alors l'application* (4.3.1) *est bijective.*

On en déduit qu'on peut relever les isomorphismes et les morphismes projectifs $X \to S$ [$h : X \to \mathbf{P}^n_A$ est un isomorphisme sur un sous-schéma fermé $V(I)$, I idéal homogène de $\mathcal{O}_P = \mathrm{Sym}^\bullet A^n$. Sa structure de sous schéma fermé est nécessairement $\mathrm{Proj}\,(\mathrm{Sym}(A^n)/I)$ (c'est un théorème). On relève donc $\mathbf{P}^n_A$ et pour conclure on utilise le lemme suivant (simple) dont on déduit qu'on peut relever un quotient de modules sur une limite inductive d'anneaux[29].]

4.5 Lemme. — *(a) Si* E *est un* A*-module de* présentation finie*, il existe* $i_0 \in I$ *et un* A*-module de présentation finie* E_{i_0} *tel que* $A \otimes_{A_{i_0}} E_{i_0} = E$ *; (b) Soient* (E_i)*,* (F_i) *deux systèmes inductifs, cartésiens pour* $i \geqslant i_0$*, de limites inductives respectives* E *et* F *; si* E_{i_0} *est de présentation finie, l'application*

$$\varinjlim_i \mathrm{Hom}_{A_i}(E_i, F_i) \to \mathrm{Hom}_A(E, F)$$

(la même que (4.3.1)*) est un isomorphisme.*

En travaillant plus on montre qu'on peut relever les morphismes *séparés* (toujours avec les résultats de constructibilité) et les morphismes *surjectifs* (admis). Suivant l'indication de [**4**] 6.3, déduisons-en qu'on peut relever les morphismes propres dans le cas qui nous intéresse (S affine noethérien)[30] avec le lemme de Chow :

4.6 Proposition (Chow, [**7**] II.4 ex.10) : *Soit* $f : X \to S$ *un morphisme propre. Alors il existe un schéma* X' *et un morphisme* $g : X' \to X$ *tel que* X' *est projectif sur* S *et il y a un ouvert dense* $U \subseteq X$ *tel que* g *induit un isomorphisme de* $g^{-1}(U)$ *sur* U*.*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j", "\text{fermée}"'] \arrow[d, "g"'] & P^n_A \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

On peut renforcer les conclusions : dans la démonstration X' est en fait un sous-schéma fermé de $X \times_A \prod_i P^{n_i}_A$ et g la projection sur X. Le plongement (fermé) de Segre permet de réaliser X' comme un sous-schéma fermé de $X \times_A P^N_A$ pour un N assez grand. g est donc projectif donc propre donc fermé et comme U est dense, g est surjectif.

29. En montrant qu'on peut relever les isomorphismes puis les suites exactes à droite.

30. *[personnel : les arguments de EGA IV, pas vraiment plus chers (on relève "immersion fermée" au lieu de "surjectif", les deux se démontrent avec IV.9.9.3), le démontrent aussi dans le cas où S n'est pas noethérien.]*

Avec ce qui a été dit, on peut relever ce diagramme sur un S_α

$$\begin{tikzcd}
X'_\alpha \arrow[r, "j_\alpha", "\text{fermée}"'] \arrow[d, "g_\alpha"'] & P^n_{A_\alpha} \arrow[d, "p_\alpha"] \\
X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & S_\alpha
\end{tikzcd}$$

avec f_α séparé de type fini, g_α surjectif, j_α fermée et p_α la projection (on relève simplement un morphisme projectif sur P^n_A). $f \circ g = p \circ j$ étant projectif donc propre, g_α étant surjectif et f_α séparé de type fini, on conclut par EGA II 5.4.3 (ii) (facile) que f_α est fermé donc propre.

4.7. Montrons qu'on peut relever les morphismes lisses. — dans le cas qui nous intéresse : $S = \operatorname{Spec} K$ un corps de caractéristique 0 et $S_\alpha = \operatorname{Spec} A_\alpha$ une sous-$\mathbf{Z}$-algèbre de type fini. On utilise qu'un morphisme $f : X \to S$ *est lisse ssi il est plat à fibres* $X_s \to k(s)$ *lisses* (**[1]** 4.4.6). Pour relever $f : X \to S$ en un schéma X_ω lisse sur S_ω, on relève d'abord X en un S_α-schéma X_α par le théorème 4.7. Les produits fibrés $X_\gamma = S_\gamma \times_{S_\alpha} X_\alpha$ pour $\gamma \geqslant \alpha$ définissent un système projectif "cartésien" $(f_\gamma : X_\gamma \to S_\gamma)_{\gamma \geqslant \alpha}$ de limite projective $X \to S$:

$$\begin{tikzcd}
X_{\gamma'} \arrow[r, "v_{\gamma',\gamma}"] \arrow[d, "f_{\gamma'}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\gamma \arrow[d, "f_\gamma"] & X \arrow[r, "v_\gamma"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_\gamma \arrow[d, "f_\gamma"] \\
S_{\gamma'} \arrow[r, "u_{\gamma',\gamma}"] & S_\gamma & S \arrow[r, "u_\gamma"] & S_\gamma
\end{tikzcd}$$

On montre d'abord l'énoncé en chaque point de X : soit $x \in X$ d'image $s = (0) \in S$, d'images respectives $s_\gamma = u_\gamma(s)$ dans chaque S_γ,

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "v_\gamma"] \arrow[d, "f"'] & x_\gamma \arrow[d, "f_\gamma"] \\
s = (0) \arrow[r, "u_\gamma"] & s_\gamma
\end{tikzcd}$$

il existe un $\beta > \alpha$ tel que $\left(f_{\beta,*}\mathcal{O}_{X_\beta}\right)_{s_\beta}$ est plat sur $\mathcal{O}_{S_\beta,s_\beta}$. $\mathcal{O}_X$ étant cohérent, c'est démontré de façon auto-contenue dans EGA IV 11.2.6.1 III, modulo le critère de platitude (admis) 11.2.5 [à détailler ?]. Donc en particulier $X_\beta \to S_\beta$ est plat en x_β.

Il est en fait lisse en x_β : il suffit de vérifier que la fibre $f_{\beta,s_\beta} : X_{\beta,s_\beta} \to k(s_\beta)$ est lisse. Celle ci se déduit de $X \to S$ par le changement de base $S \to k(s_\beta)$ (31) (le morphisme induit par $S \to S_\beta$ sur les corps résiduels de s_β et s, dans notre cas :

31.
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] \arrow[dr, dotted, "p"] \arrow[dd] & & X_\beta \arrow[dd] \\
& X_{\beta,s_\beta} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
S \arrow[rr] \arrow[dr] & & S_\beta \\
& k(s_\beta) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

La flèche p est définie par la propriété universelle du diagramme cartésien de droite. On montre que le diagramme de gauche est cartésien car celui du fond l'est.

$\operatorname{Frac} A_\beta \to K$). f_{β,s_β} est encore de présentation finie. Soit x'_β un point de X_{β,s_β}, les critères locaux de lissité **[1]** 4.2.7 c) et 4.3.2 affirment que f_{β,s_β} est lisse de dimension relative r en x'_β ssi il existe un voisinage $\operatorname{Spec} B_\beta$ de x'_β tel que B a une présentation finie

$$0 \to J \to k(s)[X_1 \dots, X_n] \to B \to 0,$$

le B-module $\Omega_{B/k(s)}$ est localement libre et $\partial : J/J^2 \to B \otimes_{k(s)[\bar{\mathbf{X}}]} \Omega_{k(s)[\bar{\mathbf{X}}]/k(s)}$ est injective. Or $X \to S$ est lisse donc quitte à localiser, $K \otimes \partial$ est injective et $K \otimes \Omega_{B/k(s)}$ est localement libre. K est libre sur k donc ∂ est injective et $\Omega_{B/k(s)}$ est localement libre.

X étant quasi-compact et la lissité sur S en x étant une condition ouverte et stable par changement de base, on obtient *en un nombre fini d'étapes* un relevé X_δ dont l'ouvert V_δ des points lisses sur S_δ vérifie $v_\delta^{-1}(V_\delta) = X$. Mais ce n'est pas suffisant : pour conclure qu'il existe un X_ω partout lisse sur S_ω, il faut de nouveau utiliser un résultat sur les ouverts dans une limite projective de schémas. EGA IV 8.3.4 (sens b)⇒c)) affirme en effet que X_δ étant quasi compact, V_δ vérifiant $v_{\gamma,\delta}^{-1}(V_\delta) \subset V_\gamma$ pour tout $\gamma \geqslant \delta$ et $v_\delta^{-1}(V_\delta) = X$, alors il existe un ω tel que $V_\omega = X_\omega$ (facile si V_δ est un ouvert principal de X_δ affine).

CHAPITRE 2

DÉCOMPOSITION PAR LA THÉORIE DE HODGE

§1. La suite spectrale de Hodge-Fröhlicher

1.1. Soit X^{an} une variété analytique complexe de dimension n, sa *cohomologie de de Rham* $H^{\bullet}_{\text{DR}}(X^{\text{an}}, \mathbf{C})$ est la cohomologie du complexe des formes C^∞ globales à cœfficients complexes $\big(0 \to C^\infty \overset{d}{\to} K^1 \overset{d}{\to} K^2 \overset{d}{\to} \cdots\big)$. En notant $K^{p,q}$ les formes C^∞ de type (p,q), la décomposition canonique $K^l = \bigoplus_{p+q=l} K^{p,q}$ s'exprime $\xi^l_{X,\mathbf{C}} = \bigoplus_{p+q=l} \xi^{p,q}_{X,\mathbf{C}}$ sur les faisceaux associés. Soit ∂ (resp. $\bar\partial$) la composante de degré $(1,0)$ (resp.$(0,1)$) de d, c'est à dire la différentielle holomorphe (resp. antiholomorphe), alors $H^{\bullet}_{\text{DR}}(X^{\text{an}}, \mathbf{C})$ s'interprète comme la cohomologie du complexe simple $(K^\bullet, d)$ associé au double complexe $(K^{\bullet,*}, \partial, \bar\partial)$. La théorie des suites spectrales (*cf.* chapitre précédent) fournit une suite

$$(1.1.1)\qquad \begin{aligned} E_0^{p,q} &= K^{p,q} \\ E_1^{p,q} &= h^q(K^{p,\bullet}) \end{aligned}$$

qui aboutit au gradué $E_\infty^{p,q} = \mathrm{G}^p(h^{p+q}(K^\bullet))$, ce qui permet de calculer

$$(1.1.2)\qquad H^{p+q}_{\text{DR}}(X^{\text{an}}, \mathbf{C}) = h^{p+q}(K^\bullet) \cong \bigoplus_{p+q=l} E_\infty^{p,q}.$$

1.2. Les termes $E_1^{p,q}$ sont appelés "*groupes de cohomologie de Dolbeault* de X" (notés $H^{p,q}_{\bar\partial}(X, \mathbf{C})$) et la suite "*suite spectrale de Hodge-Fröhlicher*". Chaque colonne s'augmente par l'inclusion $\Omega^p_X \overset{i^p}{\hookrightarrow} \xi^{p,0}$ du faisceau Ω^p_X des formes *holomorphes* de degré p et le *lemme de Dolbeault*[1] montre que cela fournit une résolution de Ω^p_X. Ces résolutions étant Γ-acycliques ($\xi^{p,q}_{X,\mathbf{C}}$ est un module sur le faisceau mou $\xi^0_{X,\mathbf{C}}$ des fontions C^∞), on en déduit

$$E_1^{p,q} = H^q(X^{\text{an}}, \Omega^p_X)$$

---

1. En dimension complexe 1 (le cœur de la preuve), la primitive pour $\bar\partial$ de g C^∞ à support compact dans le disque unité ouvert D est la convolée $\frac{1}{\pi z} * g$. Pour g quelconque, D est recouvert par la suite de disques D_n de rayon $1 - \frac{1}{n}$ sur lesquels g s'intègre en f_n définie globalement (on intègre globalement le tronqué de g sur D_n par une fonction plateau). La suite $(f_n - f_{n-1})_n$ est holomorphe sur D_n mais ne converge même pas vers 0. On l'approche donc à $\frac{1}{2^n}$ près par un polynôme P_n (on tronque le développement en série entière) et la série $f_0 + \sum_n (f_n - f_{n-1} - P_n)$ converge *uniformément* sur D_N donc on peut inverser $\sum$ et $\bar\partial$. Son tronqué $f_0 + \sum_{n \leqslant N}$ y répond à la question tandis que le reste $\sum_{n \geqslant N}$ y est holomorphe donc $\bar\partial$-fermé.

La différentielle horizontale ∂ prolonge la différentielle holomorphe d_h du complexe $\Omega_X^\bullet$ donc la condition de bicomplexe $\partial \circ (-1)^p i^p + (-1)^{p+1} i^{p+1} \circ d_h = 0$ est vérifiée. Les colonnes augmentées étant exactes, $\Omega_X^\bullet$ s'envoie quasi-isomorphiquement sur le complexe simple $\xi_{X,\mathbf{C}}^\bullet$, à composantes flasques d'où l'isomorphisme en hypercohomologie :

$$\boldsymbol{H}^\bullet(X^{\mathrm{an}}, \Omega_X^\bullet) \xrightarrow{\sim} h^\bullet(K^\bullet) = H_{\mathrm{DR}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{C}). \tag{1.2.1}$$

1.3. Enfin pour une variété algébrique projective $X^{\mathrm{an}} \to X$, le théorème 1 de Gaga entraîne les isomorphismes $H^q(X, \Omega^p) \to H^q(X^{\mathrm{an}}, \Omega^p)$ sur la cohomologie des colonnes, d'où le quasi-isomorphisme des complexes simples associés : [2] $H^n_{\mathrm{DR}}(X/\mathbf{C}) \to H^n_{\mathrm{DR}}(X^{\mathrm{an}}, \mathbf{C})$.

En conclusion, ces définitions de la cohomologie de de Rham et de la suite spectrale coïncident avec celles du chapitre 1 dans le cadre des schémas projectifs réguliers.

1.4. Lorsque X est compacte, les dimensions $h^{p,q}$ des groupes de cohomologie de Dolbeault $E_1^{p,q}$ sont finies (par exemple avec la théorie des opérateurs elliptiques, *cf.* plus bas). L'inégalité $\dim E_\infty^{p,q} \leqslant \dim E_r^{p,q}$ a donc un sens, avec égalité ssi la suite stationne en (p,q) à partir de l'étape r. La suite spectrale étant par construction concentrée dans le carré $[0,2n] \times [0,2n]$ [3] [4], elle stationne globalement ("dégénère") en E_r pour un r fini. En particulier elle stationne en E_1 ssi pour chaque $l \in [0,n]$, $\sum_{p+q=l} \dim E_\infty^{p,q} = \sum_{p+q=l} \dim E_1^{p,q}$ [5], soit en notant h^n la dimension de $H^{p+q}_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{C})$:

$$h^l = \sum_{p+q=l} h^{p,q} \tag{1.4.1}$$

en vertu de (1.1.2). On va vérifier cette égalité sur les variétés kählériennes compactes : "kählérienne" fournit une décomposition canonique des formes harmoniques $\mathcal{H}_d^l = \oplus_{p+q} \mathcal{H}_{\bar\partial}^{p+q}$. "Compacte" entraîne que chaque classe de cohomologie de de Rham (resp. de Dolbeault) contient *une unique* forme d-harmonique (resp. $\bar\partial$-harmonique), caractérisée par le fait que sa norme L^2 est minimale dans la classe. Ceci vaut pour $P^n_{\mathbf{C}}$ et ses sous-variétés (kählériennes avec la métrique de Fubini-Study, resp. la métrique induite).

2. *[personnel : car le cône est un double complexe à colonnes exactes donc à complexe simple associé acyclique, puis en utilisant que* $\sum^\bullet \hat{\mathbf{c}}(\varphi) = \hat{\mathbf{c}}(\sum^\bullet(\varphi))$ *et la suite exacte longue de cohomologie.]*

3. On peut se limiter à $[0,n] \times [0,n]$ à partir de $r = 1$, d'après 1.2.

4. *[personnel : on a redémontré que la cohomologie de de Rham est concentrée en* $[0,n]$ *car égale à* $\boldsymbol{H}(X, \Omega_X^\bullet)$ *: le lemme de Poincaré montrait que* $(\xi_{X,\mathbf{C}}^\bullet, d)$ *et* $(\Omega_X^\bullet, d_h)$ *sont des résolutions de* $\mathbf{C}$ *d'où l'isomorphisme en hypercohomologie.]*

5. La dégénérescence en E_1 n'implique pas que la décomposition (arbitraire) $H^l_{\mathrm{DR}} \approx \bigoplus_p G^p H^l_{\mathrm{DR}} = \bigoplus_{p+q=l} H_{\bar\partial}^{p,q}$ est canonique. Elle le devient si de plus la filtration sur $H^\bullet_{\mathrm{DR}}$ est *complémentaire de sa conjuguée complexe, i.e.* $H^l_{\mathrm{DR}} = F^p H^l_{\mathrm{DR}} \oplus \overline{F^{l-p+1} H^l_{\mathrm{DR}}}$. Dans ce cas on retrouve aussi $H_{\bar\partial}^{q,p} = \overline{H_{\bar\partial}^{p,q}}$.

§2. Isomorphisme de Hodge sur les variétés compactes

2.1. Soit X une variété analytique complexe compacte de dimension n, T_X son fibré tangent holomorphe. La multiplication par i induit un automorphisme J sur le fibré tangent C^∞ de la variété réelle sous-jacente $T_{X,\mathbf{R}}$ (de dimension $2n$) (6). J s'étend à $T_{X,\mathbf{C}} := \mathbf{C} \otimes T_{X,\mathbf{R}}$ le fibré C^∞ complexifié de dimension $2n$, et comme $J^2 = -1$ il y est diagonalisable (son polynôme annulateur est scindé à racines simples). Soient $T^{1,0}$ et $T^{0,1}$ les sous-espaces propres de i et $-i$ (les sous-espaces "$\mathbf{C}$-linéaire" et "$\mathbf{C}$-antilinéaire"). Soit $\Omega^1_X = T^*_X$ le fibré cotangent holomorphe et $\Omega^1_{X,\mathbf{C}}$ le fibré C^∞ sous-jacent complexifié, qui se décompose de même en $\Omega^{1,0}$ et $\Omega^{0,1}$. Leurs faisceaux de sections sont respectivement notés $\xi^{1,0}$ et $\xi^{0,1}$, leur somme directe fournit le faisceau ξ^1 des sections de $\Omega^1_{X,\mathbf{C}}$ (7).

2.2 Définition : Une *forme hermitienne* sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel V est une forme $\mathbf{R}$-bilinéaire $h : V \times V \to \mathbf{C}$ qui est $\mathbf{C}$-linéaire en la première variable, $\mathbf{C}$-antilinéaire en la deuxième et telle que $h(u,v) = \overline{h(v,u)}$

2.3 Proposition-définition : *Une* métrique hermitienne *sur X est une métrique hermitienne h sur T_X, c'est à dire une collection de formes hermitiennes dans chaque plan tangent $T_{X,p}$ qui varient de façon C^∞ en fonction de p* (8)*. Les métriques hermitiennes sont en bijection canonique avec les sections de $\Omega^{1,1} \cap \bigwedge^2 \Omega^1_{\mathbf{R}}$ (les "$(1,1)$-formes réelles", appelées justement "formes hermitiennes"), selon $h \to \omega = -\mathrm{Im} h$* (9).

En particulier h induit des métriques sur $\Omega_{X,\mathbf{R}}$ et ses puissances extérieures (10). Ainsi $vol := \frac{\omega^n}{n!}$ est une forme réelle de degré $2n$ jamais nulle (une "forme volume"), elle définit une orientation et une intégrale sur la variété réelle C^∞ $X_{\mathbf{R}}$ sous-jacente. Sur les fibrés complexifiés $\Omega^j_{X,\mathbf{C}}$ munis de leur structure complexe J, h devient $\mathbf{C}$-bilinéaire (et "hermitien par rapport à J"). Ces données fournissent pour tout degré j un produit scalaire $\{,\}$ sur chaque fibre $\Omega^j_{\mathbf{C},p}$, dépendant de façon C^∞ de p. L'accouplement $\Omega^j_{X,\mathbf{C}} \times \Omega^{2n-j}_{X,\mathbf{C}} \to \Omega^{2n}_{X,\mathbf{C}}$ étant non dégénéré, on peut maintenant définir l'opérateur de Hodge $*$:

6. J est la "*structure complexe induite*", obtenue en identifiant le fibré réel sous-jacent $T_X|\mathbf{R}$ et $T_{X,\mathbf{R}}$ à l'aide de coordonnées holomorphes locales. Que cette structure soit canonique provient du fait que les changements de cartes de X sont holomorphes ([**2**] 2.70).

7. *[personnel : c'est exactement le faisceau des sections $\mathbf{C}^\infty$ à coefficients complexes de Ω^1_X, i.e. les formes différentielles de degré 1 à coefficients complexes, puisque la structure complexe ne joue aucun rôle.]*

8. Tout fibré holomorphe admet une métrique hermitienne ([**2**] 3.7) donc les conclusions de cette section sont vraies pour toute variété compacte. *[personnel : en particulier pour les fibrés en droites elles définissent toutes la même* classe *de Chern.]*

9. Dans l'autre sens : $\omega \to \omega(u, J(v)) - i\omega(u,v)$. Soient $(z_j, \overline{z_k})$ des coordonnées arbitraires (holomorphes/antiholomorphes) pour lesquelles $h = \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} h_{j,k} dz_j \otimes d\overline{z_k}$ ($h_{j,k}$ est C^∞), alors la $(1,1)$-forme réelle correspondante est $\omega = \frac{i}{2} \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} h_{j,k} dz_j \wedge d\overline{z_k}$.

10. Soient $\langle e_1, \ldots, e_{2n} \rangle$ des sections formant localement une base orthogonale de $T_{X,\mathbf{R}}$, on déclare que la base duale $\langle e_1^*, \ldots, e_{2n}^* \rangle$ est orthogonale, de même pour les bases $\{e^*_{j_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{j_p}\}$. Formule "intrinsèque" : $\langle u_1 \wedge \cdots \wedge u_p, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \rangle = \det(\langle u_j, v_k \rangle_{j,k})$.

2.4 Définition : Soit $\beta \in \Gamma(X, \Omega^{2n-k}_{X,\mathbf{C}})$ une k-forme, alors $*\beta \in \Gamma(X, \Omega^{2n-k}_{X,\mathbf{C}})$ est la forme telle que

$$\alpha \wedge *\bar{\beta} = \{\alpha, \beta\}\, vol \tag{2.4.1}$$

pour toute k-forme $\alpha \in C^\infty(X, \Omega^k_{X,\mathbf{C}})$.

De même le *produit scalaire* L^2 (à valeurs dans $\mathbf{C}$) :

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X \{\alpha, \beta\}\, vol = \int_X \alpha \wedge *\overline{\beta} \tag{2.4.2}$$

permet de définir les adjoints $d^*, \partial^*, \bar{\partial}^*$ etc. des opérateurs différentiels.

***2.5 Lemme* ([2] 1.6).** — $d^* = (-1)^{2nk+1} * d* = - * d*$

2.6 Définitions : $\Delta_d = dd^* + d^*d$, $\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial$ et $\Delta_{\bar{\partial}} = \overline{\partial\partial^*} + \overline{\partial^*\partial}$ (car $\overline{\partial^*}$ est adjoint de $\bar{\partial}$). $\mathcal{H}^l_d$, noté $\mathcal{H}^l$, est le groupe des formes globales d-harmoniques de degré l, *i.e.* telles que $\Delta_d \alpha = 0$. De même $\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}$ est l'ensemble des formes globales $\bar{\partial}$-harmoniques

***2.7 Lemme*.** — *Une forme est $\mathcal{H}_d$ ssi elle est d-fermée et d^*-fermée, de même pour ∂ et $\bar{\partial}$.*

car $(\Delta_d \alpha, \alpha) = (d^* d\alpha, \alpha) + (dd^*\alpha, \alpha) = \|d\alpha\|^2 + \|d^*\alpha\|^2$.

2.8 Définition : Soient deux fibrés vectoriels E et F sur une variété C^∞ X de dimension n. Une application linéaire $P : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, F)$ entre les *sections* globales est appelée *opérateur différentiel de degré d* ssi dans tout ouvert de cartes $(U, (x_i))$ trivialisant E et F,

$$Pu(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} a^\alpha(x) \partial_\alpha u(x)$$

où $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ est un multiindice de longueur variable $|\alpha| := k$ inférieure à d, α_i dans $\{1, \dots, n\}$, $\partial_\alpha = \partial_{\alpha_1} \cdots \partial_{\alpha_k}$ (on peut répéter les dérivations) et chaque $a^\alpha(x)$ est une collection d'éléments de $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ dépendant de façon C^∞ de x. Son *symbole principal* en x est l'application linéaire $\Omega^1_{X,x} \to \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ définie par

$$\sigma_P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = d} a^\alpha(x) \xi_\alpha$$

où $\xi_\alpha = \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_d}$ si $\xi = \xi_i dx_i$. C'est donc un polynôme homogène de degré d en la variable ξ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(E_x, F_x)$.

Le symbole principal est en fait intrinsèque et ne dépend pas du choix des coordonnées. [Par exemple le laplacien Δ_d a pour symbole principal $-\|\xi^2\|$ en tout degré. Par exemple sur $\mathbf{R}^n$ en degré 0 (*i.e.* pour les fonctions C^∞), avec la métrique plate $g^{ij}(x) = \delta_{ij}$ et l'intégrale usuelle : pour $\alpha = \sum \alpha_i d_i$ de degré 1, $d^*\alpha = -\sum \partial_i \alpha_i$ [11] donc pour tout $f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\Delta_d f = -\sum \partial_i^2 f$ (l'opposé du laplacien usuel). C'est encore vrai sur les p-formes car $\Delta_d(\alpha_I dx^I) = (\Delta_d \alpha_I) dx_I = -\sum \partial_i^2$.] On trouve aussi

11. Pour prouver le résultat en général : avec une métrique g^{ij} et une forme volume $\gamma(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, $d^* = -\gamma^{-1} \partial_i (\gamma g^{ij} \alpha_j)$.

2.9 Proposition : *Les opérateurs différentiels* Δ_∂ *et* $\Delta_{\bar\partial} : \Gamma(X, \Omega^{p,q}) \to \Gamma(X, \Omega^{p,q})$ *ont pour symbole principal* $\xi \to \frac{-1}{2}\|\xi\|^2\mathrm{Id}$

En particulier pour chaque x et chaque $\xi \neq 0$, c'est un morphisme *injectif* de $\Omega^{p,q}_x$ dans $\Omega^{p,q}_x$ ce qui en fait des opérateurs *elliptiques.* L'isomorphisme de Hodge découle alors du théorème fondamental (admis) :

2.10 Théorème : $\Delta_{\bar\partial}$ *étant un* opérateur elliptique *entre deux fibrés de* même rang *sur une variété* compacte orientée,

- *son noyau* $\mathcal{H}^{p,q}$ *est de* dimension finie *;*
- *on a la décomposition* orthogonale dans $\Gamma_{L^2}(X, \Omega^{p,q})$

(2.10.1) $$\Gamma_{C^\infty}(X, \Omega^{p,q}) = \mathrm{Ker}\,(\Delta^*_{\bar\partial})^{p,q} \oplus \Delta^{p,q}_{\bar\partial}\Gamma_{C^\infty}(X, \Omega^{p,q}).^{(12)}.$$

(Par construction $\Delta^*_{\bar\partial} = \Delta_{\bar\partial}$). En appliquant le théorème à $\Omega^{p,q-1}$ et $\Omega^{p,q+1}$, en utilisant le lemme 2.7 et le fait que $\bar\partial^2 = 0$ on obtient facilement

2.11 Corollaire (isomorphisme de Hodge) : *la somme orthogonale pour le produit scalaire* L^2

(2.11.1) $$\Gamma_{C^\infty}(X, \Omega^{p,q}) = \mathcal{H}^{p,q}(X) \oplus \bar\partial(\Gamma_{C^\infty}(X, \Omega^{p,q-1})) \oplus \bar\partial^*(\Gamma_{C^\infty}(X, \Omega^{p,q+1}))$$

et $\mathrm{Im}\bar\partial^* \cap \mathrm{Ker}\,\bar\partial = \{0\} = \mathrm{Im}\bar\partial \cap \mathrm{Ker}\,\bar\partial^*$.

Une forme $\Delta_{\bar\partial}$-fermée étant $\bar\partial$-fermée par le lemme, on obtient un morphisme $\mathcal{H}^{p,q} \to H^{p,q}_{\bar\partial}(X, \mathbf{C})$ (en prenant la classe modulo $\mathrm{Im}\bar\partial$). Or d'après l'isomorphisme de Hodge, $\mathrm{Ker}\,\bar\partial = \mathcal{H}^{p,q} \oplus \bar\partial(\Gamma_{C^\infty}(X, \Omega^{p,q-1})$ donc

(2.11.2) $$\mathcal{H}^{p,q} \xrightarrow{\sim} H^{p,q}_{\bar\partial}(X, \mathbf{C})$$

est un *isomorphisme.*

§3. Décomposition sur les variétés compactes kählériennes

X est appelée *kählérienne* ssi elle admet une *forme hermitienne* ω fermée, ce sera désormais le cas ("compacte" n'interviendra que pour conclure).

3.1 Définition : Soient A et B deux opérateurs différentiels de degrés a et b, le commutateur $[A, B]$ est l'opérateur différentiel de degré $a + b$:

$$[A, B] = AB - (-1)^{ab}BA$$

3.2 Définition : Soit L l'opérateur différentiel de *degré* $0 : \alpha \to \omega \wedge \alpha$ et $\Lambda : C^\infty_c(X, \Omega^{k+2}) \to C^\infty_c(X, \Omega^k)$ son adjoint pour le produit scalaire L^2 (13).

***3.3 Lemme* (Akizuki-Nakano, [2] 4.28).** — *soit* $U \in \mathbf{C}^n$ *un ouvert équipé de la métrique kählérienne constante* $\omega = i\sum_{1\leqslant j\leqslant n} dz_j \wedge d\overline{z_j}$*, alors*

(3.3.1) $$[\bar\partial^*, L] = i\partial$$

12. $\mathrm{Ker}(\Delta^*_{\bar\partial})$ est a priori dans $\Gamma_{L^2}(X, \Omega^{p,q})$, le fait qu'il soit dans $\Gamma_{C^\infty}(X, \Omega^{p,q})$ vient par exemple du *lemme de Weyl.*

13. *[personnel : en remarquant que* $*^2 = (-1)^{p(2n-p)}$ *sur* Ω^p *on déduit* $\Lambda\beta = (-1)^k(*L*)\beta$ *pour tout* $\beta \in \Omega^{k+2}$*.]*

La décomposition de Hodge découle alors des formules suivantes et de l'isomorphisme 2.11.

3.4 Proposition (identités de Kähler, [**4**]Dem. 6.15) :

$$[\bar{\partial}^*, L] = i\partial \tag{3.4.1}$$

$$[\partial^*, L] = -i\bar{\partial} \tag{3.4.2}$$

$$[\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^* \tag{3.4.3}$$

$$[\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^* \tag{3.4.4}$$

(1)⇒(3) par adjonction, (1)⇒(2) et (3)⇒(4) par conjugaison. La clé pour montrer (1) est que sur une variété *kählérienne* on peut se ramener à l'ordre 2 près à la forme locale du lemme précédent ([**2**] 4.13). On en déduit formellement

3.5 Proposition : $\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}$. *En particulier une forme est harmonique ssi* Δ_∂*-fermée ssi* $\Delta_{\bar{\partial}}$*-fermée.*

3.6 Corollaire : *Soit α une forme de type (p,q), alors $\Delta_d\alpha$ est de type (p,q)*

(en effet $\Delta_\partial\alpha$ est de type (p,q)). Donc si $\alpha = \sum \alpha^{p,q}$, alors par identification des degrés α est d-harmonique ssi chaque $\alpha^{p,q}$ l'est. Par conséquent,

3.7 Corollaire :

$$\mathcal{H}^k = \oplus_{p+q=k}\mathcal{H}^{p,q}(X) \text{ et} \tag{3.7.1}$$

$$\mathcal{H}^{p,q} = \overline{\mathcal{H}^{q,p}} \tag{3.7.2}$$

où la deuxième égalité vient du fait que $\overline{\Delta_\partial\overline{\beta}} = \Delta_{\bar{\partial}}\beta = \Delta_\partial\beta = 0$. Δ_d étant lui aussi elliptique, on peut lui appliquer le théorème 2.10, en déduire l'analogue de 2.11 et donc la conséquence analogue à §2.(2.11.2) : $\mathcal{H}^k \cong H^k_{\mathrm{DR}}$. En combinant cette remarque, la proposition précédente et §2.(2.11.2) on déduit

3.8 Corollaire (décomposition de Hodge) :

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{k=p+q} H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X) \quad \text{et} \quad H^{p,q}_{\bar{\partial}} = \overline{H^{p,q}} \tag{3.8.1}$$

APPENDICE A

DÉMONSTRATIONS DE RÉSULTATS GÉNÉRAUX

§1. Frobenius et isomorphisme de Cartier

1.1 Exemple où $X^{(p)} \ncong X'$: *Soient k de caractéristique $p > 0$ et $A = \dfrac{k(V)[U]}{U^p - V}$, $k(V)$ étant le corps des fractions rationnelles à une variable de k. Alors $A' := k^{(p)} \otimes_k A$ n'est pas isomorphe à $A^{(p)}$ comme $k^{(p)}$-algèbres (et même comme $\mathbf{Z}$-algèbres).*

preuve. — Montrons d'abord un isomorphisme valable pour tout idéal I de $k[T]$:

$$(1.1.1) \quad k^{(p)} \otimes_k \frac{k[X_1, \ldots, X_n]}{I} \xrightarrow{\sim} \frac{k^{(p)} \otimes_k k[X_1, \ldots, X_n]}{k^{(p)} \otimes_k I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle} \xrightarrow{(*)\sim} \frac{k^{(p)}[X_1^p, \ldots, X_n^p]}{\langle f_1^p, \ldots, f_r^p \rangle},$$

où $(*)$ est induit par l'isomorphisme :

$$(*) \qquad \begin{aligned} k^{(p)} \otimes_k k[X_1, \ldots, X_n] &\xrightarrow{(*)\sim} k^{(p)}[X_1^p, \ldots, X_n^p] \\ a \otimes P &\longrightarrow aP^p. \end{aligned}$$

Le premier isomorphisme de (1.1.1) provient de la suite exacte $0 \to I \to k[X] \to k[X]/I \to 0$ tensorisée par $k^{(p)}$. Le deuxième est clairement surjectif, montrons l'injectivité : soit $\sum_i a_i \otimes X^i$ qui s'envoie dans $\langle f_1^p, \ldots, f_r^p \rangle$: $\sum_i a_i X^{pi} = \sum_{i,j} b_{i,j} X^j f_i^p$. Par identification des monômes, les j sont des multiples de p (quand $b_{i,j}$ n'est pas nul), soit : $\sum_i a_i \otimes X^{pi} = \sum_{i,j'} b_{i,j'} X^{pj'} f_i^p$. Notons $f_i := \sum_k \lambda_{i,k} X^k$ et $Y = X^p$, l'égalité se développe en $\sum a_i \otimes Y^i = \sum_{i,j',k} b_{ij'} \lambda_{ik}^p \otimes Y^{j'} Y^k = \sum_{i,j'} b_{ij'} \otimes Y^{j'} \left(\sum_k \lambda_{ik} Y^k \right)$ $\subset k^{(p)} \otimes \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.

Dans l'exemple, $I = \langle P \rangle$, avec $P(U) = U^p - V$ qui est irréductible dans $k(V)[U]$. En effet l'anneau $k[V]$ est principal de corps des fractions $k(V)$, V est irréductible dans $k[V]$ (pour des raisons de degré) donc premier donc peut donc appliquer le critère d'Eisenstein à P pour l'idéal V : $1 \notin (V)$ et $V \in (V) \backslash (V)^2$. Donc A est un corps. Par l'isomorphisme (1.1.1), $A' \cong \dfrac{k(V)[U^p]}{(U^p - V)^p} \cong \dfrac{k(V)[T]}{(T - V)^p} \cong \dfrac{k(V)[T' + V]}{(T')^p} \cong \dfrac{k(V)[T']}{(T')^p}$ qui n'est pas intègre donc ne peut pas être un corps. □

1.2 Théorème (Isomorphisme de Cartier) : *Soient S quelconque de caractéristique p et $X \to S$.*

(a) *Il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres graduées*

$$\gamma : \bigoplus \Omega^i_{X'/S} \to \bigoplus \mathcal{H}^i F_* \Omega^\bullet_{X/S} \textit{ tel que}$$

(i) $\underline{i=0}$: $\gamma = F^\sharp : \mathcal{O}_{X'} \to F_* \mathcal{O}_{X^{(p)}}$
(ii) $\underline{i=1}$: $\gamma : 1 \otimes dr \to \overline{r^{p-1}dr}$

(b) *Si f lisse, γ est un isomorphisme, noté C^{-1}*

Démonstration : Pour a), construire le morphisme est équivalent à construire sa composée avec l'isomorphisme $\bigoplus \Omega^i_{X/S} \xrightarrow{\sim} \bigoplus (F_S)_X * \Omega^i_{X'/S}$ (déduit par adjonction de l'isomorphisme de changement de base $\bigoplus (F_S)^*_X \Omega^i_{X/S} \xrightarrow{\sim} \bigoplus \Omega^i_{X'/S}$). Comme $(F_S)_X * \circ F_{X/S\,*} = F_{X*}$, il suffit donc de construire un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres graduées

$$\gamma_a : \bigoplus \Omega^i_{X/S} \to \bigoplus \mathcal{H}^i F_{X*} \Omega^\bullet_{X/S}$$

(dont on déduira γ par adjonction), tel que

i) $i=0 : (\gamma)_0 = \Omega_{X/S}(F^\sharp_X)$
ii) $i=1 : (\gamma)_1 : ds \to s^{p-1}ds.$

Ce qui est aussi équivalent à construire une S-dérivation de $\mathcal{O}_X$ dans $\bigoplus \mathcal{H}^i F_{X*} \Omega^\bullet_{X/S}$. Et justement $\{D : s \in \mathcal{O}_X \to \overline{s^{p-1}ds}$ est une S-dérivation car

– $D(X+Y) - D(X) - D(Y) = d\Big(\frac{(X+Y)^p - X^p - Y^p}{p}\Big) = d\Big(\sum_{0<i<p} p^{-1} C^i_p X^{p-i} Y^i\Big)$ dans $\Omega_{X/S}$, de classe de cohomologie nulle.
– et pour $s \in \mathcal{O}_S$, $D(s.x) = s^{p-1}x^{p-1}d(sx) = s^p(x^{p-1}dx) = s.D(x)$

Or $\bigoplus_i \Omega^i_{X/S}$ est anticommutative [(1)] donc son sous-quotient $\bigoplus_i \mathcal{H}^i F_{X*} \Omega^\bullet_{X/S}$ aussi. Donc par la propriété universelle de $\bigwedge^\bullet$, il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres anticommutatives $\bigwedge^\bullet \Omega^1_{X'/S} \to \bigoplus_i \mathcal{H}^i F_{X*} \Omega^\bullet_{X/S}$.

Pour b), f est lisse donc se factorise localement en $X \xrightarrow{\text{g étale}} \mathbf{A}^n_S \xrightarrow{h} S$, où h est la projection canonique. On notera $Z = \mathbf{A}^n_S$. Par I.2.4, $F_{X/Z}$ est un isomorphisme. On en déduit que le carré

$$\begin{tikzcd} X^{(p)} \arrow[r, "F_{X/S}"] \arrow[d, "g"'] & X' \arrow[d, "g'"] \\ Z^{(p)} \arrow[r, "F_{Z/S}"] & Z \end{tikzcd}$$

formé sur les Frobenius relatifs de X/S et de Z/S est cartésien.

1. *[personnel : alternée en caractéristique $p > 2$, i.e. les éléments de degré impair sont de carré nul.]*

[En détail : il s'insère dans le diagramme suivant (carré ④) :

$$\begin{tikzcd}
X^{(p)} \arrow[r, "F_{X/S}"] \arrow[rr, bend left, "①F_X"'] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "④"] & X'^{/S} \arrow[r, "(F_S)_X"] \arrow[d, dotted, "g'"] \arrow[dd, bend right, "②'"'] \arrow[dr, phantom, "③"] & X \arrow[d, "g"] \\
Z^{(p)} \arrow[r, "F_{Z/S}"] \arrow[rr, bend right, "F_Z"'] & Z' \arrow[r, "(F_S)_Z"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "②"] & Z \arrow[d, "h"] \\
 & S^{(p)} \arrow[r, "F_S"] & S
\end{tikzcd}$$

dont on montre dans l'ordre des numéros que les carrés sont cartésiens. Commençons par le rectangle ① des Frobenius absolus de X et Z : $F_{X/Z} : X^{(p)} \to X'^{/Z}$ étant un isomorphisme (ne figurant pas sur le diagramme !), ① est aussi cartésien. D'autre part on a le carré du bas ② cartésien, contenu dans le grand rectangle de droite ②' qui l'est aussi. D'où l'existence de la flêche g' qui rend cartésien le carré ③. ① étant cartésien, ④ l'est aussi.]

g est étale donc le morphisme canonique

$$g^*\Omega^i_{Z/S} \to \Omega^i_{X/S}$$

est un isomorphisme. Montrons que le morphisme de complexes de $\mathcal{O}_{X'}$-modules :

$$g'^* F_{Z/S*}\Omega^\bullet_{Z/S} \to F_{X/S\,*}\Omega^\bullet_{X/S} \tag{1.2.1}$$

est aussi un isomorphisme. La situation locale peut être rendue affine en X' et en Z' [2]. F_* étant un isomorphisme sur les espaces topologiques, la situation locale est aussi affine dans X et Z. On se ramène donc à

$$\begin{tikzcd}
B & B' \arrow[l, "F_{B/C}"'] \\
A \arrow[u, "\alpha", "\text{étale}"'] \arrow[ur, phantom, "\square"] & A' \arrow[l, "F_{A/C}"'] \arrow[u, "\alpha'"', "\text{étale}"] \\
 & C \arrow[ul] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où (1.2.1) se vérifie : $B' \otimes_{A'} \Omega_{A/C} = B' \otimes_{A'} A \otimes_A \Omega_{A/C} = B \otimes_A \Omega_{A/C} \xrightarrow[(\alpha\ \text{étale})]{B\otimes\Omega(\alpha)\ \sim} \Omega_{B/C}$.

g' étant étale par changement de base donc plat, il préserve la cohomologie donc on déduit de (1.2.1) l'isomorphisme :

$$g'^*\mathcal{H}^i F_{Z/S*}\Omega^\bullet_{Z/S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}^i F_{X/S\,*}\Omega^\bullet_{X/S}. \tag{1.2.2}$$

g' étale induit aussi l'isomorphisme :

$$g'^*\Omega^\bullet_{Z'/S} \to \Omega^\bullet_{X'/S}. \tag{1.2.3}$$

2. En effet soit $x' \in X'$, son image $g'(x')$ est contenue dans un affine $U \in Z'$ dont la préimage $V := g'^{-1}(U)$ contient un affine W contenant x. Alors $g'^* F_*\Omega^\bullet_{Z/S}|_W = g'|^*_U\big((F_*\Omega^\bullet_{Z/S})|_V\big)$.

Finalement pour montrer que le morphisme de Cartier $\gamma^{①}$ en degré i est un isomorphisme, il suffit de montrer que le morphisme $g'^*\gamma^{①}$ déduit par changement de base est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} g'^*\mathcal{H}^i F_{Z/S*}\Omega^i_{Z/S} \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{H}^i F_{X/S*}\Omega^\bullet_{X/S} \\ g'^*\Omega^\bullet_{Z'/S} \arrow[u, "g'^*\gamma^{①}"] \arrow[r, "\sim"] & \Omega^\bullet_{X'/S} \arrow[u, "\gamma^{①}"', "\text{iso ?}"'] \end{tikzcd}$$

ce qui nous ramène à prouver b) pour $Z = \operatorname{Spec}\mathcal{O}_S[T_1, \dots, T_n]$. On souhaite se ramener à $Z = \operatorname{Spec}\mathbf{F}_p[T_1, \dots, T_n]$. Au dessus de chaque ouvert affine $U = \operatorname{Spec} C$ de S, on a le changement de base :

$$\begin{tikzcd} C[T_1, \dots, T_n] & \mathbf{F}_p[T_1, \dots, T_n] \arrow[l] \\ C \arrow[u] & \mathbf{F}_p \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dont on déduit l'isomorphisme $\Omega^\bullet_{C[T_1,\dots,T_n]/C} \xleftarrow{\sim} C \otimes_{\mathbf{F}_p} \Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_1,\dots,T_n]/\mathbf{F}_p}$. C étant plat sur $\mathbf{F}_p$, $\otimes_{\mathbf{F}_p} C$ commute à la cohomologie d'où l'isomorphisme :

$$C \otimes_{\mathbf{F}_p} H^\bullet\big(\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_1,\dots,T_n]/\mathbf{F}_p}\big) \xrightarrow{\sim} H^\bullet\big(\Omega^\bullet_{C[T_1,\dots,T_n]/C}\big).$$

Donc comme le montre le diagramme suivant, on est ramenés à prouver que $\gamma^{①}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}/\mathbf{F}_p}$ est un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd} \Omega^i_{C^{(p)}[T_1,\dots,T_n]/C^{(p)}} \arrow[r, "\gamma^{①}_{\mathbf{A}^n_C/C}\ \text{iso ?}"] \arrow[d, "\sim"'] & H^i(\Omega^\bullet_{C[T_1,\dots,T_n]^{(p)}/C^{(p)}})^{(p)} \arrow[d, "\sim"] \\ C^{(p)} \otimes_{\mathbf{F}_p} \Omega^i_{\mathbf{F}_p{}^{(p)}[T_1,\dots,T_n]/\mathbf{F}_p{}^{(p)}} \arrow[r, "\gamma^{①}_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}/\mathbf{F}_p}"] & C^{(p)} \otimes_{\mathbf{F}_p} H^i(\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_1,\dots,T_n]^{(p)}/\mathbf{F}_p{}^{(p)}})^{(p)} \end{tikzcd}$$

On souhaite se ramener au cas $n = 1$. On a d'une part l'isomorphisme [3]

$$\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_1,\dots,T_n]/\mathbf{F}_p} \xrightarrow{\alpha^\bullet \sim} \bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} \Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_i]/\mathbf{F}_p},$$

et d'autre part le théorème de Künneth (par exemple [Bbki], Alg. X) qui affirme que

$$\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} H^\bullet(\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_i]/\mathbf{F}_p}) \xrightarrow{\beta} H^\bullet\Big(\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n} \Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_i]/\mathbf{F}_p}\Big)$$

3. *[personnel : vrai en degré 1 et à deux variable, par la propriété universelle de Ω, puis par récurrence sur le nombre de variables puis sur le degré.]*

est un isomorphisme de $\mathbf{F}_p[T_1,\dots,T_n]$-algèbres graduées. En conclusion, le diagramme suivant montre qu'il suffit que $\gamma^\bullet_{\mathbf{F}_p[T]/\mathbf{F}_p}$ soit un isomorphisme :

$$\begin{tikzcd}
\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p{}^{(p)}[T_1,\dots,T_n]/\mathbf{F}_p{}^{(p)}} \arrow[r, "\gamma^\bullet_{\mathbf{A}^n_{\mathbf{F}_p}/\mathbf{F}_p}", "\text{iso ?}"'] \arrow[dd, "\alpha^\bullet\ \text{iso}"] & H^\bullet\big(\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_1,\dots,T_n]^{(p)}/\mathbf{F}_p{}^{(p)}}\big)^{(p)} \arrow[d, "H^\bullet(\alpha^\bullet)\ \text{iso}"] \\
& H^\bullet\big(\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} \Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_i]^{(p)}/\mathbf{F}_p{}^{(p)}}\big)^{(p)} \\
\bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} \Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p{}^{(p)}[T_i]/\mathbf{F}_p{}^{(p)}} \arrow[r, "(\gamma^\bullet_{\mathbf{F}_p[T]/\mathbf{F}_p})^{\otimes n}"] & \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant n} H^\bullet(\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T_i]^{(p)}/\mathbf{F}_p{}^{(p)}})^{(p)}, \arrow[u, "\beta^\bullet\ \text{iso}"]
\end{tikzcd}$$

ou encore, par le même argument qu'en a), qu'on ait l'isomorphisme

$$\gamma_{\text{abs}} : \bigoplus_i \Omega^i_{\mathbf{F}_p{}^{(p)}[T]/\mathbf{F}_p{}^{(p)}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i \mathcal{H}^i F_{Z*}\Omega^\bullet_{\mathbf{F}_p[T]^{(p)}/\mathbf{F}_p{}^{(p)}}{}^{(p)}.$$

En degré 0 : si $Z := \operatorname{Spec}\mathbf{F}_p[T]$, $1, T, \dots, T^{p-1}$ est une base de $F_{Z*}\mathcal{O}_Z^{(p)}$ sur $\mathcal{O}_Z$ et la différentielle $d_{Z^{(p)}/\mathbf{F}_p} : F_{Z*}\mathcal{O}_Z \to F_{Z*}\Omega^1_{Z/\mathbf{F}_p} = (F_{Z*}\mathcal{O}_Z)dT$ ($\mathcal{O}_{Z'} = \mathcal{O}_Z$-linéaire), envoie T_i sur $iT^{i-1}dT$ donc

- H^0 est libre sur $\mathcal{O}_{Z'}$ de base 1
- H^1 est libre sur $\mathcal{O}_{Z'}$ de base $T^{p-1}dT$

or $\mathcal{O}_Z$ est libre de base 1 et $\Omega_{Z/\mathbf{F}_p}$ libre de base dT donc $\gamma^\bullet_{Z/\mathbf{F}_p}$ est un isomorphisme.

$\square$

§2. Autres résultats

2.1 Proposition : *Soit S un schéma de type fini sur $\mathbf{Z}$. Alors*

(a) *Si x est un point fermé de S, le corps résiduel $k(x)$ est un corps fini*

(b) *Tout ouvert non vide de S contient un point fermé de S.*

(a) Soit x un point fermé de S, son corps résiduel se calcule dans un ouvert affine $\operatorname{Spec} A$ où $A = \mathbf{Z}[X_1,\dots,X_n]/<P_i>$ est une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini et x y est un idéal maximal $\mathfrak{m}$. Je distingue deux cas : si $\mathfrak{m}\cap\mathbf{Z}=(0)$, $\mathfrak{m}$ correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $A_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Q}[\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}]$. Le corps résiduel de $\mathfrak{m}$, compatible à la localisation, peut se calculer comme $k(\mathfrak{m}) = \mathbf{Q}[\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}]/\mathfrak{p}$. Mais le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $k(\mathfrak{m})$ est une $\mathbf{Z}$-algèbre de type fini donc de dimension 0 sur $\mathbf{Q}$, contradiction. Si $\mathfrak{m}\cap\mathbf{Z} = p$, $\mathfrak{m}$ correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{F}_p[\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}]$ et le corps résiduel de $\mathfrak{m}$ peut se calculer par $\frac{A/p}{\mathfrak{m}(A/p)} = \frac{\mathbf{F}_p[\overline{X_1},\dots,\overline{X_n}]}{\mathfrak{p}}$ qui est de dimension finie sur $\mathbf{F}_p$ par le théorème de zéros de Hilbert donc est fini.

(b) Tout ouvert affine d'anneau A contient un idéal maximal $\mathfrak{m}$ (correspondant à un point x) donc de corps résiduel fini. Dans un ouvert affine quelconque B, x correspond à un idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $\operatorname{Frac}(A/\mathfrak{p})$ est fini donc $A/\mathfrak{p}$, intègre, est finie donc c'est un corps donc x est fermé dans B.

2.2 Proposition : *Soit S un schéma intègre de type fini sur $\mathbf{Z}$. L'ensemble des points x de S en lesquels S est lisse sur* $\operatorname{Spec}\mathbf{Z}$ *est un ouvert non vide de S.*

Démonstration : Soit un ouvert affine d'algèbre A intègre de type fini sur $\mathbf{Z}$. Montrons que, par exemple, la fibre générique $\mathbf{Q}[t_1,\dots,t_n]$ contient un ouvert non vide lisse sur (0). On obtiendra plusieurs points de A lisses sur $\mathbf{Z}$ et comme l'ensemble des points lisses est ouvert on obtient un ouvert non vide de points lisses sur $\mathbf{Z}$.

$\mathbf{Q}[t_1,\dots,t_n]$ s'obtient par une succession *finie* d'extensions $\mathbf{Q}[t_1,\dots,t_i] \to \mathbf{Q}[t_1,\dots,t_{i+1}]$. Supposons par récurrence que $A_i = \mathbf{Q}[t_1,\dots,t_i]$ est lisse sur $\mathbf{Z}$ (après un nombre fini de localisations nécessaires). Si t_{i+1} est transcendant sur $\mathbf{Q}(t_1,\dots,t_i)$ alors $A_i[t_{i+1}]$ est lisse sur A_i donc sur $\mathbf{Q}$ par transitivité. Si t_{i+1} est algébrique sur $\mathbf{Q}(t_1,\dots,t_i)$ alors il est séparé (on est en caractéristique nulle) et quitte à localiser un nombre fini de fois on peut supposer P unitaire et la relation de Bezout vérifiée : $(P,P') = A_i[X]$. P étant unitaire, $A_{i+1} = \frac{A_i[X]}{P}$ est libre donc plat sur A_i et par le même argument que dans 2.4 (à l'aide de la 1ère suite exacte fondamentale) il est également non ramifié. Ces deux propriétés (A_{i+1} est "étale" sur A_i) et le fait que A_i est régulier (il est lisse sur $\mathbf{Q}$) entraînent A_{i+1} régulier. $\mathbf{Q}$ étant de caractéristique 0, A_{i+1} est lisse sur $\mathbf{Q}$ [à détailler ?].

$\square$

2.3 Remarque (Interprétation de la dualité $F_*\Omega^i_{X/S} \times F_*\Omega^{n-i}_{X/S} \to \mathcal{H}^n F_*\Omega^\bullet_{X/S}$)

Soient $x = \sum_{I,|J|=i} a_{I,J} t^I dt_J$ et $y = \sum_{I,|J|=n-i} b_{I,J} t^I dt_J$ des sections locales de $F_*\Omega^i_{X/S}$, resp. $F_*\Omega^{n-i}_{X/S}$, sur un ouvert trivialisant. On numérote les multiindices I de 1 à p^n et les J de 1 à C^i_n pour représenter x par la matrice $A := a_{J,I}$ de taille $C^i_n \times p^n$. On représente alors y par la matrice $B = \left(\varepsilon(J,{}^CJ) b_{{}^CI,{}^CJ}\right)_{I,J}$, où $\varepsilon(J,{}^CJ)$ désigne l'indice de la permutation $\{1,\dots,n\} \to \{J,{}^CJ\}$ et ${}^CI$ et ${}^CJ$ désignent les indices *complémentaires* de I et J. B est donc de taille $p^n \times C^{n-i}_n = p^n \times C^i_n$. Avec cette représentation, la classe de cohomologie $\overline{x \wedge y}$ vaut $\operatorname{tr}(AB)$. La trace du produit de deux matrices est une forme bilinéaire non dégénérée donc on retrouve l'injectivité de $F_*\Omega^i_{X/S} \to \mathcal{H}om(F_*\Omega^{n-i}_{X/S}, \mathcal{O}_X)$.

2.4 Proposition : *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres,*

$$\operatorname{Hom}_{D(X)}(\mathcal{E}[i], \mathcal{F}[j]) = H^{j-i}(X, \mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{F})),$$

Démonstration : Se montre en 3 temps. Par définition,

$$\operatorname{Hom}_{D(X)}(\mathcal{E}[j], \mathcal{F}[i]) = \operatorname{Ext}^{i-j}(\mathcal{E},\mathcal{F}).$$

Ensuite, la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules ayant assez d'injectifs, le théorème I.6.4 de [**7**] (Yoneda) entraîne que les Ext^r au sens de cette définition se calculent aussi comme $\operatorname{Ext}^r(X,Y) = h^r(\operatorname{Hom}^\bullet_{\mathcal{O}_{X'}}(X, I^\bullet))$, où $I^\bullet$ est une résolution injective de Y (c'est la définition usuelle).

Enfin, $\operatorname{Ext}^r(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L},\mathcal{G}) = \operatorname{Ext}^r(\mathcal{F},\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G})$ dès que $\mathcal{L}$ est localement libre de type fini, pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des $\mathcal{O}_X$-modules quelconques ([**8**] III.6.7), la démonstration qui suit sera réutilisée. Soit $\cdots \to \mathcal{C}^i\mathcal{G} \to \cdots$ une résolution injective de $\mathcal{G}$, les $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L},\mathcal{G})$ se calculent comme la cohomologie du complexe

$$\cdots \to \operatorname{Hom}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L}, \mathcal{C}^i\mathcal{G}) \to \cdots$$

et $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{L},\mathcal{C}^i\mathcal{G}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{C}^i\mathcal{G})$ car $\mathcal{L}$ est localement libre de type fini (Ex II.5.1). Mais $\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{C}^i\mathcal{G}$ est une résolution injective de $\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{G}$: c'est une "résolution" car $\mathcal{L}$ est localement libre donc plat, "injective" car $\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{C}^i\mathcal{G}$ reste injectif (le foncteur $\mathrm{Hom}(.,\mathcal{L}^\vee\otimes\mathcal{F})$ est exact dès que les foncteurs $\otimes\mathcal{L}$ et $\mathrm{Hom}(.,\mathcal{F})$ sont exacts car l'argument précédent permet de "faire passer le $\mathcal{L}^\vee$ à droite").

Finalement, $\mathrm{Ext}^r(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^r(\mathcal{O}_X,\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{F}) = H^r(X,\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{F})$ (le r-ième foncteur dérivé de "sections globales", car $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X,-)$ est exactement le foncteur sections globales) $= H^r(X,\mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{F}))$.

□

2.5 Corollaire de la preuve : *$\mathcal{E}xt^r(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 0$ pour tout $r > 0$ dès que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont localement libres de type fini.*

Par le même argument que dans la démonstration précédente, $\mathcal{E}xt^r(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathcal{E}xt^r(\mathcal{O}_X,\mathcal{E}^\vee\otimes\mathcal{F})$, qui est nul car $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_X,-)$ est le foncteur identité donc ses foncteurs dérivés pour $r > 0$ sont nuls.

2.6 Décomposition des groupes de cohomologie en caractéristique $p > 0$

Soit X propre et lisse de dimension $\leqslant p$ relevable sur $W_2(k)$, on a un isomorphisme de k-espaces vectoriels $\bigoplus_{i+j=l} H^j(X,\Omega^i_{X/S}) = \boldsymbol{H}^l(X,\Omega^\bullet_{X/S})$. En particulier la suite spectrale de Hodge vers de Rham $E_1^{ij} = H^j(X,\Omega^i_{X/k}) \Rightarrow H^\bullet_{\mathrm{DR}}(X/k)$ dégénère en E_1.

preuve. — Par le corollaire 3.7, $\bigoplus_i \Omega^i_{X'/S}[-i] \xrightarrow{\sim} F_*\Omega^\bullet_{X/S}$
d'où l'isomorphisme des groupes d'hypercohomologie en tout degré l :
$\bigoplus_j H^{l-j}(X',\Omega^j_{X'/S}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{H}^l(X',F_*\Omega^\bullet_{X/S})$.
Le morphisme F étant affine, F_* est exact dans la catégorie des faisceaux quasi-cohérents donc $\boldsymbol{H}^l(X',F_*\Omega^\bullet_{X/S}) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{H}^l(X,\Omega^\bullet_{X/S})$.

D'autre part $S^{(p)}$ étant plat sur $S = \mathrm{Spec}\,k$, le changement de base $S^{(p)} \xrightarrow{F_S} S$ commute à la cohomologie (et de façon générale à la formation du faisceau des différentielles) donc $k^{(p)}\otimes H^j(X,\Omega^i_{X/S}) \xrightarrow{\sim} H^j(X',\Omega^i_{X'/S})$ d'où l'égalité des dimensions $\dim_k(k^{(p)}\otimes H^j(X,\Omega^i_{X/S})) = \dim_k(H^j(X',\Omega^i_{X'/S}))$.
Finalement $\sum_{i+j=l} h^{i,j} = h^l$, qui suffit pour établir la dégénérescence en E_1. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Arabia et Z. Mebkhout *Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas.* (site internet des auteurs).

[2] O. Biquard et A. Höring *Kähler geometry and Hodge theory.* (page web des auteurs).

[3] A. Borel et J.-P. Serre *Le théorème de Riemann-Roch.* Bulletin de la SMF 86, 97-136 (1958).

[4] J.-P. Demailly, L. Illusie et *al. Introduction à la théorie de Hodge.* Panoramas et synthèses, SMF 1996.

[5] P. Deligne et L. Illusie *Relèvements modulo* p^2 *et décomposition du complexe de de Rham.* Invent. math. 89, 247-270 (1987).

[6] A. Grothendieck et J. Dieudonné *Élements de géométrie algébrique.* publ. math. IHES.

[7] R. Hartshorne *Residues and duality.* Springer, Lecture notes in mathematics 20.

[8] R. Hartshorne *Algebraic geometry.* Springer, 1973.