

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
PROMOTION X2005
Rambaud Matthieu

RAPPORT DE STAGE D'OPTION SCIENTIFIQUE

Variétés toriques et points entiers dans les polytopes convexes

NON CONFIDENTIEL

Option :	Mathématiques
Champ de l'option :	Géométrie Algébrique
Directeur de l'option :	Yves Laszlo
Directeur de stage :	Laurent Bonavero
Dates du stage :	Avril-Juillet 2008
Adresse de l'organisme :	Institut Fourier UFR de Mathématiques 100 rue des Maths, BP 74, 38402 St Martin d'Hères, France

Résumé

[BS58] Ce stage a eu pour but de *savoir expliquer parfaitement les trois premières parties de l'article de synthèse [Bri94] de M. Brion*. Il s'appuie sur le problème suivant : étant donné un polytope convexe P dont les sommets sont à coordonnées entières dans un réseau M , on veut compter le nombre de points à coordonnées entières dans nP où n est un entier. Il aboutit à une formule explicite dans le cas d'un tétraèdre, d'après [Pom93].

Nous sommes encouragés par le théorème d'Ehrhart (1967), qui affirme en particulier que le nombre des points entiers est un polynôme en n . Pour en récupérer les coefficients il faudra associer une variété torique X_P à P puis calculer sa classe de Todd. En effet on sait munir X_P d'un fibré en droites ample $\mathcal{O}_X(D)$ dont les sections globales représentent les points entiers de P . L'annulation des $H^i(\mathcal{O}_X(D))$, $i > 0$ et le théorème de Riemann-Roch fournissent formellement le polynôme d'Ehrhart. La partie 2 détaille les propriétés des variétés toriques utilisées dans le raisonnement de l'article. La partie 3 regroupe des résultats plus spécifiques (essentiellement ceux utilisés dans les calculs d'intersection sur les variétés toriques simpliciales). On détaille particulièrement les preuves incomplètes dans la littérature, "[M2]" indique ce qui a été fait après le stage.

Abstract

This report explains the three first parts of the survey article [Bri94]. The leading problem is, given a convex polyhedron P whose vertices lie in a lattice M , to determine the number of lattice points lying in nP where n is an integer. We are encouraged by Ehrhart's theorem (1967), which states in particular that this number is a polynomial in n . To determine the coefficients one will need to associate a toric variety X_P to P and calculate its Todd class. Indeed one can endow X with an ample line bundle $\mathcal{O}_X(D)$ whose global sections represent the lattice points of P . From the vanishing of the $H^i(\mathcal{O}_X(D))$, $i > 0$ and from the Riemann-Roch theorem, one deduces Ehrhart's polynomial. We will also detail the properties of toric varieties dealt within the article.

Table des matières

I	Solution du problème	1
1	On associe au polytope une variété torique	1
2	Nombre de points entiers $= \chi(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P))$	2
3	Le polynôme d'Ehrhart	6
3.1	Existence et loi de réciprocité	6
3.2	En dimension 2	8
3.2.1	Formule de Pick	8
II	Propriétés des variétés toriques en jeu	9
4	Géométrie convexe	9
4.1	Cônes polyédraux convexes	9
4.2	Eventails et polytopes	12
5	Variétés toriques affines	14
6	Variété torique d'un éventail	18
6.1	Construction et premières propriétés	18
6.2	Un critère de complétude	20
7	Diviseurs dans les variétés toriques	22
7.1	Orbites du tore et leurs fermetures	22
7.1.1	point distingué	22
7.1.2	orbites	23
7.2	Caractérisation des diviseurs T -stables et conséquences	27
7.3	Le théorème d'annulation de Demazure	29
7.4	Désingularisations projectives	31
8	Formes différentielles sur les variétés toriques	32
8.1	le fibré canonique	32
8.2	formes différentielles à pôles logarithmiques	32
9	Calculs dans le groupe de Chow	33
9.1	préliminaire	33
9.2	les groupes $A_k(X)$	33
III	Outils pour les variétés toriques singulières	35
10	Action du tore et variétés quotients	35
11	Faisceau dualisant	38

TABLE DES MATIÈRES

12 Théorie de l'intersection	42
12.1 Théorème de Riemann-Roch	42
Bibliographie	43

Partie I

Solution du problème

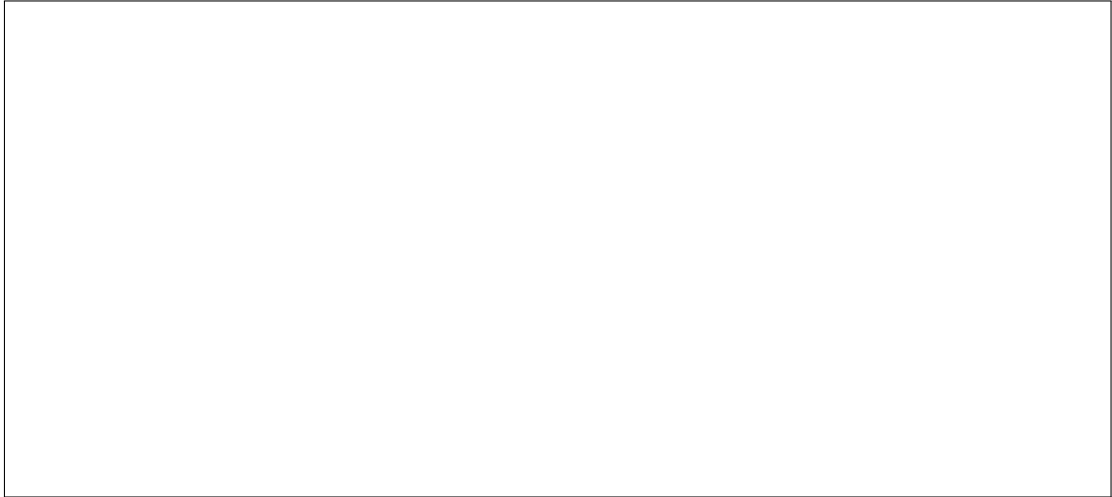
1 On associe au polytope une variété torique

Soit M un réseau de rang fini et $M_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Z}} M$ l'espace vectoriel réel engendré.

On appelle *polytope entier* l'enveloppe convexe dans $M_{\mathbf{R}}$ d'un nombre fini de points de M . On note $\text{aff}(P)$ l'espace affine qu'il engendre, $\dim P$ la dimension de $\text{aff}(P)$ et $\text{int}_{\text{rel}} P$ l'intérieur de P dans $\text{aff}(P)$. Un *sommet de P* un point qui n'est à l'intérieur d'aucun segment entièrement contenu dans P . Une *face de P* est un sous-ensemble de P défini comme $P \cap H$, où H est un hyperplan affine tel que P soit entièrement contenu dans un des deux demi-espaces qu'il définit. Les *facettes* sont les faces maximales de P .

Soit $N \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z})$ le réseau dual et $\langle n, m \rangle \stackrel{\text{def}}{=} n(m)$ le "crochet de dualité". On montre que les sommets et les faces de P sont en nombre fini, ce qui permet de construire l'*éventail normal* de P : pour toute face F de P , (par exemple un sommet S , comme sur le dessin) on note P_F le cône convexe engendré par les points $p - f$ où $f \in F$ et $p \in P$. À chaque P_F on associe son *cône dual* :

$$(1) \quad P_F^{\vee} := \{x \in N_{\mathbf{R}}, \langle m, x \rangle \geq 0 \text{ pour tout } m \text{ dans } P_F\}$$



n_F est la normale rentrante de la facette F , *minimale* dans N , ce qui la détermine de manière unique. On montre que P_F^{\vee} est un *cône rationnel polyédral convexe* (ou "cône"), c'est à dire qu'il est engendré par combinaisons linéaires positives d'un nombre fini de vecteurs, les n_F , à coordonnées rationnelles dans le réseau dual $N := \text{Hom}(M, \mathbf{Z})$. En fait P_F^{\vee} est même *saillant*, *i.e.* il ne contient aucun sous espace vectoriel de $N_{\mathbf{R}}$. Lorsque F décrit les faces de P , les P_F^{\vee} s'assemblent en un *éventail* Δ_P , c'est à dire une collection finie de cônes telle que :

- (i) Si τ est une face de $\sigma \in \Delta$, alors $\tau \in \Delta$.
- (ii) Si $\sigma, \tau \in \Delta$ alors $\sigma \cap \tau$ est une face de σ et de τ .

À tout éventail Δ on associe une variété torique $X(\Delta)$ en recollant les variétés toriques affines

$$U_{\sigma} := \text{Specmax } A_{\sigma}, \text{ où } A_{\sigma} = \bigoplus_{m \in M \cap \sigma^{\vee}} \mathbf{C} \chi^m$$

est l'algèbre du semi-groupe $M \cap \sigma^\vee$, le long des ouverts

$$\begin{array}{ccc} & i_\sigma & \\ U_{\sigma \cap \tau} & \searrow & U_\sigma \\ & i_\tau & \\ & & U_\tau \end{array}$$

Le recollement est détaillé dans 6.1. En particulier l'ouvert $U_{\{0\}}$, noté T_N (ou T quand ce n'est pas ambigu), est irréductible et dense dans $X(\Delta)$. C'est le tore algébrique $(\mathbf{C}^*)^n$, dont l'action sur lui-même par multiplication se prolonge à $X(\Delta)$ tout entier. C'est vérifié dans chaque U_σ : soient $s \in U_\sigma$ et $t \in T_N$ deux \mathbf{C} -points, alors $t.s$ est le produit de s et t . Donc l'action de T_N sur l'algèbre A_σ , par composition, est $t.\chi^m = \{s \rightarrow \chi^m(t.s) = t(\chi^m)s(\chi^m)\}$, c'est à dire $t.\chi^m = t(\chi^m)\chi^m$ qui reste bien dans A_σ .

$X(\Delta_P)$ est de type fini sur \mathbf{C} car il y a un nombre fini de cônes dans l'éventail et que pour être "de type fini" il suffit d'avoir un recouvrement par des affines de type fini¹. On montre également qu'elle est séparée et intègre. Enfin on verra que Δ_P est *complet*, c'est à dire qu'il recouvre $N_{\mathbf{R}}$, donc en appliquant le critère de propreté 6.7 à $X(\Delta_P) \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C}$ on en déduit que $X(\Delta_P)$ est *complète*.

2 Nombre de points entiers = $\chi(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P))$

Avant d'utiliser un diviseur ample D_P sur X_P pour calculer les points entiers de P , il faut faire un détour par l'étude des diviseurs sur une variété torique quelconque $X(\Delta)$ associée à un éventail Δ . Cela permettra d'en déduire des propriétés cruciales de D_P et surtout de faire les calculs dans groupe de Chow de X_P .

$X(\Delta)$ étant normale, on peut parler de diviseurs de Weil et de Cartier et de plus le groupe des classes de diviseurs de Cartier $\text{CaCl}(X(\Delta))$ s'identifie à $\text{Pic}(X(\Delta))$: on appellera désormais "diviseur de Cartier" un diviseur localement principal. Notons $\Delta(1)$ l'ensemble des cônes de Δ de dimension 1 (les "rayons"). Alors les diviseurs de Weil premiers de X (ici, les sous variétés irréductibles de codimension 1) qui sont stables par T_N sont en bijection avec $\Delta(1)$. En effet un tel diviseur D est nécessairement réunion d'orbites θ du tore. Mais d'après la proposition 7.1, les orbites de T_N sont en bijection avec les cônes $\sigma \in \Delta$, θ_σ étant l'orbite du *point distingué* de U_σ , de dimension $n - \dim \sigma$. Il y a donc un *nombre fini* de $\overline{\theta_\sigma}$ donc le fermé D est *aussi* réunion finie de leurs fermetures $\overline{\theta}$. Donc par irréductibilité il coïncide avec un $\overline{\theta_\sigma}$, de dimension $n - 1$ car D est un diviseur, c'est à dire un θ_ρ , $\rho \in \Delta(1)$. Réciproquement, la proposition 7.4 montre que la fermeture $V(\sigma) := \overline{\theta_\sigma}$ est une *variété torique* de dimension $n - \dim \sigma$ (en fait $X(\overline{\Delta}(\sigma))$, $\overline{\Delta}(\sigma)$ étant le projeté de Δ le long de $\text{aff}(\sigma)$). Donc les $V(\rho)$ sont bien intègres car ce sont des variétés toriques et T_N -stables car réunion d'orbites, d'après la formule explicite 7.1 3'), qui montre aussi qu'elles sont bien *distinctes* deux à deux.

P s'écrit comme l'intersection des demi-espaces

$$(1) \quad H_F^+ = \{m \in P, \langle m, n_F \rangle \geq -a_F\}$$

où F parcourt les *facettes* de P . Les $\rho_F := \mathbf{R}^+ n_F$ sont les cônes de dimension 1 de Δ_P , ils correspondent aux diviseurs $D_F := V(\rho_F)$. On utilisera essentiellement le diviseur

$$D_P = \sum_F a_F D_F$$

1. [personnel : propriété un peu plus forte que "être de type fini est local sur la base", cf. cours 2.14]

Remarque 2.1 D_P est un diviseur de Cartier sur $X_P := X(\Delta_P)$. En effet soit S un sommet de P , P_S^\vee le cône de dimension n correspondant. D'après le raisonnement précédent appliqué à l'éventail Δ_P formé de P_S^\vee et de ses faces (ou d'après 7.2), D_F rencontre $U_{P_S^\vee}$ ssi $\rho_F \in P_S^\vee(1)$ ssi (par construction de l'éventail) F contient S . χ^S étant une fonction rationnelle sur la variété normale X_P , régulière inversible sur le tore $T_N = \text{Specmax}((\chi^m)_{m \in M})$, son diviseur est supporté dans $X_P \setminus T_N = \bigcup_F D_F$ d'après 7.1 3'). On sait alors calculer

$$(\text{div}(\chi^S))|_{U(\sigma)} = \sum_{F \ni S} \langle S, n_F \rangle D_F = - \sum_{F \ni S} a_F D_F = -(D_P)|_{U_\sigma}$$

La première égalité est établie dans la proposition 7.9 : $\text{ord}_{V(\rho)}(\chi^u) = \langle u, n_\rho \rangle$ appliquée à $\rho = \rho_F$ et $n_\rho = n_F$. La deuxième exprime que S est en particulier dans l'hyperplan support de la facette F et la troisième est la définition de D_P , associée à la remarque préliminaire. D est donc localement principal, *i.e.* est de Cartier.

Les deux arguments suivants sont escamotés dans la littérature. Ils sont pourtant *fondamentaux* : joints à 7.9, ils impliquent formellement toutes les propriétés des diviseurs sur les variétés toriques. Le premier n'est pas vrai en général : prenons le diviseur $D = \{0\} = \text{div}(X)$ dans $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$, stable par le morphisme $t : x \rightarrow x^2$ (sur les \mathbf{C} -points) de $\mathbf{A}_{\mathbf{C}}^1$ dans lui-même. Alors la fonction rationnelle $\frac{1}{X}$ est dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ mais $t.\frac{1}{X} : x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ n'est pas dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$.

Propriété 2.2 ([M2]) Soit D un diviseur T_N -stable sur $X(\Delta)$, alors $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est T_N -stable (T_N agit par composition²).

Démonstration Pour vérifier qu'un $f \in H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ reste dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ sous l'action de T_N , il suffit de le vérifier pour ses restrictions aux U_σ ce qui nous ramène à montrer que chaque $H^0(X, \mathcal{O}_{U_\sigma}(D|_{U_\sigma}))$ est stable par T_N . $D|_{U_\sigma}$ étant stable par T_N , il est supporté dans les $V(\rho)$ ($\rho \in \sigma(1)$, σ vu comme un éventail).

Ecrivons $D|_{U_\sigma} = \sum_{\rho \in \sigma(1)} -a_\rho V(\rho)$, alors une section (globale) f est dans $\mathcal{O}_X(D|_{U_\sigma})$ ssi elle a un ordre d'annulation au moins a_ρ sur chaque $V(\rho)$. Montrons que c'est encore vrai pour $t.f$ pour tout $t \in T_N$: soit n_ρ le générateur primitif de ρ dans N , la formule 7.9 : $\text{ord}_{V(\rho)}(\chi^u) = \langle u, n_\rho \rangle$ nous invite à choisir un $u \in M$ tel qu'il existe un $l \in \mathbf{Z}$ tel que $\langle u, n_\rho \rangle = l \text{ord}_{V(\rho)}(f)$ (possible car $\langle, \rangle \rightarrow \mathbf{Q}$ fait de $M_{\mathbf{R}}$ le dual de $N_{\mathbf{R}}$). La fonction $\chi^{-u} f^l$ n'a ni zéro ni pôle le long de $V(\rho)$. Mais t est un automorphisme de $V(\rho)$ donc en particulier $t.(\chi^{-u} f^l)$ ne s'annule sur $V(\rho)$ que si $\chi^{-u} f^l$ s'annule sur $V(\rho)$ (resp. $\frac{1}{t.(\chi^{-u} f^l)}$ ne s'annule sur $V(\rho)$ que si $\frac{1}{\chi^{-u} f^l}$ s'annule sur $V(\rho)$). Finalement $t.(\chi^{-u} f^l)$ n'a pas de zéro (resp. pas de pôle) le long de $V(\rho)$ donc est d'ordre 0 en $V(\rho)$, donc $l \text{ord}_{V(\rho)}(t.f) = \text{ord}_{V(\rho)}(t.f^l) = \text{ord}_{V(\rho)}(t.(\chi^u \chi^{-u} f^l)) = \text{ord}_{V(\rho)}(t.(\chi^u)) + \text{ord}_{V(\rho)}(t.(\chi^{-u} f^l)) = \text{ord}_{V(\rho)}(t.\chi^u) = \text{ord}_{V(\rho)}(\chi^u)$ (t agit sur χ^u en le multipliant par $\chi^u(t) = l \text{ord}_{V(\rho)}(f)$). \square

Proposition 2.3 $H^0(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P)) = \bigoplus_{u \in P \cap M} \mathbf{C} \chi^u$

Preuve : D'après ce qui précède, $H^0(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P))$ est stable par T_N . Soit $f \in H^0$ une section globale, elle s'écrit comme une somme finie $\sum_{u \in \mathcal{B}} c_u \chi^u$. Soit W le \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension finie engendré par les $\{\chi^u, u \in \mathcal{B}\}$, il est stable par $T_N : t.\chi^u = \chi^u(t) \chi^u$.

2. $t.f(.) \stackrel{\Delta}{=} f(t.)$ mais si T_N n'était pas commutatif, il aurait fallu écrire l'action à droite ou faire $t.f(.) \stackrel{\Delta}{=} f(t^{-1}.)$

Donc $W \cap H^0$ est stable par T_N , c'est aussi un \mathbf{C} -espace vectoriel de *dimension finie* de l'algèbre $\mathbf{C}[M]$ du groupe T_N . Donc par le théorème de réductibilité complète 10.1 (qui est une façon savante de dire que des opérateurs diagonalisables qui commutent sont simultanément diagonalisables), il se décompose en une somme directe de vecteurs propres e_{χ^u} , $u \in M$, associés aux caractères χ^u . Mais cela a lieu dans $\mathbf{C}[M]$, où tous les vecteurs propres sont des caractères χ^m (exercice : il n'y en a pas d'autres, par indépendance linéaire des caractères). En particulier tous les caractères χ^u , $u \in \mathcal{B}$ qui interviennent dans $f \in W \cap H^0$ sont eux mêmes dans $W \cap H^0$ (exercice immédiat) donc dans H^0 . Le même raisonnement appliqué à tous les $f \in H^0$ entraîne que H^0 se décompose en la somme directe $\bigoplus_{\chi^u \in H^0} \chi^u$.

Toujours grâce à 7.9, on voit que $\text{div}(\chi^m) + D_P \geq 0$ ssi

$$\sum_F \langle m, n_F \rangle D_F + \sum_F a_F D_F \geq 0.$$

C'est équivalent à $\langle m, n_F \rangle \geq -a_F$ pour tout F , ce qui signifie par définition (1) que $m \in P \cap M$.

Proposition 2.4 soit $\psi_P : |\Delta_P| \rightarrow \mathbf{C}$ la fonction linéaire par morceaux associée à P , définie sur chaque $P_S^\vee = \sigma_S$ par $\psi_{D_P}(v) = \langle S, v \rangle$ (σ_S étant le cône n -dimensionnel associé au sommet S de P). Alors ψ_{D_P} est "strictement concave", au sens où le graphe de ψ est strictement concave : c'est à dire qu'un point $\psi(x)$ du graphe est strictement sous tous les plans tangents $T_{P_S^\vee}$ au graphe, sauf celui au dessus du (des) cônes maximaux contenant x .

Le graphe a la forme d'une "tente" : (les valeurs $\psi(\vec{n}_i) = -a_i$ étant justifiées par l'assertion suivante)



ψ_P nous intéresse car c'est en fait la fonction support ψ_{D_P} (entière sur N) associée au diviseur D_P , au sens où elle vérifie

Définition 2.5 $D_P = D_{\psi_P} := \sum_{\rho \in \Delta(1)} -\psi_P(\vec{n}_\rho) V(\rho)$.

Une fonction support étant une fonction $\psi : |\Delta| \rightarrow \mathbf{R}$ linéaire sur chaque cône. Elle est "entière" sur N ssi elle prend des valeurs rationnelles sur N . Le diviseur " D_ψ " associé à une fonction support ψ est défini par l'égalité ci-dessus.

Ce fait nous permettra d'appliquer le théorème de Demazure pour obtenir l'annulation de la cohomologie. La convexité de ψ_P vient de la remarque suivante :

Lemme 2.6 $\psi_P(v) = \min_{u \in P} \langle u, v \rangle$

Preuve : (d'après [CLS10] 4,2.14) Le minimum est bien défini puisque P est compact. On rappelle que $P = \{m \in M_{\mathbf{R}}, \langle m, n_F \rangle \geq -a_F \forall F \text{ facette de } P\}$ et que les $\rho \in \Delta(1)$ correspondent par construction aux $V(\rho) = D_F$, F facette de P .

Appelons provisoirement ψ'_P la fonction support du lemme, montrons qu'elle coïncide avec ψ_P . Pour cela il suffit de montrer que ψ'_P est bien linéaire sur chaque cône maximal et qu'elle coïncide avec ψ_P sur les n_F (puisque'ils engendrent les cônes).

Soit donc un cône maximal $P_S^\vee = \sigma_S = \text{Cône}(\{n_F\}_{F \ni S})$. Prenons $v = \sum_{F \ni S} \lambda_F n_F \in \sigma_S$, où $\lambda_F \geq 0$. Alors $m \in P$ implique

$$\langle m, v \rangle = \sum_{F \ni S} \lambda_F \langle m, n_F \rangle \geq - \sum_{F \ni S} \lambda_F a_F$$

Donc $\psi'_P(v) \geq - \sum_{F \ni S} \lambda_F a_F$ et puisque l'égalité est atteinte pour $m = S$ (S est dans toutes les facettes $F \ni S$), on obtient

$$\psi'_P(v) = - \sum_{F \ni S} \lambda_F \langle S, n_F \rangle = \langle S, v \rangle.$$

Remarques 2.7 On pourrait alors montrer que $\mathcal{O}_{X_P}(D_P)$ est ample. Donc il existe un entier ν_0 tel que pour tout $\nu \geq \nu_0$, $\mathcal{O}_{X_P}(D_P)^{\otimes \nu} = \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P)$ est très ample donc $X_{\nu P}$ est quasi-projective, elle est propre sur \mathbf{C} donc projective par [BS58] p101 corollaire 5. Or $X_{\nu P} = X_P$ donc **X_P est projective**³.

En fait certains types de polytopes (appelés justement "très amples") sont tels que $\mathcal{O}_{X_P}(D_P)$ est très ample. Ce sont exactement les polytopes tels que pour tout σ cône n -dimensionnel, le semi-groupe S_σ est engendré par $\{u - m_\sigma; u \in P \cap M\}$, où m_σ est le sommet de P correspondant au cône σ .

Corollaire 2.8 $H^i(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P)) = 0$ pour tout $i > 0$

Preuve : la fonction $\psi_{D_P} = \psi_P$ associée à D_P étant concave, c'est une conséquence du théorème de Demazure 7.12. \square

Remarque 2.9 Un diviseur de Cartier T -invariant a une unique fonction support ψ_D vérifiant 2.5 et entière sur N . On pourrait facilement montrer ([Ful93] 3.4) que pour toute variété torique $X(\Delta)$ propre sur \mathbf{C} ,

$\{D \text{ ample} \Leftrightarrow \psi_D \text{ strictement concave}^4\} \Rightarrow \{\mathcal{O}(D) \text{ engendré par ses sections globales} \Leftrightarrow \psi_D \text{ concave}\}.$

On en pourrait en déduire le critère de projectivité de la remarque précédente et par le théorème de Demazure, l'annulation des $H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$, $i > 1$ dès que D est ample ! De plus le fibré canonique d'une variété torique régulière est en particulier $\Omega_{X(\Delta)/\mathbf{C}}^n = [K]$, $K = - \sum_{\rho \in \Delta(1)} V(\rho)$ (II 8.1). ψ_{D_P+K} étant clairement concave, on retrouve le théorème d'annulation de Kodaira :

$H^i(X, \mathcal{O}(D + K)) = 0$ pour tout $i \geq 1$

3. En fait la démonstration se fait dans l'autre sens ! Pour caractériser les faisceaux amples on commence par donner le critère pour être très ample, *i.e.* pour fournir... un morphisme quasi-projectif sur \mathbf{C} .

4. gag : pour démontrer le critère pour que D fournisse une immersion fermée dans un $P_{\mathbf{C}}^N$, on n'utilise pas $|\Delta| = N_{\mathbf{R}}$, *i.e.* que $X(\Delta)$ propre sur \mathbf{C} . Où est l'erreur ?

3 Le polynôme d'Ehrhart

3.1 Existence et loi de réciprocité

Il reste à calculer $\chi(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P))$. X_P étant complète, le théorème de Riemann-Roch ([Ful98] 18) affirme l'existence d'une "classe de Todd" $\text{Td}(X)$ dans $A_*(X)_{\mathbf{Q}}$, telle que $\text{Td}_n(X) = [X]$, qui coïncide avec la classe de Todd $\text{td}(T_X)$ du fibré tangent quand X est régulière ($\text{Td}(X) \cap [X] = \text{td}(T_X)$), telle que pour tout fibré vectoriel E de rang fini

$$\chi(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(E)) = \int_X \text{ch}(E) \cdot \text{Td}(X)$$

(La première classe de Chern de $\mathcal{O}_X(D)$ est par définition D^5 .) Encore faut-il que le degré d'un 0-cycle $\alpha = \sum_P n_P \text{ modulo un div}(f)$ soit bien défini : par définition, $\deg(\alpha) = \int_X \alpha := \sum_P n_P$.

[C'est en particulier $\deg(\alpha) = p_*(\alpha)$, où p est le morphisme *propre et surjectif* $X \rightarrow S = \text{Spec}(\mathbf{C})$ (on identifie $A_0(S) = \mathbf{Z}[S] = \mathbf{Z}$). Donc d'après [Ful98] proposition I.1.4 (a) (admise), le cycle $p_*(\text{div}(f))$, f rationnelle sur une sous-variété W (donc encore propre sur S) de dimension 1, est nul sur S^6 .]

En ce qui nous concerne, c'est plus simple puisque tous les cycles de dimension 1 étudiés seront $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^1$!

Théorème 3.1 (Ehrhart) *Soit P un polytope de dimension maximale n à points dans le réseau $M_{\mathbf{R}} \cong \mathbf{R}^n$. Alors il y a un unique polynôme E_P (le polynôme d'Ehrhart) à coefficients dans \mathbf{Q} qui a les propriétés suivantes :*

1. Pour tout entier $\nu \geq 0$,

$$E_P(\nu) = |\nu P \cap M|$$

2. Si le volume est normalisé de sorte que le n -cube unité de M a un volume 1, alors le coefficient dominant de E_P est $\text{vol}(P)$.

3. Loi de réciprocité : pour tout $\nu > 0$, $\text{int}_{\text{rel}}(P)$ désignant toujours l'intérieur strict de P ,

$$E_P(-\nu) = (-1)^n |(\nu \text{int}_{\text{rel}}(P)) \cap M|.$$

Démonstration On remarque que par construction, $X_P = X_{\nu P}$ et le fibré en droites $D_{\nu P} = \nu D_P$. De l'annulation de la cohomologie de $\mathcal{O}_{X_P}(D_P)$ (2.8) et du théorème de Riemann-Roch on déduit

$$|(\nu P \cap M)| = \chi(X, \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P)) = \sum_k \nu^k \deg\left(\frac{1}{k!} D_P^k \cdot \text{Td}_k(X_P)\right)$$

Le terme dominant de ce polynôme en ν est $\deg(D^n)/n!$. Mais c'est surtout $\text{vol}(P)$ car

$$\frac{\text{vol}(P)}{\nu^n}$$

5. Compatible avec la définition classique pour les fibrés holomorphes $\frac{1}{2i\pi} \partial \bar{\partial} \log \|s(z)\|^2$, s section holomorphe locale non nulle quelconque, grâce à la formule de Poincaré-Lelong et à la dualité de Poincaré.

6. [personnel : Dans le cas particulier où W est régulière il y a un argument plus direct ([Har73] II.6.10) et si l'espace analytique W^{an} ([GaGa]) est une variété, on peut aussi appliquer le théorème des résidus à la forme méromorphe $\frac{df}{f}$.]

(On le voit en passant à la limite $\nu \rightarrow +\infty$: l'erreur sur le nombre de points entiers est dominée par l'aire des faces de P). Le terme constant est 1 (prendre $\nu = 0$: on obtient le polytope $\{0\}$).

Pour la loi de réciprocité, on peut supposer X_P régulière : en effet on sait subdiviser l'éventail Δ_P jusqu'à en obtenir un, Δ'_P , dont tous les cônes sont "réguliers", *i.e.* engendrés par une partie d'une base de $N_{\mathbf{R}}$ (long à montrer : on le raffine d'abord pour avoir tous les cônes simpliciaux, puis réguliers). En examinant la preuve on peut même montrer (pas encore fait) qu'on peut choisir Δ'_P tel que $X = X(\Delta'_P)$ soit *projective*. Par le critère 5.6, X est régulière (c'était le but). L'opération ne change pas la fonction support ψ de D'_P (on ajoute des "piquets" à la "tente" sans changer sa forme) donc ses sections globales sont toujours dans $M \cap P$. La proposition 8.1 montre que le diviseur canonique de X est $K = -\sum_{\rho} V(\rho)$. La dualité de Serre ([Har73] III.7.13 (admis), X étant projective et régulière) entraîne que

$$H^i(X, \mathcal{O}_{X_P}(-\nu D_P)) \cong (-1)^n H^{n-i}(X, \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P + K))^*$$

par conséquent la caractéristique d'Euler-Poincaré s'exprime

$$\chi(X, \mathcal{O}_{X_P}(-\nu D_P)) = (-1)^n \chi(X, \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P + K))$$

pour tout ν . Qui est exactement le polynôme d'Ehrhart :

$$E_P(-\nu) = (-1)^n \chi(X, \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P + K))$$

mais $K + \nu D_P$ a sa fonction support encore concave (clair), donc d'après Demazure (7.12),

$$H^i(X, \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P + K)) = 0 \text{ pour tout } \nu > 0$$

donc pour tout $\nu > 0$, $E_P(-\nu)$ se simplifie aussi en

$$E_P(-\nu) = H^0(X, \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P + K))$$

Il n'est pas compliqué de voir que $H^0(X, \mathcal{O}_{X_P}(\nu D_P + K)) = |\nu \text{int}_{\text{rel}}(P) \cap M|$. En remplaçant " νP " par P on se ramène à le montrer pour $\nu = 1$. Ensuite, on travaille certes sur $X(\Delta'_P)$ mais les calculs sont les mêmes (le fait de rajouter des diviseurs $V(\rho)$ ne change pas la forme du polytope dans M associé à $\psi_{D'_P} = \psi_{D_P}$ qui représente les sections globales de $\mathcal{O}_{X_P}(D'_P)$: c'est toujours P). Par définition de D_P ,

$$D_P + K = \sum_F (a_F - 1) D_F$$

Le miracle est que justement

$$\text{int}_{\text{rel}}(P) \cap M = \bigcap_F \{m \in M, \langle m, n_F \rangle > -a_F\} = \bigcap_F \{m \in M, \langle m, n_F \rangle \geq -(a_F - 1)\},$$

$\text{int}_{\text{rel}}(P)$ a donc pour diviseur associé $D_P + K$ donc la proposition 2.3 montre aussi que

$$H^0(X, \mathcal{O}_{X_P}(D_P + K)) = \bigoplus_{m \in \text{int}_{\text{rel}} P \cap M} \mathbf{C} \chi^m.$$

3.2 En dimension 2

3.2.1 Formule de Pick

Le polynôme d'Ehrhart de P se résume à

$$E_P(X) = \text{aire}(P)X^2 + bX + 1.$$

En notant ∂ le bord de P ,

$$E_P(1) = |P \cap M| = \left| \int (P) \cap M \right| + |\partial P \cap M| = E_P(-1) + |\partial P \cap M|$$

Mais l'expression générale de E_P fournit aussi

$$E_P(1) = \text{aire}(P)X^2 + bX + 1 \text{ et } E_P(-1) = \text{aire}(P)X^2 - bX + 1$$

En combinant les deux on obtient

- $b = \frac{1}{2}|\partial P \cap M|$, de sorte que le polynôme d'Ehrhart d'un polygone entier est

$$E_P(X) = \text{aire}(P)X^2 + \frac{1}{2}|\partial P \cap M|X + 1$$

- En particulier, en faisant $X = 1$ on obtient la formule de Pick :

$$|P \cap M| = \text{aire}(P) + \frac{1}{2}|\partial P \cap M| + 1$$

Partie II

Propriétés des variétés toriques en jeu

Le premier objectif est de justifier complètement la formule du polynôme d'Ehrhart de la première partie et de retrouver des résultats simples. Pour suivre la démarche de [Pom93] (P étant simplicial), il faudra ensuite identifier le groupe de Chow de X_P , engendré par des sous-variétés toriques, en calculer certaines intersections et identifier leurs singularités pour les éclater. On détaille particulièrement les preuves incomplètes dans la littérature, la troisième partie isole certains résultats techniques.

4 Géométrie convexe

On travaille dans un réseau N , c'est à dire un groupe abélien libre de rang n (isomorphe à \mathbf{Z}^n comme \mathbf{Z} -module) pour un certain entier $n \geq 1$. On note $M := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ le groupe dual, qui est aussi libre de rang n . On définit par extension des scalaires $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et $M_{\mathbf{R}} := M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$, qui sont des espaces vectoriels de dimension n sur \mathbf{R} .

4.1 Cônes polyédraux convexes

Définitions 4.1 Une partie σ de $N_{\mathbf{R}}$ est appelée un *cône polyédral convexe* (ou "cône") ssi il existe un nombre fini d'éléments $S = \{v_1, \dots, v_s\}$ dans $N_{\mathbf{R}}$ tels que $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}v_1 + \dots + \mathbf{R}_{\geq 0}v_s$.

On définit la *dimension* de σ comme la dimension de l'espace $\text{aff } \sigma := \mathbf{R} \cdot \sigma = \sigma + (-\sigma)$ engendré par σ dans $N_{\mathbf{R}}$. [Un cône est toujours *saturé* dans le réseau, *i.e.* si $m \in \sigma \cap N$ et $\frac{1}{k}m \in N$ alors $\frac{1}{k}m \in \sigma$. Donc $\sigma \cap N$ engendre en fait $N_{\sigma} := \text{aff } \sigma \cap N$ comme groupe]

On définit le *dual* de σ par $\sigma^{\vee} := \{u \in M_{\mathbf{R}}, \text{ pour tout } v \in \sigma, \langle u, v \rangle \geq 0\}$.

On dit que σ est *simplicial* ssi il est engendré par des éléments linéairement indépendants.

Voici quelques propriétés des cônes sur lesquelles se liront les propriétés des variétés toriques. On détaille quand ce n'est pas déjà fait dans [Ful93], toutes se déduisent du fait suivant :

Théorème 4.2 Soit σ un cône polyédral convexe et $v_0 \in N_{\mathbf{R}}$. Alors il existe $u_0 \in \sigma^{\vee}$ tel que $\langle u_0, v_0 \rangle \leq 0$. (lemme 4.4 de "Introduction to Convex Polytopes" de A. Brönsted).

Définition 4.3 (face d'un cône) Si $u \neq 0$ est dans M , on a l'hyperplan

$$H_u = \{v \in N, \langle u, v \rangle = 0\}$$

et le demi espace fermé

$$H_u^+ = \{v \in N, \langle u, v \rangle \geq 0\}$$

L'ensemble $\tau = H_u \cap \sigma$ est une *face* du cône σ ssi $\sigma \in H_u^+$. σ est considéré comme une face, les faces $\tau \neq \sigma$ sont appelées *faces propres*.

Remarque 4.4 Soit F un sous espace vectoriel de $N_{\mathbf{R}}$ contenu dans σ , alors F est contenu dans toutes les faces de σ . Autrement on aurait un $u \in \sigma^\vee$ tel que $F \not\subset u^\perp$. Soit donc v dans F n'appartenant pas à u^\perp : v est dans σ donc $\langle u, v \rangle > 0$ et $-v$ dans $F \subset \sigma$ aussi donc $-\langle u, v \rangle \geq 0$, contradiction.

Propriété 4.5 *Un cône polyédral convexe est une réunion finie de cônes simpliciaux, en particulier il est fermé.*

Cela résulte du théorème suivant, les arguments étant ensuite les mêmes que ceux de [Deb05] 1 dans le cas des polytopes convexes.

Théorème 4.6 (Carathéodory) *Soit $\sigma = \text{Cône}(S)$, soit $x \in \sigma$. Alors il existe un sous ensemble $T \subset S$ d'éléments linéairement indépendants tels que $x \in \text{Cône}(T)$.*

Preuve : x étant une combinaison linéaire positive d'éléments de S , on peut en choisir une ayant un nombre minimal de coefficients, par exemple $x = \sum_{v \in T} \lambda_v v$, où $\lambda_v > 0$, $T \subset S$, $|T|$ minimal.

Montrons que les éléments de T sont linéairement indépendants. Par l'absurde, on aurait des μ_v non tous nuls tels que $\sum_{v \in T} \lambda_v \mu_v v = 0$. On se ramène au cas où au moins un des μ_v est positif et on isole μ_{v_0} le plus grand d'entre eux. Alors

$$x = \sum_{v \in T} \lambda_v v - \frac{1}{\mu_{v_0}} \sum_{v \in T} \lambda_v \mu_v v = \sum_{v \in T} \lambda_v \left(1 - \frac{\mu_v}{\mu_{v_0}}\right) v.$$

Comme $\mu_{v_0} \geq \mu_v$ pour tous les v , c'est une combinaison linéaire à coefficients positifs. Or le coefficient de v_0 est nul, ce qui contredit la minimalité de T . \square

Les propriétés numérotées (#) sont des résultats intermédiaires démontrés dans [Ful93] 1.2. Soit σ un cône polyédral convexe, alors :

- (1) $(\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.
- (2) Toute face de σ est un cône polyédral convexe.

La face $\sigma \cap u^\perp$ est engendrée par les vecteurs v_i dans l'ensemble S des générateurs de σ qui vérifient $\langle u, v_i \rangle = 0$. On en déduit en particulier :

Propriété 4.7 *Un cône polyédral convexe a un nombre fini de faces*

- (3) Une intersection quelconque de faces est une face.
- (4) Toute face d'une face est une face.
- (5) Toute face propre est contenue dans une facette (face de dimension $n - 1$)
- (6) Toute face propre est l'intersection des facettes qui la contiennent.
- (7) Si $\sigma + (-\sigma) = N_{\mathbf{R}}$, alors $\partial(\sigma) = \bigcup_{\tau \text{ face propre}} \tau = \bigcup_{\tau \text{ facette}} \tau$, où $\partial(\sigma)$ désigne la frontière topologique de σ .

Remarque 4.8 Soit σ un cône polyédral convexe tel que $\sigma + (-\sigma) = N_{\mathbf{R}}$, et τ une facette de σ . Par définition il existe $u \in \sigma^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Soit alors v un autre élément de σ^\vee tel que $\tau = \sigma \cap v^\perp$. u et v sont deux formes linéaires sur $N_{\mathbf{R}}$ qui ont le même noyau car $\mathbf{R}(\sigma \cap u^\perp) = \mathbf{R}(\sigma \cap v^\perp)$ est un hyperplan de $N_{\mathbf{R}}$. Donc il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $v = \lambda u$. Soit $x \in \sigma$ tel que $\langle u, x \rangle > 0$, on a aussi $\langle v, x \rangle > 0$ donc λ est strictement positif. D'après ce qui précède, toute facette τ de σ est définie par un unique élément $u_\tau \in \sigma^\vee$ (à multiplication par un scalaire strictement positif près) tel que $\tau = \sigma \cap u_\tau^\perp$.

- (8) Si σ engendre $N_{\mathbf{R}}$ et $\sigma \neq N_{\mathbf{R}}$, alors $\sigma = \bigcap_{\tau \text{ facette}} H_{\tau}^{+}$ où $H_{\tau}^{+} = \{x \in N_{\mathbf{R}}, \langle u_{\tau}, x \rangle \geq 0\}$
- (9) De la preuve de 8 on déduit que le dual d'un cône polyédral convexe est un cône polyédral convexe. Concrètement, σ^{\vee} est engendré par les u_{τ} et $\sigma = \{v \in N_{\mathbf{R}}, \langle u_{\tau}, v \rangle > 0 \text{ pour tous les } \tau\}$.

Remarque 4.9 Procédure pour trouver des générateurs de σ^{\vee} , cône de dimension maximale (déduite de la preuve de 8) : Soit σ un cône polyédral convexe tel que $\dim \sigma = n$ et $\{v_1, \dots, v_s\}$ un système de générateurs de σ ($s \geq n$). Pour chaque famille de $n - 1$ vecteurs linéairement indépendants parmi les (v_i) , on construit une forme linéaire u sur $N_{\mathbf{R}}$ annulant ces vecteurs. Ensuite, on vérifie si l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :

- $\forall i \in \{1, \dots, s\}, \langle u, v_i \rangle \geq 0$
- ou $\forall i \in \{1, \dots, s\}, \langle u, v_i \rangle \leq 0$

Si ce n'est pas le cas, alors $\pm u \notin \sigma^{\vee}$. Sinon on choisit u (ou $-u$ selon le cas) comme générateur de σ^{\vee} . Si les $n - 1$ vecteurs appartiennent à une même facette τ , alors u correspond (à multiplication par un scalaire près) au vecteur u_{τ} décrit en (8).

Définition 4.10 Un cône σ de $N_{\mathbf{R}}$ est dit *rationnel* s'il possède un système de générateurs formé d'éléments de N .

Propriété 4.11 Le dual d'un cône rationnel est rationnel.

Preuve : En effet la procédure 4.9 montre comment construire des générateurs du cône dual dans $N_{\mathbf{Q}}$. □

Lemme 4.12 (de Gordan) Soit σ un cône polyédral convexe rationnel. Alors $S_{\sigma} := \sigma^{\vee} \cap M$ est un semi-groupe (ou monoïde) de type fini.

Démonstration Soient $u_1, \dots, u_s \in \sigma^{\vee} \cap M$ un système de générateurs (en tant que cône) de σ^{\vee} . Notons

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^s t_i u_i, t_i \in [0, 1] \text{ pour } i = 1 \dots s \right\}$$

K est compact et puisque M est un sous groupe discret de $M_{\mathbf{R}}$ on sait que $K \cap M$ est fini. Montrons que $K \cap M$ engendre S_{σ} en tant que semi-groupe. En effet soit $u \in S_{\sigma}$, en particulier $u \in \sigma^{\vee}$ donc $u = \sum_{i=1}^s r_i u_i$ où $r_i \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ pour $i = 1 \dots s$. Soit $i \in 1 \dots s$, on note alors m_i la partie entière de r_i et $t_i := r_i - m_i \in [0, 1]$. Alors $u = \sum_{i=1}^s m_i u_i + u'$ où chaque u_i et $u' = \sum_{i=1}^s t_i u_i$ sont des éléments de $K \cap M$. □

Définition 4.13 Soit σ un cône de $N_{\mathbf{R}}$. On appelle *intérieur relatif* de σ , noté $\text{int}_{\text{rel}}(\sigma)$, l'intérieur de σ dans l'espace topologique $N_{\sigma} := (\sigma + (-\sigma))$ engendré par σ muni de la topologie induite de celle de $N_{\mathbf{R}}$.

Remarque 4.14 Si $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}.v_1 + \dots + \mathbf{R}_{\geq 0}.v_s \in N_{\mathbf{R}}$ alors un élément x de $\text{int}_{\text{rel}}(\sigma)$ s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de $\dim \sigma$ vecteurs parmi les générateurs de σ .

(10) Soit τ une face de σ , alors $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ est une face de σ^\vee et

$$\dim \tau + \dim \sigma^\vee \cap \tau^\perp = \dim N_{\mathbf{R}} = n.$$

L'application

$$\begin{aligned} \{\text{faces de } \sigma\} &\longrightarrow \{\text{faces de } \sigma^\vee\} \\ \tau &\longrightarrow \tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp \end{aligned}$$

est une bijection qui renverse les inclusions. En particulier, $\sigma \cap (-\sigma)$ est la plus petite face de σ .

(11) Si $u \in \sigma^\vee$ et $\tau := \sigma \cap u^\perp$ alors $\tau^\vee = \sigma^\vee + \mathbf{R}_{\geq 0}(-u)$

Proposition 4.15 Soit σ un cône polyédral convexe rationnel et $u \in S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Alors $\tau = \sigma \cap u^\perp$ est un cône polyédral convexe. Toutes les faces de σ sont de cette forme (puisque $\sigma \in H_u^+$ ssi $u \in \sigma^\vee$) et

$$S_\tau = S_\sigma + \mathbf{Z}_{\geq 0}(-u)$$

(12) (**lemme de séparation**) : Soient σ et σ' deux cônes polyédraux convexes dont l'intersection τ est une face commune à σ et σ' . Alors il existe $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma')^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp = \sigma' \cap u^\perp$.

Proposition 4.16 Soient σ, σ' deux cônes polyédraux convexes rationnels dont l'intersection τ est une face commune à σ et σ' . Alors $S_\tau = S_\sigma + S_{\sigma'}$.

(13) Soit σ un cône polyédral convexe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\sigma \cap (-\sigma) = 0$
- ii) $\{0\}$ est le seul sous espace vectoriel contenu dans σ .
- iii) $\exists u \in \sigma^\vee, \sigma \cap u^\perp = \{0\}$.
- iv) $\sigma^\vee + (-\sigma)^\vee = M_{\mathbf{R}}$.

Définition 4.17 On dit alors que σ est *fortement convexe* (ou saillant).

4.2 Eventails et polytopes

Définition 4.18 On appelle *éventail* de N une collection non vide Δ de cônes polyédraux rationnels fortement convexes de $N_{\mathbf{R}}$ vérifiant les conditions suivantes :

- i) Toute face d'un cône de Δ est un cône de Δ .
- ii) Pour tout couple $(\sigma, \sigma') \in \Delta^2$, (σ, σ') est une face commune à σ et σ' .

$|\Delta| := \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$ est appelé le support de Δ .

Un éventail donne une décomposition d'une partie $|\Delta|$ de $N_{\mathbf{R}}$ par des cônes de N dont les intérieurs relatifs sont deux à deux disjoints. On considérera désormais des éventails finis, *i.e.* formés d'un nombre fini de cônes de N . On notera $\Delta(1)$ l'ensemble des vecteurs primitifs de N qui engendrent les cônes de dimension 1 de Δ . De même on notera $\Delta(n)$ l'ensemble des cônes de dimension n de Δ .

Vérifions que **l'éventail normal** d'un polytope P de dimension n dans $M_{\mathbf{R}} = \text{aff}(P)$ est bien un éventail **complet**, *i.e.* $|\Delta| = N_{\mathbf{R}}$. Une démonstration directe existe ([CLS10]) mais ses arguments peuvent être simplifiés en introduisant :

Définitions 4.19 Soit P un polytope convexe contenant strictement l'origine, le polyèdre

$$P^\circ := \{u \in V^*, \langle u, v \rangle \geq -1 \forall v \in P\}$$

est en fait un polytope (car borné) et s'appelle le **dual de P** . A toute face F de P on associe l'ensemble

$$F^* = \{u \in K^\circ, \langle u, v \rangle = -1 \forall v \in F\}$$

⁷ On définit le cône $\sigma_P \in V \times \mathbf{R}$:

$$\sigma_P := \text{Cône}(0, P \times 1)$$

i.e. le cône de sommet 0 de section $P \times 1$ (ou le cône "au dessus de P ").

Par définition d'une face d'un cône et d'une face d'un polytope, les faces de σ_P sont exactement les cônes de sommet 0 de section $F \times 1$ avec F face de P . Elles vérifient donc les propriétés analogues à (2)-(7).

Or par définition $\sigma_P^\vee := \{(u, r) \in E^\vee \times \mathbf{R}, \langle u, v \rangle + r \geq 0 \forall v \in V\}$. σ_P^\vee est donc le cône issu de 0 de section $P^\circ \times 1$ dans $E^\vee \times \mathbf{R}$. Plus précisément, pour une face F de K , si τ est le cône de section $F \times 1$, alors le dual $\tau^* := \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ est le cône de sommet 0 de section $F^* \times 1$. Par la correspondance décroissante entre les faces de σ_P et leurs duales dans σ_P^\vee , l'ensemble $F^* \times 1$ n'est en particulier jamais vide dès que P contient l'origine (en excluant la "face" impropre P). On l'appelle la *face duale de F* . Plus précisément on a montré que

Proposition 4.20 Le dual K° est un polytope convexe, $(K^\circ)^\circ = K$. Si F est une face de P , alors

$$F^* = \{u \in K^\circ, \langle u, v \rangle = -1 \forall v \in F\}$$

est une face de K° , et la correspondance $F \rightarrow F^*$ est bijective et renverse les relations d'inclusion. Elle vérifie $\dim F + \dim F^* = \dim E - 1$. Si K est rationnel, i.e. à sommets dans $N_{\mathbf{Q}}$, alors K° est aussi rationnel.

On a défini l'éventail normal de $P \in M_{\mathbf{R}} = V^*$ comme la réunion des cônes P_Q^\vee , où P_Q est "l'angle" en la face Q : $P_Q = \{u' - u, u' \in P, u \in Q\}$ (un cône de sommet 0). Par définition du cône dual :

Observation 4.21 $P_F^\vee = \{v \in N_{\mathbf{R}}, \langle u, v \rangle \leq \langle u', v \rangle \text{ pour tous } u \in F \text{ et } u' \in P\}$. On en déduit que lorsque P contient l'origine, Δ_P est l'éventail des cônes de sommet 0 sur les faces de P° . En effet d'après la formule précédente, P_F^\vee est un cône de sommet 0 dont F^* se trouve être une section.

Proposition 4.22 Pour $P \in M_{\mathbf{R}}$ quelconque, les cônes σ_Q s'assemblent en un éventail Δ_P . Si P contient strictement l'origine, alors Δ_P est l'éventail des cônes issus de 0 de section les faces de P° .

Preuve : Dans le cas où P contient l'origine, cela résulte directement de l'observation précédente et de la bijection entre les faces de P et P° . Or par construction P_F ne change pas quand P est translaté par un vecteur u dans V^* ou quand P est multiplié par un entier positif m : $\Delta_{mP+u} = \Delta_P$. Et comme P engendre $M_{\mathbf{R}}$ on peut toujours se ramener par translation à un polytope contenant strictement 0. \square

7. F^* peut être vide si P ne contient pas l'origine cas échéant : considérer le polyèdre dual d'un triangle dont l'un des côtés "masque les deux autres depuis l'origine"

5 Variétés toriques affines

Soit σ un cône polyédral rationnel fortement convexe de $N_{\mathbf{R}}$. D'après le lemme de Gordan, $S_{\sigma} := \sigma^{\vee} \cap M$ est un semi-groupe additif de type fini. Notons $\{m_1 \dots m_s\}$ une famille génératrice de S_{σ} .

De façon générale un semigroupe $S \subset M$ définit une \mathbf{C} -algèbre commutative $\mathbf{C}[S] := [\dots, \chi^m, \dots]_{m \in S}$, la multiplication dans $\mathbf{C}[S]$ étant déterminée par l'addition dans S : $\chi^a \cdot \chi^b = \chi^{a+b}$. En tant que \mathbf{C} -espace vectoriel, $\{\chi^m, m \in S\}$ forme une base de $\mathbf{C}[S]$. Ici, étant donné que S_{σ} est un semigroupe de type fini, $\mathbf{C}[S_{\sigma}]$ est une \mathbf{C} -algèbre (commutative) de type fini et $\{\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}\}$ en est un système de générateurs. Le morphisme de \mathbf{C} -algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}[X_1, \dots, X_s] & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathbf{C}[S_{\sigma}] \\ X_i & \longrightarrow & \chi^{m_i} \end{array}$$

est surjectif. Notons I son noyau qui est un idéal de $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_s]$ (traduisant les relations éventuelles entre les générateurs de S_{σ}). Alors la \mathbf{C} -algèbre

$$A_{\sigma} := \mathbf{C}[S_{\sigma}] \cong \mathbf{C}[X_1, \dots, X_s]/I$$

et fournit une variété algébrique affine

Définition 5.1 $U_{\sigma} := \text{Specmax}(A_{\sigma})$: la "variété torique affine associée au cône σ ".

Remarque 5.2 Avec ces notations on a

$I = \langle X_1^{\nu_1} \dots X_s^{\nu_s} - X_1^{\mu_1} \dots X_s^{\mu_s}, \nu_1, \dots, \nu_s, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbf{N} \text{ et } \sum_{i=1}^s \nu_i m_i = \sum_{i=1}^s \mu_i m_i \rangle$ En effet $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_s]$ est noethérien (d'après le *théorème de transfert de Hilbert*, A noethérien entraîne $A[X]$ noethérien) donc I possède un système fini de générateurs. Soit alors f_1, \dots, f_q un tel système, un $f \in I$ s'écrit

$$f(X_1, \dots, X_s) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbf{N}} b(\nu_1, \dots, \nu_s) X_1^{\nu_1} \dots X_s^{\nu_s}, \text{ où } b(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbf{C} \text{ vérifie}$$

$$0 = \alpha^*(f(X_1, \dots, X_s)) = f(\chi^{m_1}, \dots, \chi^{m_s}) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbf{N}} b(\nu_1, \dots, \nu_s) \chi^{\nu_1 m_1 + \dots + \nu_s m_s} \text{ donc}$$

$$\sum_{m \in S_{\sigma}} \left(\sum_{\left\{ \begin{array}{l} \nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbf{N} \\ \sum_{i=1}^s \nu_i m_i = m \end{array} \right\}} b(\nu_1, \dots, \nu_s) \right) \chi^m = 0. \text{ Donc pour chaque } m,$$

$$\sum_{\left\{ \begin{array}{l} \nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbf{N} \\ \sum_{i=1}^s \nu_i m_i = m \end{array} \right\}} b(\nu_1, \dots, \nu_s) = 0. \text{ Donc il suffit de se donner comme système de générateurs}$$

$$\text{de } I \text{ tous les polynômes du type } P(X) = \sum_{\left\{ \begin{array}{l} \nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbf{N} \\ \sum_{i=1}^s \nu_i m_i = m \end{array} \right\}} b(\nu_1, \dots, \nu_s) X_1^{\nu_1} \dots X_s^{\nu_s} \text{ tels que}$$

$$\sum_{\left\{ \begin{array}{l} \nu_1, \dots, \nu_s \in \mathbf{N} \\ \sum_{i=1}^s \nu_i m_i = m \end{array} \right\}} b(\nu_1, \dots, \nu_s) = 0. \text{ Or une récurrence immédiate sur le nombre de monômes}$$

dans P^8 montre que P est combinaison linéaire des polynômes "élémentaires"

$$\langle X_1^{\nu_1} \dots X_s^{\nu_s} - X_1^{\mu_1} \dots X_s^{\mu_s}, \nu_1, \dots, \nu_s, \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbf{N}, \sum_{i=1}^s \nu_i m_i = \sum_{i=1}^s \mu_i m_i \rangle.$$

Par "points" de U_{σ} on entend les *points fermés* de U_{σ} , c'est à dire les idéaux maximaux de A_{σ} . Mais \mathbf{C} étant algébriquement clos, le *théorème des zéros de Hilbert* entraîne que les \mathbf{C} -points de A_{σ} s'envoient isomorphiquement sur les points fermés. Un \mathbf{C} -point x est

8. Si P en contient N , on en isole deux : $\lambda_I X^I - \lambda_J X^J = \lambda_J (X_I - X_J) + (\lambda_I - \lambda_J) X_J$ et donc $P - \lambda_J (X_I - X_J)$ ne contient au plus que $N - 1$ monômes.

morphisme d'algèbres de A_σ dans \mathbf{C} , qui envoie par définition $1_{A_\sigma} = \chi^0$ (l'élément neutre de A_σ pour la multiplication) sur $1 = 1_{\mathbf{C}}$. Comme il respecte la structure d'algèbres, il définit un unique morphisme de semi-groupes $x : S_\sigma \rightarrow \mathbf{C}$ (\mathbf{C} est vu comme le semi-groupe multiplicatif $\mathbf{C}^* \cup \{0\}$ d'élément neutre 1). En fait c'est une bijection :

Propriété 5.3

$$U_\sigma = \text{Hom}_{\text{SG}}(S_\sigma, \mathbf{C}) := \{g : S_\sigma \rightarrow \mathbf{C}^* \cup \{0\}, g(m + m') = g(m)g(m'), g(0) = 1\}$$

En effet un morphisme de semi-groupes envoie 0 (l'élément neutre de S_σ) sur 1 (l'élément neutre de \mathbf{C}) donc il provient bien d'un unique morphisme d'algèbres $A_\sigma \rightarrow \mathbf{C}$. Par exemple pour récupérer le \mathbf{C} -point $\{0\}$ dans X_σ , on considère g nul sur S_σ sauf en $m = 0$ où il vaut (obligatoirement) 1.

De manière générale une variété torique est une *compactification équivariante d'un tore*, un tore étant un groupe algébrique isomorphe à $(\mathbf{C}^*)^n$. La construction suivante le montre dans le cas d'une variété affine (où l'on a choisi des $(m_i)_{1 \leq i \leq s}$ qui engendrent S_σ) :

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\phi^*} & & \\ \mathbf{C}[X_1, \dots, X_s] & \xrightarrow{\alpha^*} & \mathbf{C}[S_\sigma] & \xrightarrow{\beta^*} & \mathbf{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}] \\ X_i & \cdots & \chi^{m_i} & \cdots & T^{m_i} \\ V(I) & \xleftarrow{\alpha} & U_\sigma & \xleftarrow{\beta} & (\mathbf{C}^*)^n \\ \underbrace{(t_1^{m_1}, \dots, t_s^{m_s})}_{=\phi^*(X_1)(t_1, \dots, t_n)} & \xleftarrow{\phi=\alpha \circ \beta} & \underbrace{(t_1, \dots, t_n)}_{\text{multivariable } \mathbf{t}} \end{array}$$

β étant l'inclusion réalisée en choisissant une \mathbf{Z} -base de N et en identifiant χ^m à $T^m \in \mathbf{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$, ϕ^* détermine un unique morphisme de variétés ϕ selon la correspondance fonctorielle $\text{Hom}_{\text{Var. Aff.}(\mathbf{k})}(X, Y) \leftrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}\text{-alg}}(\Gamma(Y), \Gamma(X))$ établie dans [Per03] I.6 (explicitée sur le diagramme précédent). On constate alors que ϕ est *injective*.

L'action de groupe de $(\mathbf{C}^*)^n$ sur lui-même se prolonge en une action de $(\mathbf{C}^*)^n$ dans \mathbf{C}^s :

$$\underbrace{(t_1, \dots, t_n)}_{\mathbf{t}} \cdot (x_1, \dots, x_s) = (t^{m_1} x_1, \dots, t^{m_r} x_r)$$

Or $(\mathbf{C}^*)^n$ est un ouvert Zariski-dense dans U_σ donc $V(I)$ est l'adhérence de l'image T_N de $(\mathbf{C}^*)^n$ par le morphisme ϕ . On remarque que $\phi|_{(\mathbf{C}^*)^n}$ est un *morphisme de groupes algébriques*.

L'action de $T \subseteq (\mathbf{C}^*)^s$ sur $(\mathbf{C}^*)^s$ correspond à un morphisme d'algèbres donc envoie les variétés sur les variétés. Alors $T = t.T \subseteq t.V(I)$ montre que $t.V(I)$ est une variété contenant T_N donc $V(I) \subseteq t.V(I)$ par définition d'une fermeture. En remplaçant t par t^{-1} on obtient que $V(I) = t.V(I)$ donc l'action de T_N induit une action sur $V(I)$. Récapitulons (et complétons) :

Propriété 5.4 U_σ est une variété affine (noéthérienne) normale (donc irréductible) de dimension n . Le tore T_N est un ouvert dense de U_σ et son action sur lui-même se prolonge à U_σ .

Preuve : • $\mathbf{C}[S_\sigma]$ est intègre car c'est une sous-algèbre de $\mathbf{C}[M] \cong \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ qui est intègre.

• S_σ engendre M en tant que groupe ($S_\sigma + (-S_\sigma) = M$) donc $\text{Frac } \mathbf{C}[S_\sigma] = \text{Frac } \mathbf{C}[M] = \mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$. Donc d'après [Per03] IV.1.8, $\dim U_\sigma = \dim_{\text{Knull}}(\mathbf{C}[S_\sigma]) = \deg_{\text{tr.}/\mathbf{C}}(\text{Frac } \mathbf{C}[S_\sigma]) = n$. ■

[La stabilité de U_σ sous l'action du tore se lit aussi sur les \mathbf{C} -points avec l'identification $U_\sigma \cong \text{Hom}_{\text{SG}}(S_\sigma, \mathbf{C}^* \cup \{0\})$ (et en particulier $T_N \cong \text{Hom}_{\text{Gpes}}(M, \mathbf{C}^*)$) :

$$\begin{array}{ccc} (M \rightarrow \mathbf{C}^*) \times (S_\sigma \rightarrow \mathbf{C}) & \xrightarrow{m} & (S_\sigma \rightarrow \mathbf{C}) \\ t, x & \xrightarrow{\quad} & t|_{S_\sigma}.x \\ \mathbf{C}[M] \otimes_k \mathbf{C}[S_\sigma] & \xleftarrow{m^*} & \mathbf{C}[S_\sigma] \\ t, x \rightarrow \{a(t.x) = a(t)a(x) = a \otimes a(t, x)\} & \xleftarrow{\quad} & a \end{array}$$

où la correspondance résulte toujours de [Per03] I.6.]

• Enfin pour montrer que U_σ est normale il suffit de vérifier que $\mathbf{C}[S_\sigma]$ est normal (*i.e.* intègre et intégralement clos dans son corps de fractions) car alors tous ses localisés le seront trivialement. On rappelle que $\sigma^\vee = \cap_{i=1}^s H_{v_i}^+$, où les v_i sont les générateurs minimaux de σ . En notant $\tau_i = \text{Cône}(v_i)$, on obtient

$$\mathbf{C}[S_\sigma] = \mathbf{C}[\sigma^\vee \cap M] = \bigcap_{i=1}^s \mathbf{C}[\tau_i^\vee \cap M] = \bigcap_{i=1}^s \mathbf{C}[S_{\tau_i}].$$

Mais un cône est toujours *saturé* pour les éléments du réseau, *i.e.* si $n \in N$, $k.n \in \sigma \cap N \Rightarrow n \in \sigma$. Les v_i étant minimaux, ils sont donc *primitifs* dans N (*i.e.* $\frac{1}{k}v_i \notin N$ pour tout $k > 1$). Donc on peut compléter chaque v_i en une \mathbf{Z} -base de N . En effet soient a_1, \dots, a_n ses composantes, \mathbf{Z} étant principal elles engendrent leur pgcd qui vaut 1, donc il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathbf{Z}$ (vues comme les composantes d'une forme linéaire φ dans M) tels que $\varphi(v_i) = 1$. Alors $n \in N$ se décompose en $n - \varphi(n).v_i + \varphi(n).v_i$ d'où la somme $N \xrightarrow{\sim} \text{Ker}(\varphi) + \mathbf{Z}v_i$, qui est directe pour des raisons de dimension⁹. Mais \mathbf{Z} étant principal, le sous \mathbf{Z} -module $\text{Ker}(\varphi)$ du \mathbf{Z} -module libre N est aussi libre (*cf.* par exemple le cours d'algèbre de Godement), *i.e.* admet une base.

Soit $\{e_1 \stackrel{\wedge}{=} v_i, e_2, \dots, e_n\}$ la \mathbf{Z} -base de N obtenue, elle fournit (exercice) une \mathbf{Z} -base de M $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$, définie par $e_j^*(e_k) \stackrel{\wedge}{=} \delta_{k,j}$, qui a alors la propriété que pour tout h dans M , $h(e_1)$ est la composante de h sur e_1^* . Or par définition, $S_{\tau_i} = \{u \in M, \langle u, v_i \rangle \geq 0\}$ donc par ce qui précède, S_{τ_i} est l'ensemble des $h \in M$ de composante positive sur e_1^* , qui est le semi-groupe engendré par $\{e_1^*, \pm e_2^*, \dots, \pm e_n^*\}$. Les $\{e_j^*\}_j$ formant une base de N , l'algèbre A_σ est isomorphe à $\mathbf{C}[t_1, t_2^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ ¹⁰, qui est une localisation de $\mathbf{C}[t_1, t_2, \dots, t_n]$. Or ce dernier est factoriel (grâce au lemme de Gauss, Lang IV.2.3) donc normal, donc A_{τ_i} est aussi normal comme localisé d'un anneau normal, donc A_σ est normal car intersection d'anneaux normaux ayant le même corps de fractions. □

9. [personnel : si \mathbf{Z} était un anneau pas forcément intègre, on aurait dit "par unicité de la dimension d'un module libre"]

10. [personnel : pour le voir, on peut considérer l'isomorphisme $N \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^n$, qui envoie les $\{e_j\}_j$ sur la base canonique $\{f_j\}_j$ de \mathbf{R}^n , identifié à son dual, d'où un isomorphisme $M \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}^n$ qui envoie les $\{e_j\}_j^*$ sur les mêmes $\{f_j\}_j$. La "structure" fournie par le crochet de dualité sur $N \times M$ est ainsi "transportée" sur le produit scalaire canonique de \mathbf{R}^n et S_σ s'envoie isomorphiquement sur $\{\langle f_1, \cdot \rangle \geq 0\} \cap \mathbf{Z}^n$

Observation 5.5 $U_{\sigma \times \sigma'} = U_\sigma \times_{\mathbf{C}} U_{\sigma'}$ (où σ et σ' sont vus comme cônes de $\text{aff}(\sigma)$ et $\text{aff}(\sigma')$)

Preuve : $S_{\sigma \times \sigma'} = S_\sigma \times S_{\sigma'}$ (en effet $S_\sigma := \{m, \langle m, n \rangle \geq 0 \text{ pour tout } n \in N\}$) donc $A_{\sigma \times \sigma'} = A_\sigma \otimes_{\mathbf{C}} A_{\sigma'}$ \square

En notant $N_\sigma := \text{aff}(\sigma) \cap N$ (et $N(\sigma) := N/N_\sigma$), cette remarque nous servira essentiellement à décomposer U_σ en $U_{\sigma'} \times T_{N'}$, où σ' est le cône σ vu dans N_σ donc de dimension maximale, et $T_{N'}$ le tore d'un sous-réseau supplémentaire dans N .

le théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux permet comme précédemment d'identifier N/N_σ à un supplémentaire N'' de N . On peut alors écrire $\sigma = \sigma' \oplus \{0\}$ vu dans $N_\sigma \oplus N''$ et dans la décomposition duale $M = M' \oplus \sigma^\perp$, σ^\vee s'écrit $(\sigma'^\vee \cap M') \oplus M''$ d'où le résultat d'après l'observation précédente.

Proposition 5.6 U_σ est régulière ssi σ est engendré par une partie d'une base de N .

Preuve : \Leftarrow est immédiat. En effet soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une \mathbf{Z} -base de N . Quitte à changer la numérotation on supposera qu'il existe $r \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0}e_1 + \dots + \mathbf{R}_{\geq 0}e_r$. Donc on voit que $\sigma^\vee \cap M$ est engendré en tant que semi-groupe par $\{e_1^*, \dots, e_r^*, \pm e_{r+1}^*, \dots, \pm e_n^*\}$ (en utilisant par exemple la procédure 4.9 pour construire σ^\vee dans $\text{aff}(\sigma)$). Ainsi $U_\sigma = \text{Specmax}(\mathbf{C}[X_1, \dots, X_r, X_{r+1}^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}])$ est isomorphe à $\mathbf{C}^r \times_{\mathbf{C}} (\mathbf{C}^*)^{n-r}$ qui est régulière.

\Rightarrow On peut supposer σ^\vee saillant, i.e. σ de dimension maximale d'après la propriété (13) des cônes, puisque nous venons de voir que le cas général revient à multiplier U_σ par un tore de dimension maximale n . On peut aussi supposer σ^\vee de dimension maximale, i.e. σ saillant toujours d'après (13) (c'est toujours vrai avec nos éventails issus de polytopes), puisque ajouter un espace vectoriel de dimension d à σ revient à multiplier U_σ par $\{0\}^d$. σ est saillant donc $\{0\}$ en est une face donc U_σ contient l'ouvert $U_{\{0\}} = T_N$ de dimension n donc en particulier U_σ est de dimension n .

Supposons alors que $A = A_\sigma$ est un anneau régulier, $\mathfrak{m} = \bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \{0\}} \mathbf{C}\chi^m$ l'idéal maximal de $\{0\}$ dans A (c'est bien un idéal puisque σ^\vee est saillant). $A_\mathfrak{m}$ étant régulier, $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2A_\mathfrak{m} \cong \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ est de dimension n sur $A/\mathfrak{m} = \mathbf{C}$. Mais les générateurs χ^m de \mathfrak{m} qui ne sont pas tués dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ sont les "générateurs primitifs", i.e. ceux où m ne peut pas s'écrire comme la somme de m_i et m_j non nuls dans S_σ . Il y a au moins n générateurs primitifs dans S_σ puisque on a déjà les générateurs primitifs \vec{n}_ρ des rayons ρ de σ^\vee . Or les images dans $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ des générateurs primitifs de \mathfrak{m} sont en fait linéairement indépendantes. Donc il y a exactement n générateurs primitifs. Donc σ^\vee a exactement n rayons ρ et leurs générateurs primitifs \vec{n}_ρ suffisent pour engendrer $\sigma^\vee \cap M$ comme semi-groupe. $\sigma^\vee \cap M$ étant (toujours) saturé dans le réseau et de dimension n , il engendre en fait M comme groupe donc les ρ_i forment une base de M .

[Plus court mais moins direct :] $A_\mathfrak{m}$ est régulier donc $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ de dimension n , soit $(\overline{\chi^{m_i}})_i$ un système de générateurs avec les m_i primitifs (fini d'après Gordan), on en extrait une base $(\overline{\chi^{m_j}})_{j=1, \dots, n}$. D'après un lemme isolé dans [Per03] V.3.5 (ou par Nakayama), leurs relevés $(\chi^{m_j})_j$ engendrent $\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}$. \square

6 Variété torique d'un éventail

6.1 Construction et premières propriétés

Soit Δ un éventail de N . Jusqu'à présent, nous avons vu comment construire une variété torique affine U_σ à partir d'un cône σ de N . Nous allons recoller de façon naturelle les variétés toriques affines U_σ , $\sigma \in \Delta$

Lemme 6.1 *Soit σ un cône de N et τ une face de σ , alors l'application canonique $U_\tau \rightarrow U_\sigma$ est une immersion ouverte.*

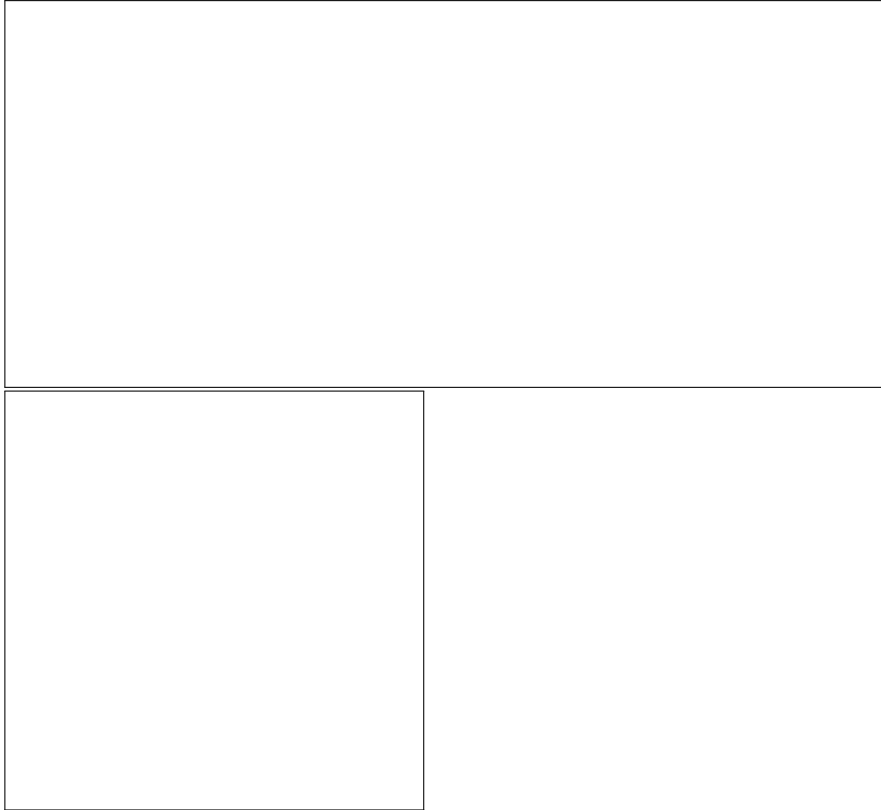
Démonstration τ étant une face de σ , d'après la formule (4.15), il existe $u \in S_\sigma$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$ et $S_\tau = S_\sigma + \mathbf{Z}_{\geq 0}(-u)$. $\{\chi^\nu, \nu \in S_\tau\}$ forme une base de $\mathbf{C}[S_\tau]$ en tant que \mathbf{C} -espace vectoriel, mais un tel élément $\chi^\nu, \nu \in S_\tau$, peut s'écrire $\chi^{w-pu} = \chi^w / (\chi^u)^p$, $w \in S_\tau$, $p \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$. Donc $A_\tau = (A_\sigma)_{\chi^u}$, qui est la version algébrique du lemme. \square

Soit $\sigma, \tau \in \Delta$, par définition de Δ , $\sigma \cap \tau$ est une face commune de σ et de τ . L'inclusion des cônes correspond exactement à l'inclusion des ouverts donc la condition de recollement se "lit" sur la définition d'un éventail. Ainsi

$$\begin{array}{ccc} & & U_\sigma \\ & \nearrow^{i_\sigma} & \\ U_{\sigma \cap \tau} & & \\ & \searrow_{i_\tau} & \\ & & U_\tau \end{array}$$

sont des immersions ouvertes, ce qui permet de regarder $U_{\sigma \cap \tau}$ comme un ouvert de U_σ (resp U_τ). Cette identification montre que la condition de recollement est vérifiée et nous permet de recoller "naturellement" les variétés toriques $\{U_\sigma, \sigma \in \Delta\}$ pour obtenir une variété torique $X(\Delta) = \coprod_{\sigma \in \Delta} U_\sigma / \sim$.

Exemple Montrons que l'éventail dans M représente $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$:



Par exemple le recollement de U_1 et U_2 est donné par

$$\begin{array}{ccc}
 & i_1 \nearrow U_1 & \\
 U_{12} \subset & & \\
 & i_2 \searrow U_2 &
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{C}[X^{-1}, YX^{-1}] = A_1 & \xrightarrow{i_1^*} & A_{12} = \mathbf{C}[Y^{-1}](XY^{-1}) \\
 \mathbf{C}[Y^{-1}, XY^{-1}] = A_2 & \xrightarrow{i_2^*} & (\mathbf{C}[X^{-1}](XY^{-1}))
 \end{array}$$

d'où :

$$i_1 : (x_0, x_1) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right)$$

$$i_2 : (x_0, x_1) \rightarrow (x_0, x_1)$$

et $i_1 \circ (i_2^{-1})|_{U_{12}} := \varphi_{12} : (x_0, x_1) \rightarrow \left(\frac{x_0}{x_1}, \frac{1}{x_1}\right)$ (le "changement de cartes")

de même,

$$\varphi_{01} : (x_0, x_2) \rightarrow \left(\frac{1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

et

$$\varphi_{02} : (x_0, x_1) \rightarrow \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{1}{x_0}\right)$$

11

Proposition 6.2 $X(\Delta)$ est séparée

Preuve : On doit montrer que l'application diagonale $\delta : X(\Delta) \rightarrow (X(\Delta) \times_{\mathbf{C}} X(\Delta))$ est une immersion fermée. Autrement dit on doit montrer que

$$(X(\Delta) \times X(\Delta)) \setminus \delta(X(\Delta)) = \bigcup_{\sigma, \sigma'} ((U_{\sigma} \times U_{\sigma'}) \setminus \delta(U_{\sigma \cap \sigma'}))$$

est ouvert¹². Il suffit donc de montrer :

Lemme 6.3 Si deux cônes σ et σ' de l'éventail Δ s'intersectent en τ , alors l'application diagonale $\delta : U_{\tau} \rightarrow U_{\sigma} \times U_{\sigma'}$ est une immersion fermée.

Preuve : $i : X \rightarrow Y$ est une immersion fermée ssi elle est injective et $i^{\sharp} : \mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_Y$ est surjective. δ étant injective par construction, il reste à montrer que

$$\delta^* : \mathbf{C}[U_{\sigma} \times U_{\sigma'}] = \mathbf{C}[S_{\sigma}] \otimes \mathbf{C}[S_{\sigma'}] \rightarrow \mathbf{C}[S_{\sigma \cap \sigma'}], \chi^u \otimes \chi^{u'} \rightarrow \chi^{u+u'}$$

11. [personnel : - On voit que lorsque $\phi_{(\mathbf{C}-Alg)}^*$ est une "inclusion" $A \rightarrow A_f$, le morphisme ϕ correspondant sur les \mathbf{C} -points (explicité dans la propriété 5.3) est toujours "celui auquel on pense", pour tous les choix d'écritures de A et A_f (qui conditionnent un choix de "coordonnées" sur les \mathbf{C} -points).

- Pour voir que X est \mathbf{P}^2 , il fallait bien choisir les coordonnées sur U_0, U_1 et U_2 (i.e. la façon d'écrire A_0, A_1 et A_2). En revanche le choix sur U_{12} n'a plus d'importance, puisque exprimer A_{12} comme " $(A_1)_{XY^{-1}}$ " ou, ici, comme " $(A_2)_{XY^{-1}}$ ", ne change évidemment pas l'expression en coordonnées des fonctions de transition (le choix est effacé par $i_1 \circ i_2^{-1}$).

- Donc dans la pratique, une fois qu'on a fait un choix de coordonnées, on peut oublier les morphismes d'algèbres i^* pour calculer directement les inclusions i sur les \mathbf{C} -points "comme on le pense" et en déduire les fonctions de transition.]

12. On rappelle que par définition d'un éventail, $\sigma \cap \sigma'$ est nécessairement une face commune.

est surjective. En effet on aura alors δ^\sharp surjective sur les tiges, qui ne sont que des localisations de $\mathbf{C}[S_\sigma] \otimes \mathbf{C}[S_{\sigma'}]$ et de $\mathbf{C}[S_{\sigma \cap \sigma'}]$ donc δ^\sharp sera surjective. Mais cela revient à montrer la surjectivité de

$$S_\sigma \oplus S_{\sigma'} \rightarrow S_{\sigma \cap \sigma'} : u \oplus u' \rightarrow u + u'$$

qui est exactement l'égalité $S_{\sigma \cap \sigma'} = S_\sigma + S_{\sigma'}$ prouvée dans la proposition (4.16), qui résulte du lemme de séparation sur les cônes (qui porte bien son nom). \square

On a vu que pour tout $\sigma \in \Delta$, U_σ est normale donc tous les anneaux locaux de $X(\Delta)$ sont aussi intégralement clos. Le tore T étant un ouvert dense (car dense dans chaque U_σ) et irréductible, $X(\Delta)$ est irréductible et de dimension n . (On pourrait aussi le montrer en considérant que les U_σ sont irréductibles et que $X(\Delta)$ est connexe, puis en montrant par récurrence sur le nombre de U_σ que $\bigcup U_\sigma$ est irréductible puisque chaque U_σ l'est ([Per03], ex I.4.2). Enfin puisque $X(\Delta)$ est séparée, on conclut que :

Proposition 6.4 $X(\Delta)$ est normale

6.2 Un critère de complétude

On donne en fait un critère plus général de propriété des morphismes associés à une subdivision de l'éventail d'une variété torique. Ils serviront lors des calculs sur les variétés toriques singulières.

Définitions 6.5 Soit $m \in M$, on lui associe le **caractère** $\chi^m \in \text{Hom}(T_N, \mathbf{C}^*)$ défini par $\forall t \in T_N, \chi^m(t) = t(m)$. Alors, $\forall m, m' \in T_N, \chi^{m+m'} = \chi^m \chi^{m'}$. On peut montrer que tout caractère $\chi \in \text{Hom}(T_N, \mathbf{C}^*)$ est de cette forme.

Soit $n \in N$, on lui associe le **sous-groupe à un paramètre** $\lambda_n \in \text{Hom}(\mathbf{C}^*, T_N)$ défini par $\forall z \in \mathbf{C}^*, \forall u \in M, \lambda_n(z)(u) = z^{\langle u, n \rangle}$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbf{Z}$ est l'application \mathbf{Z} -bilinéaire canonique. Alors $\forall n, n' \in N, \lambda_{n+n'} = \lambda_n \lambda_{n'}$. On peut montrer que tout sous-groupe à un paramètre $\lambda \in \text{Hom}(\mathbf{C}^*, T_N)$ est défini de manière unique par un élément de $n \in N$ de cette manière.

Lemme 6.6 Soit $n \in N$ et $\sigma \in \Delta$, $n \in \sigma$ ssi $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_n(z)$ existe dans U_σ .

Démonstration Soit $n \in N$, le sous groupe à un paramètre $\lambda_n : \mathbf{C}^* \rightarrow T_N$ correspondant est défini par $\forall z \in \mathbf{C}^*, \forall m \in M, \lambda_n(z)(m) = z^{\langle m, n \rangle}$. Donc $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda_n(z)$ existe dans U_σ ssi $z^{\langle m, n \rangle}$ converge dans \mathbf{C} pour tout $m \in S_\sigma$, c'est à dire $\forall m \in \sigma^\vee \cap M, \langle m, n \rangle \geq 0$, qui équivaut à $n \in \sigma$. \square

Soit $\phi : (N', \Delta') \rightarrow (N, \Delta)$ un morphisme de groupes vérifiant la condition :

$$(*) \quad \forall \sigma' \in \Delta', \exists \sigma \in \Delta, \phi_{\mathbf{R}}(\sigma') \subset \sigma,$$

où $\phi_{\mathbf{R}} : N'_{\mathbf{R}} \rightarrow N_{\mathbf{R}}$ est l'application \mathbf{R} -linéaire obtenue par extension des scalaires. On en déduit un morphisme de variétés

$$\phi : X(\Delta', N') \rightarrow X(\Delta, N)$$

de la façon suivante : pour tout couple (σ, σ') vérifiant $(*)$, le morphisme dual $\phi^\vee : M \rightarrow M'$ vérifie $\phi^\vee(\sigma^\vee) \subset \sigma'^\vee$. Par conséquent sa restriction à $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$ détermine un

morphisme de semigroupes $\phi^* : S_\sigma \rightarrow S_{\sigma'}$, qui à son tour détermine un morphisme de \mathbf{C} -algèbres $\mathbf{C}[S_\sigma] \rightarrow \mathbf{C}[S_{\sigma'}]$ puis un morphisme de variétés $\phi_* : U_{\sigma'} \rightarrow U_\sigma \subset X(\Delta)$. ϕ_* est clairement T -équivariant (on le lit sur les algèbres).

Ce morphisme est clairement indépendant du choix de σ satisfaisant la condition $(*)$ et ces morphismes se recollent le long des ouverts $U'_\sigma \cap U'_\tau = U'_\sigma \cap U'_\tau$ pour donner un morphisme $\phi_* : X(\Delta') \rightarrow X(\Delta)$.

Proposition 6.7 (critère de propreté) $\phi_* : X(\Delta') \rightarrow X(\Delta)$ est propre ssi pour chaque $\sigma \in \Delta$, l'ensemble $\Delta'_\sigma := \{\sigma' \in \Delta'; \phi_{\mathbf{R}}(\sigma') \subset \sigma\}$ est fini et

$$\phi_{\mathbf{R}}^{-1}(\sigma) = |\Delta'_\sigma| := \bigcup_{\sigma' \in \Delta'_\sigma} \sigma'.$$

On utilisera les théorèmes suivants :

Théorème 6.8 Soit $g : X \rightarrow Y$ un morphisme de type fini entre des variétés algébriques séparées sur \mathbf{C} . Supposons que l'image $g(X)$ est dense dans Y de telle sorte que $\mathbf{C}(Y)$ s'injecte dans $\mathbf{C}(X)$ (montré par exemple dans [Har73] I.4.4).

- (1) (Grothendieck) L'application holomorphe $g^{\text{an}} : X^{\text{an}} \rightarrow Y^{\text{an}}$ associée à g , entre les espaces analytiques séparés correspondants, est propre ssi g est propre comme morphisme de variétés algébriques. En particulier ([GaGa] proposition 6) une variété algébrique complexe est complète ssi l'espace topologique sous-jacent est compact.
- (2) [Critère valuatif de propreté, EGA II.7.3.10] g est propre comme morphisme de variétés algébriques ssi tout anneau de valuation discrète $R \supset \mathbf{C}$ de $\mathbf{C}(X)$ qui domine l'anneau local $\mathcal{O}_{Y,W}$ du point générique d'une sous-variété irréductible F de Y domine nécessairement l'anneau local $\mathcal{O}_{X,Z}$ du point générique d'une sous-variété irréductible E de X .

Preuve : (de la proposition) \Rightarrow : Si $v' \in N'$ n'est pas dans $|\Delta'|$ et son image $v := \phi(v')$ est dans Δ , alors la suite $\phi_*(\lambda_{v'}(z_n)) = \lambda_v(z_n)$, $z_n \in C^* \rightarrow 0$, à valeurs dans T_N a une limite dans $X(\Delta)$ (lemme 6.6) mais $\lambda_{v'}(z)$ ne possède aucune sous-suite convergente lorsque z tend vers zéro donc l'image réciproque de $\lambda_v(z_n)$ n'est pas compacte, donc d'après [GaGa] ϕ_* n'est pas propre.

\Leftarrow : (on affaiblit la preuve de [Oda88] th 1.15) Les corps des fonctions rationnelles des variétés $X(\Delta)$ et $X(\Delta')$ sont respectivement les corps de fractions de $\mathbf{C}[M]$ et $\mathbf{C}[M']$. On remarque que la valuation v d'un anneau de valuation discrète $R \subset \mathbf{C}$ du corps des fractions de $\mathbf{C}[M']$ induit un morphisme additif $v \circ \chi : M' \rightarrow \mathbf{Z}$ et donc qu'il existe un $n' \in N'$ tel que $v(\chi^{m'}) = \langle m', n' \rangle$ pour tout $m' \in M'$.

Soit alors R qui domine l'anneau local du point générique d'une sous-variété irréductible de $X(\Delta)$, qui est une localisation de l'un des $\mathbf{C}[S_\sigma]$, $\sigma \in \Delta$. Donc par définition d'une valuation discrète, $v(\chi^{\phi^*(m)}) = \langle \phi^*(m), n' \rangle = \langle m, \phi(n') \rangle$ est positif pour tout $m \in S_\sigma$. Donc n' est dans $\phi^{-1}(\sigma)$. Donc n' est contenu dans l'un des cônes $\sigma' \in |\Delta'_\sigma|$ d'après l'hypothèse sur ϕ . Donc $v(\chi^{m'}) = \langle m', n' \rangle$ est positif pour tous les $m' \in S_{\sigma'}$, i.e. $R \supset \mathbf{C}[S_{\sigma'}]$. Donc par exemple soit π l'uniformisante de R , $\mathfrak{p} = (\pi) \cap \mathbf{C}[S_{\sigma'}]$, alors R domine bien¹³ $\mathbf{C}[S_{\sigma'}]_{\mathfrak{p}}$ qui est l'anneau local de la variété irréductible $\overline{V(\mathfrak{p})}$ (l'adhérence dans X' , encore irréductible, avec la structure réduite). \square

13. [personnel : $f \in A$, $f \notin \mathfrak{p} \Rightarrow f \notin (\pi)$ donc $R \supset A_{\mathfrak{p}}$]

En prenant $N = 0$ on obtient un critère de complétude simple :

Corollaire 6.9 $\phi_* : X(\Delta) \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C}$ est propre, c'est à dire $X(\Delta)$ est complète (ou compacte d'après [GaGa]), ssi $\phi_{\mathbf{R}}^{-1}(pt) = |\Delta|$, autrement dit $N_{\mathbf{R}} = |\Delta|$.

On peut montrer (preuve de 10.5) que U_{σ} est le quotient de $U_{\sigma'}$ par l'action de $\text{Hom}(M'/M, \mathbf{C}^*)$. Il en résulte :

Corollaire 6.10 L'application T_N -équivariante $\phi_* : X_{N', \Delta'} \rightarrow X_{N, \Delta}$ est propre avec $\mathbf{C}(X')$ une extension finie de $\mathbf{C}(X)$ (donc dominante) ssi le morphisme d'éventail $\phi : N' \rightarrow N$ est injectif de conoyau fini (i.e. $\phi(N')$ sous-réseau d'indice fini dans N) et Δ' est une subdivision finie de Δ avec l'identification $N'_{\mathbf{R}} = N_{\mathbf{R}}$ ¹⁴.

Un "cas particulier" (quand on connaît les propriétés des morphismes birationnels) important :

Corollaire 6.11 L'application T_N -équivariante $\phi_* : X_{N', \Delta'} \rightarrow X_{N, \Delta}$ est propre et birationnelle ssi $\phi : N' \rightarrow N$ est un isomorphisme et Δ' est une subdivision finie de Δ avec l'identification $N'_{\mathbf{R}} = N_{\mathbf{R}}$

Corollaire 6.12 Toute variété torique $X(\Delta)$ admet une désingularisation birationnelle T -équivariante.

On renvoie à [Ful93] 2.6 pour le détail de la procédure. Elle consiste en une suite de subdivisions de Δ en un éventail simplicial, puis en un éventail régulier. Il en résulte que les variétés toriques "ont des singularités rationnelles" (cf. 11.7), ce qui sera déterminant dans le calcul de leur classe de Todd.

7 Diviseurs dans les variétés toriques

7.1 Orbites du tore et leurs fermetures

Nous allons montrer que les orbites du tore sont en bijection décroissante avec les cônes, l'orbite θ_{σ} étant celle du

7.1.1 point distingué

$x_{\sigma} \in U_{\sigma}$, défini par le morphisme de semi-groupes¹⁵ :

$$S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M \xrightarrow{x_{\sigma}} \{1, 0\}$$

$$u \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } u \in \sigma^{\perp} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si σ engendre $N_{\mathbf{R}}$, i.e. est de dimension maximale $n = \dim N$, montrons qu'alors x_{σ} est l'unique point de U_{σ} fixé par l'action du tore.

14. Ce cas de figure servira dans 10.5 pour exprimer une variété torique simpliciale comme un quotient d'une variété torique régulière par un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbf{C})$, ce qui entraînera en fait qu'elle a des "singularités quotients finies" (on dit aussi "quasi-régulière" ou " \mathbf{Q} -régulière").

15. C'est bien un morphisme de semi-groupes. D'abord, $x_{\sigma}(0) = 1$ car 0 est dans σ^{\perp} . Ensuite, soient u, v dans S_{σ} , tout repose sur l'observation suivante : $u + v \in \sigma^{\perp} \Leftrightarrow u, v \in \sigma^{\perp}$. Donc $x_{\sigma}(u + v) = x_{\sigma}(u)x_{\sigma}(v)$.

On commence par prouver que si $U_\sigma \xrightarrow{x} \mathbf{C}$ est un morphisme de semi-groupes, *i.e.* un \mathbf{C} -point de U_σ , alors x est fixé par T_N ssi pour tout $u \in S_\sigma \setminus \{0\}$, $x(u) = 0$ (possible puisque σ est saillant) :

⊆ Soit t un point de T , correspondant à un morphisme de groupes $t : M \rightarrow \mathbf{C}$.

Soit $u \in S_\sigma$. Si $u \neq 0$ alors $(t.x)(u) = t(u)x(u) = 0 = x(u)$.

Si $u = 0 \in \text{Ker}(t) \cap \text{Ker}(x)$ alors $t(u) = x(u) = 1 \Rightarrow (t.x)(u) = x(u)$.

Donc $T_N.x = x$

⊇ Supposons que $T_N.x = x$. Supposons qu'il existe $u \in S_\sigma \setminus \{0\}$ tel que $x(u) \neq 0$. U non nul donc il existe un morphisme de groupes $t : M \rightarrow \mathbf{C}^*$ tel que $t(u) \neq 1$. Mais $(t.x)(u) = t(u)x(u) \neq x(u)$, ce qui contredit le fait que x est fixé par T_N . Donc $x(u) = 0$.

Montrons que si σ engendre $N_{\mathbf{R}}$, alors x_σ est le seul point tel que pour tout u dans $S_\sigma \setminus \{0\}$, $x_\sigma(u) = 0$. σ engendre $N_{\mathbf{R}}$ donc σ^\vee est fortement convexe (propriété (13) des cônes) donc $\sigma^\perp \subset \sigma^\vee \cap (-\sigma)^\vee = \{0\}$.

Ainsi, x_σ est le morphisme défini par

$$\begin{aligned} S_\sigma &\xrightarrow{x_\sigma} \{1, 0\} \\ u &\longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } u = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

donc x_σ est fixé par T_N .

Soit $S_\sigma \xrightarrow{x} \{0, 1\}$ un morphisme de semi-groupes distinct de x_σ (on a $x(0) = 1$), il existe donc $u \in S_\sigma$ non nul tel que $x(u) \neq 0$ et x ne peut être fixé par T_N .

On suppose maintenant que $\dim \sigma < n$, montrons qu'il n'y a aucun point de U_σ fixé par T_N . En effet σ n'engendre pas $N_{\mathbf{R}}$, donc il existe $u \in \sigma^\vee \cap (-\sigma)^\vee$ non toujours supposer que $u \in M \Rightarrow u \in S_\sigma$ et $-u \in S_\sigma$

nul. On peut

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x(u + (-u)) = 1 = x(u)x(-u) \\ &\Rightarrow x(u) \neq 0 \text{ avec } u \neq 0 \\ &\Rightarrow x \text{ n'est pas fixé par } T_N. \end{aligned}$$

7.1.2 orbites

Le but de ce § est d'établir une correspondance entre les orbites de $X(\Delta)$ sous l'action de T_N et la géométrie combinatoire de Δ . Par exemple si $\dim(\tau) = k$, alors $\theta_\tau \cong (\mathbf{C}^*)^{n-k}$ donc en particulier si τ est de dimension n , θ_τ est réduit à un point (nécessairement x_τ) et si $\tau = \{0\}$, $\theta_\tau = T_N$. **Nous noterons dans un premier temps $\overline{\theta_\tau}$ la fermeture au sens classique de θ_τ** , dont nous montrerons qu'elle est la réunion des orbites $\coprod_{\tau \prec \nu} \theta_\nu$. Nous la réaliserons ensuite comme une sous-variété torique fermée $V(\tau)$ de $X(\Delta)$ de tore θ_τ , ce qui montrera que **$\overline{\theta_\tau}$ coïncide avec la fermeture de Zariski de θ_τ** .

On rappelle que le tore T_N agit sur $X(\Delta)$ de la façon suivante : sachant que $X(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} U_\sigma$ où pour tout $\sigma \in \Delta$, U_σ est un ouvert affine T_N -stable de $X(\Delta)$, on a

$$\begin{aligned} T \times U_\sigma &\xrightarrow{m} U_\sigma \\ (t, u) &\longrightarrow t.u : \begin{cases} S_\sigma &\longrightarrow \mathbf{C} \\ m &\longrightarrow t(m)u(m). \end{cases} \end{aligned}$$

Proposition 7.1 Soit $\sigma \in \Delta$, on lui associe $\theta_\sigma := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M \cap \sigma^\perp, \mathbf{C}^*)$. Alors θ_σ est une T_N -orbite de $X(\Delta)$ et elles sont toutes de cette forme, ce qui fournit une bijection entre les éléments de Δ et les orbites de $X(\Delta)$. De plus,

1) $\theta_{\{0\}} = U_{\{0\}} = T$.

- 2) $\theta_\sigma \cong (\mathbf{C}^*)^{n-\dim \sigma}$
- 3) $\tau \prec \sigma$ ssi $\theta_\sigma \subset \overline{\theta_\tau}$.
- 3') $\overline{\theta_\tau} = \coprod_{\gamma \succ \tau} \theta_\gamma$
- 3'') $\theta_\tau = \overline{\theta_\tau} \setminus \bigcup_{\gamma \succ \tau, \gamma \neq \tau} \overline{\theta_\gamma}$
- 4) θ_σ est l'unique T_N -orbite fermée de U_σ et $U_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} \theta_\tau$.

de 4) et 3') on déduit immédiatement :

Observation 7.2 $V(\tau) \cap U_\sigma = \coprod_{\tau \prec \gamma \prec \sigma} \theta_\gamma$. En particulier¹⁶

$$V(\tau) \cap U_\sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow \tau \prec \sigma.$$

Démonstration (de la proposition) (on complète [Oda88] I.4) 1) et 2) résultent de la définition abstraite de θ_σ .

Identifions-la à une T -orbite : en effet σ^\perp est le plus grand sous-espace vectoriel contenu dans σ^\vee donc $M \cap \sigma^\perp$ est le plus grand sous-groupe contenu dans $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Soit alors $u \in \text{Hom}_{\text{Gpes}}(M \cap \sigma^\perp, \mathbf{C}^*)$, on l'étend par zéro en un morphisme de semi-groupes :

$$\begin{aligned} \overline{u} : S_\sigma &\longrightarrow \mathbf{C} \\ m &\longrightarrow \begin{cases} u(m) & \text{si } m \in M \cap \sigma^\perp \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Cette opération permet de voir **θ_σ comme une partie de U_σ , transitive par T_N** et qui contient le point distingué x_σ .

4) On réutilise la construction précédente. Soit $u : S_\sigma \rightarrow \mathbf{C}$ un morphisme de semi-groupes, c'est à dire un élément de U_σ , alors $\{m \in S_\sigma, u(m) \neq 0\}$ est l'intersection de M avec une face de σ^\vee . En effet la somme de deux éléments de σ^\vee n'est dans $u^{-1}(\mathbf{C}^*)$ que si chacun des éléments est dans $u^{-1}(\mathbf{C}^*)$. Or d'après [Oda88] proposition A.9, les faces F d'un cône sont justement caractérisées par la propriété que $m + m' \in F$ ssi $m \in F$ et $m' \in F$.

Mais on a montré que toute face de σ^\vee est de la forme $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ pour une unique face τ de σ . Donc $\{m \in S_\sigma, u(m) \neq 0\} = M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp = S_\sigma \cap \tau^\perp$. Soit alors $y : M \cap \tau^\perp \rightarrow \mathbf{C}^*$ le morphisme de groupes dont la restriction à $S_\sigma \cap \tau^\perp$ coïncide avec u (il est défini de manière unique car $S_\sigma \cap \tau^\perp$ engendre $M \cap \tau^\perp$ en tant que groupe, il existe car $u(m) \in \mathbf{C}^*$ pour tout $m \in S_\sigma \cap \tau^\perp$). On prolonge y à $M \cap \tau^\vee = S_\tau$ par zéro, et on obtient ainsi un élément de θ_τ . U_σ étant stable par T_N , il est réunion d'orbites de T_N donc $U_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} \theta_\tau$ et grâce à la propriété 3) que l'on va montrer, θ_σ est l'unique T_N -orbite fermée dans U_σ .

3) $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\theta_\sigma \subset \overline{\theta_\tau}$. U_σ est un voisinage ouvert de θ_σ donc rencontre θ_τ . Donc il le contient car U_σ est stable par T_N donc $\theta_\tau \subset U_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} \theta_\tau$ (d'après la deuxième assertion de 4), démontrée) et donc τ est une face de σ .

$\boxed{\Rightarrow}$ Si τ est une face de σ , alors $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$ est une face de σ^\vee . Considérons le morphisme de groupes $u : M \cap \tau^\perp \rightarrow \mathbf{C}$

$$m \rightarrow 1$$

qui est un élément de θ_τ . Soit $n \in \text{int}_{\text{rel}}(\sigma)$. D'après la propriété caractéristique de l'intérieur d'un cône ([Oda88] lemme A.4), cela entraîne que pour tout $m \in M \cap \sigma^\vee \setminus \sigma^\perp$, $\langle m, n \rangle > 0$. De plus soit $z \in \mathbf{C}^*$, alors $\lambda_n(z).u \in \theta_\tau$ et pour tout m dans $M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp$,

16. [personnel : On retrouve bien que les fermés irréductibles T -stables de $U_\sigma = X(\sigma)$ (σ vu comme éventail) sont les $V(\tau)$, $\tau \prec \sigma$]

$(\lambda_n(z).u)(m) = \lambda_n(z)(m)u(m) = z^{\langle m, n \rangle}$. Notons $u_0 = \lim_{z \rightarrow 0} \lambda_n(z).u$ (considérée dans U_σ), alors

$$\begin{aligned} M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp &\xrightarrow{u_0} \mathbf{C} \\ m &\longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } m \in M \cap \sigma^\perp \\ 0 & \text{si } m \in M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp \setminus \sigma^\perp \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut voir u_0 comme un élément de θ_σ . Donc $\theta_\sigma \cap \overline{\theta_\tau} \neq \emptyset$ donc $\theta_\sigma \subset \overline{\theta_\tau}$.

3') $\bar{\tau}$ étant la fermeture au sens classique de θ_τ et l'action de T_N étant continue, $\bar{\tau}$ est stable par T_N d'où la formule. 3") s'en déduit immédiatement. \square

Notations Soit $\tau \in \Delta$, on désigne par N_τ le sous-groupe de N engendré par $\tau \cap N$ (égal à $\text{aff } \sigma \cap N$ par saturation), $N(\tau) := N/N_\tau$ et $M(\tau) := \tau^\perp \cap M$.

Soit $T_{N(\tau)} := \theta_\tau = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M(\tau), \mathbf{C}^*) = N(\tau) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{C}^*$.

Si $\dim \tau = k$, soit $\{e_1, \dots, e_k\}$ une base de $\mathbf{R}\tau$ formée d'éléments de \mathbf{N} , que l'on complète en $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ une \mathbf{Z} -base de N . On considère sa base duale $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ qui est une \mathbf{Z} -base de M . Alors, $\tau^\perp \cap M \cong \bigoplus_{i=k+1}^n \mathbf{Z}.e_i^* \cong \mathbf{Z}^{n-k}$ et $T_{N(\tau)} \cong (\mathbf{C}^*)^{n-k}$.

Remarque 7.3 $x \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N(\tau), \mathbf{Z}) \Leftrightarrow x \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N, \mathbf{Z})$ et $x(N_\tau) = 0$
 $\Leftrightarrow x \in M$ et $x(\tau \cap N) = 0$
 $\Leftrightarrow x \in M \cap \tau^\perp = M(\tau)$

De plus, la surjection canonique $N \longrightarrow N/N_\tau$ induit une projection $T_N \xrightarrow{\pi} T_{N(\tau)}$, d'où une action de T sur $T_{N(\tau)}$ par multiplication : $T_N \times T_{N(\tau)} \xrightarrow{\pi \times 1} T_{N(\tau)} \times T_{N(\tau)} \xrightarrow{m} T_{N(\tau)}$.

Définissons $\text{Et}(\tau)$ l'ensemble $\{\sigma \in \Delta, \tau \prec \sigma\}$, appelé **l'étoile du cône** τ ;

$\pi : N_{\mathbf{R}} \longrightarrow N_{\mathbf{R}}/(N_\tau)_{\mathbf{R}} = N(\tau)_{\mathbf{R}}$ la surjection canonique \mathbf{R} -linéaire et $\overline{\Delta}(\tau)$ le projeté $\pi(\text{Et}(\tau)) = \{\pi(\sigma), \sigma \in \Delta, \tau \prec \sigma\}$.

En particulier si $\sigma \in \Delta$, il est clair que $\pi(\sigma) = (\sigma + (N_\tau)_{\mathbf{R}})/(N_\tau)_{\mathbf{R}}$ est un cône de $N(\tau)_{\mathbf{R}}$ et que $\overline{\Delta}(\tau)$ forme un éventail de N .

Montrons enfin que chaque $\overline{\theta_\sigma}$ coïncide avec la fermeture de Zariski de θ_σ : pour cela on identifie $\overline{\theta_\sigma}$ à sous-variété torique fermée $V(\sigma)$ de tore θ_σ . Nous aurions pu, pour rester cohérents avec l'introduction de la section 2, commencer par construire la variété $V(\sigma)$ puis établir sa décomposition en orbites pour l'identifier à $\overline{\theta_\sigma}$ (c'est la démarche de [Ful93]).

Corollaire 7.4 *Soit $\tau \in \Delta$. Alors $\overline{\theta_\tau}$ est égale à $V(\tau) := X(\overline{\Delta}(\tau))$. Ainsi, $V(\tau)$ est normale et $V(\tau)$ est régulière dès que $X(\Delta)$ l'est d'après les théorèmes généraux de 5.3.*

Démonstration D'un côté, l'observation 7.2 (par exemple) affirme que $\overline{\theta_\tau}$ est recouvert par $\{U_\sigma, \sigma \in \Delta, \tau \prec \sigma\}$. De l'autre côté $M(\tau) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(N(\tau), \mathbf{Z})$ est le dual de $N(\tau)$ et, si τ est une face de σ , on a $(\overline{\sigma})^\vee = \sigma^\vee \cap \tau^\perp$ donc $S_{\overline{\sigma}} = (M \cap \tau^\perp) \cap (\overline{\sigma})^\vee = M \cap \sigma^\vee \cap \tau^\perp = S_\sigma \cap \tau^\perp$.

Il suffit donc de montrer que $U_{\overline{\sigma}} := \text{Hom}_{\text{SG}}(S_{\overline{\sigma}}, \mathbf{C})$ coïncide avec $V(\tau) \cap U_\sigma$. Soit $u \in U_\sigma \cap V(\tau)$, alors la restriction de u à $S_\sigma \cap \tau^\perp$ est un morphisme de semi-groupes. Inversement soit $\bar{u} \in U_{\overline{\sigma}}$, l'opération d'extention par zéro vue précédemment permet de définir un élément $u \in U_\sigma$ qui est bien dans $\cap V(\tau)$ d'après la décomposition 3') : $\overline{\theta_\tau} = \bigcup_{\tau \prec \sigma} \theta_\sigma$. \square

De plus $V(\tau) = \bigcup_{\tau \prec \sigma} U_{\overline{\sigma}}$, où $U_{\overline{\sigma}} = \text{Specmax}(\mathbf{C}[\overline{\sigma}^\vee \cap M(\tau)]) = \text{Specmax}(\mathbf{C}[\sigma^\vee \cap \tau^\perp \cap M])$. En particulier, si $\sigma = \tau$, alors $U_{\overline{\tau}} = \text{Specmax}(\mathbf{C}[\tau^\perp \cap M]) = T_{N(\tau)} = \theta_\tau$, qui est une sous-variété ouverte $V(\tau)$.

Montrons que $V(\tau)$ est une sous-variété fermée de $X(\Delta)$. On commence par construire, pour chaque $\sigma \in \Delta$ dont τ est une face, une immersion fermée

$$U_{\bar{\sigma}} = \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M, \mathbf{C}) \longrightarrow U_{\sigma} = \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma^{\vee} \cap M, \mathbf{C})$$

à l'aide d'une extension par zéro. Soit $x \in \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M, \mathbf{C})$, on définit :

$$\begin{aligned} \bar{x} : \sigma^{\vee} \cap M &\longrightarrow \mathbf{C} \\ u &\longrightarrow \begin{cases} x(u) & \text{si } u \in \sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

$0 \in \sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M$ donc $\bar{x}(0) = x(0) = 1$. Soient $u, v \in \sigma^{\vee} \cap M$, sachant que $\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp}$ est une face de σ^{\vee} on a l'équivalence $u + v \in \sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp}$ ssi $u, v \in \sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp}$ (toujours d'après [Oda88] lemme A.9). Par conséquent $\bar{x}(u + v) = \bar{x}(u)\bar{x}(v)$, et \bar{x} est un morphisme de semi-groupes bien défini.

La surjection correspondante au niveau des algèbres est la projection

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[\sigma^{\vee} \cap M] &\longrightarrow \mathbf{C}[\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M] \\ \chi^u &\longrightarrow \begin{cases} \chi^u & \text{si } u \in \sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Corollaire 7.5 *On en déduit que l'idéal de $V(\tau) \cap U_{\sigma}$ dans A_{σ} est $\oplus \mathbf{C} \cdot \chi^u$, les u parcourant $\{u \in S_{\sigma}, \langle u, v \rangle > 0 \forall v \in |\tau|\}$*

Soient $\tau, \sigma, \sigma' \in \Delta$ tels que $\tau \prec \sigma \prec \sigma'$, on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U_{\bar{\sigma}} & \xrightarrow{\quad} & U_{\bar{\sigma}'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_{\sigma} & \xrightarrow{\quad} & U_{\sigma'}, \end{array}$$

défini par :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma'^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M, \mathbf{C}) \\ \downarrow \text{ext. par } 0 & & \downarrow \text{ext. par } 0 \\ \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma^{\vee} \cap M, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma'^{\vee} \cap M, \mathbf{C}) \end{array}$$

Ainsi les conditions de compatibilité sont satisfaites et ces applications se recollent afin de donner une immersion fermée $V(\tau) \longrightarrow X(\Delta)$.

Remarque 7.6 Si τ est une face de τ' , alors on a une immersion fermée $V(\tau') \longrightarrow V(\tau)$ dont on connaît une description sur les ouverts $U_{\bar{\sigma}}, \bar{\sigma} \in \bar{\Delta}(\tau')$, qui forment un recouvrement ouvert de $V(\tau')$: $\text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma^{\vee} \cap \tau'^{\perp} \cap M, \mathbf{C}) \xrightarrow{\text{ext. par zéro}} \text{Hom}_{\text{SG}}(\sigma^{\vee} \cap \tau^{\perp} \cap M, \mathbf{C})$.

Remarque 7.7 Soit $\tau' \in \bar{\Delta}(\tau)$, $V(\tau) = X(\bar{\Delta}(\tau))$ étant une variété torique, le corollaire 7.5 fournit une immersion fermée $V(\tau') \longrightarrow X(\bar{\Delta}(\tau)) = V(\tau)$. Cette construction coïncide avec celle définie dans la remarque précédente.

7.2 Caractérisation des diviseurs T -stables et conséquences

Ce § établit les préliminaires au théorème d'annulation de Demazure. $X(\Delta)$ étant normale donc intègre, l'injection $\text{CaCl}X \rightarrow \text{Pic}X$ est un isomorphisme.

Proposition 7.8 *Un diviseur de Cartier T -stable (ou " T -Cartier") est égal à $\text{div } \chi^{u(\sigma)}$ sur chaque U_σ , où $u(\sigma) \in M$ est déterminé à $M(\sigma)$ près.*

Démonstration Soit $\sigma \in \Delta$ et U_σ l'ouvert affine associé, quitte à considérer $U_{\sigma'} \times_{\mathbf{C}} T_{N(\sigma)}$ (où $\sigma' = \sigma$ vu dans $\mathbf{R}.\sigma$), on peut supposer σ^\vee saillant. Soit D un diviseur T -Cartier, qui correspond à un idéal fractionnaire $I = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$. Par 2.2, I est stable par T donc par 2.3 (qui était exprimé pour $D = D_P$),

$$I = \bigoplus_{\chi^{u_i} \in I} \mathbf{C}\chi^{u_i}, \quad (u_i \in M).$$

D est Cartier donc I est en particulier principal sur un voisinage du point distingué $\{0\}$ (d'idéal une somme directe de caractères $\mathfrak{m} = \bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \{0\}} \mathbf{C}\chi^m$ car σ^\vee est saillant) donc $I/\mathfrak{m}I \cong I_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}I_{\mathfrak{m}}$ est de dimension 1 sur A_σ/\mathfrak{m} donc engendré par l'image d'un χ^u (on l'extrait de la famille génératrice $(\overline{\chi^{u_i}})_{\chi^{u_i} \in I}$. Montrons qu'alors $I = \langle \chi^u \rangle$.

En effet soit $(\chi^{u_j})_{u_j \in \mathcal{U}}$ une famille génératrice de I avec $u \in \mathcal{U}$ et qui vérifie la condition $\chi^{u_j} \notin \langle \chi^{u_k} \rangle$ si $u_j \neq u_k$ (sinon on peut retirer u_j de la famille \mathcal{U}). D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} \langle \chi^{u_j} \rangle_{u_j \in \mathcal{U}} = I &= \langle \chi^u \rangle + \left(\bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \{0\}} \mathbf{C}\chi^m \right) \langle \chi^{u_j} \rangle_{u_j \in \mathcal{U}} \\ &= \langle \chi^u \rangle + \left(\bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \{0\}} \mathbf{C}\chi^m \right) \langle \chi^{u_j} \rangle_{u_j \in \mathcal{U} \setminus \{u\}}. \end{aligned}$$

Par l'absurde soit $u_j \in \mathcal{U}$ différent de u , χ^{u_j} est dans I donc d'après 8 et avec nos "conditions d'indépendance" sur la famille \mathcal{U} , il est dans $(\bigoplus_{m \in S_\sigma \setminus \{0\}} \mathbf{C}\chi^m) \langle \chi^{u_j} \rangle_{u_j \in \mathcal{U} \setminus \{u\}}$ mais c'est impossible à cause de ces mêmes conditions.

On conclut par l'absurde que $D = \text{div } \chi^{-u}$. [Si ce n'était pas déjà "évident" pour le lecteur, on va redémontrer un cas particulier simple de la propriété que si deux diviseurs de Cartier ont des faisceaux inversibles isomorphes, alors ils sont égaux : le diviseur $E = D + \text{div } \chi^u$ est par hypothèse tel que $\Gamma(U_\sigma, \mathcal{O}_X(E)) = A_\sigma$. En particulier $1 \in \Gamma(U_\sigma, \mathcal{O}_X(E))$ donc $E \geq 0$. Si un Y non nul intervenait dans son support, quitte remplacer U_σ par un ouvert principal contenant Y assez petit, on pourrait trouver un $h \in A_\sigma$ tel que $Y = \text{div } h$ (puisque $\mathcal{O}_{X,Y}$ est de valuation discrète car A_σ est normal). Donc $\text{div}(1/h) + E \geq 0$ donc $1/h \in A_\sigma$ par hypothèse : finalement h inversible donc Y était en fait nul, contradiction ¹⁷.]

17. Détaillons une autre preuve de la proposition, plus rapide mais moins évidente, adaptée de [Oda88] 2.4 : I est un idéal fractionnaire de $A := \mathbf{C}[U_\sigma]$ noethérien et intègre donc (exercice) il est de type fini donc de présentation finie. D étant Cartier, il est de plus localement libre. Donc I^{-1} désigne l'ensemble des $a \in A$ tels que $a.I \subset A$, alors $I.I^{-1} = A$. [Pour obtenir ce dernier résultat, classique, montrons d'abord que

(1) si I^\vee désigne $\text{Hom}_A(I, A)$, le morphisme naturel $\varphi : I^\vee \otimes_A I \rightarrow A$ est un isomorphisme ([Eis04], th 11.16). Il suffit en effet (exercice) d'avoir l'isomorphisme pour tous les morphismes localisés $\varphi_{\mathfrak{p}} : (I^\vee)_{\mathfrak{p}} \otimes_A I_{\mathfrak{p}} \rightarrow A_{\mathfrak{p}}$. Mais la localisation est plate et I est de présentation finie donc (exercice) le morphisme naturel $(I^\vee)_{\mathfrak{p}} := A_{\mathfrak{p}} \otimes_A \text{Hom}_A(I, A) \rightarrow (I_{\mathfrak{p}})^\vee := \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(I_{\mathfrak{p}}, A_{\mathfrak{p}})$ est un isomorphisme [personnel : vérifier la formule sur les modules libres de type fini, écrire une présentation finie puis conclure avec un "lemme

Propriété 7.9 Soit $\rho \in \Delta(1)$ de générateur minimal n_ρ dans N . Soit $V(\rho) \subset X(\Delta)$ son diviseur correspondant, alors

$$\text{ord}_{V(\rho)}(\chi^u) = \langle u, n_\rho \rangle.$$

Démonstration On réutilise la preuve de 5.4 : n_ρ étant primitif, on peut l'étendre en une base $\{e_1 = n_\rho, e_2, \dots, e_n\}$ de N , ce qui fixe un isomorphisme $N \cong \mathbf{Z}^n$ et $\rho = \text{Cone}(e_1) \subseteq \mathbf{R}^n$ (c'est compatible au produit scalaire). La variété torique affine correspondante est $U_\rho = \text{Spec}(\mathbf{C}[x_1, x_2^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]) = \mathbf{C} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}$ et, par exemple d'après la proposition 7.5 ou en prenant directement la fermeture de l'orbite $\{0\} \times (\mathbf{C}^*)^{n-1}$ du point distingué, $V(\rho) \cap U_\rho$ est le fermé $\{X_1 = 0\}$. Son anneau local, de valuation discrète, est $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_n]_{(X_1)}$. Une fonction $f \in \mathbf{C}(X_1, \dots, X_n)^*$ a pour valuation $\text{ord}_{V(\rho)}(f) = n$ quand

$$(1) \quad f = X_1^n \frac{g}{h}, \quad g, h \in \mathbf{C}[X_1, \dots, X_n] \text{ non divisibles par } X_1$$

Pour relier cette expression à $\text{ord}_{V(\rho)}(\chi^m)$, on remarque que les variables X_1, \dots, X_n sont les caractères de U_σ associés à la base duale (b_1, \dots, b_n) de (e_1, \dots, e_n) . Il suffit donc d'exprimer $m \in M$ dans la base (b_1, \dots, b_n) : $m = \langle m, e_1 \rangle b_1 + \dots + \langle m, e_n \rangle b_n$ donc $\chi^m = X_1^{\langle m, e_1 \rangle} \dots X_n^{\langle m, e_n \rangle}$, ce qui permet d'exploiter la formule (1) pour conclure. \square

Soit Δ un éventail de N , on appelle *fonction support sur Δ* une fonction $\psi : |\Delta| \rightarrow \mathbf{R}$ linéaire sur chaque cône et qui prend des valeurs rationnelles sur les points du réseau. Du lemme on déduit formellement :

Corollaire 7.10 Les diviseurs T -Cartiers sur $X(\Delta)$ sont en bijection avec les fonctions support de Δ ¹⁸.

Preuve : Un diviseur T -Cartier étant égal à $D|_{U_\sigma} = \text{div} \chi^{-u(\sigma)}$ sur chaque ouvert U_σ (le signe $-$ est plus pratique), il détermine une collection de $u(\sigma) \in M/M(\sigma)$ d'où une collection de fonctions $(\psi_D)|_\sigma := \langle u(\sigma), \cdot \rangle$ linéaires rationnelles sur chaque cône. Elles coïncident sur chaque intersection $\sigma \cap \tau$ puisque $-u(\sigma)$ et $-u(\tau)$ définissent tous les deux D sur $U_{\sigma \cap \tau}$ donc coïncident à $M(\sigma \cap \tau) = M(\sigma) + M(\tau)$ près (d'après 7.9), d'où par recollement une fonction support ψ_D bien définie.

des 5"]. I étant localement libre, $I_{\mathbf{p}} \xrightarrow{\sim} A_{\mathbf{p}}$ donc $\varphi_{\mathbf{p}}$ se réduit finalement à l'isomorphisme $A_{\mathbf{p}}^\vee \otimes_{A_{\mathbf{p}}} A_{\mathbf{p}} = A_{\mathbf{p}} \otimes_{A_{\mathbf{p}}} A_{\mathbf{p}} \rightarrow A_{\mathbf{p}}$.

(2) Montrons ensuite que $I^{-1} \cong \text{Hom}_A(I, A) := I^\vee$. En effet soit $\varphi/I \rightarrow A$, soit a tel que $a.I \in A$. Soient $x, y \in I$, $\varphi(axy) = ax\varphi(y) = ay\varphi(x)$ A est intègre donc $x\varphi(y) = y\varphi(x)$, $x^{-1}\varphi(x) = y^{-1}\varphi(y)$ i.e. $\varphi(x) = bx$ avec $b \in I^{-1}$ d'où la surjection. Réciproquement l'application est clairement injective. En conclusion le morphisme $I \otimes_A I^{-1} \rightarrow A$ est un isomorphisme, qui identifie donc A avec son image cqfd.]

I et I^{-1} sont T -stables donc se décomposent en somme directe de caractères donc il est pertinent d'introduire $\phi_\sigma := \{m \in M, \chi^m \in I\}$. Alors $\{\chi^m, m \in M \cap \sigma^\vee\}$ et $\{\chi^m, m \in \phi_\sigma\}$ sont des \mathbf{C} -bases de A_σ et de I respectivement donc $\{\chi^{m'}, (m' \in M \text{ tels que } m' + \phi_\sigma \subset M \cap \sigma^\vee)\}$ est une \mathbf{C} -base de I^{-1} . Donc l'égalité $I.I^{-1} = A_\sigma$ se réduit à

$$\{m' \in M, m' + \phi_\sigma \subset M \cap \sigma^\vee\} + \phi_\sigma = M \cap \sigma^\vee.$$

Mais 0 est dans $M \cap \sigma^\vee$ donc il existe $m'_\sigma \in \phi_\sigma$ tel que $(-m'_\sigma) + \phi_\sigma = M \cap \sigma^\vee$ donc $\phi_\sigma = m'_\sigma + M \cap \sigma^\vee$. Finalement, $I = \langle \chi^{m'_\sigma} \rangle$ soit $D = \text{div}(\chi^{-m'_\sigma})$.

18. Par exemple on retrouve que sur une variété torique régulière, un diviseur T -Weil $\sum -a_i V(\rho_i)$ quelconque est en fait T -Cartier. Il suffit de trouver une fonction support ψ qui prend les valeurs a_i sur chaque générateur minimal de $\rho \in \Delta(1)$. Mais chaque cône fait partie d'une base de N donc c'est toujours possible.

C'est une injection puisque si $\psi_D = \psi_{D'}$, alors $u(\sigma) = u(\sigma') \pmod{M(\sigma)}$ pour chaque σ , i.e. $u(\sigma) - u(\sigma') \in M(\sigma)$ donc $\chi^{u(\sigma)-u(\sigma')}$ n'a ni zéro ni pôle sur U_σ par 7.9 donc D et D' y coïncident.

Réciproquement soit une fonction support ψ , elle est définie par une collection de $u(\sigma)$ modulo $M(\sigma)$ donc en notant v_ρ les générateurs primitifs des rayons ρ de l'éventail, elle provient du diviseur T -Cartier $D_\psi = \sum_\rho -\psi(v_\rho)V(\rho) = \sum_\rho \langle -u(\sigma), v_\rho \rangle V(\rho)$ car D_ψ vérifie $D|_{U_\sigma} = \text{div}(\chi^{-u(\sigma)})$ sur chaque ouvert U_σ . \square

7.3 Le théorème d'annulation de Demazure

On détaille les arguments de [Ful93]. Soit D un diviseur T -Cartier sur une variété torique $X = X(\Delta)$ et soit $\psi = \psi_D$ sa fonction support sur $|\Delta|$. Toujours par 2.2 et 2.3, les sections globales de $\mathcal{O}_X(D)$ forment un module gradué : $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigoplus_u H^0(X, \mathcal{O}_X(D))_u$, avec

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D))_u = \begin{cases} \mathbf{C}\chi^u & \text{si } u \in P_D \cap M \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases},$$

où P_D est le polyèdre $\{u \in M_{\mathbf{R}}, "u \geq \psi" \text{ sur tout } |\Delta|\}$. Reformulation fructueuse : définissons un fermé conique $Z(u)$ dans $|\Delta|$ pour chaque $u \in M$:

$$Z(u) = \{v \in |\Delta|, \langle u, v \rangle \geq \psi(v)\}$$

Alors u appartient à P_D ssi $Z(u) = |\Delta|$, ou de façon équivalente, quand le groupe de cohomologie à support dans $Z(u)$ $H_{Z(u)}^0(|\Delta|)$ est non nul (en effet $|\Delta|$ est connexe par arcs en passant par 0 donc les sections globales de \mathbf{C} sont constantes). Par conséquent

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \bigoplus H^0(X, \mathcal{O}_X(D))_u, \quad H^0(X, \mathcal{O}_X(D))_u = H_{Z(u)}^0(|\Delta|)$$

Cette formulation se généralise aux groupes de cohomologie supérieure $H_{Z(u)}^p(|\Delta|)$:

Proposition 7.11 ([M2]) Pour tout $p \geq 0$ on a des isomorphismes canoniques :

$$(2) \quad H^p(X, \mathcal{O}_X(D)) \cong \bigoplus_{u \in M} H^p(X, \mathcal{O}_X(D))_u, \quad H^p(X, \mathcal{O}_X(D))_u \cong H_{Z(u)}^p(\mathbf{Z}, |\Delta|)$$

Par exemple si X est affine, alors $|\Delta|$ est un cône et ψ est linéaire donc $|\Delta|$ et $|\Delta| \setminus Z(u)$ sont tous les deux convexes donc les $H^p(\mathbf{Z}, |\Delta|)$ et les $H^p(\mathbf{Z}, |\Delta| \setminus Z(u))$ s'annulent pour $p > 0$ car ils sont contractiles donc par la suite exacte longue de cohomologie, $H_{Z(u)}^p(\mathbf{Z}, |\Delta|)$ est aussi nulle en degrés $p > 0$: on retrouve un cas particulier du théorème d'annulation de la cohomologie des faisceaux cohérents sur un affine. Le corollaire suivant sera tout le temps appliqué avec l'hypothèse ψ_D concave : on n'utilisera donc pas la caractérisation 7.14.²⁰

19. [personnel : en effet $\langle \chi^{u(\sigma)} \rangle$ est T -stable donc $\text{div}(\chi^{-u(\sigma)})$ est T -invariant donc à support dans les $V(\rho)$]

20. [personnel : une fonction affine par morceaux ψ_D est concave ssi son graphe est "en dessous" de chaque plan tangent (i.e. en montant on traverse tous les plans tangents). Ils sont en nombre fini, ainsi en 2 dimensions le graphe de ψ_D a la forme d'une "tente"]

Corollaire 7.12 Si ψ_D est concave (ssi $\mathcal{O}(D_P)$ est engendré par ses sections par 7.14), alors

$$(3) \quad H^i(X, \mathcal{O}_X(D)) = 0 \text{ pour tout } i > 0$$

Démonstration ψ est concave donc

$$|\Delta| \setminus Z(u) = \{v \in |\Delta|, \langle u, v \rangle < \psi(v)\}$$

est un ensemble convexe (le barycentre de 2 points y est encore)²¹. D'où l'annulation de la cohomologie à support dans $Z(u)$.

Démonstration (de 7.11) $H^p(\mathcal{O}_X(D))$ est le p -ième groupe de cohomologie du complexe de Čech \check{C}^\bullet , avec

$$\begin{aligned} \check{C}^p &:= \bigoplus_{\sigma_0, \dots, \sigma_p} H^0(U_{\sigma_0} \cap \dots \cap U_{\sigma_p}, \mathcal{O}_X(D)) \\ &= \bigoplus_{u \in M} \bigoplus_{\sigma_0, \dots, \sigma_p} H^0_{Z(u) \cap \sigma_0 \cap \dots \cap \sigma_p}(\sigma_0 \cap \dots \cap \sigma_p) \end{aligned}$$

d'après les remarques préliminaires sur la graduation de H^0 . La somme parcourt tous les cônes $\sigma_0, \dots, \sigma_p$ de Δ . $\mathcal{O}_X(D)$ étant cohérent et les intersections $U_{\sigma_0} \cap \dots \cap U_{\sigma_p}$ étant toutes affines, le complexe \check{C}^\bullet calcule bien sa cohomologie. Les différentielles δ_p du complexe préservent clairement la M -graduation, d'où la M -graduation sur la cohomologie. Mais nous avons vu (juste après l'énoncé du théorème) que $H^i_{Z(u) \cap |\tau|} = 0$ pour tout cône τ , $u \in M$ et $i > 0$. La proposition provient donc du lemme suivant :

Lemme 7.13 Soit Z un sous-espace fermé d'un espace Y , Y réunion d'un nombre fini de sous-espaces fermés Y_j et \mathcal{F} un faisceau sur Y tel que $H^i_{Z \cap Y'}(Y', \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > 0$ et tout $Y' = Y_{j_0} \cap \dots \cap Y_{j_p}$. Alors

$$H^i_Z(Y, \mathcal{F}) = h^i(\check{C}^\bullet(\{Y_j\}, \mathcal{F})),$$

où $\check{C}^\bullet(\{Y_j\}, \mathcal{F})$ est le complexe de Čech dont le p -ième terme est

$$\check{C}^p(\{Y_j\}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{j_0, \dots, j_p} \Gamma_{Z \cap Y_{j_0} \cap \dots \cap Y_{j_p}}(Y_{j_0} \cap \dots \cap Y_{j_p}, \mathcal{F})$$

Démonstration Soit \mathcal{I}^\bullet une résolution injective de \mathcal{F} , qui fournit le double complexe $\check{C}^\bullet(\{Y_j\}, \mathcal{I}^\bullet)$

$$\begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \check{C}^0(\{Y_j\}, \mathcal{I}^2) & \rightarrow & \check{C}^1(\{Y_j\}, \mathcal{I}^2) & \rightarrow & \check{C}^2(\{Y_j\}, \mathcal{I}^2) & \rightarrow & \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \check{C}^0(\{Y_j\}, \mathcal{I}^1) & \rightarrow & \check{C}^1(\{Y_j\}, \mathcal{I}^1) & \rightarrow & \check{C}^2(\{Y_j\}, \mathcal{I}^1) & \rightarrow & \dots \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \check{C}^0(\{Y_j\}, \mathcal{I}^0) & \rightarrow & \check{C}^1(\{Y_j\}, \mathcal{I}^0) & \rightarrow & \check{C}^2(\{Y_j\}, \mathcal{I}^0) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

21. [personnel : en 2 dimensions, on intersecte la "tente" par un plan non vertical et on garde la partie qui dépasse : c'est convexe]

Par hypothèse les colonnes sont des résolutions du complexe $\check{C}^\bullet(\{Y_j\}, \mathcal{F})$. Montrons que les lignes sont des résolutions du complexe $\Gamma_Z(Y, \mathcal{I}^\bullet)$, alors $\check{C}^\bullet(\{Y_j\}, \mathcal{F})$ et $\Gamma_Z(Y, \mathcal{I}^\bullet)$ seront tous les deux quasi-isomorphes au complexe simple associé ([BT82] II §8) donc égaux en cohomologie. Remarquons que \mathcal{I} étant injectif, il est flasque donc la suite

$$0 \rightarrow \Gamma_{Z \cap W}(W, \mathcal{I}) \rightarrow \Gamma(W, \mathcal{I}) \rightarrow \Gamma(W \setminus (Z \cap W), \mathcal{I}) \rightarrow 0$$

est exacte pour tout W . En écrivant ces suites exactes fonctorielles les unes au dessus des autres pour chaque $W = Y_{j_0} \cap \dots \cap Y_{j_p}$, la suite exacte longue de cohomologie nous ramène à montrer que

$$0 \rightarrow \Gamma(Y, \mathcal{I}) \rightarrow \bigoplus \Gamma(Y_j, \mathcal{I}) \rightarrow \bigoplus \Gamma(Y_{j_1} \cap Y_{j_2}, \mathcal{I}) \rightarrow \dots$$

est exacte (même chose pour $Y \setminus Z$). On aimerait conclure en disant que le complexe de Čech faisceautique $\check{C}^\bullet(\{Y_j\}, \mathcal{I})$ est une résolution de \mathcal{I} , mais ici les Y_j sont fermés. On ne peut donc plus le vérifier sur les tiges comme dans [God73] II.5.2.1, puisque en un point x il n'existe pas forcément d'ouvert assez petit contenu dans un des Y_j . Il existe en fait une preuve (à la page suivante, le recouvrement (Y_j) étant localement fini) mais pour le lecteur allergique aux espaces étalés, on peut aussi utiliser que \mathcal{I} se plonge dans $\mathcal{C}^0(\mathcal{I})$ son faisceau des sections discontinues, \mathcal{I} étant injectif cela en fait un *facteur direct* de $\mathcal{C}^0(\mathcal{I})$ donc il suffit de vérifier l'assertion sur $\mathcal{C}^0(\mathcal{I})$. L'exactitude de la suite se vérifiant en chaque point $y \in Y$, il suffit de vérifier que la cohomologie du "simplexe" $\{j, y \in Y_j\}$ à coefficients dans \mathcal{I}_y est exacte, ce qui nous ramène au même calcul que dans le cas où les $\{Y_j\}$ sont ouverts. \square

7.4 Désingularisations projectives

Le critère suivant se déduit de 7.9, 2.2 et 2.3. Il ne nous servira pas directement puisque pour tous les faisceaux rencontrés nous utiliserons directement la propriété " ψ concave" pour appliquer le théorème de Demazure.

On pourrait montrer, mais c'est hors sujet, qu'un diviseur T -Cartier²² sur une variété torique complète est ample ssi le graphe de ψ est strictement concave. Le critère (sens pas évident) entraîne alors qu'il est engendré par ses sections globales, ce qui n'est pas vrai en général. [On montre d'abord que D globalement engendré est très ample ssi ψ_D est strictement concave et P_D "très ample"].

Proposition 7.14 *Supposons que tous les cônes maximaux de Δ soient de dimension n (automatique pour les polytopes). Soit $D = \sum_\rho a_\rho V(\rho)$ un diviseur T -Cartier sur $X(\Delta)$, alors $\mathcal{O}_X(D)$ est engendré par ses sections globales ssi ψ_D est concave.*

Démonstration montrons que $\mathcal{O}_X(D)$ est engendré par ses sections globales ssi pour chaque cône σ , il existe un $u(\sigma) \in M$ tel que

- (i) $\langle u(\sigma), \vec{v}_\rho \rangle \geq -a_\rho$ pour tout $\rho \in \Delta(1)$
- (ii) $\langle u(\sigma), \vec{v}_\rho \rangle = -a_\rho$ pour tout $\rho \in \sigma(1)$

Ces deux conditions signifient alors que la fonction ψ_D , affine par morceaux sur chaque cône, est sous ses plans tangents (en nombre fini) *i.e.* est concave. (sens évident) C'est suffisant puisque (i) exprime que $\chi^{u(\sigma)}$ a un ordre d'annulation supérieur à $-a_\rho$ pour chaque $\rho \in \Delta(1)$ donc est bien dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ (puisque $\text{div } \chi^{u(\sigma)}$ est T -stable donc somme de $V(\rho)$) et (ii) que $\chi^{u(\sigma)}$

22. [personnel : ou fibré en droites T -équivariant, c'est la même chose ([Oda88] 2.1)]

engendre $\mathcal{O}_X(D)$ sur U_σ puisque $\text{div}(\chi^{u(\sigma)})|_{U_\sigma} = D|_{U_\sigma} = \sum_{\rho \in \sigma(1)} a_\rho V(\rho)$. Or les U_σ associés aux cônes maximaux σ , en nombre fini, recouvrent $X(\Delta)$ donc il y a un nombre *fini* de sections globales $\chi^{u(\sigma)} \in \mathcal{O}_X(D)$ qui engendrent les sections.

(sens pas évident²³) C'est nécessaire puisque " D engendré par ses sections" implique qu'en tout point x de U_σ , il existe une section globale f de $\mathcal{O}_X(D)$ dont la tige f_x engendre $\mathcal{O}_X(D)_x$, ce qui équivaut à $f \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_X(D)_x$ où \mathfrak{m}_x est l'idéal maximal de \mathcal{O}_X . On peut même prendre f de la forme χ^m car $f \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_X(D)_x$ donc au moins l'un des χ^{m_i} qui interviennent dans sa décomposition, dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ par 2.2 et 2.3, n'y est pas non plus. C'est vrai en particulier pour $x = x_\sigma$ le point distingué de σ , qui est par construction dans θ_σ l'orbite associée à σ et donc dans tous les $V(\rho)$, $\rho \in \sigma(1)$ (formule 7.1 3'). D étant Cartier, il s'écrit $\text{div } g$ sur un voisinage de x avec nécessairement $\text{ord}_{V(\rho)} g = a_\rho$ pour tout $\rho \in \sigma(1)$ car tout voisinage de x rencontre chaque $V(\rho)$. Soit maintenant χ^m une section globale dont la tige en x engendre $\mathcal{O}_X(D)_x$ par hypothèse, i.e. il est dans $\mathcal{O}_X(D)_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{O}_X(D)$ donc $\text{ord}_{V(\rho)} \chi^m = -a_\rho$ pour tout $\rho \in \sigma(1)$. \square

8 Formes différentielles sur les variétés toriques

8.1 le fibré canonique

Proposition 8.1 *Soit X une variété torique régulière, alors le diviseur canonique $K := \text{div } \Omega_{X/\mathbb{C}}^n$ est égal à $-\sum_{\rho \in \Delta(1)} V(\rho)$.*

Preuve : Pour récupérer la classe du diviseur associé au fibré en droites $\Omega_{X/\mathbb{C}}^n$, il suffit de prendre le diviseur des zéros d'une section méromorphe quelconque. Choisissons une \mathbf{Z} -base $\{m_1, \dots, m_r\}$ de M et construisons la forme méromorphe

$$\omega := \frac{d\chi^{m_1}}{\chi^{m_1}} \wedge \frac{d\chi^{m_2}}{\chi^{m_2}} \wedge \dots \wedge \frac{d\chi^{m_r}}{\chi^{m_r}}.$$

Quel est son diviseur dans U_σ , σ de dimension maximale? On utilise la propriété 5.6 que σ^\vee est engendré par une \mathbf{Z} -base de M . Elle se déduit de $\{m_1, \dots, m_r\}$ par un \mathbf{Z} -automorphisme ϕ de déterminant ± 1 . ω s'y exprime $\frac{d\chi^{\phi(m_1)}}{\chi^{m_1}} \wedge \dots \wedge \frac{d\chi^{\phi(m_r)}}{\chi^{m_r}}$, ou encore " $d \ln(\chi^{\phi(m_1)}) \wedge \dots \wedge d \ln(\chi^{\phi(m_r)})$ ". En développant explicitement chaque $\phi(m_i)$ et en regroupant les χ_i^n , on trouve $\frac{d\chi^{\phi(n_1)}}{\chi^{n_1}} \wedge \dots \wedge \frac{d\chi^{\phi(n_r)}}{\chi^{n_r}}$ avec en facteur $\det \phi = \pm 1$. Ce miracle nous permet de retrouver K dans chaque ouvert U_σ .

8.2 formes différentielles à pôles logarithmiques

Toujours dans le cas d'une variété torique régulière X , on définit le faisceau localement libre $\Omega_X^1(\log D)$ des formes différentielles à pôles logarithmiques sur $D = \sum D_i$. Nous aurons besoin du résultat suivant pour calculer la classe de Todd du fibré tangent de X :

Proposition 8.2 1) *Soit $D = \sum D_i$ un diviseur à croisements normaux sur X régulière, on a la suite exacte de faisceaux*

$$0 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^1(\log D) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{D_i} \rightarrow 0$$

^{23.} [personnel : On est obligé de réutiliser l'argument de 7.8, i.e. l'existence d'un point distingué dans chaque U_σ par lequel passent tous les $V(\tau)$, $\tau \in \Delta(1)$]

où \mathcal{O}_{D_i} est étendu à X par 0.

2) $\Omega_X^1(\log D)$ est trivial.

La dernière flèche de la suite est le morphisme "résidu" : il envoie $\omega = \sum f_i \frac{dX_i}{X_i}$ sur $\sum f_i|_{D_i}$. Du principe du scindement (simultané) et de la formule de Whitney on déduit :

$$c(\Omega_{X/\mathbf{C}}^1) \cdot \prod_{i=1}^d c(\mathcal{O}_{V(\rho_i)}) = 1$$

9 Calculs dans le groupe de Chow

9.1 préliminaire

Proposition 9.1 Soit $X = X(\Delta)$, où Δ est un éventail qui n'est pas contenu dans un sous-espace strict de $N_{\mathbf{R}}$. Alors on a le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & T - \text{Div}(X) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^d \mathbf{Z}.V(\rho_i) & \longrightarrow & \text{Cl}(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où les (ρ_i) sont les rayons de $|\Delta|$. De plus, $\text{Pic}(X)$ est abélien et sans torsion (mais certainement pas libre comme on peut le lire dans [Ful93]).

La ligne du haut se déduit de 7.8... appliqué au tore $U_{\{0\}} = T$! La ligne du bas résulte du fait que l'algèbre du tore est factorielle donc que son groupe des classes est nul.

9.2 les groupes $A_k(X)$

Définition 9.2 Soit $X(\Delta)$ une variété torique, on définit son *groupe de Chow* $A_k(X) = \text{Div}_k(X)/\sim$ [Ful98]. C'est le groupe libre engendré par ses fermés irréductibles de dimension k , quotienté (par exemple) par le sous groupe engendré par les cycles de la forme $\text{div } f$, où f est une fonction rationnelle non nulle sur une sous-variété W de dimension $(k+1)$ de X ^{24 25 26}. En particulier, $X(\Delta)$ étant normale, les deux définitions de A_{n-1} coïncident avec celle du groupe $\text{Cl}(X(\Delta))$ des classes de diviseurs de Weil.

24. [personnel : [M2] De façon générale une fonction "méromorphe" sur un schéma noethérien est une collection de $f_{A_i} \in Q(A_i)$ dans chaque ouvert affine $\text{Spec } A_i$ de W ($Q(A_i)$ est le localisé de A_i par les non-diviseurs de zéro, c'est injectif), qui coïncident sur les intersections : c'est le faisceau $\mathcal{M}(X)$ associé à $U \rightarrow Q(\mathcal{O}_X(U))$. C'est automatiquement un faisceau quand X intègre : on retrouve le faisceau des fonctions rationnelles (c'est le cas ici puisque "sous variété" veut dire irréductible et réduit)]

25. [M2] On définit d'abord $\text{div } f$ pour $f \in \mathcal{O}_X$: soit D le sous-schéma fermé de W défini par le faisceau d'idéaux f , soient $x_i \in W$ les points génériques des composantes irréductibles de D de codimension 1 dans W (en nombre fini car W est noethérien), $\text{div } f := \sum_{x_i} \text{long}_{\mathcal{O}_{X_i}}(\mathcal{O}_{D, x_i})$, qui coïncide heureusement avec $\sum_{x_i} \text{ord}_{\mathcal{O}_{X_i}}(f_{x_i})$ quand W est normal (\mathcal{O}_{X_i} étant alors de valuation discrète). On étend globalement par linéarité la définition à $f \in \mathbf{C}(X)$ (de manière locale à $f \in \mathcal{M}(X)$ quand X n'est pas intègre).

26. Autre définition possible : on quotiente cette fois par groupe engendré par les $f_*D - f_*D'$, où D et D' sont des diviseurs linéairement équivalents dans le normalisé $f : \tilde{V} \rightarrow V$ d'une sous variété V de dimension $k+1$ de X .

Proposition 9.3 $A_k(X(\Delta))$ est engendré par les classes des $V(\sigma)$, $\sigma \in \Delta(n - k)$.

[début de la preuve] Soit $X_i \subset X$ la réunion de tous les $V(\sigma)$, $\dim \sigma \geq n - i$. On obtient une filtration $X = X_n \supset X_{n-1} \supset \cdots \supset X_{-1} = \emptyset$ par des sous-variétés. Le complémentaire de X_{i-1} dans X_i est l'union disjointe des orbites θ_σ , où σ varie dans les cônes de dimension $n - i$, en vertu de la formule 7.1 3') sur les orbites de T . Conclure par récurrence avec [Ful98] §18 :

$$A_k(X_{i-1}) \rightarrow A_k(X_i) \rightarrow \bigoplus_{\dim \sigma = n-i} A_k(\theta_\sigma)$$

Partie III

Outils pour les variétés toriques singulières

Cette partie isole les résultats plus techniques, la plupart servant à faire des calculs sur les variétés toriques singulières.

10 Action du tore et variétés quotients

Théorème 10.1 (de réductibilité complète [M2]) Si le groupe algébrique $T_N \cong (\mathbf{C}^*)^n$ agit \mathbf{C} -linéairement sur un espace vectoriel E de dimension finie, alors E se décompose en $\bigoplus_{m \in M} V_{\chi^m}$ où $V_{\chi^m} = \{e \in E, t.e = \chi^m(t)e \text{ pour tout } t \text{ dans } (\mathbf{C}^*)^n\}$.

Démonstration (adaptée de Springer, Lin. Alg. Groups, th 3.2.3) On se donne un morphisme de groupes algébriques de $(\mathbf{C}^*)^n$ dans $\text{End}(E)$

$$A : \text{Spec } \mathbf{C}[T_1, \dots, T_n, T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1}] \rightarrow \text{Spec } \mathbf{C}[(X_{ij})]/(\det(X_{ij}) = 1).$$

D'où un morphisme d'algèbres

$$A^* : \mathbf{C}[(\overline{X_{ij}})] \rightarrow \mathbf{C}[T_1, \dots, T_n, T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1}]$$

décrit par $A^*(\overline{X_{ij}}) = \sum_I a_{ijI} T^I$ (où I est un multiindice $T^I := T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n}$). Donc A est donné en coordonnées par $A(t)_{ij} = \sum_I a_{ijI} t^I$, soit en notant A_I la matrice des $(a_{ijI})_{ij}$

$$A(t) = \sum_I A_I t^I.$$

C'est un morphisme de groupes donc $A(t_1 t_2) = A(t_1) A(t_2)$ pour tous $t_1, t_2 \in (\mathbf{C}^*)^n$:

$$\begin{aligned} \sum_I A_I t_1^I t_2^I &= \sum_I \sum_J A_I A_J t_1^I t_2^J \\ &= \sum_J \sum_I A_J A_I t_2^J t_1^I \end{aligned}$$

Mais un polynôme à m variables (ici $m := n \times n$), à coefficients dans un corps K infini, si son lieu des zéros est d'intérieur non vide, alors c'est le polynôme nul (exercice). Cet argument s'applique à chaque famille de coefficients $(a_{ijI})_I$ (à i et j fixés), une fois chassés les degrés négatifs après multiplication de l'égalité par un monôme $t_1^{J_1} t_2^{J_2}$ suffisant. Il en résulte²⁷ $\begin{cases} a) A_I^2 = A_I \\ b) A_I A_J = 0 \text{ si } I \neq J \end{cases}$, en particulier les A_I commutent. Elles sont annulées

27. [personnel : Vu autrement, on pourrait aussi appliquer le théorème de Dedekind d'indépendance linéaire des caractères t^I . On pourrait aussi utiliser directement la compatibilité du morphisme d'algèbres ("de Hopf") $A^* : \mathbf{C}[(\overline{X_{ij}})] \rightarrow \mathbf{C}[T_1, \dots, T_n, T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1}]$ aux morphismes "de comultiplication" (i.e. correspondant aux multiplications dans $(\mathbf{C}^*)^n$ et dans $GL(E)$).]

par $X(X-1)$ scindé à racines simples donc sont simultanément diagonalisables de valeurs propres 0 et 1. Dans une base commune de diagonalisation elles sont donc de la forme

$$A_I = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Par b), les 1 ne se chevauchent pas d'un A_I à l'autre et la condition de morphisme de

groupes impose $\sum_I A_I = A(1) = \text{Id}$. Donc $A(t) = \begin{pmatrix} t^{I_1} & & & & \\ & t^{I_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & t^{I_{n-1}} & \\ & & & & t^{I_n} \end{pmatrix}$ et ses valeurs

propres sont toutes de la forme $\chi^{I_k}(t) := t^{I_k}$. \square

[personnel : En fait tous les caractères rationnels de $(\mathbf{C}^*)^n$ sont de la forme $x \rightarrow x^m$ (on travaille dans $(\mathbf{C}^*)^n$ pour plus de clarté). On pourrait comme précédemment écrire la condition de multiplicativité puis appliquer, au choix, le théorème d'indépendance linéaire des caractères aux $t \rightarrow t^I$ ou bien la nullité d'un polynôme s'annulant sur un ouvert non vide de $(\mathbf{C}^*)^{2n}$.

Pour changer, voici le troisième argument annoncé : ϕ est un morphisme de groupes algébriques de $(\mathbf{C}^*)^n$ dans \mathbf{C}^* , il correspond à un \mathbf{C} -morphisme d'algèbres ("de Hopf") ϕ^* de $B := \mathbf{C}[T^{\pm 1}]$ dans $B' := \mathbf{C}[T_1^{\pm 1}, \dots, T_n^{\pm 1}]$. ϕ doit aussi commuter aux multiplications μ et μ' de \mathbf{C}^* et $(\mathbf{C}^*)^n$, respectivement données par des morphismes d'algèbres $\mu^* : B \rightarrow B \otimes B$ et $\mu'^* : B' \rightarrow B' \otimes B'$. Pour résumer on a les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{C}^*)^n \times (\mathbf{C}^*)^n & \xrightarrow{\mu'} & (\mathbf{C}^*)^n \\ \downarrow \phi \otimes \phi & & \downarrow \phi \\ \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{C}^* \end{array} \quad : \quad \begin{array}{ccc} s, t & \xrightarrow{\mu'} & st \\ \downarrow \phi \otimes \phi & & \downarrow \phi \\ (\phi(s), \phi(t)) & \xrightarrow{\mu} & \phi(st) = \phi(s)\phi(t) \end{array}$$

qui équivaut à

$$\begin{array}{ccc} B' \otimes B' & \xleftarrow{\mu'^*} & B' \\ \uparrow \phi^* \otimes \phi^* & & \uparrow \phi^* \\ B \otimes B & \xleftarrow{\mu^*} & B \end{array} \quad : \quad \begin{array}{ccc} (\phi^* \otimes \phi^*)(\mu'^*(P)) & \xleftarrow{\mu'^*} & P \\ = \mu'^*(\phi^*(P)) & & \\ \uparrow \phi^* \otimes \phi^* & & \uparrow \phi^* \\ \mu'^*(P) & \xleftarrow{\mu^*} & P \end{array}$$

On rappelle $\mu'^*(P) : (s, t) \rightarrow P(st)$ (toujours selon la correspondance décrite dans 5.3). Attention ! $\mu'^*(P)$ n'est jamais égal à $P \otimes P$ sauf dans le cas où P est un monôme en les T_i ²⁸. Maintenant, ϕ^* est un morphisme de \mathbf{C} -algèbres donc est entièrement déterminé par sa valeur en T . On écrit la compatibilité à la multiplication :

$$\begin{aligned} (\phi^* \otimes \phi^*)(\mu^*(T)) &= \mu'^*(\phi^*(T)), \\ \text{soit d'après ce qui précède : } (\phi^* \otimes \phi^*)(T \otimes T) &= \mu'^*(\phi^*(T)) \\ \phi^*(T) \otimes \phi^*(T) &= \mu'^*(\phi^*(T)) \end{aligned}$$

²⁸. à cause des termes croisés dans $P(X)^2 = P(X^2)$ (vrai aussi en caractéristique 2, en regardant $P(X)P(Y) = P(XY)$)

Toujours d'après ce qui précède, cette dernière condition n'est vérifiée que lorsque $\phi^*(T)$ est un monôme en les T_i .

[Ces arguments montrent que i) la propriété que $\mathbf{C}[G]$ engendré par $\chi^*(G)$ est équivalente à G sous groupe fermé d'un $(\mathbf{C}^*)^q$ [sens direct : par surjectivité du morphisme d'algèbres ; sens réciproque : soit χ_1, \dots, χ_q dans $\chi^*(G)$ engendrant $\mathbf{C}[G]$, le morphisme d'algèbres surjectif $\mathbf{C}[T_1^{\pm 1} \dots T_q^{\pm 1}] \rightarrow \mathbf{C}[G] : T_i \rightarrow \chi_i$ fournit une immersion fermée de G dans $(\mathbf{C}^*)^q$] et ii) qu'un groupe G ayant cette propriété a toutes ses représentations rationnelles diagonalisables (à valeurs propres non nulles) [la démonstration du théorème, en utilisant l'indépendance linéaire des caractères]]

Les théorèmes suivants sont hors sujet. Toutefois la preuve de 10.5 établit la nécessité de la condition 6.11 pour être un morphisme birationnel.

Définitions 10.2 Une *rotation complexe* est une matrice conjuguée à la matrice diagonale $C_m := (e^{2\pi i/m}, 1, \dots, 1)$ pour un certain m . On dit qu'un sous-groupe fini $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ est *petit* ssi il ne contient pas d'autre rotation complexe que l'identité

Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ un sous-groupe fini, on remarque immédiatement que le sous groupe $H \subset G$ engendré par les rotations complexes est distingué dans G .

Définitions 10.3 On dit que deux variétés X et Y sont *analytiquement équivalentes* en p et q ssi il existe des voisinages classiques $p \in U \subset X$ et $q \in V \subset Y$ tels que $U \cong V$ comme variétés analytiques complexes. Un point p d'une variété X est une *singularité quotient finie* ssi il existe un petit sous-groupe $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que p est analytiquement équivalent à $0 \in \mathbf{C}^n/G$. On dit alors que X "a des singularités quotients finies" ou est "quasi régulière" ou est "**Q**-régulière" ssi tout point p y est une singularité quotient finie.

[La définition autorise G à être le sous-groupe trivial de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. On en déduit en particulier qu'une variété régulière est quasi-régulière (car par le critère jacobien et le théorème des fonctions implicites, c'est une sous-variété analytique de \mathbf{C}^n qui est différentiable donc localement analytiquement isomorphe à un ouvert de \mathbf{C}^r).]

Proposition 10.4 Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ un sous-groupe fini, alors \mathbf{C}^n/G est quasi-régulière

Preuve : On peut se ramener (c'est non trivial) à G un petit sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$: soit $H \subset G$ le sous-groupe distingué engendré par les rotations complexes de la remarque précédente, alors G/H est isomorphe à un petit sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Mais $\mathbf{C}^n/G = (\mathbf{C}^n/H)/(G/H)$ et le théorème de Shephard-Todd-Chevalley (cf. B. Sturmfels, *Algorithms in invariant theory*, section 2.4) affirme que $\mathbf{C}^n/H \cong \mathbf{C}^n$ ssi H est engendré par des rotations complexes.

La définition de "point quasi-régulier" garantit donc que $\{0\} \in \mathbf{C}^n/G$ est une singularité quotient finie mais on ne le sait pas encore pour les autres points de \mathbf{C}^n/G . Soit $v \in \mathbf{C}^n$, soit $G_v = \{g \in G, g.v = v\}$ son fixateur, on va montrer que $G.v \in \mathbf{C}^n/G$ est analytiquement équivalent à $0 \in \mathbf{C}^n/G_v$.

On observe d'abord que dans \mathbf{C}^n , $\phi : w \rightarrow w + v$ est équivariant par rapport à l'action de G_v tout comme $w \rightarrow w - v$. Donc $\phi(G_v w) = G_v \phi(w)$ et ϕ passe au quotient pour donner un isomorphisme de variétés $\mathbf{C}^n/G_v \rightarrow \mathbf{C}^n/G_v$ qui envoie 0 sur v . Donc $0 \in \mathbf{C}^n/G_v$ est analytiquement équivalent à $v \in \mathbf{C}^n/G_v$.

On est donc ramené à montrer que $v \in \mathbf{C}^n/G_v$ est analytiquement équivalent à $v \in \mathbf{C}^n/G$. Soient $\{g_i\}$ des représentants de G/G_v , alors \mathbf{C}^n/G est obtenu par \mathbf{C}^n/G_v en identifiant $w \in \mathbf{C}^n/G_v$ avec les $g_i.w$ pour tout i . Comme les points $g_i.v$ sont distincts dans \mathbf{C}^n/G_v , on peut trouver un voisinage classique U de $v \in \mathbf{C}^n/G_v$ tel que les voisinages $g_i.U$ soient disjoints. Les g_i agissent sur \mathbf{C}^n/G_v comme isomorphismes de variétés, ce qui entraîne que $v \in U \subset \mathbf{C}^n/G_v$ est analytiquement équivalent à un voisinage de $v \in \mathbf{C}^n/G$ ($w \in U \leftrightarrow \{w, g_1.w, \dots, g_n.w\} = \bar{w} \in \bar{U}$ est une bijection, c'est un isomorphisme de variétés car les g_i sont des isomorphismes de variétés).

Proposition 10.5 *Une variété torique simpliciale, ie dont tous les cônes maximaux sont simpliciaux, a des singularités quotient finies*

Démonstration Soit $X = X(\Delta, N)$, soit N' le sous-réseau de N d'indice fini engendré par les générateurs des rayons de Δ , alors le morphisme d'éventails $\varphi : (N', \Delta) \rightarrow (N, \Delta)$ fournit $f := \varphi_* : X' \rightarrow X$ (on a "forcé" X' à être régulière en la rendant localement isomorphe à \mathbf{C}^n). Soit $M' \supset M$ le dual de M , le sous-groupe $K = \text{Hom}(M'/M, \mathbf{C}^*) \subset T_{N'} = \text{Hom}(M', \mathbf{C}^*) \subset \text{GL}_n(\mathbf{C})$ agit sur X' . Or $K = \text{Hom}(M'/M, \mathbf{C}^*)$ est fini car N' est d'indice fini dans N et $N/N' \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(M'/M, \mathbf{C}^*)$, où la flèche est induite par $\theta \in \mathbf{Q} \rightarrow e^{2\pi i \theta}$ (détaillée dans [Oda88] p22). Donc par la proposition précédente, il suffit de montrer que X est quotient de X' par l'action de K .

Chaque σ détermine les ouverts U_σ et $U_{\sigma'}$ dans X et X' respectivement. K agit sur $\mathbf{C}[U_{\sigma'}]$ par $k \cdot \chi^{m'} = k(m') \chi^{m'}$ donc la sous- \mathbf{C} -algèbre de $\mathbf{C}[U_{\sigma'}]$ invariante par K est engendrée par les $\{\chi^m, m \in M \cap \sigma^\vee\}$ (toujours grâce au théorème de réductibilité complète!), qui est exactement $\mathbf{C}[U_\sigma]$. On utilise alors un théorème connu (cf. par exemple chapitre 7 de *Ideals, varieties and algorithms*) pour conclure que $U_\sigma = U_{\sigma'}/K$. \square

11 Faisceau dualisant

Le théorème suivant, fait pendant le stage, implique l'existence d'un faisceau dualisant. Il se construit en fait directement.

Théorème 11.1 (Hochster) *Les variétés toriques sont de Cohen-Macaulay.*

Démonstration (On détaille la preuve de [Dan78], en admettant certains théorèmes) Être de Cohen-Macaulay étant une propriété locale, on est ramené à montrer que pour un cône σ , U_σ est de Cohen-Macaulay. On peut supposer, comme pour la régularité, que σ^\vee saillant car le cas général revient à multiplier U_σ par un tore (régulier donc de Cohen-Macaulay²⁹). Il faut alors montrer que tous les localisés de A_σ sont de Cohen-Macaulay.

Soit I l'idéal de A engendré par tous les monômes X^m , avec m strictement dans σ^\vee . On admet ([Sta04]) que les théorèmes sur la profondeur et la cohomologie locale (cf par exemple [Ser66]), valables dans le cadre des modules sur anneaux locaux noethériens, sont encore valables dans le cas suivant : (R, \mathfrak{m}) est une \mathbf{C} -algèbre M -graduée (ou \mathbf{Z} -gradué si on veut) d'idéal homogène maximal \mathfrak{m} . Dans le détail, $R = \bigoplus_\alpha R_\alpha$ vérifie $R_\alpha R_\beta \subset R_{\alpha+\beta}$, $R_0 = \mathbf{C}$. $\mathfrak{m} := \bigoplus_{\alpha \neq 0} R_\alpha$ est l'unique idéal homogène maximal. On définit la profondeur d'un module M \mathbf{Z}^n -gradué :

- Définition 11.2** (i) Si $n = 1$, soit $\text{prof } M$ la taille d'une suite M -régulière de longueur maximale (on admet que deux suites M -régulières maximales ont même longueur).
(ii) Si $m > 1$, on spécialise la graduation en une \mathbf{Z} -gradation (ie on choisit une application $\mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}$) puis on définit $\text{prof } M$ comme en (i). (On admet que cette définition est indépendante de la spécialisation.)

Définition 11.3 On dit que M est de Cohen-Macaulay ssi $\text{prof } M = \dim_R M$.

^{29.} On montre qu'une famille génératrice minimale de \mathfrak{m} (i.e. le relevé d'une base de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$) est une suite de paramètres puis on utilise que $\text{prof } A \leq \dim A$

Lemme 11.4 *Le A -module A/I est de profondeur $n - 1$.*

On note $\partial\sigma^\vee$ le bord de σ^\vee , alors $A/I = \bigoplus_{m \in \partial\sigma^\vee \cap M} \mathbf{C}.X^m$. $\partial\sigma^\vee$ est recouvert par les faces de σ^\vee . On en déduit un complexe qui respecte la M -graduation sur A :

$$0 \rightarrow A/I \rightarrow C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_1} C_0 \rightarrow 0$$

avec $C_k := \bigoplus_\tau A_\tau$, où τ parcourt les faces k -dimensionnelles de σ^\vee . Pour définir les d_k , on choisit une *orientation* sur le complexe des cônes, en remarquant que chaque cône induit une orientation sur ses faces (qui ne correspond pas nécessairement avec l'orientation choisie). Tout cela est détaillé dans [Lee00] page 80. Les d_k sont définies comme la projection (restriction) des faces dans C_k sur les faces dans C_{k-1} , avec un signe $+$ si les orientations choisie et induite concident et $-$ sinon. Montrons que le complexe est exact. Il suffit de le vérifier en chaque X^m puisque les flèches respectent la graduation, on se ramène donc à l'exactitude de :

$$0 \rightarrow A/I(m) \rightarrow C_{n-1}(m) \xrightarrow{d_{n-1}(m)} C_{n-2}(m) \rightarrow \dots \xrightarrow{d_1(m)} C_0(m) \rightarrow 0$$

Introduisons le complexe simplicial $X(m) := \bigcup_{P(\Delta) \ni m} \Delta$. On remarque que la suite est exactement le complexe augmenté des chaînes simpliciales de $(X(m), \partial X(m))$ à coefficients dans \mathbf{C} , auquel on a ajouté $0 \rightarrow A/I(m)$ à gauche. La paire $(X(m), \partial X(m))$ a le même type d'homotopie que (disque, frontière du disque) (admis). D'après le lemme de Poincaré, seule son homologie de dimension maximale est non nulle et elle est isomorphe à $\mathbf{C} = A/I(m)$. Ce qui rend la suite exacte. Prouvons par récurrence que $\text{prof}(\text{Ker } d_{k-1}) = k - 1$ pour tout k , on aura le lemme pour $n - 1$. On considère la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Ker } d_k \rightarrow C_k \rightarrow \text{Ker } d_{k-1} \rightarrow 0$$

Par hypothèse de récurrence, $\text{prof}(\text{Ker } d_{k-1}) = k - 1$. Et comme $\dim \tau = k < n$, on a par récurrence $\text{prof } A_\tau = \text{prof } C_k = k$. On conclut immédiatement en utilisant la version "graduée" de :

Proposition 11.5 ([Ser66]) *Soit F un A -module Noethérien, où (A, \mathfrak{m}) est noethérien. Pour un entier n les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $\text{prof } F > n$
- $H_{\mathfrak{m}}^i(F) = 0$ pour tout $i \leq n$.

En effet de la suite exacte longue de cohomologie on déduit :

Corollaire 11.6 *Soit $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ une suite exacte courte de A -modules, avec $\text{prof } G = n$ et $\text{prof } H = n - 1$. Alors $\text{prof } F = n$.*

Si I était principal on aurait pu en déduire que $\text{prof } A = n$ d'après ce qui précède. Pour que I soit principal il faudrait qu'il existe un u_0 dans $\text{int}_{\text{rel}}(\sigma^\vee) \cap M$ tel que $u - u_0$ est dans $\sigma^\vee \cap M$ pour tout u dans $\text{int}(\sigma^\vee)$: on aurait alors $I = A.\chi^{u_0}$. Dans le cas général on peut facilement construire un sur-réseau \overline{M} contenant un tel u_0 .

Pour terminer la preuve on montre que \overline{A} est une A -algèbre finie. En effet soit χ la fonction caractéristique de M , $X^{\overline{m}} \rightarrow \chi(\overline{m})X^{\overline{m}}$ s'étend en un morphisme $\rho : \overline{A} \rightarrow \overline{A}$, qui est une projection sur $A \subset \overline{A}$. Donc (d'après par exemple Godement, Cours d'algèbre

17.4) A est un facteur direct de \overline{A} . \overline{A} étant de profondeur n sur A , on admet que cela implique que $\text{prof } A = n$.

La proposition suivante est cruciale à deux titres. D'une part elle sert à démontrer que le faisceau dualisant ω_X est $f_*\Omega_{X'}^n$, où $f : X' \rightarrow X$ est une désingularisation par raffinement de l'éventail. D'autre part elle entraîne (admis) que $f_*(\text{Td}(X')) = \text{Td}(X)$ pour tout f propre et birationnel déduit d'un raffinement de l'éventail.

Proposition 11.7 ([M2]) Soit Δ' une subdivision de Δ au sens du critère de propreté 6.7, qui fournit un morphisme propre birationnel $f : X' = X(\Delta') \rightarrow X = X(\Delta)$. Alors

$$f_*(\mathcal{O}_{X'}) = \mathcal{O}_X \text{ et } R^i f_*(\mathcal{O}_{X'}) = 0 \text{ pour tout } i > 0$$

(On rappelle que X' et X sont toujours intègres).

Ces égalités de faisceaux sur X se vérifient localement donc on se ramène à $X = \text{Spec } A_\sigma$ une variété torique affine. J'affirme que les deux assertions deviennent respectivement :

(i) $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = A_\sigma$

(ii) $H^i(X', \mathcal{O}_{X'}) = 0$ pour tout $i > 0$

- Pour (i), cela découle du lemme non trivial suivant :

Lemme 11.8 soit X un schéma quasi-compact et séparé sur k , alors pour tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur X et toute section globale $h \in \mathcal{O}(X)$ on a

$$\mathcal{F}(X_h) = \mathcal{F}(X)_h$$

où X_h est le lieu des points x où $h(x) \in k(x)$ ne s'annule pas.

Remarquons maintenant que pour tout $g \in A_\sigma$ on a $f^{-1}(D(g)) = X'_h$, où h est l'image de g dans $\mathcal{O}_{X'}(X')$ par $f^\# : A \rightarrow \mathcal{O}_{X'}(X')$ (il suffit de le vérifier dans tout ouvert affine U_i de X' , avec les h_i restrictions de h sur U_i). Le lemme entraîne alors que $f_*\mathcal{O}_{X'}$ est quasi-cohérent sur X affine, de sections globales $\Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$. \mathcal{O}_X étant aussi quasi-cohérent, l'égalité (i) entraîne donc l'égalité des faisceaux.

- Pour (ii) il suffit d'invoquer le résultat suivant sur les images directes :

Proposition 11.9 Soit X un schéma noethérien et $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de X vers un schéma affine $Y = \text{Spec } A$. Alors pour tout faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur X , on a

$$R^i f_*(\mathcal{F}) \cong H^i(X, \mathcal{F})^\sim$$

Preuve : j'en donne une plus élémentaire que celle de [Har73] III.8.5 (on pourrait aussi appliquer directement la proposition III 8.1, d'après les remarques ci-dessus), en utilisant quand-même qu'un faisceau quasi-cohérent \mathcal{F} sur un schéma noethérien X se plonge dans un faisceau flasque et quasi-cohérent. Cela fournit une résolution flasque $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \dots$ qui permet donc de calculer les $R^i f_*\mathcal{F}$. Mais d'après la remarque précédente, les $f_*\mathcal{F}_i$ sont quasi-cohérents sur $Y = \text{Spec } A$ qui est affine donc pour chaque morphisme $d_i : f_*\mathcal{F}_i \rightarrow f_*\mathcal{F}_{i+1}$ de faisceaux, sur chaque ouvert principal de Y on vérifie $(\text{Im } d_i)(X) = \text{Im}(d_i(X))$ (cette relation étant toujours vraie pour le Ker). Donc les faisceaux images et noyaux des $\{f_*\mathcal{F}_i \rightarrow f_*\mathcal{F}_{i+1}\}$ sont aussi quasi-cohérents. De plus le quotient de deux faisceaux quasi-cohérents $\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$ est quasi cohérent et vaut exactement $\frac{\widetilde{M}}{\widetilde{N}}$ (on le vérifie sur les tiges). Finalement les quotients $R^i f_*\mathcal{F}$ sont quasi-cohérents et leurs sections globales sont exactement les $H^i(X, \mathcal{F})$. \square

Prouvons (i) : c'est immédiat puisque les sections globales à gauche et à droite sont les $\bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \mathbf{C} \cdot \chi^m$. Suivant les indications de mon directeur de stage, montrons que c'est un fait général : f étant propre et $\mathcal{O}_{X'}$ cohérent sur X' , un théorème difficile (EGA III, 3.2.1) affirme que $B = \Gamma(\mathcal{O}_{X'}, X')$ est un module de type fini sur A . Mais f est birationnel donc les corps de fonctions $\text{Frac } A$ et $\text{Frac } B$ sont égaux et B y est entier sur A . Or les variétés toriques sont normales, donc en particulier A intégralement clos dans son corps des fractions (en effet $\text{Spec } A$ normal entraîne A normal). Donc $A = B$.

Le théorème de finitude est plus simple quand f est projectif, montrons qu'on est dans ce cas. En effet on sait désingulariser une variété torique par une suite d'éclatements (d'après [Oda88] I.7). De plus on ne s'intéresse qu'aux éventails Δ provenant de polyèdres convexes, or on a vu qu'une telle variété $X(\Delta)$ est équipée d'un faisceau ample. Reste à montrer :

Proposition 11.10 *Soit X noethérien et \mathcal{I} un faisceau d'idéaux. Alors si X est équipé d'un faisceau \mathcal{L} ample, l'éclatement $\widetilde{X}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}} X$ est un morphisme projectif.*

Démonstration L'éclatement $\widetilde{X}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}} X$ en le faisceau d'idéaux \mathcal{I} est défini par **Proj** $(\text{Rees}^{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\pi_{\mathcal{I}}} X$ où $\text{Rees}^{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X$ est la \mathcal{O}_X -algèbre graduée localement libre $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{I}^n$.

Ici on voudrait factoriser $\pi_{\mathcal{I}}$ par une immersion fermée g :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_{\mathcal{I}} & \xrightarrow{g} & \mathbf{P}_X^{N+1} \\ & \searrow \pi_{\mathcal{I}} & \downarrow \pi \\ & & X \end{array}$$

\mathcal{L} étant ample, il existe un m assez grand tel que

d'où en tensorisant par $\mathcal{L}' := \mathcal{L}^{-m}$,

car le produit tensoriel est exact à droite, soit

d'où la surjection d' \mathcal{O}_X -algèbres localement libres graduées

qui fournit une X -immersion fermée

$$\mathcal{O}_X^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{L}^{\otimes m} \otimes \mathcal{I}$$

$$\mathcal{L}' \otimes \mathcal{O}_X^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{I}$$

$$\mathcal{L}'^{N+1} \twoheadrightarrow \mathcal{I}$$

$$\text{Sym}^\bullet(\mathcal{L}'^{N+1}) \twoheadrightarrow \text{Rees}^{\mathcal{I}} \mathcal{O}_X$$

$$\widetilde{X}_{\mathcal{I}} \xrightarrow{g} \mathbf{P}(\mathcal{L}'^{N+1})$$

En effet quand on a une surjection de \mathcal{O}_X -algèbres graduées $\mathcal{A}^\bullet \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B}^\bullet$ engendrées en degré 1, l'immersion fermée se lit au dessus de chaque ouvert affine $U = \text{Spec } R$ de X trivialisant \mathcal{A} et \mathcal{B} .

On y a une surjection de R -algèbres graduées $A^\bullet \xrightarrow{\varphi} B^\bullet$. Déjà, cela définit bien un morphisme $\text{Proj } B^\bullet \rightarrow \text{Proj } A^\bullet$: celui est défini *a priori* sur l'ouvert U_φ des $\mathfrak{p} \in \text{Proj } B^\bullet$ ne contenant pas $\varphi(A^+)$ l'image de $A^+ = \sum_{i>0} A^i$, mais par surjectivité de φ $U_\varphi = \text{Proj } B^\bullet$. Il ne reste plus qu'à observer que les

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Spec } B_{(\varphi(f))} & \xrightarrow{\varphi} & \text{Spec } A_{(f)} \\ & \nearrow \sim & & & \searrow \sim \\ (D_+(\varphi(f)), \mathcal{O}_{\text{Proj } B^\bullet}|_{D_+(\varphi(f))}) & & & & (D_+(f), \mathcal{O}_{\text{Proj } A^\bullet}|_{D_+(f)}) \end{array}$$

sont des immersions fermées au dessus de R .

Enfin, \mathcal{L}' étant un faisceau inversible, $\mathbf{P}(\mathcal{L}'^{N+1})$ est isomorphe à \mathbf{P}_X^N au dessus de X par [Har73] II.7.9. \square

(ii) résulte du corollaire 7.12 du théorème de Demazure : en effet $\psi(\mathcal{O}_{X'})$ est plate donc convexe et le support de l'éventail $|\Delta'| = |\sigma|$ est convexe.

12 Théorie de l'intersection

12.1 Théorème de Riemann-Roch

Bien compris au moins pour $X = P_{\mathbf{C}}^n \rightarrow \mathbf{C}$: [Ser66] pour la construction du produit d'intersection, [BT82] pour les définitions "différentielles" des classes de Chern (qui se transpose formellement [Gro58] aux cycles algébriques) et le calcul [M2] sur le fibré tangent de $P_{\mathbf{C}}^n$, [Har92] pour l'anneau de Chow de $X = P_{\mathbf{C}}^n$ égal à $\mathbf{Z}[h]/h^{n+1}$ ([M2], en admettant [Har73] III.9.8 pour que la projection sur un hyperplan projectif soit rationnellement équivalente), [Har73] pour $K^\circ(X) = K(X)$ [M2], [BS58] §7 pour l'énoncé général du théorème et §9 pour la preuve [M2] dans le cas de $P_{\mathbf{C}}^n \rightarrow \mathbf{C}$.

Références

- [BB00] M. BRION et L. BONAVERO (éds.) – *école d’été de l’institut fourier*, 2000.
- [Bri94] M. BRION – « Points entiers dans les polytopes convexes », *Séminaire Bourbaki*, 1993-94, **46^e année, n° 780** (1993-94), p. 1–21.
- [BS58] A. BOREL et J.-P. SERRE – « Le théorème de riemann-roch », *Bulletin de la SMF* **86** (1958), p. 97–136.
- [BT82] R. BOTT et L. W. TU – *Differential forms in algebraic topology*, Springer, 1982.
- [CLS10] D. COX, J. LITTLE et H. SCHENCK – *Toric varieties*, à paraître, 2010.
- [Dan78] V. DANILOV – « The geometry of toric varieties », *Russian mathematical surveys* **33 :2** (1978), p. 97–154.
- [Deb05] O. DEBARRE – « Polytopes convexes », *Rentrée de majeure, École polytechnique*, 2005.
- [Eis04] D. EISENBUD – *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer, sep 2004.
- [Ful93] W. FULTON – *Lectures on toric varieties*, Princeton, 1993.
- [Ful98] — , *Intersection theory*, Springer, 1998.
- [GH78] P. GRIFFITHS et J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley Interscience, 1978.
- [God73] R. GODEMENT – *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1973.
- [Gro58] A. GROTHENDIECK – « Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections », *Anneaux de Chow et applications, Séminaire Claude Chevalley* **3** (1958), p. 1–36.
- [Har73] R. HARTSHORNE – *Algebraic geometry*, Springer, 1973.
- [Har92] J. HARRIS – *Algebraic geometry*, Springer, 1992.
- [Isa00] J. ISAÏA – *Classes de Chern (d’après Grothendieck)*, mémoire de DEA encadré par Daniel Perrin, Université Paris 11, 2000.
- [Lan02] S. LANG – *Algebra*, third éd., Springer, 2002.
- [Lee00] J. M. LEE – *Topological manifolds*, Springer, 2000.
- [Oda88] T. ODA – *Convex bodies and toric varieties*, Springer, 1988.
- [Per03] D. PERRIN – *Géométrie algébrique*, CNRS éditions, 2003.
- [Pom93] J. E. POMMERSHEIM – « Toric varieties, lattice points and dedekind sums », *Math. Ann.* **295** (1993), p. 1–24.
- [Ser66] J.-P. SERRE – *Algèbre locale, multiplicités*, Lecture notes in mathematics, Springer, 1966.
- [Sta04] R. P. STANLEY – *Combinatorics and commutative algebra*, Springer, 2004.