



Un nouveau formalisme pour la loi de Rice

Jean-Marie Nicolas

2018D003

mai 2018

Département Image, Données, Signal
Groupe IMAGES : *Image, Modélisation,
Analyse, GEométrie, Synthèse*



Un nouveau formalisme pour la loi de Rice

Jean Marie NICOLAS

Télécom ParisTech, département IDS, 46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13
Tél : 01 45 81 81 29, Fax : 01 45 81 37 94, Emel : jean-marie.nicolas@telecom-paristech.fr

Table des matières

1	Formalisme traditionnel	4
1.1	Expression et propriétés de la loi de Rice	4
1.1.1	La loi de Rice	4
1.1.2	Moments et coefficient de variation	5
1.1.3	Comportement à l'origine et à l'infini	7
1.1.4	Utilisation des fonctions de Meijer et comportement asymptotique	8
1.2	Estimation des paramètres	10
1.2.1	Estimation des paramètres : méthode des moments	11
1.2.2	Estimation des paramètres : méthode du maximum de vraisemblance	11
1.2.3	Estimation des paramètres : cas asymptotique	13
2	Nouveau formalisme pour la loi de Rice	13
2.1	Définition, propriétés et comportement asymptotique	13
2.2	Estimation des paramètres	16
2.2.1	Estimation des paramètres : méthode des moments	16
2.2.2	Estimation des paramètres : méthode du maximum de vraisemblance	16
2.2.3	Estimation des paramètres : nouvelle méthode à partir du coefficient de variation	17
2.2.4	Estimation des paramètres : nouvelle méthode à partir de la moyenne arithmétique (moment d'ordre 1) et de la moyenne harmonique (moment d'ordre -1)	18
2.3	Variance de l'estimateur du coefficient de variation	20
2.3.1	Variance d'une grandeur fonction des moments : l'approche de Kendall et Stuart	20
2.3.2	Variance de l'estimateur du coefficient de variation en fonction des moments	21
2.4	Expérimentation	22
3	Application à la sélection des Permanent Scatterers (PS)	24
3.1	Le coefficient de variation d'une loi de Rice et le critère de Ferreti	24
3.2	Comparaison avec le coefficient de variation de la loi de Rayleigh-Nakagami	26
4	Conclusions	28
A	La fonction de Kummer (fonction hypergéométrique conflente ${}_1F_1$) : définition et propriétés élémentaires	29
A.1	Définition	29
A.2	Le cas $b = 1$ (loi de Rice)	30
B	Réécritures de la fonction de Kummer	31
B.1	Premier cas particulier : $a \in \mathbb{N}$ et $b = 1$	31
B.2	Second cas particulier : $a = \frac{2p+1}{2}$ et $b \in \mathbb{N}$	32
C	Les fonctions de Marcum [9]	34

La loi de Rice, introduite dans le monde du radar et utilisée aussi dans d'autres domaines d'imagerie (comme l'IRM), permet de modéliser la rétrodiffusion d'une cible en présence d'un bruit additif gaussien circulaire. Son formalisme n'est guère trivial car il fait intervenir des fonctions de Bessel modifiées et la fonction de Kummer, c'est à dire la fonction hypergéométrique confluyente : que ce soit l'une ou l'autre de ces fonctions, il faut reconnaître qu'elles ne sont guère familières à un scientifique du XXI^{ème} siècle. Mieux, nous verrons qu'au sujet de ces fonctions, des erreurs typographiques que l'on trouve dans certains ouvrages de références peuvent conduire à des résultats totalement erronés : aussi ce document tente dans la mesure du possible de n'utiliser que les ouvrages les plus incontournables et les plus fiables, en particulier les 5 volumes du "Bateman Manuscript Project" parus au milieu du XX^{ème} siècle et qui couvrent avec une grande exhaustivité les "fonctions spéciales" qui ont foisonné à la fin du XIX^{ème} siècle et au début du XX^{ème} siècle.

Peut être à cause de ce formalisme déroutant, nos connaissances sur cette loi n'ont guère évolué, ce qui peut s'avérer regrettable puisque, tant en imagerie radar qu'en imagerie IRM, certains phénomènes étudiés nécessitent en pratique une bonne connaissance de cette loi. Mieux, nous verront qu'il est possible de modifier les paramètres de cette loi pour lui donner une allure familière aux praticiens du bruit multiplicatif, c'est à dire une loi dotée de deux paramètres, le premier étant un facteur d'échelle et le second un facteur de forme.

L'objectif de cette note est donc d'une part d'analyser la loi de Rice selon une méthodologie plus complète que celle que l'on trouve actuellement dans les articles et ouvrages de référence, et d'autre part d'apporter à cette loi un éclairage nouveau par un simple changement de variable, ce qui ouvre certaines perspectives à son utilisation courante, comme dans le cas de l'analyse des PS (Permanent Scatterers) rencontrés dans les piles multi-temporelles de l'imagerie radar.

Insistons aussi sur le choix de fonctions effectué dans cette étude de la loi de Rice : les seules fonctions "spéciales" utilisées seront les fonctions de Bessel modifiées et la fonction de Kummer. Il ne sera pas fait usage des polynômes de Laguerre, ni de la fonction de Marcum (même si celle ci fait l'objet de l'annexe C), autre formalisme possible pour la loi de Rice et qui est celui de Wikipedia par exemple. Par ailleurs, même si certains résultats (limites à l'infini, développement limité à l'origine, ...) concernant les fonctions de Bessel modifiées ou la fonction de Kummer peuvent être considérés comme "classiques" par les bons auteurs, ils seront rappelés au fil du texte, quitte à commettre le crime "lèse Bourbaki" cher à Serge Lang[8]. De plus, les annexes A et B sont dédiées à la fonction de Kummer et donnent le minimum d'information nécessaire permettant de jongler avec cette fonction spéciale qui –rassurons tout de suite le lecteur– se ramène la plupart du temps à des expressions mettant en jeu des fonctions moins ésotériques.

Notons enfin que le paragraphe "Conclusion" synthétise en une page unique les éléments essentiels à retenir de cette nouvelle approche de la loi de Rice.

1 Formalisme traditionnel

1.1 Expression et propriétés de la loi de Rice

1.1.1 La loi de Rice

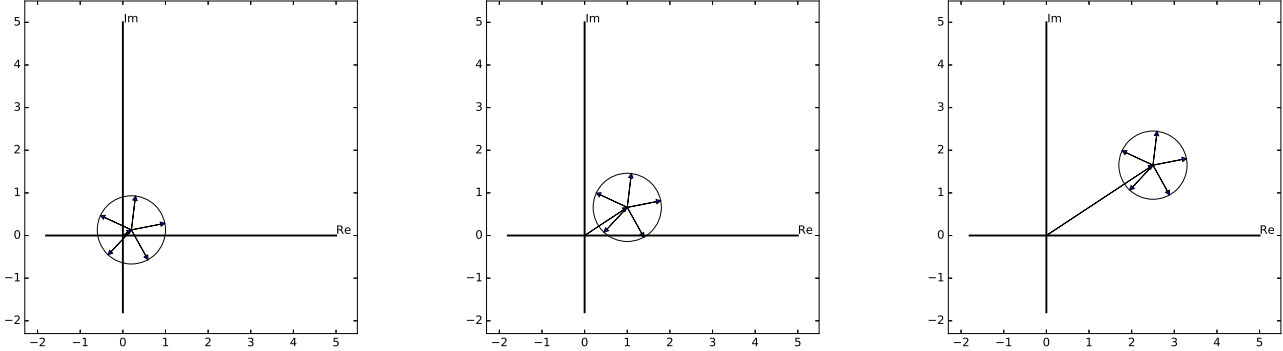


FIGURE 1 – Trois catégories de rétrodiffusion d’une cible déterministe associée à un bruit de chatoiement additif (amplitude suivant une loi de Rayleigh, phase aléatoire) représentées dans le plan complexe. Pour ces trois cas, la phase de cette cible reste constante, seule l’amplitude change. A gauche l’amplitude de la cible déterministe est petite vis à vis du bruit : on observe globalement dans le plan complexe un résultat très proche d’un chatoiement pleinement développé, la phase en particulier prenant un caractère totalement aléatoire. A droite l’amplitude de la cible déterministe est grande vis à vis du bruit : la rétrodiffusion de la cible est alors la contribution majeure, le bruit modifiant l’amplitude et la phase, celle-ci restant à peu près dans la direction de la phase de la cible. Au centre le cas intermédiaire montre que les deux phénomènes jouent des rôles comparables, ce qui complique l’interprétation, en particulier celle de la phase.

La loi de Rice est bien connue en imagerie cohérente (radar, sonar, échographie médicale) puisqu’elle traite le cas d’un signal fondé sur la rétrodiffusion d’une cible ponctuelle déterministe, caractérisée par une amplitude et une phase constantes, et bruité additivement par du chatoiement pleinement développé (voir les trois illustrations de ce phénomène figure 1). Si on note μ_C le paramètre de rétrodiffusion de la cible, et si on suppose que le chatoiement pleinement développé s’exprime comme une loi de Rayleigh $\mathcal{R}[\mu]$, on a alors [6, 13] :

$$\mathcal{RC}[\mu, \mu_C](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\frac{x^2 + \mu_C^2}{\mu^2}} I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right) \quad (1)$$

I_0 étant la fonction de Bessel modifiée de première espèce d’ordre 0. Notons que l’on retrouve cette expression dans de nombreux travaux dédiés à la détection d’un signal radar noyé dans du bruit, par exemple dans le rapport de Marcum ([9], 1948).

La figure 2 donne quelques exemples de cette loi, qui, comme nous le verrons tend vers la loi de Rayleigh si $\mu_C \rightarrow 0$ et vers la loi normale (centrée en μ_C) si $\mu_C \rightarrow \infty$.

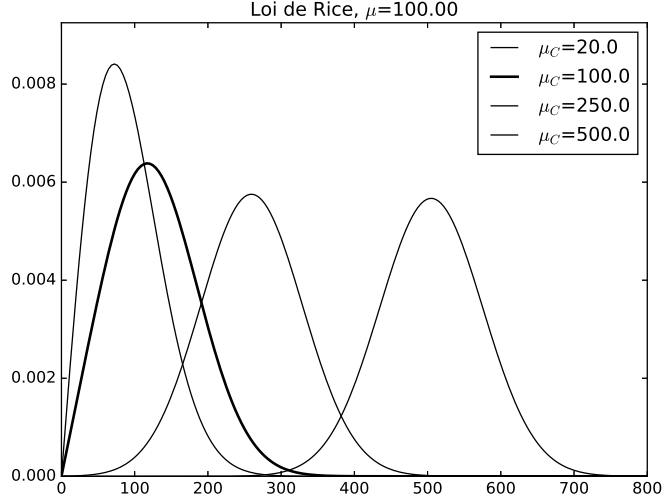


FIGURE 2 – Lois de Rice pour un chatoisement défini par $\mu = 100$. Pour $\mu_C \rightarrow 0$, la loi de Rice tend vers une loi de Rayleigh. Pour $\mu_C \gg \mu$, la loi de Rice présente un mode tendant vers μ_c et sa largeur, liée au paramètre du chatoisement μ , devient à peu près constante (ici $\mu = 100$: l'écart type de la loi de Rayleigh suivie par le chatoisement est alors ~ 46.3).

Grâce aux tables de transformées de Mellin¹, il est possible d'en calculer la fonction caractéristique de deuxième espèce, ce qui donne :

$$\phi(s) = \mu^{s-1} e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \Gamma\left(1 + \frac{s-1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \quad (2)$$

${}_1F_1$ représentant la fonction hypergéométrique confluyente, appelée aussi fonction de Kummer (qui fait l'objet de l'annexe A).

1.1.2 Moments et coefficient de variation

L'expression de la fonction caractéristique de deuxième espèce (relation 2) permet d'obtenir l'expression analytique des premiers moments² :

$$\begin{cases} m_1 = \mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \\ m_2 = \mu^2 e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} {}_1F_1\left(2; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \\ m_r = \mu^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} {}_1F_1\left(1 + \frac{r}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \end{cases} \quad (3)$$

1. Plus précisément la relation (24) page 364 du Bateman [4] associée aux propriétés élémentaires de la transformée de Mellin.

2. On rappelle que $\Gamma(3/2) = \frac{\Gamma(1/2)}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

En utilisant certaines propriétés de la fonction ${}_1F_1(p; 1; x)$ avec $p \in \mathbb{N}$ (voir l'annexe B.1 consacrée à un cas particulier de cette fonction), on montre que :

$${}_1F_1(2; 1; x) = (x + 1) e^x$$

on en déduit :

$$m_2 = \mu^2 + \mu_C^2 \quad (4)$$

ce qui simplifie l'expression de m_2 . De même on a une expression polynomiale du moment d'ordre 4 :

$$m_4 = 2\mu^4 + 4\mu_C^2\mu^2 + \mu_C^4 \quad (5)$$

En revanche, la réécriture de l'expression de m_1 nécessite d'introduire des fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordre p : $I_p(x)$, et on a (annexe B.2) :

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) \\ &= \mu \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}} \left(\left(1 + \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) I_0\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right) + \frac{\mu_C^2}{\mu^2} I_1\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right) \right) \end{aligned}$$

La figure 3 montre l'allure de la fonction ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)$ dans le cas $\mu = 1$.

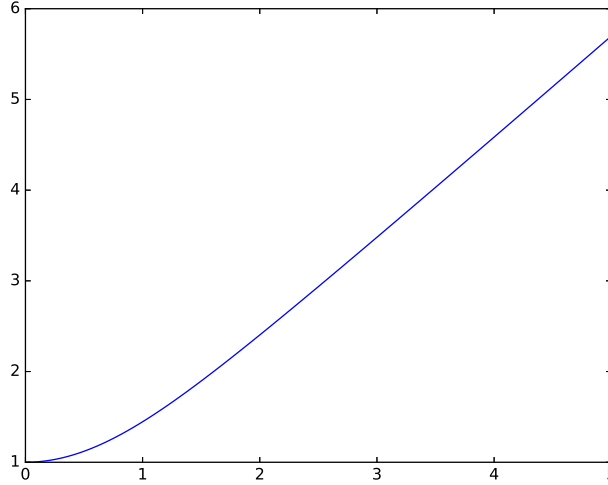


FIGURE 3 – Loi de Rice : étude du moment d'ordre 1. Allure de la fonction ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)$ dans le cas $\mu = 1$. Pour $\mu_c \rightarrow 0$, on retrouvera la loi de Rayleigh du chatoiement ($m_1 = \mu \frac{\sqrt{\pi}}{2}$). Pour $\mu_c \rightarrow \infty$ avec μ fini, on aura $m_1 \rightarrow \mu_C$.

Il est formellement possible d'avoir une expression du coefficient de variation :

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 e^{\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} {}_1F_1\left(2; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)}{\pi \left({}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)\right)^2} - 1} \quad (6)$$

que l'on peut aussi réécrire (voir la relation 44 de l'annexe A.1 ainsi que l'annexe B.2) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 e^{\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} \left(1 + \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right)}{\pi \left(\left(1 + \frac{\mu_C^2}{\mu^2}\right) I_0\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right) + \frac{\mu_C^2}{\mu^2} I_1\left(\frac{\mu_C^2}{2\mu^2}\right)\right)^2} - 1} \quad (7)$$

L'expression obtenue mélange de façon très étroite les deux paramètres μ et μ_C sans que l'on puisse dégager un paramètre d'échelle (lié au mode par exemple) et un paramètre de forme.

Notons que l'on ne peut trouver les expressions analytiques des log-moments (il faudrait pour cela –par exemple– savoir dériver la fonction hypergéométrique ${}_1F_1$ par rapport à son premier paramètre).

1.1.3 Comportement à l'origine et à l'infini

En analysant l'expression du coefficient de variation sous forme de fonctions de Bessel modifiées (relation 7), et connaissant certaines propriétés fondamentales des fonctions de Bessel modifiées au voisinage de l'origine :

$$\begin{aligned} I_0(x) &\simeq 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ I_1(x) &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

on retrouve un comportement de loi de Rayleigh en l'absence de cible ($\mu_C = 0$) puisque l'on a :

$$\lim_{\mu_C \rightarrow 0} \gamma = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} \simeq 0.52272$$

c'est à dire l'expression du coefficient de variation d'une loi de Rayleigh.

Le comportement asymptotique pour de grandes valeurs de μ_C (comparativement à μ) peut s'obtenir à l'aide des propriétés asymptotiques des fonctions de Bessel modifiées à l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_\nu(x) e^x \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}$$

ce qui permet de déduire la relation :

$$\lim_{\mu_C \rightarrow \infty} \gamma = 0$$

cette dernière relation ne permettant pas de savoir comment la loi de Rice se comporte pour $\mu_C \rightarrow \infty$. Pour cela, il est possible de réécrire les fonctions de Bessel modifiées de première espèce sous forme de fonction de Meijer, cette nouvelle écriture permettant d'analyser correctement le comportement asymptotique de la loi de Rice : c'est l'objet du paragraphe suivant.

1.1.4 Utilisation des fonctions de Meijer et comportement asymptotique

On trouve dans le Bateman ([4],p 380) la relation suivante :

$$e^{-x} I_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G_{1,2}^{1,1} \left(2x \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ \nu \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ -\nu \end{array} \right. \right) \quad (8)$$

ce qui permet de réécrire la définition de la loi de Rice (relation 1) comme suit :

$$\mathcal{RC} [\mu, \mu_C] (x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\frac{x^2 + \mu_C^2}{\mu^2}} e^{\frac{2\mu_C x}{\mu^2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} G_{1,2}^{1,1} \left(\frac{4\mu_C x}{\mu^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$$

c'est à dire

$$\mathcal{RC} [\mu, \mu_C] (x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\mu} e^{-\frac{(x-\mu_C)^2}{\mu^2}} \frac{2x}{\mu} G_{1,2}^{1,1} \left(\frac{4\mu_C x}{\mu^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right)$$

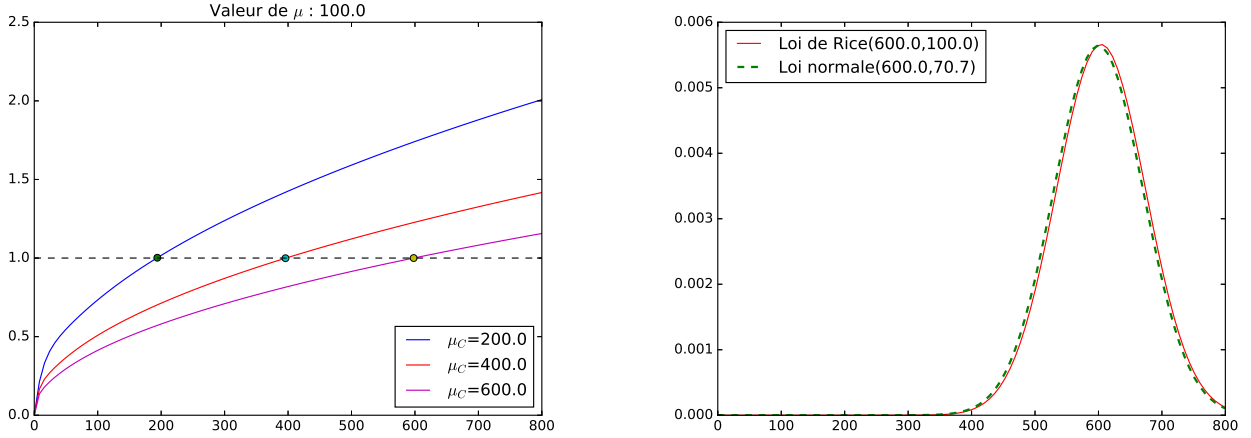


FIGURE 4 – A gauche : Allure de la composante Meijer de la densité de probabilité de la loi de Rice (fonction $g(x)$, relation 9) tracée pour différentes valeurs de μ_C . On observe qu'en $x = \mu_C$, la valeur de cette fonction est pratiquement égale à 1 et qu'en cette valeur la fonction est à peu près linéaire. A droite : Comparaison de la loi de Rice $\mathcal{RC} [\mu, \mu_C]$ et de la loi normale $\mathcal{N} [\mu_C, \sigma]$ telle que $\sigma = \frac{\mu}{\sqrt{2}}$ pour $\mu_C = 600$ et $\mu = 100$. Les deux lois sont très proches car $\mu_C \gg \mu$

La curiosité de cette dernière expression tient en ce que la densité de probabilité de la loi de Rice s'exprime sous une forme multiplicative impliquant deux fonctions :

— une première fonction représentant une loi normale :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}\mu} e^{-\frac{(x-\mu_C)^2}{\mu^2}}$$

— une fonction $g(x)$ exprimée dans le formalisme des fonctions de Meijer :

$$g(x) = \frac{2x}{\mu} G_{1,2}^{1,1} \left(\frac{4\mu_C x}{\mu^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array} \right. \right) \quad (9)$$

et qui, sous cette forme littérale, est difficile à interpréter. On peut la tracer pour la valeur $\mu = 100$ et différentes valeurs de μ_C : on observe ainsi (figure 4) que pour chaque courbe la valeur de cette fonction est pratiquement égale à 1 au point $x = \mu_C$ et que l'allure de la fonction g est quasiment linéaire avec une pente d'autant plus faible que μ_C est grand vis à vis de μ . On en déduit que la première fonction (la loi normale), qui a son mode en $\mu = \mu_C$, n'est que peu modifiée par cette multiplication : simplement la forme en cloche de la loi normale perd légèrement de sa symétrie.

Si on veut justifier cette approche expérimentale, il faut étudier le comportement de cette fonction $g(x)$ et de sa dérivée pour $x = \mu_C$. On définit alors une nouvelle fonction, $h(\mu_C)$ telle que :

$$h(\mu_C) = g(x)|_{x=\mu_C} = \frac{2\mu_C}{\mu} G_{1,2}^{1,1} \left(\frac{4\mu_C^2}{\mu^2} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} ; \cdot \right. \right)$$

d'où, en définissant une nouvelle variable $z = \left(\frac{2\mu_C}{\mu}\right)^2$, la fonction \tilde{h} :

$$\tilde{h}(z) = \sqrt{z} G_{1,2}^{1,1} \left(z \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} ; \cdot \right. \right)$$

En utilisant la propriété de la relation 8, on peut alors écrire :

$$\tilde{h}(z) = \sqrt{\pi} \sqrt{z} e^{-\frac{z}{2}} I_0\left(\frac{z}{2}\right)$$

Pour z tendant vers l'infini, le Gradshteyn ([7], relation 8.451.5 prise à l'ordre 0) permet d'écrire :

$$I_0(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi} \sqrt{z}}$$

c'est à dire :

$$I_0\left(\frac{z}{2}\right) \sim \frac{e^{\frac{z}{2}}}{\sqrt{\pi} \sqrt{z}}$$

d'où :

$$\tilde{h}(z) \sim 1$$

On vient de démontrer que la valeur limite de la fonction $g(x)$ en $x = \mu_C$ est bien la valeur 1, ce que laissent entendre les expérimentations de la figure 4.

Pour le calcul de la dérivée, en utilisant les propriétés élémentaires des fonctions de Meijer, on peut réécrire $g(x)$ sous la forme :

$$g(x) = \frac{\mu}{2\mu_C} G_{1,2}^{1,1} \left(\frac{4\mu_C x}{\mu^2} \left| \begin{array}{c} \frac{3}{2} \\ 1 \end{array} ; \cdot \right. \right) \quad (10)$$

ce qui permet d'avoir sa dérivée en utilisant les propriétés de la dérivée d'une fonction de Meijer, ce qui donne :

$$g'(x) = \frac{2}{\mu} G_{2,3}^{1,2} \left(\frac{4\mu_C x}{\mu^2} \left| \begin{array}{c} -1, \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} ; \cdot \right. \right)$$

On a donc la valeur de cette dérivée en $x = \mu_C$ sous la forme suivante :

$$\frac{2}{\mu} G_{2,3}^{1,2} \left(\frac{4\mu_C^2}{\mu^2} \middle| \begin{array}{l} -1, \frac{1}{2} \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{l} \cdot \\ 0, 0 \end{array} \right)$$

Or on trouve dans le Bateman ([4], page 379) une relation spécifique aux fonctions de Meijer du type $G_{p,q}^{1,p}$ qui permet d'écrire :

$$g'(x) = \frac{2}{\mu} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) {}_2F_2\left(2, \frac{1}{2}; 1, 1; -\frac{4\mu_C x}{\mu^2}\right)$$

d'où la valeur en $x = \mu_C$:

$$\frac{2}{\mu} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) {}_2F_2\left(2, \frac{1}{2}; 1, 1; -\frac{4\mu_C^2}{\mu^2}\right)$$

Sous cette forme plus usitée dans la littérature actuelle que celle utilisant les fonctions de Meijer, on trouve alors des relations permettant de traiter le cas asymptotique de notre fonction $g(x)$. En particulier l'article [12] donne la relation

$${}_2F_2(a, d; b, c; x) \sim C x^\theta e^x \quad |x| \rightarrow \infty \quad \text{avec } \theta = a + d - b - c \text{ et } C = \frac{\Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(a) \Gamma(b)}$$

ce qui dans notre cas permet d'écrire :

$${}_2F_2\left(2, \frac{1}{2}; 1, 1; -x\right) \sim x^{\frac{1}{2}} e^{-x}$$

d'où la relation recherchée :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$$

Ceci explique comment la fonction $g(x)$ a une allure de fonction constante pour des valeurs de μ_C suffisamment grandes vis à vis de μ .

De cette analyse à la fois expérimentale et théorique, on peut conclure que pour des valeurs de μ_C assez grandes vis à vis du paramètre μ , la loi de Rice s'apparente à une loi normale, centrée en μ_C et d'écart type $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$.

1.2 Estimation des paramètres

Pour retrouver les paramètres μ et μ_C , il est classique d'invoquer la méthode des moments et la méthode du maximum de vraisemblance. Cependant les articles habituellement cités dans la littérature (voir par exemple [5] et [14]) font l'hypothèse que le chatoisement pleinement développé est connu : tout revient à rechercher l'amplitude de la cible déterministe.

Si l'on cherche à la fois les caractéristiques du chatoisement et de la cible, il faut donc reprendre ces deux approches (méthodes des moments et du maximum de vraisemblance).

1.2.1 Estimation des paramètres : méthode des moments

En utilisant le système des moments d'ordre 2 et 4 (équations 4 et 5) :

$$\begin{cases} m_2 = \mu^2 + \mu_C^2 \\ m_4 = 2\mu^4 + 4\mu_C^2\mu^2 + \mu_C^4 \end{cases}$$

on obtient facilement les expressions analytiques des estimées des paramètres : $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$ grâce aux deux relations suivantes :

$$\hat{\mu}_C = \left(2m_2^2 - m_4\right)^{\frac{1}{4}} \quad (11)$$

$$\hat{\mu} = \left(m_2 - \left(2m_2^2 - m_4\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Comme dans le cas de la loi de Rayleigh-Nakagami, on n'a d'expression explicite qu'en prenant les moments d'ordre 2 et 4, l'utilisation des moments d'ordre 1 et 2 ne permettant qu'une expression implicite des paramètres de la loi.

1.2.2 Estimation des paramètres : méthode du maximum de vraisemblance

Cette méthode requiert la dérivation selon chaque paramètre du logarithme de la densité de probabilité. Connaissant l'expression de la loi de Rice (relation 1), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log(\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]) = 2 \frac{(x^2 + \mu_C^2 - \mu^2) I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right) - 2\mu_C x I_1\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)}{\mu^3 I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)} \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_C} \log(\mathcal{RC}[\mu, \mu_C]) = 2 \frac{-\mu_C I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right) + x I_1\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)}{\mu^2 I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)} \quad (14)$$

Si on dispose de N échantillons, et en supposant que les paramètres optimaux existent et sont notés $\hat{\mu}$ et $\hat{\mu}_C$, la relation 14 permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{\mu}_C I_0\left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2}\right)}{I_0\left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2}\right)} \right) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i I_1\left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2}\right)}{I_0\left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2}\right)} \right) \quad (15)$$

ce qui, après simplifications, permet d'écrire :

$$\hat{\mu}_C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i I_1\left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2}\right)}{I_0\left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2}\right)} \right) \quad (16)$$

L'utilisation de cette dernière relation dans l'expression 13 permet d'obtenir la relation :

$$\sum_{i=1}^N x_i^2 + N(\hat{\mu}_C^2 - \mu^2) = 2N\hat{\mu}_C^2$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 &= \hat{\mu}_C^2 + \hat{\mu}^2 \\ &\Leftrightarrow \\ m_2 &= \hat{\mu}_C^2 + \hat{\mu}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

et au final l'estimée de μ (connaissant $\hat{\mu}_C$ par la relation 16) :

$$\hat{\mu} = \sqrt{m_2 - \hat{\mu}_C^2} \quad (18)$$

expression dont la forme est comparable à celle du moment d'ordre 2 (formule 4).

On a ainsi trouvé deux relations, une relation implicite (16) et une relation explicite (18), ce qui permet de formuler un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_C &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i I_1 \left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2} \right)}{I_0 \left(\frac{2\hat{\mu}_C x_i}{\hat{\mu}^2} \right)} \right) \\ \hat{\mu} &= \sqrt{m_2 - \hat{\mu}_C^2} \end{aligned}$$

la première étant une simple moyenne pondérée par la fonction :

$$\frac{I_1(y)}{I_0(y)}$$

définie pour $y \in \mathbb{R}^+$, à valeurs dans $[0, 1]$, monotone et strictement décroissante. Elle est illustrée figure 5. Il est même possible d'en avoir un minorant et un majorant ([1]) :

$$e^{-\frac{1}{y}} \leq \frac{I_1(y)}{I_0(y)} \leq e^{-\frac{0.4407}{y}}$$

Au vu de l'allure sympathique de cette fonction, il est possible de proposer un schéma itératif pour estimer les paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance :

Etape 0 : calcul du moment d'ordre 2 et initialisation des valeurs μ et μ_C à partir de la relation 18, ce qui donne :

$$\mu_0 = \mu_{C,0} = \sqrt{\frac{m_2}{2}}$$

Etape n : connaissant les valeurs obtenues à l'étape précédente "n-1" : μ_{n-1} et $\mu_{C,n-1}$, obtenir les valeurs μ_n et $\mu_{C,n}$ grâce aux relations 18 et 16 :

$$\mu_{C,n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i I_1 \left(\frac{2\mu_{C,n-1} x_i}{\mu_{n-1}^2} \right)}{I_0 \left(\frac{2\mu_{C,n-1} x_i}{\mu_{n-1}^2} \right)} \right) \quad (19)$$

$$\mu_n = \sqrt{m_2 - \mu_{C,n}^2} \quad (20)$$

Test : appliquer un test de fin de convergence. S'il n'est pas vérifié, réitérer l'étape précédente.

Cette méthode s'avère correcte dans la majorité des cas (moins d'une vingtaine d'étapes pour $\mu_C > \mu$) : il faut simplement noter une convergence d'autant plus lente que $\mu_C \ll \mu$.

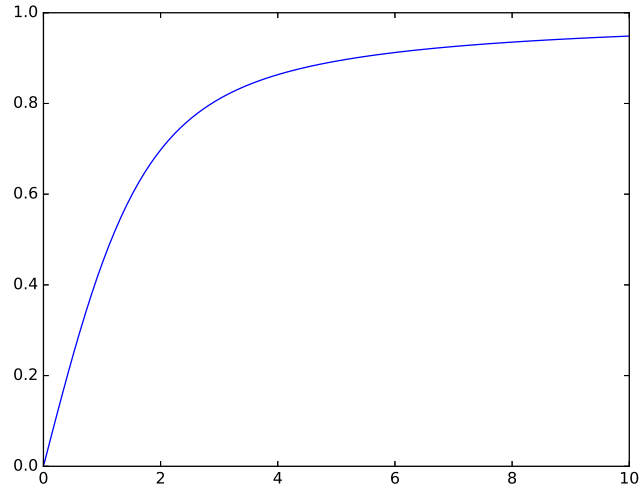


FIGURE 5 – Comportement de la fonction $\frac{I_1(y)}{I_0(y)}$, les fonctions I_0 et I_1 étant des fonctions de Bessel modifiées de première espèce. C’est cette fonction qui est utilisée dans la méthode du maximum de vraisemblance pour calculer une moyenne pondérée. On voit alors que le rôle de cette fonction est de minimiser les effets des valeurs proches de l’origine au bénéfice des valeurs élevées.

1.2.3 Estimation des paramètres : cas asymptotique

Si μ_C est suffisamment grand vis à vis de μ , nous avons vu au paragraphe 1.1.4 que la loi de Rice s’apparente fortement à une loi normale centrée en μ_C et d’écart type $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$. En se plaçant donc dans le cadre de l’estimation des paramètres d’une loi normale, on en déduit directement les deux paramètres μ et μ_C :

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_C &= m_1 \\ \hat{\mu} &= \sqrt{2(m_2 - m_1^2)}\end{aligned}$$

2 Nouveau formalisme pour la loi de Rice

2.1 Définition, propriétés et comportement asymptotique

Plutôt que de prendre comme paramètres les deux variables μ_C (pour la cible) et μ (pour le chatoiement), il est judicieux de définir d’une part le chatoiement (paramètre μ) et d’autre part un paramètre λ tel que :

$$\lambda = \frac{\mu_C}{\mu}$$

La relation 1 devient alors :

$$\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\left(\frac{x^2}{\mu^2} + \lambda^2\right)} I_0\left(2\lambda \frac{x}{\mu}\right) \quad (21)$$

La fonction caractéristique de deuxième espèce s'écrit alors :

$$\mu^{s-1} e^{-\lambda^2} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \lambda^2\right) \quad (22)$$

On remarque alors qu'elle s'exprime comme le produit de deux termes :

— un terme qui ne dépend que de μ

$$\mu^{s-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)$$

et que l'on identifie comme une loi de Rayleigh : c'est la loi de Rayleigh du chaotement pleinement développé de notre modèle ;

— un second terme qui ne dépend que de λ :

$$e^{-\lambda^2} {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \lambda^2\right)$$

Sous cette forme multiplicative, on peut dire que la loi de Rice est la convolution de Mellin d'une loi de Rayleigh ne dépendant que de μ et d'une loi ne dépendant que de λ , notée ici $\mathcal{D}[\lambda](x)$, et décrite uniquement par sa log-fonction caractéristique, donc sous forme de transformée de Mellin inverse :

$$\mathcal{D}[\lambda](x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{-s} e^{-\lambda^2} {}_1F_1\left(1 + \frac{s-1}{2}; 1; \lambda^2\right) ds$$

et dont malheureusement on ne connaît pas la forme analytique.

Dans ce nouveau formalisme, les premiers moments de la loi de Rice sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{cases} m_1 = \mu e^{-\lambda^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right) \\ m_2 = \mu^2 e^{-\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2) \\ m_r = \mu^r e^{-\lambda^2} \Gamma\left(1 + \frac{r}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{r}{2}; 1; \lambda^2\right) \end{cases} \quad (23)$$

et on remarque que le moment d'ordre r est proportionnel à μ^r : μ peut alors s'assimiler à un facteur d'échelle. Cette constatation va avoir une grande conséquence sur le coefficient de variation puisque l'on a alors :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right)\right)^2} - 1} \quad (24)$$

que l'on peut aussi réécrire à l'aide de fonctions de Bessel modifiées de première espèce (voir l'annexe B.2) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 e^{\lambda^2} (1 + \lambda^2)}{\pi \left((1 + \lambda^2) I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2} - 1} \quad (25)$$

On note que le coefficient de variation ne dépend que du paramètre de forme λ : c'est un résultat essentiel de cette approche puisque ceci signifie que la connaissance du coefficient de variation permet de connaître le paramètre de forme λ .

Dans ce nouveau formalisme, les moments d'ordre 2 et 4 se réécrivent sous une forme beaucoup plus simple (grâce aux propriétés des fonctions de Kummer) :

$$\begin{cases} m_2 = \mu^2 (1 + \lambda^2) \\ m_4 = \mu^4 (2 + 4\lambda^2 + \lambda^4) \end{cases}$$

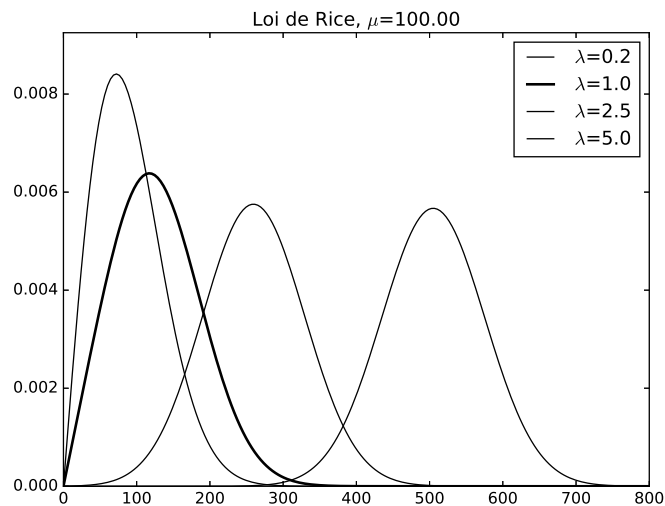


FIGURE 6 – Loi de Rice. Pour $\lambda \rightarrow 0$, la loi de Rice tend vers une loi de Rayleigh (puisque nous avons ici $\mu= 100$. l'écart type de la loi de Rayleigh suivie par le chatouement est alors ~ 46.3) . Pour $\lambda \gg 1$, nous savons que la loi de Rice tend vers une loi normale, dont le mode tend vers $\lambda\mu$ et dont l'écart type σ devient à peu près constant et égale à $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$ (pour $\mu= 100$ on a $\sigma \sim 70.7$).

Pour $\lambda = 0$, sachant que $I_0(x) \rightarrow 1$ pour $x \rightarrow 0$, la relation 21 donne directement une loi de Rayleigh

$$\mathcal{RC}_2 [\mu, \lambda = 0] (x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\frac{x^2}{\mu^2}}$$

Pour λ suffisamment grand vis à vis de μ , en utilisant la formalisation par l'utilisation de fonctions de Meijer (paragraphe 1.1.4), on a :

$$\mathcal{RC}_2 [\mu, \lambda] (x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}\mu} e^{-\frac{(x-\lambda\mu)^2}{\mu^2}}$$

c'est à dire une loi normale centrée en $x = \lambda\mu$ et d'écart type $\frac{\mu}{\sqrt{2}}$.

2.2 Estimation des paramètres

2.2.1 Estimation des paramètres : méthode des moments

A partir des moments d'ordre 2 et 4, la méthode des moments permet d'avoir les expressions analytiques des estimées des paramètres : $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$. On obtient au final :

$$\begin{cases} \hat{\lambda} = \frac{(2m_2^2 - m_4)^{\frac{1}{4}}}{\left(m_2 - (2m_2^2 - m_4)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \hat{\mu} = \left(m_2 - (2m_2^2 - m_4)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

On note au passage que ces expressions permettent de retrouver les solutions 11 et 12 obtenues par la méthode des moments appliquée dans le formalisme initial.

2.2.2 Estimation des paramètres : méthode du maximum de vraisemblance

Connaissant l'expression de la loi de Rice (relation 21), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \log(\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda]) = 2 \frac{(x^2 + \mu^2(\lambda^2 - 1)) I_0\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right) - 2\lambda \frac{x}{\mu} I_1\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)}{\mu^3 I_0\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)} \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log(\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda]) = -2\lambda + \frac{\frac{2x}{\mu} I_1\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)}{I_0\left(\frac{2\lambda x}{\mu}\right)} \quad (27)$$

Si on dispose de N échantillons, et en supposant que les paramètres optimaux existent et sont notés $\hat{\mu}$ et $\hat{\lambda}$, la relation 27 permet d'écrire :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\hat{\mu}} \frac{I_1\left(\frac{2\hat{\lambda} x_i}{\hat{\mu}}\right)}{I_0\left(\frac{2\hat{\lambda} x_i}{\hat{\mu}}\right)} \quad (28)$$

relation obtenue directement, à la différence de la relation identique 16 qui avait nécessité l'exploitation de la relation donnée par la dérivation partielle selon le paramètre μ .

En utilisant cette relation 28, il est alors possible de reformuler la relation 26 sous la forme :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 = \hat{\mu}^2 (1 + \hat{\lambda}^2)$$

ce qui donne une expression explicite pour le paramètre μ analogue à la relation 18 :

$$\hat{\mu} = \sqrt{\frac{m_2}{1 + \hat{\lambda}^2}} \quad (29)$$

En reprenant l'approche itérative du paragraphe 1.2.2, on obtient les estimées de $\hat{\mu}$ et de $\hat{\lambda}$ par le schéma suivant :

Étape 0 : calcul du moment d'ordre 2 et initialisation des valeurs μ et λ avec les valeurs :

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\sqrt{m_2}}{2} \\ \lambda_0 &= 1. \end{aligned}$$

Etape n : connaissant les valeurs obtenues à l'étape précédente "n-1" : μ_{n-1} et λ_{n-1} , obtenir les valeurs μ_n et λ_n grâce aux relations 29 et 28 :

$$\lambda_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i I_1 \left(\frac{2\lambda_{n-1} x_i}{\mu_{n-1}} \right)}{\mu_{n-1} I_0 \left(\frac{2\lambda_{n-1} x_i}{\mu_{n-1}} \right)} \right) \quad (30)$$

$$\mu_n = \sqrt{\frac{m_2}{1 + \lambda_n^2}} \quad (31)$$

Test : appliquer un test de fin de convergence. S'il n'est pas vérifié, réitérer l'étape précédente.

De manière extrêmement curieuse, la vitesse de convergence de cet algorithme est beaucoup plus lente que l'algorithme décrit dans le cas classique (paragraphe 1.2.2). Donc, en pratique, il faut rechercher dans le formalisme classique $\hat{\mu}_C$ et $\hat{\mu}$ et ensuite calculer $\hat{\lambda}$.

2.2.3 Estimation des paramètres : nouvelle méthode à partir du coefficient de variation

Dans ce formalisme, le coefficient de variation s'écrit (expressions 24 et 25) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right)\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{4 e^{\lambda^2} (1 + \lambda^2)}{\pi \left(\left(1 + \lambda^2\right) I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2} - 1}$$

ce qui donne une relation implicite de la valeur du paramètre λ connaissant le coefficient de variation γ .

La figure 7 illustre l'allure du coefficient de variation pour des valeurs de λ variant de 0 (absence de cible) à 10.

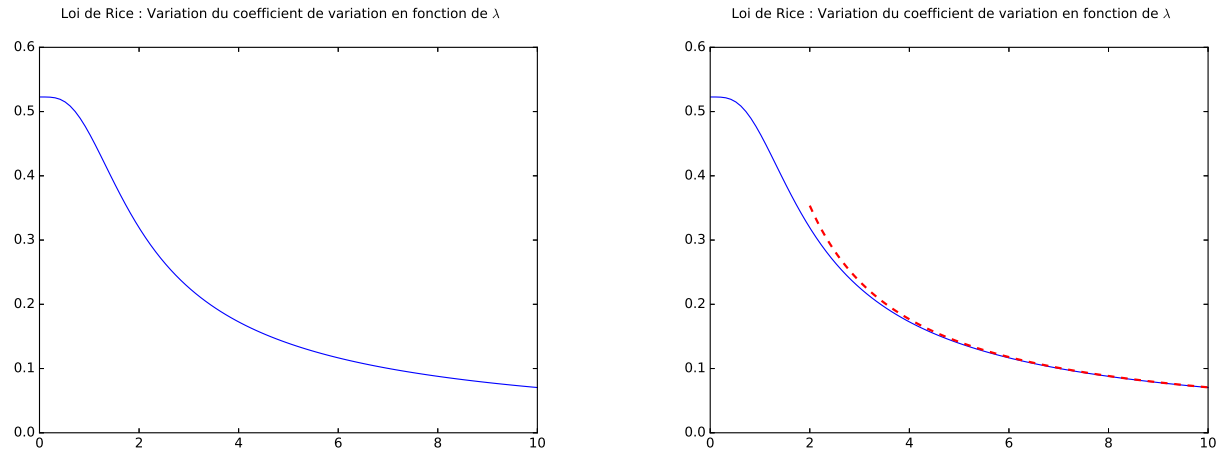


FIGURE 7 – A gauche : Loi de Rice : évolution du coefficient de variation en fonction de λ . A droite : même courbe sur laquelle on a superposé l'allure asymptotique (relation 32).

En utilisant l'expression 49 de l'annexe A.2, on peut donner une approximation du coefficient de variation pour de grandes valeurs de λ :

$$\gamma \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\lambda} \quad (32)$$

ce qu'illustre la figure 7 (droite).

Si analytiquement il n'est pas possible d'obtenir une relation explicite, on peut néanmoins en trouver une forme approchée par le biais d'une fraction rationnelle de polynôme (modèle RPM, voir par exemple [15]). Après diverses expérimentations, on peut retenir l'expression suivante qui donne une estimation meilleure que le 2 % sur une gamme assez étendue du paramètre λ (entre 0.1 et 10) :

$$\hat{\lambda} \simeq \frac{1. - 2.864928 \gamma - 3.193363 \gamma^2 + 15.715797 \gamma^3 - 11.713746 \gamma^4}{-0.017883 + 1.815109 \gamma - 7.318177 \gamma^2 + 8.717601 \gamma^3 - 2.362803 \gamma^4} \quad (33)$$

Notons que la relation 32 permet d'inverser la relation pour de grandes valeurs de γ (par exemple 8). On a alors :

$$\hat{\lambda} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \quad \gamma \geq 8$$

De même, pour des valeurs de λ suffisamment petites, on a le développement limité à l'ordre 4 (Maple) :

$$\begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{4 e^{\lambda^2} (1 + \lambda^2)}{\pi \left((1 + \lambda^2) I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \right)^2} - 1} \\ &\simeq 0.52272 - 0.15224\lambda^4 \end{aligned}$$

qui est tout à fait satisfaisant pour $\lambda \in [0, 0.15]$. On inverse alors tout naturellement cette dernière relation, ce qui donne :

$$\hat{\lambda} \simeq \left(\frac{0.52272 - \gamma}{0.15224} \right)^{\frac{1}{4}} \quad 0.5226\gamma \in [0.5226; 0.52272]$$

Connaissant cette estimée du paramètre λ , l'estimée du paramètre μ s'obtient à partir du moment d'ordre 1 :

$$\hat{\mu} = \frac{m_1}{e^{-\hat{\lambda}^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \hat{\lambda}^2\right)}$$

2.2.4 Estimation des paramètres : nouvelle méthode à partir de la moyenne arithmétique (moment d'ordre 1) et de la moyenne harmonique (moment d'ordre -1)

La précédente méthode s'appuie sur les moments d'ordre 1 et 2 : la variance de l'estimateur du coefficient de variation met en jeu les moments d'ordre 2 et 4. Or, de part les caractéristiques de la loi de Rice, on peut toujours calculer le moment d'ordre -1 (ce qui

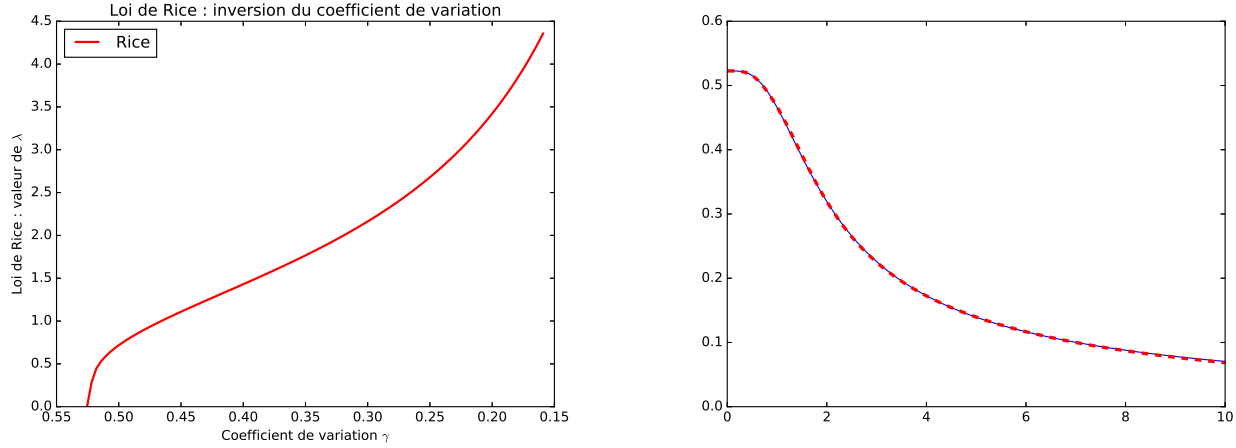


FIGURE 8 – A gauche : Loi de Rice : inversion du coefficient de variation à l’aide de la formule approchée 33). A droite : tracé du coefficient de variation en fonction de λ (cf figure 7). Superposé à cette courbe, le coefficient de variation calculé après estimation de λ obtenue par la relation 33.

amène à obtenir de facto la moyenne harmonique). En utilisant les moments d’ordre 1 et -1 (ordres moins élevés que 2 et 4), on pourrait espérer réduire cette variance d’estimateur.

Calculons un nouvel estimateur, noté δ , dont l’expression analytique est simplement le produit des moments d’ordre 1 et -1 :

$$\delta = m_1 m_{-1}$$

Dans le cas de la loi de Rice, on obtient :

$$\begin{aligned} \delta &= e^{-\lambda^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \lambda^2\right) e^{-\lambda^2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right) \\ &= e^{-2\lambda^2} \frac{\pi}{2} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right) {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; \lambda^2\right) \end{aligned}$$

et l’on remarque que :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta &= \frac{\pi}{2} \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta &= 1 \end{aligned}$$

Le tracé de cette fonction est illustré figure 9.

On peut reformuler l’expression de δ à l’aide de fonctions de Bessel modifiées de première espèce (voir annexe B.2). On obtient :

$$\delta = e^{-\lambda^2} \frac{\pi}{2} I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \left((1 + \lambda^2) I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \right)$$

En l’absence d’expression explicite pour inverser cette relation, on peut choisir un modèle RPM. Le modèle suivant s’avère donner un résultat meilleur que le 0.1 % pour des valeur de δ entre 0.1 et 10

$$\hat{\lambda} \simeq \frac{1. - 3.880472 \delta + 5.331137 \delta^2 - 3.094342 \delta^3 + 0.646247 \delta^4}{1.196267 - 4.048803 \delta + 4.990721 \delta^2 - 2.651600 \delta^3 + 0.513561 \delta^4}$$

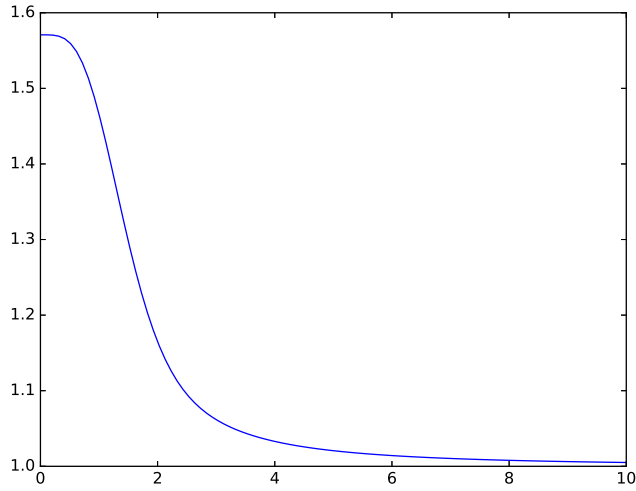


FIGURE 9 – Loi de Rice : évolution du coefficient $\delta = m_1 m_{-1}$ en fonction de λ .

Connaissant cette estimée du paramètre λ , l'estimée du paramètre μ s'obtient à partir du moment d'ordre 1 :

$$\hat{\mu} = \frac{m_1}{e^{-\hat{\lambda}^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \hat{\lambda}^2\right)}$$

2.3 Variance de l'estimateur du coefficient de variation

2.3.1 Variance d'une grandeur fonction des moments : l'approche de Kendall et Stuart

Kendall & Stuart proposent de calculer la variance d'une fonction $g(m_1, m_2)$ en effectuant un développement limité au premier ordre de la fonction $g(m_1, m_2)$ autour des valeurs $m_{0,1}$ et $m_{0,2}$:

$$g(m_1, m_2) = g(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2})$$

En ayant vérifié que les $\frac{\partial g}{\partial m_i}$ ne sont pas tous deux nuls en $(m_{0,1}, m_{0,2})$, on établit la variance de g par la formule

$$\begin{aligned} \text{var} \{g(m_1, m_2)\} &= E \left\{ [g(m_1, m_2) - g(m_{0,1}, m_{0,2})]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[(m_1 - m_{0,1}) \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) + (m_2 - m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \right]^2 \right\} \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial m_1} \right)^2 (m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_1\} + \left(\frac{\partial g}{\partial m_2} \right)^2 (m_{0,1}, m_{0,2}) \text{var} \{m_2\} \\ &\quad + 2 \frac{\partial g}{\partial m_1}(m_{0,1}, m_{0,2}) \frac{\partial g}{\partial m_2}(m_{0,1}, m_{0,2}) \text{cov} \{m_1, m_2\} \end{aligned} \quad (34)$$

avec

$$var \{m_i\} = \frac{1}{N} (m_{2i} - m_i^2) \quad (35)$$

$$cov \{m_i, m_j\} = \frac{1}{N} (m_{i+j} - m_i m_j) \quad (36)$$

Cette méthode est bien évidemment généralisable à des moments d'ordre quelconque.

2.3.2 Variance de l'estimateur du coefficient de variation en fonction des moments

La méthode de Kendall & Stuart s'applique bien évidemment au coefficient de variation γ , qui est une fonction des deux premiers moments de la loi étudiée. Connaissant m_1 et m_2 , on a par définition :

$$\gamma = \frac{\sqrt{m_2 - m_1^2}}{m_1} \quad (37)$$

En remplaçant la fonction g de l'équation 34 par l'expression de γ , il vient :

$$var(\gamma) = \frac{1}{N} \frac{4m_2^3 - m_2^2 m_1^2 + m_1^2 m_4 - 4m_1 m_2 m_3}{4 m_1^4 (m_2 - m_1^2)} \quad (38)$$

Il n'est d'aucune utilité d'exprimer cette variance pour le coefficient de variation de la loi de Rice : les moments pairs faisant intervenir des fonctions exponentielles et les moments impairs des fonctions de Bessel modifiées de première espèce, aucune simplification ne peut être espérée. Cependant, comme dans la nouvelle formulation, le moment d'ordre n est proportionnel à μ^n , on déduit de la relation 38 que la variance de l'estimateur du coefficient de variation ne dépend que du paramètre λ .

Reste l'usage d'illustrations montrant comment cette variance peut interférer sur la pertinence de l'inversion du coefficient de variation.

Considérons une fenêtre d'analyse de N valeurs. Si l'on connaît $var(\gamma)$ la variance de l'estimateur de γ , alors on connaît l'écart type de l'estimateur. On a alors à analyser la relation suivante :

$$\gamma \pm \sqrt{var(\gamma)}$$

ce qui donne des bornes sur l'estimateur du coefficient de variation en fonction de λ .

La figure 10 reprend à gauche la figure 7 en rajoutant les écarts types correspondant à une estimation sur $N = 100$ échantillons, et à droite propose l'inversion de γ pour donner une estimée de λ . On peut en retenir certaines valeurs représentatives reprises dans le tableau 1.

Le choix des valeurs du coefficient de variation a été fait de sorte que les valeurs de λ soient des valeurs références.

Ce tableau révèle un comportement très particulier pour l'estimation des paramètres de la loi de Rice, sachant que cette loi ressemble d'autant plus à une loi de Rayleigh que λ est petit, et d'autant plus à une loi normale que λ est grand. Pour ces deux cas extrêmes, l'estimation des paramètres est meilleure si l'on privilégie les lois limites (c'est à dire la loi de Rayleigh dans le cas λ petit et la loi normale dans le cas λ grand). On observe

γ	λ			$\frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{2}$
0.196	3.21	3.50	3.76	0.27
0.226	2.74	3.00	3.23	0.24
0.267	2.27	2.50	2.70	0.21
0.319	1.80	2.00	2.19	0.19
0.386	1.33	1.50	1.70	0.18
0.425	1.06	1.25	1.46	0.20
0.464	0.72	1.00	1.23	0.26

TABLE 1 – Variations des estimées de λ en fonction de la variance du coefficient de variation γ sous l'hypothèse d'une estimation de γ obtenue avec $N = 100$ échantillons.

ainsi qu'empiriquement les méthodes d'estimation des paramètres de la loi de Rice ne donneront des résultats pertinents que dans une bande de valeurs de λ , globalement entre 1 et 4.

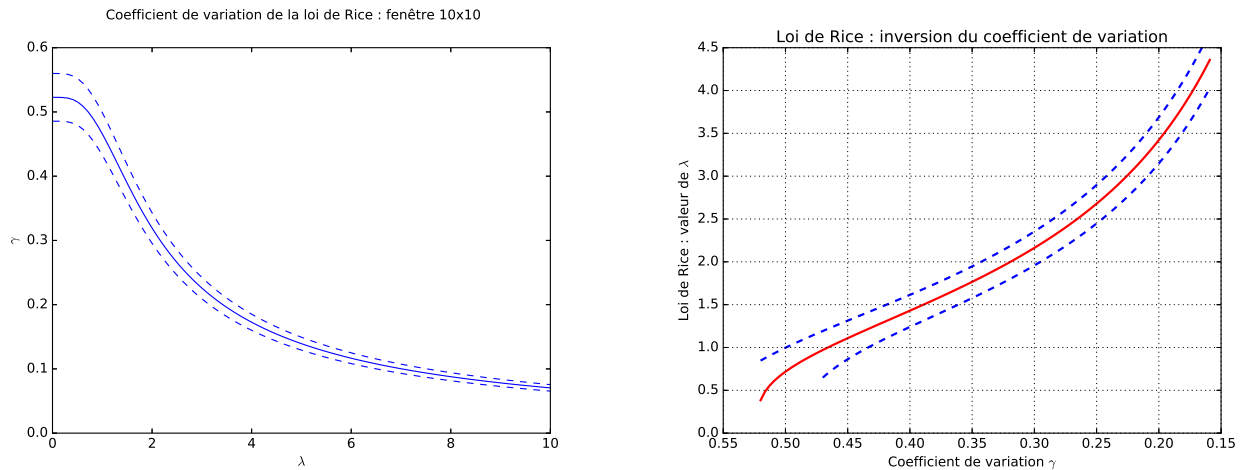


FIGURE 10 – A gauche : Loi de Rice : évolution du coefficient de variation en fonction de λ et prise en compte de la variance de l'estimateur pour une fenêtre $N = 100$. A droite : résultats de l'inversion avec prise en compte de l'écart type de l'estimateur de λ calculé sur une fenêtre de 100 échantillons.

2.4 Expérimentation

Pour comparer ces 4 méthodes, nous allons simuler plusieurs cas de loi de Rice avec une valeur du paramètre de chatoisement $\mu = 100$. Pour cela, il suffit de générer une loi de Rayleigh de paramètre $\mu = 100$, générer un terme de phase aléatoire et obtenir au final un jeu d'échantillons s'écrivant :

$$x_n = \lambda \mu_n + \mu_n \cos \phi_n + j \mu_n \sin \phi_n$$

et dont on prendra l'amplitude.

Trois exemples de simulations sont données figure 11.

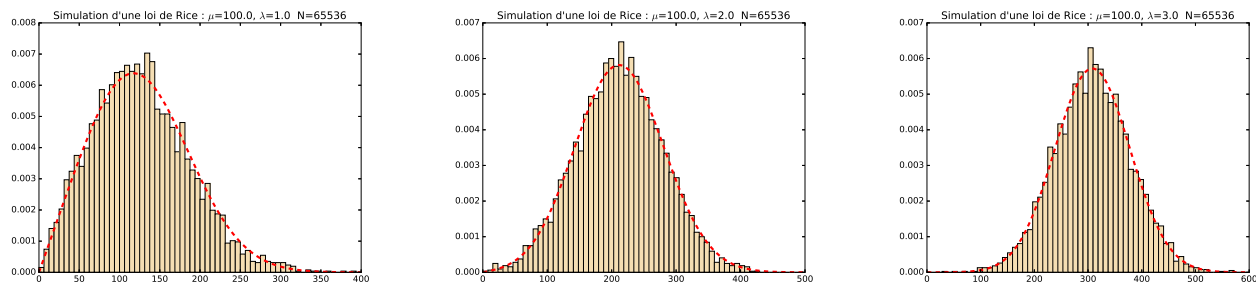


FIGURE 11 – Trois simulations de loi de Rice pour trois paramètres λ différents. Pour les petites valeurs de λ , l'allure est proche d'une loi de Nakagami (voire d'une loi de Rayleigh si $\lambda \rightarrow 0$). Pour de grandes valeurs de λ , l'allure est celle d'une loi normale.

Quatre valeurs de λ ont été choisies dans un premier test : 0.5, 1., 2. et 3.

Le tableau 2 permet de comparer les 4 méthodes : MMV (Méthode du Maximum de Vraisemblance), MM (Méthode des Moments), $M\gamma$ (méthode du coefficient de variation γ) et $M\delta$ (méthode moyenne arithmétique/ Moyenne harmonique). Un certain nombre de simulations (1024 au total pour chaque valeur de λ) ayant été effectuées, il est possible de calculer l'écart type des estimateurs de λ et de μ pour chaque méthode. On peut noter qu'il y a une bonne adéquation entre l'écart type observé pour la Méthode des Moments et les variations des estimées du paramètre λ relevées au tableau 1 à partir des calculs théoriques "à la Kendall&Stuart". Il faut aussi noter que pour ce jeu de valeurs de λ , les variances observées minimales, tant pour les estimées de λ que pour les estimées de μ , sont atteintes par la Méthode du Maximum de Vraisemblance. Remarquons au passage que le ratio $\frac{\sigma_\lambda}{\hat{\lambda}}$ ne fait que diminuer. Il faut enfin noter que la méthode $M\delta$ ne semble absolument pas apporter une quelconque amélioration vis à vis des méthodes classiques.

	Chatoiement $\mu = 100.0$				N=100			
	Cas $\lambda=0.5$		Cas $\lambda=1.0$		Cas $\lambda=2.0$		Cas $\lambda=3.0$	
MMV	$\hat{\lambda} = 0.567$ $\sigma_\lambda = 0.306$	$\hat{\mu} = 96.037$ $\sigma_\mu = 12.665$	$\hat{\lambda} = 1.014$ $\sigma_\lambda = 0.247$	$\hat{\mu} = 99.483$ $\sigma_\mu = 12.206$	$\hat{\lambda} = 2.022$ $\sigma_\lambda = 0.188$	$\hat{\mu} = 99.467$ $\sigma_\mu = 7.575$	$\hat{\lambda} = 3.036$ $\sigma_\lambda = 0.245$	$\hat{\mu} = 99.444$ $\sigma_\mu = 7.124$
MM	$\hat{\lambda} = 0.511$ $\sigma_\lambda = 0.412$	$\hat{\mu} = 96.169$ $\sigma_\mu = 14.308$	$\hat{\lambda} = 1.027$ $\sigma_\lambda = 0.294$	$\hat{\mu} = 98.717$ $\sigma_\mu = 13.453$	$\hat{\lambda} = 2.032$ $\sigma_\lambda = 0.211$	$\hat{\mu} = 99.201$ $\sigma_\mu = 8.523$	$\hat{\lambda} = 3.041$ $\sigma_\lambda = 0.261$	$\hat{\mu} = 99.355$ $\sigma_\mu = 7.579$
$M\gamma$	$\hat{\lambda} = 0.481$ $\sigma_\lambda = 0.462$	$\hat{\mu} = 96.251$ $\sigma_\mu = 13.678$	$\hat{\lambda} = 0.993$ $\sigma_\lambda = 0.293$	$\hat{\mu} = 100.025$ $\sigma_\mu = 12.707$	$\hat{\lambda} = 2.023$ $\sigma_\lambda = 0.193$	$\hat{\mu} = 99.463$ $\sigma_\mu = 7.802$	$\hat{\lambda} = 3.052$ $\sigma_\lambda = 0.245$	$\hat{\mu} = 98.959$ $\sigma_\mu = 7.056$
$M\delta$	$\hat{\lambda} = 0.700$ $\sigma_\lambda = 0.544$	$\hat{\mu} = 87.806$ $\sigma_\mu = 19.154$	$\hat{\lambda} = 1.006$ $\sigma_\lambda = 0.538$	$\hat{\mu} = 98.989$ $\sigma_\mu = 24.254$	$\hat{\lambda} = 2.059$ $\sigma_\lambda = 0.283$	$\hat{\mu} = 98.646$ $\sigma_\mu = 14.095$	$\hat{\lambda} = 3.077$ $\sigma_\lambda = 0.263$	$\hat{\mu} = 98.288$ $\sigma_\mu = 7.746$

TABLE 2 – Comparaison des estimateurs pour des lois de Rice simulées avec $\mu = 100$. et estimées sur une fenêtre de 100 échantillons pour différentes valeurs de λ . Pour la Méthode du Maximum de Vraisemblance, la convergence a nécessité en moyenne 132 étapes ($\lambda = 0.5$), 44 étapes ($\lambda = 1.$), 17 étapes ($\lambda = 2.$) et 14 étapes ($\lambda = 3.$).

Un second test met en jeu des valeurs de λ plus élevées (tableau 3). On note sur ces

valeurs que le ratio $\frac{\sigma_\lambda}{\lambda}$ demeure à peu près constant. Pour les plus grandes valeurs de λ , la méthode $M\delta$ semble avoir une variance d'estimateur légèrement plus faible que les autres méthodes : cet écart est cependant minime et ne peut montrer une réelle amélioration quant à l'utilisation de cette méthode. Enfin, puisque ce test met en jeu des valeurs de λ élevées, on a aussi utilisé la méthode fondée sur la similitude de la densité de probabilité de la loi de Rice avec une loi normale (voir 1.1.4 et 1.2.3) et notée ici M-N : les résultats ainsi obtenus sont tout à fait comparables aux autres méthodes.

	Chatoiement $\mu = 100.0$				N=100			
	Cas $\lambda=4.0$		Cas $\lambda=5.0$		Cas $\lambda=7.5$		Cas $\lambda=10.0$	
MMV	$\hat{\lambda} = 4.053$ $\sigma_\lambda = 0.322$	$\hat{\mu} = 99.245$ $\sigma_\mu = 7.279$	$\hat{\lambda} = 5.062$ $\sigma_\lambda = 0.386$	$\hat{\mu} = 99.302$ $\sigma_\mu = 7.194$	$\hat{\lambda} = 7.566$ $\sigma_\lambda = 0.554$	$\hat{\mu} = 99.673$ $\sigma_\mu = 7.143$	$\hat{\lambda} = 10.046$ $\sigma_\lambda = 0.710$	$\hat{\mu} = 100.082$ $\sigma_\mu = 6.922$
MM	$\hat{\lambda} = 4.063$ $\sigma_\lambda = 0.338$	$\hat{\mu} = 99.068$ $\sigma_\mu = 7.652$	$\hat{\lambda} = 5.076$ $\sigma_\lambda = 0.401$	$\hat{\mu} = 99.064$ $\sigma_\mu = 7.437$	$\hat{\lambda} = 7.606$ $\sigma_\lambda = 0.566$	$\hat{\mu} = 99.184$ $\sigma_\mu = 7.246$	$\hat{\lambda} = 10.133$ $\sigma_\lambda = 0.734$	$\hat{\mu} = 99.259$ $\sigma_\mu = 7.040$
$M\gamma$	$\hat{\lambda} = 4.060$ $\sigma_\lambda = 0.318$	$\hat{\mu} = 99.085$ $\sigma_\mu = 7.170$	$\hat{\lambda} = 5.064$ $\sigma_\lambda = 0.390$	$\hat{\mu} = 99.279$ $\sigma_\mu = 7.242$	$\hat{\lambda} = 7.658$ $\sigma_\lambda = 0.595$	$\hat{\mu} = 98.555$ $\sigma_\mu = 7.470$	$\hat{\lambda} = 10.435$ $\sigma_\lambda = 0.834$	$\hat{\mu} = 96.505$ $\sigma_\mu = 7.510$
$M\delta$	$\hat{\lambda} = 4.061$ $\sigma_\lambda = 0.334$	$\hat{\mu} = 99.118$ $\sigma_\mu = 7.587$	$\hat{\lambda} = 5.075$ $\sigma_\lambda = 0.405$	$\hat{\mu} = 99.107$ $\sigma_\mu = 7.551$	$\hat{\lambda} = 7.567$ $\sigma_\lambda = 0.530$	$\hat{\mu} = 99.634$ $\sigma_\mu = 6.888$	$\hat{\lambda} = 9.714$ $\sigma_\lambda = 0.552$	$\hat{\mu} = 100.747$ $\sigma_\mu = 9.320$
M-N	$\hat{\lambda} = 4.148$ $\sigma_\lambda = 0.310$	$\hat{\mu} = 98.343$ $\sigma_\mu = 7.023$	$\hat{\lambda} = 5.124$ $\sigma_\lambda = 0.376$	$\hat{\mu} = 99.008$ $\sigma_\mu = 6.985$	$\hat{\lambda} = 7.603$ $\sigma_\lambda = 0.542$	$\hat{\mu} = 99.529$ $\sigma_\mu = 6.888$	$\hat{\lambda} = 10.156$ $\sigma_\lambda = 0.764$	$\hat{\mu} = 99.272$ $\sigma_\mu = 7.355$

TABLE 3 – Comparaison des estimateurs pour des lois de Rice simulées avec $\mu = 100.$ et estimées sur une fenêtre de 100 échantillons pour différentes valeurs de λ . Pour la Méthode du Maximum de Vraisemblance, la convergence a nécessité en moyenne 13 étapes. Par rapport au cas précédent (tableau 2), on a ajouté la méthode fondé sur une approximation par la loi normale.

Pour conclure, on peut choisir comme méthode la plus passe partout celle du coefficient de variation : même si la variance de ses estimées n'est pas la plus faible, elle offre un excellent compromis entre temps calcul et précision.

3 Application à la sélection des Permanent Scatterers (PS)

3.1 Le coefficient de variation d'une loi de Rice et le critère de Ferreti

Dans le nouveau formalisme, le coefficient de variation γ ne dépend que de λ , c'est à dire de la manière dont la cible déterministe émerge du bruit de chatoiement local.

Ce coefficient de variation varie entre le cas du chatoiement pleinement développé ($\lambda = 0$), c'est à dire $\gamma = 0.52272$, et celui d'une cible dont la valeur est infiniment supérieure à celle du chatoiement, c'est à dire $\gamma = 0$.

On a (expression 24) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2)}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right)\right)^2} - 1}$$

c'est à dire (expression 25 qui remplace l'usage des fonctions de Kummer par des fonctions de Bessel modifiées de première espèce) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 e^{\lambda^2} (1 + \lambda^2)}{\pi \left((1 + \lambda^2) I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \right)^2} - 1}$$

Nous avons déjà étudié aux paragraphes 2.1 et 2.2.3 ce coefficient de variation, ainsi que ses méthodes d'inversion (dont la méthode RPM, relation 33). En particulier, la figure 12 reprend l'essentiel de cette analyse (à gauche, l'allure du coefficient de variation γ en fonction du paramètre λ , à droite, l'inversion du coefficient de variation, c'est à dire la courbe λ fonction de γ).

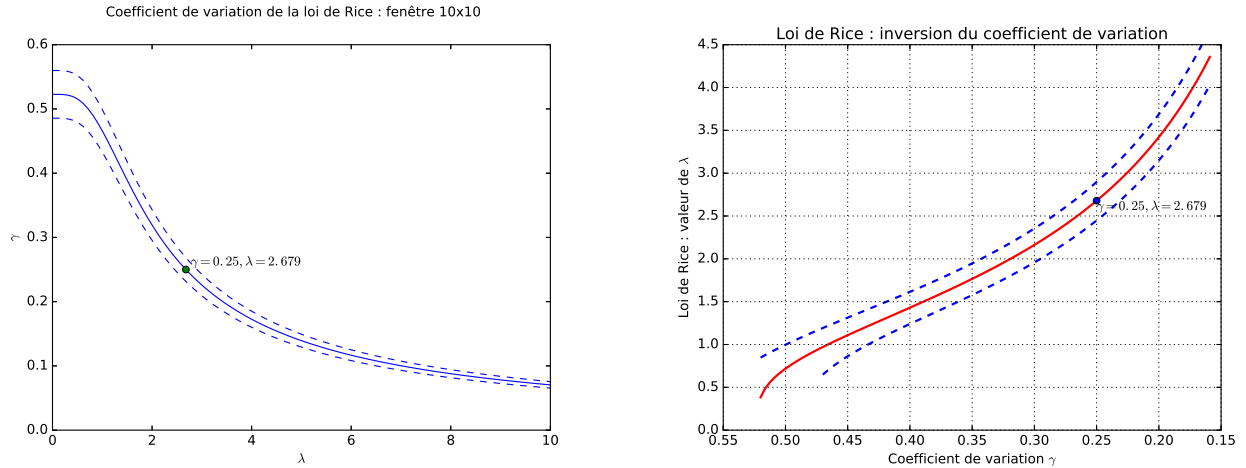


FIGURE 12 – A gauche : Loi de Rice : évolution du coefficient de variation en fonction de λ (même figure que 7). On a tracé les courbes en pointillés correspondant aux valeurs \pm l'écart type. A droite : inversion du coefficient de variation à l'aide de la formule approchée 33 (même figure que 8). On a tracé les courbes en pointillés correspondant aux valeurs \pm l'écart type. Les écarts-type correspondent à des estimations sur des fenêtre de taille 100.

Dans l'étude des PS, Ferreti utilise le coefficient de variation et préconise un seuil de 0.25 pour déterminer si un pixel est un PS ou non. Un solveur numérique (sous Python par exemple) permet de donner la valeur de λ correspondante :

$$\gamma|_{\lambda=2.6789} = 0.25$$

Pour tenir compte du fait que les estimations des paramètres s'effectuent avec un nombre limité d'expériences, il faut tenir compte de la variance des estimateurs. Dans le cas de la méthode du coefficient de variation, la forme analytique de cette variance est connue (voir 2.3.2). Il est alors intéressant de voir comment le choix de Ferreti se place dans un cadre d'expérimentation où le seuil varie entre 0.2 et 0.3

γ	λ			$\frac{\lambda_{max}-\lambda_{min}}{2}$
0.200	3.15	3.43	3.69	0.27
0.210	2.98	3.26	3.50	0.26
0.220	2.83	3.10	3.33	0.25
0.230	2.69	2.95	3.17	0.24
0.240	2.57	2.82	3.03	0.23
0.250	2.45	2.68	2.90	0.22
0.260	2.34	2.57	2.77	0.22
0.270	2.23	2.46	2.66	0.21
0.280	2.14	2.36	2.55	0.21
0.290	2.04	2.26	2.45	0.20
0.300	1.96	2.17	2.35	0.20

TABLE 4 – Variations des estimées de λ en fonction de la variance du coefficient de variation γ sous l’hypothèse d’une estimation de γ obtenue avec $N = 100$ échantillons. Le seuil de Ferreti correspond à la valeur $\lambda = 2.68$.

3.2 Comparaison avec le coefficient de variation de la loi de Rayleigh-Nakagami

Le paramètre L de la loi de Nakagami (autrement dit le nombre de vues) est très usité en imagerie radar : il se déduit facilement du coefficient de variation et est de facto un indicateur omniprésent facilement compréhensible. En l’absence de toute autre information, il permet d’analyser très simplement l’écart à un modèle de chatoiement pleinement développé.

Il est intéressant de noter que l’allure du coefficient de variation de la loi de Rice a globalement plusieurs comportements différents :

- pour λ très petit, c’est le chatoiement qui prédomine, c’est à dire une simple loi de Rayleigh : le coefficient de variation a alors une valeur proche de celle correspondant à une loi de Rayleigh, c’est à dire :

$$\gamma|_{\lambda \rightarrow 0} = 0.52272$$

- pour λ proche de l’unité, l’allure de la loi est toujours très proche d’une loi de Rayleigh (voir par exemple la figure 6). Notons que dans ce cas on trouve

$$\gamma|_{\lambda=1} \sim 0.466$$

- pour des grands λ , on a une loi centrée sur la valeur de la cible déterministe et dont l’écart type correspond au chatoiement : cet écart type est donc à peu près constant. Grâce à l’analyse de l’annexe A (relation 49), on peut connaître le comportement asymptotique de γ :

$$\gamma|_{\lambda \rightarrow \infty} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$$

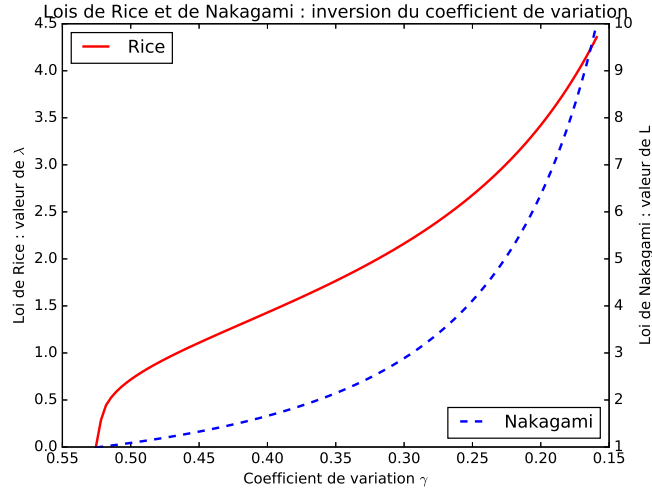


FIGURE 13 – Lois de Rice et de Nakagami : inversion du coefficient de variation à l’aide de la formule approchée 33 (le tracé pour la loi de Rice est celui de la figure 8). Sur cette même figure, on trace l’estimateur du paramètre L d’une loi de Nakagami connaissant γ . Il faut remarquer que l’on a, pour λ suffisamment grand, $L \simeq \frac{1}{4\gamma^2}$ et $\lambda \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\gamma}$.

ce qui revient à proposer une valeur de λ :

$$\lambda \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\gamma}$$

Or on sait que le coefficient de variation d’une loi de Rayleigh-Nakagami s’écrit :

$$\gamma \simeq \frac{1}{2\sqrt{L}}$$

On a donc la relation :

$$L \simeq \frac{\lambda^2}{2} \Leftrightarrow \lambda \simeq \sqrt{2L}$$

Un indicateur potentiel d’analyse de la loi de Rice peut alors être justement ce paramètre L : cependant son comportement asymptotique est très différent de celui de γ comme l’illustre la figure 13 (on peut noter sur cette figure les spécificités de la loi de Rice pour des valeurs de λ entre 0 et 0.5 : le coefficient de variation demeure à peu près constant. Il est donc illusoire d’espérer retrouver ce paramètre à partir du simple coefficient de variation.).

4 Conclusions

L'objectif de cette partie est de résumer sous forme synthétique les points les plus importants de ce document relatifs à la loi de Rice définie par un paramètre lié à la cible (μ_C) et un paramètre lié au chatoisement (μ) traditionnellement exprimée sous la forme :

$$\mathcal{RC}[\mu, \mu_C](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\frac{x^2 + \mu_C^2}{\mu^2}} I_0\left(\frac{2\mu_C x}{\mu^2}\right)$$

- la densité de probabilité de la loi de Rice s'exprime comme un produit d'une loi normale et d'une fonction très rapidement égale à l'unité pour des valeurs de μ_C suffisamment grandes vis à vis de μ :

$$\mathcal{RC}[\mu, \mu_C](x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\mu} e^{-\frac{(x-\mu_C)^2}{\mu^2}} \frac{2x}{\mu} G_{1,2}^{1,1}\left(\frac{4\mu_C x}{\mu^2} \middle| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 0 \end{array}; \begin{array}{c} \cdot \\ 0 \end{array}\right)$$

L'expérience montre que pour $\mu_C > 3\mu$, l'approximation par une loi normale est déjà suffisamment bonne pour traiter des cas expérimentaux.

- En définissant μ_C de manière multiplicative à partir de μ , ce qui revient à remplacer les paramètres μ, μ_C par $\mu, \lambda\mu$, on peut réécrire la densité de probabilité de la loi de Rice sous la forme suivante

$$\mathcal{RC}_2[\mu, \lambda](x) = \frac{2x}{\mu^2} e^{-\left(\frac{x^2}{\mu^2} + \lambda^2\right)} I_0\left(2\lambda\frac{x}{\mu}\right)$$

Sous cette forme, le coefficient de variation ne dépend que du paramètre λ (on donne les deux expressions possibles, selon les préférences des lecteurs vis à vis des fonctions de Kummer ou des fonctions de Bessel) :

$$\gamma = \sqrt{\frac{e^{\lambda^2} {}_1F_1(2; 1; \lambda^2)}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \lambda^2\right)\right)^2} - 1} = \sqrt{\frac{4e^{\lambda^2}(1 + \lambda^2)}{\pi\left((1 + \lambda^2)I_0\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) + \lambda^2 I_1\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)\right)^2} - 1}$$

Si l'inversion analytique de cette expression n'est pas possible, un modèle RPM peut s'appliquer, ce qui permet d'avoir une relation approchée donnant une estimée de λ connaissant le coefficient de variation :

$$\hat{\lambda} \simeq \frac{1 - 2.864928\gamma - 3.193363\gamma^2 + 15.715797\gamma^3 - 11.713746\gamma^4}{-0.017883 + 1.815109\gamma - 7.318177\gamma^2 + 8.717601\gamma^3 - 2.362803\gamma^4} \quad \gamma \in [0.12; 0.5226]$$

avec

$$\hat{\lambda} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \quad \gamma \leq 0.12 \quad \text{et} \quad \hat{\lambda} \simeq \left(\frac{0.52272 - \gamma}{0.15224}\right)^{\frac{1}{4}} \quad \gamma \in [0.5226; 0.52272]$$

Connaissant m_1 , on peut alors en déduire une estimée de μ :

$$\hat{\mu} = \frac{m_1}{e^{-\hat{\lambda}^2} \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{1}{2}; 1; \hat{\lambda}^2\right)}$$

A La fonction de Kummer (fonction hypergéométrique confluente ${}_1F_1$) : définition et propriétés élémentaires

A.1 Définition

La fonction de Kummer ${}_1F_1$, appelée aussi fonction hypergéométrique confluente et souvent notée $M(a, b, x)$, est un cas particulier de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$ classique. Sa définition est (voir [2] chapitre VI) :

$${}_1F_1(a; b; x) = 1 + \frac{a}{b} \frac{x}{\Gamma(2)} + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{x^2}{\Gamma(3)} + \dots \quad (39)$$

Cette définition permet d'écrire directement :

$${}_1F_1(a; a; x) = e^x \quad \forall a \neq 0 \quad (40)$$

Une relation essentielle est, sous sa forme canonique, la suivante ([2], §6.3) :

$${}_1F_1(a; b; x) = e^x {}_1F_1(b-a; b; -x) \quad (41)$$

équivalente à :

$${}_1F_1(a; b; -x) = e^{-x} {}_1F_1(b-a; b; x) \quad (42)$$

Comme toute fonction hypergéométrique, il existe des relations permettant, à partir d'une fonction de Kummer donnée ${}_1F_1(a; b; x)$, d'obtenir son expression à partir de fonctions de Kummer de paramètres $a+1$, $a-1$, $b+1$ et $b-1$. Il y a ainsi 6 relations fondamentales dont le tableau 5 reprend les dépendances selon les paramètres (le référencement de ces relations reprend celles du Bateman, [2] §6.4).

Bat.2	a	b	a-1	a+1		
Bat.3	a	b			b-1	b+1
Bat.4	a	b		a+1	b-1	
Bat.5	a	b	a-1			b+1
Bat.6	a	b		a+1		b+1
Bat.7	a	b	a-1		b-1	

TABLE 5 – Expressions possibles de la fonction de Kummer ${}_1F_1(a; b; x)$ en fonctions d'autres fonctions de Kummer mettant en jeu les paramètres $a+1$, $a-1$, $b+1$ et $b-1$.

Par exemple on passe des paramètres (a, b) aux paramètres $(a-1, b)$ et $(a+1, b)$ par la relation Bat.2 :

$${}_1F_1(a+1; b; x) = \frac{1}{a} ((b-a) {}_1F_1(a-1; b; x) + (2a-b+x) {}_1F_1(a; b; x)) \quad (43)$$

Sous cette forme, on voit que l'on déduit ${}_1F_1(a+1; b; x)$ de ${}_1F_1(a; b; x)$ et ${}_1F_1(a-1; b; x)$.

Cette relation appliquée au cas ($a = 2, b = 1$) donne la relation :

$${}_1F_1(2; 1; x) = e^x (z + 1) \quad (44)$$

Plus généralement, tous les cas ($a \in \mathbb{N}, b = 1$) peuvent s'exprimer sous la forme de l'exponentielle e^x multipliée par un polynôme en x de degré $a - 1$ (voir annexe B.1).

Enfin, grâce à deux relations spécifiques des fonctions de Bessel (Bateman [3], §7.2.1, équations 3 et 12), il est possible d'exprimer une relation importante entre un cas particulier de fonction de Kummer ($b = 2a$) et la fonction de Bessel modifiée de première espèce³ :

$${}_1F_1(a; 2a; x) = 2^{2a-1} \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{x^{a-\frac{1}{2}}} e^{\frac{x}{2}} I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right) \quad (45)$$

relation équivalente à celle du Bateman ([2], §6.9.1, équation 10) :

$$I_c(x) = \frac{1}{\Gamma(c+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^c e^{-x} {}_1F_1\left(c + \frac{1}{2}; 2\left(c + \frac{1}{2}\right); 2x\right)$$

Comme cas particulier, on a cette relation liant fonction de Kummer et fonction de Bessel modifiée :

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; x\right) = e^{\frac{x}{2}} I_0\left(\frac{x}{2}\right) \quad (46)$$

Si on dit souvent que la formule 45 n'est vérifiée théoriquement que pour $2a \in \mathbb{N}$ (voir [10]), on peut cependant noter qu'elle est valable pour tout $b \in \mathbf{Z}$ (aucune limitation n'est donnée dans le Bateman).

Enfin, la fonction de Kummer s'exprime aussi sous forme d'une fonction de Meijer :

$${}_1F_1(a; b; x) = M(a, b, x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} G_{1,2}^{1,1} \left(-x \left| \begin{array}{c} 1-a \\ 0 \end{array} ; \begin{array}{c} \cdot \\ 1-b \end{array} \right. \right) \quad (47)$$

Cette expression permet d'en déduire la dérivée d'une fonction de Kummer sous forme de fonction de Meijer ainsi que la primitive d'une fonction de Kummer sous forme de fonction de Meijer.

A.2 Le cas $b = 1$ (loi de Rice)

La loi de Rice correspond à un cas particulier de fonction de Kummer : le cas $b = 1$, ce qui donne :

$${}_1F_1(a; 1; x) = 1 + \frac{a}{(\Gamma(2))^2} x + \frac{a(a+1)}{(\Gamma(3))^2} x^2 + \dots \quad (48)$$

3. Il est extrêmement curieux de constater que cette formule, citée par Middleton [10] comme extraite du Watson [16], a été mal retranscrite dans le Middleton ([10], page 1074, formule A.1.20) et que c'est cette formule –pourtant fausse– qui est citée et a priori utilisée par Goodman [6] dans le paragraphe dédié à la loi de Rice. Ceci explique pourquoi ce document redémontre un bon nombre de formules que l'on trouve dans de nombreuses références, même si celle-ci s'avèrent généralement très fiables.

c'est à dire

$${}_1F_1(a; 1; x) = \frac{1}{\Gamma(a)} G_{1,2}^{1,1} \left(-x \left| \begin{matrix} 1-a & ; & \cdot \\ 0 & ; & 0 \end{matrix} \right. \right)$$

On peut aussi réécrire l'expression 48 sous la forme :

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; 1; x) &= 1 + \frac{\Gamma(a+1)}{(\Gamma(a)\Gamma(2))^2} x + \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)(\Gamma(3))^2} x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{\Gamma(a)} \left(\Gamma(a) + \frac{\Gamma(a+1)}{(\Gamma(2))^2} x + \frac{\Gamma(a+2)}{(\Gamma(3))^2} x^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

Si l'on veut analyser le comportement de la loi de Rice pour $\lambda \rightarrow \infty$, on peut se focaliser sur la grandeur (avec $x = \lambda^2$) :

$$\frac{m_2}{m_1^2} = \frac{{}_1F_1(2; 1; x) e^x}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right) \right)^2}$$

Sous forme de fonction de Bessel modifiées, cette grandeur s'exprime comme (voir l'annexe B) :

$$\frac{{}_1F_1(2; 1; x) e^x}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right) \right)^2} = \frac{4 e^x (1+x)}{\pi \left((1+x) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + x I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2}$$

Pour étudier le développement asymptotique de cette expression (que l'on peut donc exprimer soit à l'aide de fonctions de Kummer, soit à l'aide de fonctions de Bessel modifiées de première espèce), on peut utiliser les capacités d'un logiciel de calcul formel (Maple par exemple) et on trouve :

$$\frac{{}_1F_1(2; 1; x) e^x}{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right) \right)^2} \rightarrow 1. + \frac{1}{2x} \quad (49)$$

B Réécritures de la fonction de Kummer

Nous allons voir dans cette annexe que la fonction de Kummer peut parfois se réécrire à l'aide de fonctions plus connues, comme la fonction exponentielle ou les fonctions de Bessel modifiées de première espèce. Pour cela, il faut utiliser les deux cas particuliers canoniques déjà rencontrés (relations 40 et 45) :

$$\begin{aligned} {}_1F_1(a; a; x) &= e^x \quad \forall a \in \mathbb{N}^* \\ {}_1F_1(a; 2a; x) &= 2^{2a-1} \frac{\Gamma(a + \frac{1}{2})}{x^{a-\frac{1}{2}}} e^{\frac{x}{2}} I_{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

B.1 Premier cas particulier : $a \in \mathbb{N}$ et $b = 1$

La loi de Rice utilise un cas particulier de la fonction de Kummer, celui où le second paramètre est égal à 1 :

$${}_1F_1(a; 1; x)$$

On a alors, pour le cas $a = 1$:

$${}_1F_1(1; 1; x) = e^x \quad (50)$$

Considérons maintenant la relation 43 :

$${}_1F_1(a+1; b; x) = \frac{1}{a} ((b-a) {}_1F_1(a-1; b; x) + (2a-b+x) {}_1F_1(a; b; x))$$

et plus spécifiquement le cas $b = 1$. On a alors :

$${}_1F_1(a+1; 1; x) = \frac{1}{a} ((1-a) {}_1F_1(a-1; 1; x) + (x+2a-1) {}_1F_1(a; 1; x)) \quad (51)$$

Pour $a = 1$ et connaissant la relation 50, on en déduit la relation :

$${}_1F_1(2; 1; x) = (x+1)e^x$$

Il est possible d'obtenir par cette relation fondamentale l'expression de ${}_1F_1(p; 1; z)$. Grâce à Maple (et un peu de récurrence), on peut démontrer la relation suivante :

$${}_1F_1(p; 1; z) = \Gamma(p+1) \sum_{n=0}^{p-1} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\Gamma(n+1)^2} \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)}$$

C'est cette relation qui permet d'avoir les moments d'ordre 2 et 4 de la loi de Rice en l'appliquant aux cas $p = 2$ et $p = 3$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} {}_1F_1(2; 1; x) &= (1+x) e^x \\ {}_1F_1(3; 1; x) &= \frac{1}{2} (2 + 4x + x^2) e^x \end{aligned}$$

B.2 Second cas particulier : $a = \frac{2p+1}{2}$ et $b \in \mathbb{N}$

Le cas demi-entier s'obtient par une toute autre approche. Tout d'abord, en utilisant la relation générale 45 dans le cas $a = 1/2$, on peut écrire (relation 46) :

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; x\right) = e^{\frac{x}{2}} I_0\left(\frac{x}{2}\right)$$

Pour les autres cas, commençons par le cas $p = 1$, c'est à dire la fonction ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right)$: on a $a = \frac{3}{2}$ et $b = 1$. Outre le cas précédent ($a = 1/2, b = 1$), la relation 45 permet d'exprimer la fonction ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 3; x\right)$ à l'aide de fonctions de Bessel modifiées de première espèce :

$${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right) = \frac{4}{x} e^{\frac{x}{2}} I_1\left(\frac{x}{2}\right)$$

La démarche du calcul à mener⁴ est de retrouver ces deux expressions à partir de ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right)$ grâce aux relations de transformation spécifiques aux fonctions hypergéométriques dont les propriétés sont résumées dans le tableau 43. Deux relations vont être utilisées :

4. et que l'on ne trouve nulle part dans la littérature "accessible" comme les volumes de Bateman, d'où l'intérêt d'en montrer ici un exemple concret

- La relation Bat.5 appliquée au cas $(a = \frac{3}{2}, b = 1)$ va mettre en jeu une fonction de Kummer de paramètres $(a = \frac{1}{2}, b = 1)$ –c'est à dire la fonction I_0 – et une fonction de Kummer $(a = \frac{3}{2}, b = 2)$.
- La relation Bat.3 appliquée au cas $(a = \frac{3}{2}, b = 2)$ va mettre en jeu des fonctions de Kummer de paramètres $(a = \frac{3}{2}, b = 1)$ –c'est à dire la fonction que l'on recherche– et $(a = \frac{3}{2}, b = 3)$ –c'est à dire la fonction I_1 –.

En substituant dans la première relation l'expression obtenue pour ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 2; x\right)$ dans la seconde relation, on obtient la relation recherchée :

$${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right) = e^{\frac{x}{2}} \left((1+x) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + x I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad (52)$$

Remarquons que cette expression permet au passage d'exprimer ${}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 2; x\right)$ si on le souhaitait.

De manière analogue, on peut étudier le cas $p = -1$, c'est à dire la fonction ${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; x\right)$. On obtient alors :

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; x\right) = e^{\frac{x}{2}} \left((1-x) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + x I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right) \quad (53)$$

Bilan des réécritures

En résumé, on voit que l'on peut réécrire certaines fonctions de Kummer sous la forme de fonctions plus usuelles :

- Les cas (m, n) avec $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}^*$ s'exprimeront en fonction de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} {}_1F_1(1; 1; x) &= e^x \\ {}_1F_1(2; 1; x) &= (1+x) e^x \\ {}_1F_1(3; 1; x) &= \frac{1}{2} (2 + 4x + x^2) e^x \end{aligned}$$

- Les cas $\left(\frac{2m+1}{2}, n\right)$ avec $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}^*$ s'exprimeront à l'aide de l'exponentielle et de fonctions de Bessel modifiées de première espèce.

$$\begin{aligned} {}_1F_1\left(-\frac{1}{2}; 1; x\right) &= e^{\frac{x}{2}} \left((1-x) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + x I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right) \\ {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; 1; x\right) &= e^{\frac{x}{2}} I_0\left(\frac{x}{2}\right) \\ {}_1F_1\left(\frac{3}{2}; 1; x\right) &= e^{\frac{x}{2}} \left((1+x) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + x I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right) \\ e_1^{-\frac{\mu_C^2}{\mu^2}} F_1\left(\frac{5}{2}; 1; x\right) &= \frac{e^{\frac{x}{2}}}{3} \left((3 + 6x + 2x^2) I_0\left(\frac{x}{2}\right) + 2x(x+2) I_1\left(\frac{x}{2}\right) \right) \end{aligned}$$

Au final, pour ces cas spécifiques, on peut ignorer leur formalisme initial sous forme de fonction de type hypergéométrique et n'utiliser que des fonctions beaucoup plus usuelles (exponentielle et fonctions de Bessel modifiée de première espèce I_0 et I_1).

C Les fonctions de Marcum [9]

Citées par Wikipedia dans sa page consacrée à la loi de Rice, ces fonctions, dues au mathématicien Marcum, sont implémentées en Matlab depuis 2008 (Signal Processing toolbox, Functions, Waveform Generation), ce qui en justifie la présence dans ce document. Elles se définissent par la relation :

$$Q(a, b) = \int_b^\infty x e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_0(ax)$$

Sous leur forme dite généralisée, elles se définissent par la relation :

$$Q(a, b, m) = \int_b^\infty x^m e^{-\frac{x^2+a^2}{2}} I_0(ax)$$

Si on prend le cas $b = 0$, on se retrouve dans le formalisme de la loi de Rice (équation 1). Dans ce cas, le cas généralisé correspond à une transformée de Mellin et on sait, grâce aux tables de transformées de Mellin, que le résultat s'exprime sous forme de fonction de Kummer (voir relation 2). Dans ce formalisme, on peut alors exprimer la fonction de répartition de la loi de Rice sous forme d'une fonction de Marcum :

$$\text{FR}_{\text{Rice}} = 1. - Q\left(\frac{\sqrt{2}\mu_C}{\mu}, \frac{\sqrt{2}x}{\mu}\right)$$

Cette expression pourrait avoir un usage effectif en simulation puisque la méthode dite de la fonction de répartition inverse requiert cette fonction de répartition. Cependant, dans le cas de la loi de Rice, cette approche n'est pas du tout nécessaire puisque nous avons vu (partie 2.4) que simuler une loi de Rice nécessite simplement de simuler une loi de Rayleigh.

Notons qu'un article récent [11] démontre une relation entre la fonction de Marcum et les fonctions hypergéométriques bivariées puisque l'on a :

$$Q(a, b, m) = \left(\frac{a^2}{2}\right)^{1-m} e^{-\frac{a^2+b^2}{2}} {}_1F_1\left(1, 2-m; \frac{a^2}{2}, \frac{a^2 b^2}{4}\right)$$

Références

- [1] P. Balachandran, W. Viles, E. Kolaczyk *Exponential-type inequalities involving ratios of the modified Bessel function of the first kind and their applications*, arXiv :1311.1450v1, 6/11/2013
- [2] H. Bateman *Higher transcendental functions : volume I*, McGraw-Hill, 1953
- [3] H. Bateman *Higher transcendental functions : volume II*, McGraw-Hill, 1953
- [4] H. Bateman *Tables of integral transforms : volume I*, McGraw-Hill, 1954
- [5] R. Dana, D. Knepp *The impact of strong scintillation on space based radar design II : non coherent detection*, IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 2, No 1, 1986, pp. 34-46
- [6] J.W. Goodman *Speckle phenomena in optics : Theory and applications*, Roberts & Company, 2007.
- [7] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik *Table of integrals, series and product*, Academic Press, 1980
- [8] S. Lang *Algebra* Addison-Wesley, 1965
- [9] J.I.Marcum *A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar : Mathematical Appendix*, RAND Corporation, Santa Monica, CA, Research Memorandum RM-753, July 1, 1948.
- [10] D. Middleton *An Introduction to Statistical Communication Theory*, McGraw Hill Book, 1960
- [11] D. Morales-Jimenez, F. J. Lopez-Martinez, E. Martos-Naya, J. F. Paris and A. Lozano *Connections Between the Generalized Marcum Q -Function and a Class of Hypergeometric Functions*, IEEE Transactions on Information Theory, vol. 60, no. 2, pp. 1077-1082, Feb. 2014
- [12] R.B. Paris *A Kummer-type transformation for a ${}_2F_2$ hypergeometric function*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 173 (2005), 379-382
- [13] S. O. Rice *Mathematical analysis of random noise*, Bell System Technical Journal, vol. 23, no. 3, pp. 282-332, July 1944.
- [14] J. Sijbers, A. Den Dekker, P. Scheunders, D. Van Dyck *Maximum Likelihood estimation of Rician distribution parameters*, IEEE Trans. on Medical Imaging, Vol. 17, No 3, 1998, pp 357-361
- [15] C. Vincent Tao, Yong Hu *A comprehensive study of the Rational Function Model for Photogrammetric Processing*, Photogrammetric Engineering & Remote Sensing, Vol. 67, No 12, Dec 2001, pp. 1347-1357
- [16] G.N. Watson *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, seconde édition, 1941

Dépôt légal : 2018 – 2^e trimestre
Imprimé à Télécom ParisTech – Paris
ISSN 0751-1345 ENST D (Paris) (France 1983-9999)

