Théories des jeux
(notes de cours)

David A. Madore

5 avril 2021

MITRO206

Git : `f72a51b Mon Apr 5 21:59:38 2021 +0200`

Table des matières

1 Introduction et typologie **2**
1.1 La notion de jeu mathématique : généralités 2
1.2 Quelques types de jeux 3
1.3 Quelques exemples en vrac 5
1.4 Remarques 16
1.5 Plan 16

2 Jeux en forme normale **17**
2.1 Généralités 17
2.2 Équilibres de Nash 19
2.3 Jeux à somme nulle : le théorème du minimax 23

3 Jeux de Gale-Stewart et détermination **27**
3.1 Définitions 27
3.2 Topologie produit 32
3.3 Détermination des jeux ouverts 33
3.4 Détermination des jeux combinatoires 36
3.5 Détermination pour les stratégies positionnelles 38

4 Théorie de l'induction bien-fondée **44**
4.1 Graphes orientés bien-fondés 44
4.2 Généralisations aux graphes non nécessairement bien-fondés 51
4.3 Écrasement transitif 55

5 Introduction aux ordinaux **57**
5.1 Présentation informelle . . . 57
5.2 Ensembles bien-ordonnés et induction transfinie . . . 62
5.3 Comparaison d'ensembles bien-ordonnés, et ordinaux . . . 64
5.4 Ordinaux successeurs et limites . . . 68
5.5 Somme, produit et exponentielle d'ordinaux . . . 69
5.6 Retour sur le jeu de l'hydre . . . 75

6 Jeux combinatoires impartiaux à information parfaite **77**
6.1 Récapitulations . . . 77
6.2 Somme de nim . . . 78

7 Notions sur les combinatoires partisans à information parfaite **85**
7.1 Jeux partisans, ordre, et somme . . . 85
7.2 Lien entre jeux partisans et jeux impartiaux . . . 89
7.3 Les nombres surréels (une esquisse) . . . 91

8 Exercices **94**
8.2 Jeux en forme normale . . . 94
8.3 Jeux de Gale-Stewart et détermination . . . 103
8.5 Introduction aux ordinaux . . . 108
8.6 Jeux combinatoires à information parfaite . . . 111

1 Introduction et typologie

1.1 La notion de jeu mathématique : généralités

1.1.1. Il n'existe pas une théorie des jeux mais *des* théorie*s* des jeux.

Il n'est pas possible de donner une définition générale précise de la notion de « jeu mathématique ». On verra plus loin des définitions précises de certains types de jeux (p. ex., les jeux impartiaux à information parfaite), mais il n'existe pas de définition générale utile qui s'applique à tous ces types, et à partir de laquelle on pourrait développer une théorie intéressante.

Pire, différentes disciplines se sont développées sous le nom de « théorie des jeux », chacune donnant une définition différente de ce qu'est un « jeu ». Par exemple, l'étude des jeux « en forme normale » (=jeux définis par des matrices de gains), la théorie combinatoire des jeux (jeux à information parfaite), la théorie des jeux logiques, la théorie des jeux différentiels, etc. Il n'existe donc pas une mais plusieurs théories des jeux.

Ces différentes théories des jeux intersectent différentes branches des mathématiques ou d'autres sciences : probabilités, optimisation/contrôle, combinatoire, logique, calculabilité, complexité, analyse/EDP ou encore (en-dehors ou en marge des mathématiques), économie, cryptographie, physique quantique, cybernétique, biologie, sociologie, linguistique, philosophie.

Il va de soi qu'on ne pourra dans ce cours donner qu'un aperçu de quelques unes de ces théories des jeux.

1.1.2. Une tentative pour approcher la notion de jeu mathématique : le jeu possède un **état**, qui évolue dans un ensemble (fini ou infini) d'états ou **positions** possibles ; un certain nombre de **joueurs** choisissent, simultanément ou consécutivement, un **coup** à jouer parmi différentes **options**, en fonction de l'état courant, ou peut-être seulement d'une fonction de l'état courant ; ce coup peut éventuellement faire intervenir un aléa (hasard voulu par le joueur) ; l'état du jeu évolue en fonction des coups des joueurs et éventuellement d'un autre aléa (hasard intrinsèque au jeu) ; au bout d'un certain nombre de coups (fini ou infini), la règle du jeu attribue, en fonction de l'état final, ou de son évolution complète, un **gain** à chaque joueur, ce gain pouvant être un réel (gain numérique), l'étiquette « gagné » / « perdu », ou encore autre chose, et chaque joueur cherche en priorité à maximiser son gain (i.e., à gagner le plus possible, ou à gagner tout court), ou dans le cas probabiliste, son espérance de gain.

Mais même cette définition très vague est incomplète !, par exemple dans le cas des jeux différentiels, les coups n'ont pas lieu tour à tour mais continûment.

Une **stratégie** d'un joueur est la fonction par laquelle il choisit son coup à jouer en fonction de l'état du jeu (ou de la fonction de l'état qui lui est présentée), et d'aléa éventuel. On peut ainsi résumer le jeu en : chaque joueur choisit une stratégie, et la règle du jeu définit alors un gain pour chaque joueur. Les stratégies peuvent être contraintes de différentes manières (par exemple : être calculables par une machine de Turing). Une stratégie est dite **gagnante** si le joueur qui l'utilise gagne le jeu (supposé avoir une notion de « joueur gagnant ») quels que soient les coups choisis par l'autre joueur.

Il faut aussi se poser la question de si les joueurs peuvent communiquer entre eux (et si oui, s'ils peuvent prouver leur honnêteté ou s'engager irrévocablement quant au coup qu'ils vont jouer, etc.). Dans certains cas, on peut aussi être amené à supposer que les joueurs ne connaissent pas toute la règle du jeu (voir « information complète » ci-dessous).

1.2 Quelques types de jeux

1.2.1. Le **nombre de joueurs** est généralement 2. On peut néanmoins étudier des jeux multi-joueurs, ce qui pose des questions d'alliances et compliquer la question des buts (un joueur peut être incapable de gagner lui-même mais être en situation de décider quel autre joueur gagnera : on parle de « kingmaker »). On peut aussi étudier des jeux à un seul joueur (jouant contre le hasard), voire à zéro joueurs (systèmes dynamiques), mais ceux-ci relèvent plutôt d'autres domaines. Dans ce cours, on s'intéressera (presque uniquement) aux jeux à deux joueurs.

1.2.2. Les joueurs peuvent avoir **des intérêts communs, opposés, ou toute situation intermédiaire**.

Le cas d'intérêts communs est celui où tous les joueurs ont le même gain. Si les joueurs peuvent parfaitement communiquer, on est alors essentiellement ramené à un jeu à un seul joueur : on s'intéresse donc ici surtout aux situations où la communication est imparfaite.

Le cas de deux joueurs d'intérêts opposés est le plus courant : dans le cas de gains numériques, on le modélise en faisant des gains d'un joueur l'opposé des gains de l'autre — on parle alors de **jeu à somme nulle**; ou bien la règle fera qu'un et un seul joueur aura gagné et l'autre perdu (mais parfois, elle peut aussi admettre le match nul).

Toute autre situation intermédiaire est possible. Mais on conviendra bien que le but de chaque joueur est de maximiser son propre gain, sans considération des gains des autres joueurs.

1.2.3. Le jeu peut être **partial/partisan ou impartial**. Un jeu impartial est un jeu où tous les joueurs sont traités de façon équivalente par la règle (le sens de « équivalent » étant à définir plus précisément selon le type de jeu).

1.2.4. Les coups des joueurs peuvent avoir lieu **simultanément ou séquentiellement**.

Formellement, il s'agit seulement d'une différence de présentation. On peut toujours ramener des coups séquentiels à plusieurs coups simultanés en n'offrant qu'une seule option à tous les joueurs sauf l'un, et réciproquement, on peut ramener des coups simultanés à des coups séquentiels en cachant à chaque joueur l'information de ce que l'autre a joué. La question 1.4.1 est cependant plus intéressante.

1.2.5. Le jeu peut être à **information parfaite** ou non. Un jeu à information parfaite est un jeu dont la règle ne fait pas intervenir le hasard et où chaque joueur joue séquentiellement en ayant la connaissance complète de l'état du jeu et de tous les coups effectués antérieurement par tous les autres joueurs.

(Cette notion est parfois distinguée de la notion plus faible d'**information complète**, qui souligne que les joueurs ont connaissance complète de la *règle* du jeu, i.e., des gains finaux et des options disponibles à chaque joueur. Néanmoins, on peut formellement ramener un jeu à information incomplète en jeu à information complète en regroupant toute l'inconnue sur les règles du jeu dans des coups d'un joueur appelé « la nature ». Dans ce cours, on ne considérera que des jeux à information parfaite [et toute occurrence des mots « information complète » sera probablement un lapsus pour « information parfaite »].)

1.2.6. Le nombre de positions (= états possibles), comme le nombre d'options dans une position donnée, ou comme le nombre de coups, peut être **fini ou infini**. Même si l'étude des jeux finis (de différentes manières) est la plus intéressante pour des raisons pratiques, toutes sortes de jeux infinis peuvent être considérés, par exemple en logique (voir plus loin sur l'axiome de détermination). Pour un jeu à durée infinie, le gagnant pourra être déterminé, par exemple, par toute la suite des coups effectués par les deux joueurs ; on peut même introduire des coups après un nombre infini de coups, etc.

De même, l'ensemble des positions, des options ou des temps peut être **discret ou continu**. Dans ce cours, on s'intéressera presque exclusivement au cas discret (on écartera, par exemple, la théorie des jeux différentiels).

1.3 Quelques exemples en vrac

1.3.1. Le jeu de **pile ou face** entre Pauline et Florian. On tire une pièce non-truquée : si elle tombe sur pile, Pauline gagne, si c'est face, c'est Florian. Aucun des joueurs n'a de choix à faire. Chacun a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, ou une espérance de 0 si les gains sont $+1$ au gagnant et -1 au perdant (il s'agit donc d'un jeu à somme nulle).

Variante entre Alice et Bob : maintenant, Alice choisit « pile » ou « face » avant qu'on (Bob) tire la pièce. Si Alice a bien prévu, elle gagne, sinon c'est Bob. Ici, seule Alice a un choix à faire. Néanmoins, il n'y a pas de stratégie intéressante : la stratégie consistant à choisir « pile » offre la même espérance que celle consistant à choisir « face », et il n'existe pas de stratégie (c'est-à-dire, de stratégie mesurable par rapport à l'information dont dispose Alice) offrant une meilleure espérance.

1.3.2. Variante : Alice choisit « pile » ou « face », l'écrit dans une enveloppe scellée sans la montrer à Bob (elle s'*engage* sur son choix), et Bob, plutôt que tirer une pièce, choisit le côté qu'il montre. Si Alice a bien deviné le choix de Bob, Alice gagne, sinon c'est Bob. Variante : Bob choisit une carte dans un jeu de 52 cartes sans la montrer à Alice, et Alice doit deviner si la carte est noire ou rouge.

Variante équivalente : Alice choisit « Alice » ou « Bob » et Bob choisit simultanément « gagne » ou « perd ». Si la phrase obtenue en combinant ces deux mots est « Alice gagne » ou « Bob perd », alors Alice gagne, si c'est « Alice perd » ou « Bob gagne », alors Bob gagne. Encore une variante : Alice et Bob choisissent simultanément un bit (élément de $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$), si le XOR de ces deux bits vaut `0` alors Alice gagne, s'il vaut `1` c'est Bob. Ce jeu est impartial (même s'il n'est pas parfaitement symétrique entre les joueurs) : Alice n'a pas d'avantage particulier sur Bob (ce qui est assez évident sur ces dernières variantes).

↓Alice, Bob→	0/« gagne »	1/« perd »
0/« Alice »	$+1,-1$	$-1,+1$
1/« Bob »	$-1,+1$	$+1,-1$

La notion de coups simultanés peut se convertir en coups engagés dans une enveloppe scellée (cf. 1.2.4).

On verra, et il est assez facile de comprendre intuitivement, que la meilleure stratégie possible pour un joueur comme pour l'autre, consiste à choisir l'une ou l'autre des deux options offertes avec probabilité $\frac{1}{2}$ (ceci assure une espérance de gain nul quoi que fasse l'autre joueur).

(En pratique, si on joue de façon répétée à ce jeu, il peut être intéressant d'essayer d'exploiter le fait que les humains ont des générateurs aléatoires assez mauvais, et d'arriver à prédire leurs coups pour gagner. Ceci est particulièrement amusant avec des petits enfants. Voir aussi la « battle of wits » du film *Princess Bride* à ce sujet.)

1.3.3. Le jeu de **pierre-papier-ciseaux** : Alice et Bob choisissent simultanément un élément de l'ensemble $\{\text{pierre}, \text{papier}, \text{ciseaux}\}$. S'ils ont choisi le même élément, le jeu est nul ; sinon, papier gagne sur pierre, ciseaux gagne sur papier et pierre gagne sur ciseaux (l'intérêt étant qu'il s'agit d'un « ordre » cyclique, totalement symétrique entre les options). Il s'agit toujours d'un jeu à somme nulle (disons que gagner vaut $+1$ et perdre vaut -1), et cette fois les deux joueurs sont en situation complètement symétrique.

↓Alice, Bob→	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	$0,0$	$-1,+1$	$+1,-1$
Papier	$+1,-1$	$0,0$	$-1,+1$
Ciseaux	$-1,+1$	$+1,-1$	$0,0$

On verra que la meilleure stratégie possible consiste à choisir chacune des options avec probabilité $\frac{1}{3}$ (ceci assure une espérance de gain nul quoi que fasse l'autre joueur).

Ce jeu s'appelle aussi papier-ciseaux-puits, qui est exactement le même si ce n'est que « pierre » s'appelle maintenant « puits » (donc ciseaux gagne sur papier, puits gagne sur ciseaux et papier gagne sur puits) : la stratégie optimale est évidemment la même.

Certains enfants, embrouillés par l'existence des deux variantes, jouent à pierre-papier-ciseaux-puits, qui permet les quatre options, et où on convient que la pierre tombe dans le puits : quelle est alors la stratégie optimale ? il est facile de se convaincre qu'elle consiste à ne jamais jouer pierre (qui est strictement « dominée » par puits), et jouer papier, ciseaux ou puits avec probabilité $\frac{1}{3}$ chacun (cette stratégie garantit un gain au moins nul quoi que fasse l'autre adversaire, et même strictement positif s'il joue pierre avec probabilité strictement positive).

↓Alice, Bob→	Pierre	Papier	Ciseaux	Puits
Pierre	$0, 0$	$-1, +1$	$+1, -1$	$-1, +1$
Papier	$+1, -1$	$0, 0$	$-1, +1$	$+1, -1$
Ciseaux	$-1, +1$	$+1, -1$	$0, 0$	$-1, +1$
Puits	$+1, -1$	$-1, +1$	$+1, -1$	$0, 0$

1.3.4. Le **dilemme du prisonnier** : Alice et Bob choisissent simultanément une option parmi « coopérer » ou « faire défaut ». Les gains sont déterminés par la matrice suivante :

↓Alice, Bob→	Coopère	Défaut
Coopère	$2, 2$	$0, 4$
Défaut	$4, 0$	$1, 1$

Ou plus généralement, en remplaçant $4, 2, 1, 0$ par quatre nombres T (tentation), R (récompense), P (punition) et S (*sucker*) tels que $T > R > P > S$. Ces inégalités font que chaque joueur a intérêt à faire défaut, quelle que soit l'option choisie par l'autre joueur : on se convaincra facilement que le seul équilibre de Nash (cf. 2.2.1) pour ce jeu est celui où Alice et Bob font tous deux défaut ; pourtant, tous les deux reçoivent moins dans cette situation que s'ils coopèrent mutuellement.

Ce jeu a été énormément étudié du point de vue économique, psychologique, politique, philosophique, etc., pour trouver des cadres d'étude justifiant que la coopération est rationnelle, pour expliquer en quoi le jeu itéré (=répété) diffère du jeu simple, ou pour montrer que la notion d'équilibre de Nash est perfectible.

1.3.5. Le jeu du **trouillard**, ou de la **colombe et du faucon**, obtenu en modifiant les gains du dilemme du prisonnier pour pénaliser le double défaut (maintenant appelé rencontre faucon-faucon) plus lourdement que la coopération (colombe) face au défaut. Autrement dit :

↓Alice, Bob→	Colombe	Faucon
Colombe	$2, 2$	$0, 4$
Faucon	$4, 0$	$-4, -4$

Ou plus généralement, en remplaçant $4, 2, 0, -4$ par quatre nombres W (*win*), T (*truce*), L (*loss*) et X (*crash*) tels que $W > T > L > X$. Ces inégalités font que chaque joueur a intérêt à faire le contraire de ce que fait l'autre (si Bob joue faucon, Alice a intérêt à jouer colombe, et si Bob joue colombe, Alice a intérêt à jouer faucon).

(Pour justifier le nom de « jeu du trouillard », on peut évoquer le scénario d'une course de voitures vers une falaise, à la façon du film *La Fureur de vivre* : jouer colombe, c'est arrêter sa voiture avant d'arriver à la falaise, et jouer faucon, c'est ne pas s'arrêter sauf si l'autre s'est arrêté : celui qui s'arrête passe pour un trouillard et perd le jeu, mais si aucun ne s'arrête, les deux voitures tombent dans la falaise, ce qui est pire que de passer pour un trouillard.)

Ce jeu présente par exemple un intérêt en biologie, notamment pour ce qui est de l'évolution des comportements.

On pourra se convaincre que ce jeu a trois équilibres de Nash (cf. 2.2.1 ; en gros, il s'agit d'une situation dans laquelle aucun des joueurs n'améliorerait son gain en changeant *unilatéralement* la stratégie employée) : l'un où Alice joue colombe et Bob joue faucon, un deuxième où c'est le contraire, et un troisième où chacun joue colombe ou faucon avec les probabilités respectives $\frac{L-X}{W-T+L-X}$ et $\frac{W-T}{W-T+L-X}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$), pour un gain espéré de $\frac{LW-TX}{W-T+L-X}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{4}{3}$).

1.3.6. La **guerre des sexes**. Alice et Bob veulent faire du sport ensemble : Alice préfère l'alpinisme, Bob préfère la boxe, mais tous les deux préfèrent faire quelque chose avec l'autre que séparément. D'où les gains suivants :

↓Alice, Bob→	Alpinisme	Boxe
Alpinisme	$2, 1$	$0, 0$
Boxe	$0, 0$	$1, 2$

Ou plus généralement, en remplaçant $2, 1, 0$ par trois nombres P (préféré), Q (autre), N (nul) tels que $P > Q > N$.

Ce jeu présente par exemple un intérêt en sociologie, notamment pour ce qui est de la synchronisation autour d'une ressource commune (par exemple l'adoption d'un standard).

On pourra se convaincre que ce jeu a trois équilibres de Nash (cf. 2.2.1) : l'un où les deux joueurs vont à l'alpinisme, un deuxième où les deux vont à la boxe, et un troisième où chacun va à son activité préférée avec probabilité $\frac{P-N}{P+Q-2N}$ et à l'autre avec probabilité $\frac{Q-N}{P+Q-2N}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$), pour un gain espéré de $\frac{PQ-N^2}{P+Q-2N}$ (avec les valeurs ci-dessus : $\frac{2}{3}$). Remarquablement, ce gain espéré est inférieur à Q.

1.3.7. Le **jeu du partage** ou **de l'ultimatum** : Alice et Bob ont 10 points à se partager : Alice choisit un k entre 0 et 10 entier (disons), la part qu'elle se propose de garder pour elle, *puis* Bob choisit, en fonction du k proposé par Alice, d'accepter ou de refuser le partage : s'il accepte, Alice reçoit le gain k et Bob reçoit le gain $10 - k$, tandis que si Bob refuse, les deux reçoivent 0. Cette fois, il ne s'agit pas d'un jeu à somme nulle !

Variante : Alice choisit k et *simultanément* Bob choisit $\varphi\colon \{0, \ldots, 10\} \to \{\text{accepte}, \text{refuse}\}$. Si $\varphi(k) = \text{accepte}$ alors Alice reçoit k et Bob reçoit $10 - k$, tandis que si $\varphi(k) = \text{refuse}$ alors Alice et Bob reçoivent tous les deux 0. Ceci revient (cf. 1.4.1) à demander à Bob de préparer sa réponse $\varphi(k)$ à tous les coups possibles d'Alice (notons qu'Alice n'a pas connaissance de φ quand elle choisit k, les deux sont choisis simultanément). On se convainc facilement que si Bob accepte k, il devrait aussi accepter tous les $k' \leq k$, d'où la nouvelle :

Variante : Alice choisit k entre 0 et 10 (la somme qu'elle propose de se garder) et *simultanément* Bob choisit ℓ entre 0 et 10 (le maximum qu'il accepte qu'Alice garde pour elle) : si $k \leq \ell$ alors Alice reçoit k et Bob reçoit $10 - k$, tandis que si $k > \ell$ alors Alice et Bob reçoivent tous les deux 0.

Ce jeu peut sembler paradoxal pour la raison suivante : dans la première forme proposée, une fois k choisi, on il semble que Bob ait toujours intérêt à accepter le partage dès que $k < 10$ (il gagnera quelque chose, alors que s'il refuse il ne gagne rien) ; pourtant, on a aussi l'impression que refuser un partage pour $k > 5$ correspond à refuser un chantage (Alice dit en quelque sorte à Bob « si tu n'acceptes pas la petite part que je te laisse, tu n'auras rien du tout »).

Dans la troisième forme, qui est censée être équivalente, on verra qu'il existe plusieurs équilibres de Nash, ceux où $\ell = k$ (les deux joueurs sont d'accord sur le partage) et celui où $k = 10$ et $\ell = 0$ (les deux joueurs demandent tous les deux la totalité du butin, et n'obtiennent rien).

1.3.8. Un jeu idiot : Alice et Bob choisissent simultanément chacun un entier naturel. Celui qui a choisi le plus grand gagne (en cas d'égalité, on peut déclarer le nul, ou décider arbitrairement qu'Alice gagne — ceci ne changera rien au problème). Ce jeu résiste à toute forme d'analyse intelligente, il n'existe pas de stratégie gagnante (ni d'équilibre de Nash, cf. plus haut), on ne peut rien en dire d'utile.

Cet exemple sert à illustrer le fait que dans l'étude des jeux sous forme normale, l'hypothèse de finitude des choix sera généralement essentielle.

1.3.9. Le jeu d'un graphe : soit G un graphe orienté (cf. 4.1.1 ci-dessous pour la définition) et x_0 un sommet de G. Partant de x_0, Alice et Bob choisissent tour à tour une arête à emprunter pour arriver dans un nouveau sommet (c'est-à-dire : Alice choisit un voisin sortant x_1 de x_0, puis Bob un voisin sortant x_2 de x_1, puis Alice x_3 de x_2 et ainsi de suite). *Le perdant est celui qui ne peut plus jouer*, et si ceci ne se produit jamais (si on définit un chemin infini $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$) alors la partie est déclarée nulle (ceci ne peut pas se produire lorsque le graphe G est « bien-fondé »). On verra qu'il s'agit là du cadre général dans lequel on étudie la théorie combinatoire des jeux impartiaux à information parfaite (cf. 3.4.1), et qu'un des joueurs a forcément une stratégie gagnante ou bien les deux joueurs une stratégie assurant le nul (si le nul est possible) (cf. 3.4.4).

Dans une variante du jeu, celui qui ne peut plus jouer gagne au lieu de perdre : on parle alors de la variante « misère » du jeu.

On peut aussi considérer un graphe dont les arêtes peuvent être coloriées de trois couleurs possibles : des arêtes rouges, qui ne peuvent être suivies que par Alice, des arêtes bleues, qui ne peuvent être suivies que par Bob, et des arêtes vertes (équivalentes à une arête rouge *et* une arête bleue entre les mêmes deux sommets), qui peuvent être suivies par l'un ou l'autre joueur (le cas précédent est donc équivalent à celui d'un graphe entièrement vert). Il s'agira là du cadre général dans lequel on étudie la théorie combinatoire des jeux *partiaux* à information parfaite : on verra que, si le nul est rendu impossible, quatre cas sont possibles (Alice a une stratégie gagnante qui que soit le joueur qui commence, ou Bob en a une, ou le premier joueur a une stratégie gagnante, ou le second en a une).

1.3.10. Le **jeu de nim** : un certain nombre d'allumettes sont arrangées en plusieurs lignes ; chacun leur tour, Alice et Bob retirent des allumettes, au moins une à chaque fois, et autant qu'ils veulent, mais *d'une ligne seulement* ; le gagnant est celui qui retire la dernière allumette (de façon équivalente, le perdant est celui qui ne peut pas jouer). Autrement dit, une position du jeu de nim est une suite finie $(n_1, \ldots, n_r)$ d'entiers naturels (représentant le nombre d'allumettes de chaque ligne), et un coup possible à partir de cette position consiste à aller vers l'état $(n'_1, \ldots, n'_r)$ où $n'_i = n_i$ pour tout i sauf exactement un pour lequel $n'_i < n_i$. Il s'agit ici d'un jeu à deux joueurs impartial à connaissance parfaite (un cas particulier du jeu général défini en 1.3.9). On verra en 6.2 que la théorie de Grundy permet de décrire exactement la stratégie gagnante : en anticipant sur la suite, il s'agit de calculer le XOR (= « ou exclusif », appelé aussi *somme de nim* dans ce contexte des nombres n_i d'allumettes des différentes lignes (écrits en binaire) : ce XOR s'appelle la *fonction de Grundy* de la position, et le jeu est gagnable par le second joueur (c'est-à-dire, celui qui *vient de* jouer) si et seulement cette fonction de Grundy vaut 0. (À titre d'exemple, la position de départ la plus courante du jeu de nim est $(1, 3, 5, 7)$, et comme $\texttt{001} \oplus \texttt{011} \oplus \texttt{101} \oplus \texttt{111} = \texttt{000}$ en binaire, en notant $\oplus$ pour le XOR, le second joueur a une stratégie gagnante.)

On peut aussi jouer à la variante « misère » du jeu : celui qui prend la dernière allumette a perdu (cf. le film *L'année dernière à Marienbad*) ; néanmoins, elle se ramène assez facilement à la variante « normale » (où celui qui prend la dernière allumette a gagné), cette dernière ayant plus d'intérêt mathématique.

Le jeu de nim apparaît sous différents déguisements. On peut par exemple évoquer le suivant, complètement équivalent à ce qu'on vient de dire : on place r jetons sur un plateau formé d'une seule ligne dont les cases sont numérotées $0, 1, 2, 3, \ldots$ (de la gauche vers la droite, pour fixer les idées). Chacun tour à tour déplace un jeton vers la gauche ; plusieurs jetons ont le droit de se trouver sur la même case, et ils peuvent passer par-dessus l'un l'autre. Le perdant est celui qui ne peut plus jouer (parce que tous les jetons sont sur la case la plus à gauche, 0). Il s'agit exactement du jeu de nim, en considérant que la position où les jetons sont sur les cases $n_1, \ldots, n_r$ correspond à celle du jeu de nim où il y a $n_1, \ldots, n_r$

allumettes sur les différentes lignes. C'est ce point de vue qui suggère le type de jeux suivant :

1.3.11. Jeux de **retournement de pièces**. Ici une position est une rangée de pièces (qui pourront être numérotées, de la gauche vers la droite, de 0 à $N-1$ ou de 1 à N, selon la commodité du jeu), chacune en position « pile vers le haut » (qu'on notera `0`) ou « face vers le haut » (`1`). Chaque joueur tour à tour va retourner certaines pièces selon des règles propres au jeu, avec toujours la règle générale que *au moins une pièce est retournée, et la plus à droite à être retournée doit passer de face à pile* (d'autres pièces peuvent passer de pile à face, et d'autres pièces plus à droite peuvent rester sur pile ou rester sur face, mais la plus à droite parmi les pièces qui se font retourner devait être face avant le mouvement et devient du coup pile). Cette règle générale assure que le nombre binaire formé de l'ensemble des pièces, lues de la droite vers la gauche, diminue strictement à chaque coup, et donc que le jeu termine forcément en temps fini. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

Il faut bien sûr mettre des règles supplémentaires restreignant les retournements possibles, sinon le jeu n'a aucun intérêt (le premier joueur met toutes les pièces à montrer pile et gagne immédiatement). Quelques exemples de telles règles peuvent être :

— On ne peut retourner qu'une pièce à chaque coup. Dans ce cas, seul importe le nombre de pièces montrant face, et les joueurs n'ont essentiellement aucun choix dans le coup à jouer : peu importe la pièce retournée (qui passe forcément de face à pile) ; si le nombre de pièces montrant face est pair, le second joueur gagne, tandis que s'il est impair, c'est le premier qui gagne. Ce jeu est très peu intéressant.

— On retourne exactement deux pièces à chaque coup (toujours avec la règle générale que la plus à droite des deux passe de face à pile). Il s'agit de nouveau du jeu de nim déguisé (mais un peu mieux) : si les pièces sont numérotées à partir de 0 (la plus à gauche), retourner les pièces n et $n' < n$ peut se comprendre comme faire passer une ligne d'allumettes de n à n' allumettes, avec la différence que deux lignes identiques disparaissent mais on peut montrer que cette différence n'a aucun impact sur le jeu de nim (essentiellement parce que deux lignes identiques s'« annulent » : si un joueur prend des allumettes de l'une, l'autre peut faire le même coup sur l'autre).

— On retourne *une ou deux* pièces (toujours avec la règle générale que la plus à droite des deux passe de face à pile). Il s'agit encore une fois de nim déguisé, mais cette fois en numérotant les pièces à partir de 1 (retourner une seule pièce revient à vider une ligne de nim, en retourner deux revient à diminuer le nombre de pièces d'une ligne).

— On retourne *au plus trois* pièces (toujours avec la règle générale). On peut décrire la stratégie gagnante dans ce jeu en rapport avec le code de parité binaire. Plus généralement, les jeux où on retourne au plus s pièces peuvent, pour les petites valeurs de s, être reliés à des codes correcteurs remarquables.

— On retourne n'importe quel nombre de pièces, mais elles doivent être consécutives (et toujours avec la règle générale que la pièce retournée la plus à droite passe de face à pile). Il est assez facile de décrire la stratégie gagnante de ce jeu.

On peut aussi considérer des jeux de retournement de pièces bidimensionnels : une position est alors un damier, par exemple avec M lignes et N colonnes (qu'on peut donc repérer comme $\{0, \ldots, M-1\} \times \{0, \ldots, N-1\}$) avec une pièce à chaque case, qui peut montrer pile ou face. Donnons juste un exemple de tel jeu : chaque joueur peut retourner soit une seule pièce, soit exactement deux pièces de la même ligne, soit exactement deux pièces de la même colonne, soit exactement quatre pièces formant les quatre sommets d'un rectangle (i.e., définies par l'intersection de deux lignes et de deux colonnes), avec la contrainte supplémentaire que dans chaque cas la pièce la plus en bas à droite de celles retournées doit passer de face à pile.

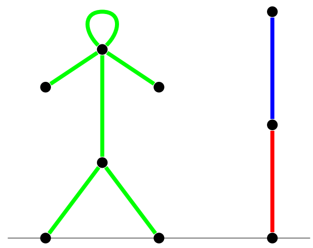
1.3.12. Le jeu de **chomp** ou de la tablette de chocolat (ou gaufre) empoisonnée.

On part d'une « tablette de chocolat » de taille $m \times n$, c'est-à-dire le produit $\{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, n-1\}$ dont les éléments (les couples (i, j) avec $0 \leq i < m$ et $0 \leq j < n$) sont appelés les « carrés » de la tablette ; un état général du jeu sera un sous-ensemble de ce produit (l'ensemble des carrés restant à manger). Le carré $(0, 0)$ est empoisonné et le but est de ne pas le manger. Un coup consiste à choisir un carré (i, j) où mordre dans la tablette, ce qui fait disparaître tous les carrés (i', j') avec $i' \geq i$ et $j' \geq j$. Chaque joueur, tour à tour, effectue un coup de la sorte, et le premier à mordre dans la case empoisonnée $(0, 0)$ a perdu (de façon équivalente, on ne peut pas mordre dedans, ce qui se ramène au formalisme général où le premier qui ne peut pas jouer a perdu).

On ne sait pas décrire la stratégie gagnante en général, mais on peut montrer que, partant d'une tablette rectangulaire (ou carrée) $m \times n$ (par opposition à une forme irrégulière quelconque), le *premier joueur* a forcément une stratégie gagnante. En effet, en admettant provisoirement (cf. 3.4.4) qu'un des deux joueurs a une stratégie gagnante, montrons qu'il s'agit forcément du premier ; pour cela, supposons par l'absurde que le second joueur ait une stratégie gagnante, et considérons la réponse (i, j) préconisée par cette stratégie si le premier joueur joue en mordant la case $(m-1, n-1)$ opposée à la case empoisonnée : à partir de l'état obtenu en jouant cette réponse (i.e., toutes les cases (i', j') avec $i' \geq i$ et $j' \geq j$ ont été mangées), le joueur qui vient de jouer est censé avoir une stratégie gagnante ; mais si le premier joueur jouait directement en mordant en (i, j), il se ramènerait à cet état, les rôles des joueurs étant inversés, donc il aurait une stratégie gagnante, et cela signifie qu'il en a une dès le premier tour.

1.3.13. Le jeu de **Hackenbush** impartial, bicolore, ou tricolore.

Dans ce jeu, l'état est défini par un dessin, plus précisément un graphe non orienté, pouvant avoir des arêtes multiples et des arêtes reliant un sommet à lui-même, dont certains sommets sont « au sol » (graphiquement représentés en les plaçant sur une droite horizontale en bas du dessin). Chaque sommet et chaque arête doit être « relié au sol », c'est-à-dire atteignable depuis un sommet au sol par une succession d'arêtes. De plus, dans le cas de Hackenbush bicolore, chaque arête est coloriée rouge ou bleue, dans le cas de Hackenbush tricolore elle peut aussi être verte, et dans le cas de Hackenbush impartial il n'y a pas de couleur, ou, si on préfère, toutes les arêtes sont vertes.

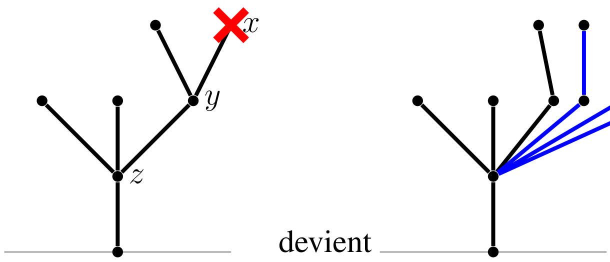


(Un état possible de Hackenbush.)

Alice et Bob jouent tour à tour, chacun efface une arête du dessin, ce qui fait disparaître du même coup toutes les arêtes et tous les sommets qui ne sont plus reliés au sol. (Par exemple, dans le dessin représenté ci-dessus, si on efface l'arête rouge, l'arête bleue au-dessus disparaît immédiatement ; si on efface l'une des deux arêtes vertes reliées au sol, les « jambes » du « bonhomme » vert, rien de particulier ne se passe mais si on efface la deuxième, toutes les arêtes vertes disparaissent.) Dans le jeu de Hackenbush impartial, n'importe quel joueur peut effacer n'importe quelle arête ; dans le jeu bicolore, seule Alice peut effacer les arêtes rouges et seul Bob peut effacer les arêtes bleues ; dans le jeu tricolore, les arêtes vertes sont effaçables par l'un ou l'autre joueur (mais dans tous les cas, la disparition des arêtes non reliées au sol est automatique). Le jeu se termine quand un joueur ne peut plus jouer, auquel cas il a perdu (au Hackenbush impartial, cela signifie que le jeu se termine quand un joueur finit de faire disparaître le dessin, auquel cas il a gagné ; au Hackenbush bicolore ou tricolore, il se peut bien sûr qu'il reste des arêtes de la couleur du joueur qui vient de jouer).

Le jeu de Hackenbush impartial possède une stratégie gagnante soit par le premier soit par le second joueur (le dessin formé uniquement des arêtes vertes ci-dessus, par exemple, est gagnable par le premier joueur, le seul coup gagnant consistant à effacer le « corps » du « bonhomme » pour ne laisser que ses jambes). Le jeu de Hackenbush bicolore possède une stratégie gagnante soit pour Alice, soit pour Bob, soit pour le second joueur, mais jamais pour le premier (le dessin formé par les arêtes rouge et bleue ci-dessus, par exemple, est gagnable par Alice). Le jeu de Hackenbush tricolore possède une stratégie gagnante soit pour Alice, soit pour Bob, soit pour le premier joueur, soit pour le second (l'ensemble du dessin ci-dessus, par exemple, est gagnable par Alice).

1.3.14. Le **jeu de l'hydre** : Hercule essaie de terrasser l'hydre. Le joueur qui joue l'hydre commence par dessiner (i.e., choisir) un arbre (fini, enraciné), la forme initiale de l'hydre. Puis Hercule choisit une *tête* de l'hydre, c'est-à-dire une feuille x de l'arbre, et la décapite en la supprimant de l'arbre. L'hydre se reproduit alors de la façon suivante : soit y le nœud parent de x dans l'arbre, et z le nœud parent de y (grand-parent de x, donc) : si l'un ou l'autre n'existe pas, rien ne se passe (l'hydre passe son tour) ; sinon, l'hydre choisit un entier naturel n (aussi grand qu'elle veut) et attache à z autant de nouvelles copies de y (mais sans la tête x qui a été décapitée) qu'elle le souhaite. Hercule gagne s'il réussit à décapiter le dernier nœud de l'hydre ; l'hydre gagnerait si elle réussissait à survivre indéfiniment.



Ce jeu est particulier en ce que, mathématiquement, non seulement Hercule possède une stratégie gagnante, mais en fait Hercule gagne *toujours*, quoi qu'il fasse et quoi que fasse l'hydre (cf. 5.6). Pourtant, en pratique, l'hydre peut facilement s'arranger pour survivre un temps inimaginablement long.

1.3.15. Le **jeu topologique de Choquet** : soit X un espace métrique (ou topologique) fixé à l'avance. Uriel et Vania choisissent tour à tour un ouvert non vide de (X contenu dans) l'ouvert précédemment choisi : i.e., Uriel choisit $\varnothing \neq U_0 \subseteq X$, puis Vania choisit $\varnothing \neq V_0 \subseteq U_0$, puis Uriel choisit $\varnothing \neq U_1 \subseteq V_0$ et ainsi de suite. Le jeu continue pendant un nombre infini de tours indicés par les entiers naturels. À la fin, on a bien sûr $\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} V_n$: on dit qu'Uriel gagne le jeu si cette intersection est vide, Vania le gagne si elle est non-vide. On peut se convaincre que si $X = \mathbb{Q}$, alors Uriel possède une stratégie gagnante, tandis que si $X = \mathbb{R}$ c'est Vania qui en a une.

1.3.16. Les **jeux de Gale-Stewart** (cf. partie 3) : soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ou de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ou de $[0,1]$. Alice et Bob choisissent tour à tour un élément de $\mathbb{N}$ (dans le premier cas) ou de $\{0,1\}$ (dans les deux suivants). Ils jouent un nombre infini de tours, « à la fin » desquels la suite de leurs coups définit un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

ou de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ou, en les considérant comme la suite des chiffres binaires d'un réel commençant par $0.$, de $[0,1]$: si cet élément appartient à A, Alice gagne, sinon c'est Bob (la partie n'est jamais nulle). *Il n'est pas vrai* qu'un des deux joueurs possède forcément une stratégie gagnante.

1.3.17. Considérons le jeu suivant : Turing choisit publiquement une machine de Turing (i.e., un programme sur ordinateur) et Blanche (son adversaire) doit répondre soit « elle termine en n étapes » où n est un entier naturel (explicite), soit « elle ne termine pas ». Dans le premier cas, on lance l'exécution de la machine de Turing sur n étapes, et si elle termine bien dans le temps annoncé, Blanche a gagné, sinon c'est Turing qui a gagné. Dans le second cas (i.e., si Blanche a annoncé « elle ne termine pas »), c'est à Turing d'annoncer soit « si, elle termine en m étapes » où m est un entier naturel (explicite), soit « en effet, elle ne termine pas ». Dans le premier sous-cas, on lance l'exécution de la machine de Turing sur m étapes, et si elle termine bien dans le temps annoncé, Turing a gagné, sinon c'est Blanche qui a gagné. Dans le second sous-cas (i.e., si Turing a confirmé « en effet, elle ne termine pas »), Blanche a gagné.

Dit de façon plus simple : Turing propose à Blanche de décider l'arrêt d'une machine de Turing ; si Blanche prédit l'arrêt, elle doit donner le nombre d'étapes et on peut vérifier cette affirmation ; si elle prédit le contraire, c'est à Turing de la contredire le cas échéant par une affirmation d'arrêt, qui sera elle aussi vérifiée.

La règle du jeu peut être implémentée algorithmiquement : i.e., on peut vérifier (sur une machine de Turing !) qui gagne ou qui perd en fonction des coups joués (puisque à chaque fois on fait des vérifications finies). Néanmoins, aucun des joueurs n'a de stratégie gagnante *algorithmique* (i.e., choisissant un coup algorithmiquement en fonction des coups antérieurs). En fait, Turing n'a pas de stratégie gagnante du tout (quelle que soit la machine qu'il choisit au premier coup, Blanche *pourrait* répondre correctement auquel cas Turing ne gagne pas). Mais Blanche n'a pas de stratégie gagnante algorithmique, car cela reviendrait à résoudre le problème de l'arrêt.

Cet exemple illustre le fait qu'on ne peut pas espérer avoir un algorithme qui calcule un coup gagnant dans n'importe quel jeu même si on se limite aux jeux dont le gain est calculable algorithmiquement.

(On peut remplacer le problème de l'arrêt par n'importe quel problème semi-décidable : si $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction algorithmiquement calculable dont l'image n'est pas décidable, Turing choisit un élément y de $\mathbb{N}$, Blanche doit soit répondre « $y = f(n)$ » pour un n explicite soit « y n'est pas dans l'image », auquel cas Turing peut soit rétorquer « si, $y = f(m)$ » soit concéder que y n'est pas dans l'image. Autre exemple : Turing choisit un énoncé mathématique, Blanche doit soit le démontrer soit dire que ce n'est pas un théorème, et dans le second cas c'est à Turing de le démontrer.)

1.4 Remarques

1.4.1. La question suivante mérite l'attention : supposons que, dans un jeu, deux joueurs aient à jouer deux coups successifs, disons que le joueur A choisit une option x parmi un certain ensemble E (typiquement fini), *puis* le joueur B choisit, en connaissant le x choisi par A, une option y parmi un certain ensemble F (typiquement fini). Revient-il au même de demander de choisir *simultanément* pour A un élément de E et pour B un élément de l'ensemble F^E des fonctions de E dans F ? L'idée étant que B choisit la fonction φ qui, selon le coup $x \in E$ joué par A, déterminera le coup $y := \varphi(x) \in F$ qu'il joue en réponse. Au moins si E est fini, on peut imaginer que B considère mentalement tous les coups que A pourra jouer et choisit la réponse qu'il y apporterait, déterminant ainsi la fonction φ (si on préfère, φ est une stratégie locale pour le prochain coup de B).

En principe, les jeux ainsi considérés (le jeu initial, et celui où on a demandé à B d'anticiper son choix en le remplaçant par une fonction du choix de A) devraient être équivalents. En pratique, il se peut qu'on les analyse différemment pour différentes raisons.

Notons que si on permet ou oblige B à communiquer à A la fonction φ qu'il a choisie, i.e., à s'*engager* irrévocablement sur le coup y qu'il jouerait selon le coup x de A, on peut véritablement changer le jeu.

1.5 Plan

La partie 2 concerne les jeux en forme normale et la notion d'équilibre de Nash : on gardera donc à l'esprit les exemples tels que le dilemme du prisonnier (1.3.4), le trouillard (1.3.5) et la bataille des sexes (1.3.6). On évoque plus particulièrement les jeux à somme nulle en 2.3 : on pensera alors à des jeux comme pierre-papier-ciseaux (cf. 1.3.3).

La partie 3 introduit la notion de jeux de Gale-Stewart et prouve un théorème fondamental de détermination (la détermination des jeux *ouverts*).

La partie 4 introduit la notion de graphe bien-fondée et d'induction bien-fondée qui est essentielle pour la suite. La partie 5 introduit la notion d'ordinaux qui permet de généraliser beaucoup de résultats du fini à l'infini.

La partie 6 concerne la théorie, dite « combinatoire », des jeux impartiaux à information parfaite, dont le modèle est décrit en 1.3.9 (sans coloriage) et dont l'archétype est le jeu de nim (cf. 1.3.10) ou le Hackenbush impartial (=vert) (cf. 1.3.13).

On parlera ensuite rapidement dans la partie 7 des jeux *partisans* à information parfaite, dont l'archétype est le Hackenbush bicolore ou tricolore, et de la théorie des nombres surréels de Conway.

2 Jeux en forme normale

2.0.1. Pour cette section, on rappelle les définitions suivants : une **combinaison affine** ou **combinaison barycentrique** d'éléments $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ est une expression de la forme $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in \mathbb{R}^n$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ vérifient $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ (on peut donc, si on préfère, la définir comme une expression de la forme $\frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ vérifient $\sum_{i=1}^m \lambda_i \neq 0$: on parle alors de **barycentre** de $x_1, \ldots, x_m$ affecté des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$).

Une **combinaison convexe** est une combinaison affine $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont *positifs* ($\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$) et vérifient $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, autrement dit, c'est un barycentre affecté de coefficients positifs (non tous nuls).

Un **convexe** de $\mathbb{R}^m$ est une partie stable par combinaisons convexes (c'est-à-dire que C est dit convexe lorsque si $x_1, \ldots, x_m \in C$ et $\lambda_1, \ldots \lambda_m \geq 0$ vérifient $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ alors $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in C$).

Une **application affine** $u\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ est une fonction qui préserve les combinaisons affines (autrement dit, si $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ alors $u\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^m \lambda_i u(x_i)$). Il revient au même de dire que u est la somme d'une constante (dans $\mathbb{R}^q$) et d'une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$.

2.1 Généralités

Définition 2.1.1. Un **jeu en forme normale** à N joueurs est la donnée de N ensembles finis $A_1, \ldots, A_N$ et de N fonctions $u_1, \ldots, u_N\colon A \to \mathbb{R}$ où $A := A_1 \times \cdots \times A_N$.

Un élément de A_i s'appelle une **option** ou **stratégie pure** pour le joueur i. Un élément de $A := A_1 \times \cdots \times A_N$ s'appelle un **profil de stratégies pures**. La valeur $u_i(a)$ de la fonction u_i sur un $a \in A$ s'appelle le **gain** du joueur i selon le profil a.

Le jeu doit se comprendre de la manière suivante : chaque joueur choisit une option $a_i \in A_i$ indépendamment des autres, et chaque joueur reçoit un gain égal à la valeur $u_i(a_1, \ldots, a_n)$ définie par le profil $(a_1, \ldots, a_n)$ des choix effectués par tous les joueurs. Le but de chaque joueur est de maximiser son propre gain.

On utilisera le terme « option » ou « stratégie pure » selon qu'on veut souligner que le joueur i choisit effectivement a_i ou décide a priori de faire forcément ce choix-là. Cette différence vient du fait que les joueurs peuvent également jouer de façon probabiliste, ce qui amène à introduire la notion de stratégie mixte :

Définition 2.1.2. Donné un ensemble B fini d'« options », on appelle **stratégie mixte** sur B une fonction $s\colon B \to \mathbb{R}$ telle que $s(b) \geq 0$ pour tout $b \in B$ et $\sum_{b \in B} s(b) = 1$: autrement dit, il s'agit d'une distribution de probabilités sur B.

Le **support** de s est l'ensemble des options $b \in B$ pour lesquelles $s(b) > 0$.

Parfois, on préférera considérer la stratégie comme la combinaison formelle $\sum_{b\in B} s(b)\cdot b$ (« formelle » signifiant que le produit $t\cdot b$ utilisé ici n'a pas de sens intrinsèque : il est défini par son écriture ; l'écriture $\sum_{b\in B} s(b)\cdot b$ est donc une simple notation pour s). Autrement dit, ceci correspond à voir une stratégie mixte comme une combinaison convexe d'éléments de B, i.e., un point du simplexe affine dont les sommets sont les éléments de B. En particulier, un élément b de B (stratégie pure) sera identifié à l'élément de S_B qui affecte le poids 1 à b et 0 à tout autre élément.

En tout état de cause, l'ensemble S_B des stratégies mixtes sur B sera vu (notamment comme espace topologique) comme le fermé de $\mathbb{R}^B$ défini par l'intersection des demi-espaces de coordonnées positives et de l'hyperplan défini par la somme des coordonnées égale à 1.

Définition 2.1.3. Pour un jeu comme défini en 2.1.1, une stratégie mixte pour le joueur i est donc une fonction $s\colon A_i \to \mathbb{R}$ comme on vient de le dire. On notera parfois S_i l'ensemble des stratégies mixtes du joueur i. Un **profil de stratégies mixtes** est un élément du produit cartésien $S := S_1 \times \cdots \times S_N$.

Plus généralement, si $I \subseteq \{1,\dots,N\}$ est un ensemble de joueurs, un élément du produit $S_I := \prod_{j\in I} S_j$ s'appellera un profil de stratégies mixtes pour l'ensemble I de joueurs ; ceci sera notamment utilisé si $I = \{1,\dots,N\} \setminus \{i\}$ est l'ensemble de tous les joueurs sauf le joueur i, auquel cas on notera $S_{?i} := \prod_{j\neq i} S_j$ l'ensemble des profils. Naturellement, si chaque composante est une stratégie pure, on pourra parler de profil de stratégies pures.

2.1.4. Il va de soi qu'un profil de stratégies mixtes, i.e., un élément de $S := S_1 \times \cdots \times S_N$, i.e., la donnée d'une distribution de probabilité sur chaque A_i, n'est pas la même chose qu'une distribution de probabilités sur $A := A_1 \times \cdots \times A_N$. Néanmoins, on peut voir les profils de stratégies mixtes comme des distributions particulières sur A, à savoir celles pour lesquelles les marginales (i.e., les projections sur un des A_i) sont indépendantes. Concrètement, ceci signifie que donné $(s_1,\dots,s_N) \in S$, on en déduit un $s\colon A \to \mathbb{R}$, aussi une distribution de probabilité, par la définition suivante : $s(a_1,\dots,a_N) = s_1(a_1)\cdots s_N(a_N)$ (produit des $s_i(a_i)$). On identifiera parfois abusivement l'élément $(s_1,\dots,s_N) \in S$ à la distribution $s\colon A \to \mathbb{R}$ qu'on vient de décrire (ce n'est pas un problème car s_i se déduit de s : précisément, $s_i(b) = \sum_{a\,:\,a_i=b} s(a)$ où la somme est prise sur les $a \in A$ tels que $a_i = b$).

(Il faudra prendre garde au fait qu'on peut voir S soit comme une partie $S_1\times\cdots\times S_N$ de $\mathbb{R}^{A_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{A_N}$ formé des N-uplets $(s_1,\dots,s_N)$, soit comme la partie de $\mathbb{R}^A = \mathbb{R}^{A_1\times\cdots\times A_N}$ formé des fonctions de la forme $s\colon (a_1,\dots,a_N) = s_1(a_1)\cdots s_N(a_N)$ comme on l'a expliqué au paragraphe précédent. Ces deux points de vue ont un sens et ont parfois un intérêt, mais ils ne partagent pas les mêmes propriétés. Par exemple, S est convexe en tant que partie $S_1 \times \cdots \times S_N$ de $\mathbb{R}^{A_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{A_N}$, mais pas en tant que partie de $\mathbb{R}^A$.)

Ceci conduit à faire la définition suivante :

Définition 2.1.5. Donné un jeu en forme normale comme en 2.1.1, si $s := (s_1, \ldots, s_N) \in S_1 \times \cdots \times S_N$ est un profil de stratégies mixtes, on appelle **gain [espéré]** du joueur i selon ce profil la quantité

$$u_i(s) := \sum_{a \in A} s_1(a_1) \cdots s_N(a_N)\, u_i(a)$$

(ceci définit u_i comme fonction de $S_1 \times \cdots \times S_N$ vers $\mathbb{R}$).

Selon l'approche qu'on veut avoir, on peut dire qu'on a défini $u_i(s)$ comme l'espérance de $u_i(a)$ si chaque a_j est tiré indépendamment selon la distribution de probabilité s_i ; ou bien qu'on a utilisé l'unique prolongement de u_i au produit des simplexes S_i qui soit affine en chaque variable s_i.

2.2 Équilibres de Nash

Définition 2.2.1. Donné un jeu en forme normale comme en 2.1.1, si $1 \leq i \leq N$ et si $s_? := (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_N) \in S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_N$ est un profil de stratégies mixtes pour tous les joueurs autres que le joueur i, on dit que la stratégie mixte $s_! \in S_i$ est une **meilleure réponse** (resp. la meilleure réponse **stricte**) contre $s_?$ lorsque pour tout $t \in S_i$ on a $u_i(s_?, s_!) \geq u_i(s_?, t)$ (resp. lorsque pour tout $t \in S_i$ différent de $s_!$ on a $u_i(s_?, s_!) > u_i(s_?, t)$), où $(s_?, t)$ désigne l'élément de $S_1 \times \cdots \times S_N$ obtenu en insérant $t \in S_i$ comme i-ième composante entre s_{i-1} et s_{i+1}, c'est-à-dire le gain [espéré] obtenu en jouant t contre $s_?$.

Un profil de stratégies mixtes $s = (s_1, \ldots, s_N)$ (pour l'ensemble des joueurs) est dit être un **équilibre de Nash** (resp., un équilibre de Nash **strict**) lorsque pour tout $1 \leq i \leq N$, la stratégie s_i pour le joueur i est une meilleure réponse (resp. la meilleure réponse stricte) contre le profil $s_{?i}$ pour les autres joueurs obtenu en supprimant la composante s_i de s.

Proposition 2.2.2. Donné un jeu en forme normale comme en 2.1.1, si $1 \leq i \leq N$ et si $s_?$ est un profil de stratégies mixtes pour tous les joueurs autres que le joueur i, il existe une meilleure réponse pour le joueur i qui est une stratégie pure. De plus, si $s_!$ (stratégie mixte) est une meilleure réponse contre $s_?$ si et seulement si *chaque* stratégie pure appartenant au support de $s_!$ est une meilleure réponse possible contre $s_?$; et elles apportent toutes le même gain.

En particulier, une meilleure réponse stricte est nécessairement une stratégie pure.

Démonstration. Tout ceci résulte du fait que le gain espéré $u_i(s_?, t)$ est une fonction affine de $t \in S_i$ (et une fonction affine sur un simplexe prend son maximum — ou son minimum — sur un des sommets de ce simplexe, et ne peut le prendre à l'intérieur que si elle prend aussi cette valeur sur les sommets).

Plus précisément : $u_i(s_?, t)$ (pour $t \in S_i$) est combinaison convexe avec pour coefficients $t(a)$ pour $a \in A_i$, des $u_i(s_?, a)$. Si v est le maximum des $u_i(s_?, a)$ (qui sont en nombre fini donc ce maximum existe), alors v est aussi le maximum de toute combinaison convexe $u_i(s_?, t)$ des $u_i(s_?, a)$: c'est-à-dire que $t \in S_i$ est une meilleure réponse possible contre $s_?$ si et seulement si $u_i(s_?, t) = v$. En particulier, tout $a \in A_i$ qui réalise ce maximum v est une meilleure réponse possible (contre $s_?$) qui est une stratégie pure. D'autre part, une combinaison convexe $u_i(s_?, t)$ de valeurs $\leq v$ ne peut être égale à v que si toutes les valeurs $u_i(s_?, a)$ entrant effectivement (c'est-à-dire avec un coefficient > 0) dans la combinaison sont égales à v (s'il y en avait une $< v$, elle entraînerait forcément une moyenne pondérée $< v$), et réciproquement. ☺

Théorème 2.2.3 (John Nash, 1951)**.** Pour un jeu en forme normale comme en 2.1.1, il existe un équilibre de Nash.

Pour démontrer le théorème en question, on utilise (et on admet) le théorème du point fixe de Brouwer, qui affirme que :

Théorème 2.2.4 (L. E. J. Brouwer, 1910)**.** Si K est un convexe compact de $\mathbb{R}^m$, et que $T\colon K \to K$ est continue, alors il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$ (un *point fixe* de T, donc).

L'idée intuitive de la démonstration suivante est : partant d'un profil s de stratégies, on peut définir continûment un nouveau profil $s^\sharp$ en donnant plus de poids aux options qui donnent un meilleur gain au joueur correspondant — si bien que $s^\sharp$ sera différent de s dès que $s^\sharp$ n'est pas un équilibre de Nash. Comme la fonction $T\colon s \mapsto s^\sharp$ doit avoir un point fixe, ce point fixe sera un équilibre de Nash.

Démonstration de 2.2.3. Si $s \in S$ et $1 \leq i \leq N$, convenons de noter $s_{?i}$ l'effacement de la composante s_i (c'est-à-dire le profil pour les joueurs autres que i). Si de plus $b \in A_i$, notons $\varphi_{i,b}(s) = \max(0,\ u_i(s_{?i}, b) - u_i(s))$ l'augmentation du gain du joueur i si on remplace sa stratégie s_i par la stratégie pure b en laissant le profil $s_{?i}$ des autres joueurs inchangé (ou bien 0 s'il n'y a pas d'augmentation). On remarquera que s est un équilibre de Nash si et seulement si les $\varphi_{i,b}(s)$ sont nuls pour tout $1 \leq i \leq N$ et tout $b \in A_i$ (faire appel à la proposition précédente pour le « si »). On remarquera aussi que chaque $\varphi_{i,b}$ est une fonction continue sur S.

Définissons maintenant $T\colon S \to S$ de la façon suivante : si $s \in S$, on pose $T(s) = s^\sharp$, où $s^\sharp = (s_1^\sharp, \ldots, s_N^\sharp)$ avec $s_i^\sharp$ le barycentre de s_i avec coefficient 1 et des $a \in A_i$ avec les coefficients $\varphi_{i,a}(s)$, autrement dit :

$$\begin{aligned} s_i^\sharp(a) &= \frac{s_i(a) + \varphi_{i,a}(s)}{\sum_{b\in A_i}(s_i(b) + \varphi_{i,b}(s))} \\ &= \frac{s_i(a) + \varphi_{i,a}(s)}{1 + \sum_{b\in A_i}\varphi_{i,b}(s)} \end{aligned}$$

(L'important est que $s_i^\sharp$ augmente strictement le poids des options $a \in A_i$ telles que $u_i(s_{?i}, a) > u_i(s)$; en fait, on pourrait composer φ à gauche par n'importe quelle fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, continue, nulle sur les négatifs et strictement positive sur les réels strictement positifs, on a choisi l'identité ci-dessus pour rendre l'expression plus simple à écrire, mais elle peut donner l'impression qu'on commet une « erreur d'homogénéité » en ajoutant un gain à une probabilité.)

D'après la première expression donnée, il est clair qu'on a bien $s_i^\sharp \in S_i$, et qu'on a donc bien défini une fonction $T\colon S \to S$. Cette fonction est continue, donc admet un point fixe s d'après 2.2.4 (notons qu'ici, S est vu comme le convexe $S_1 \times \cdots \times S_N$ dans $\mathbb{R}^{A_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{A_N}$). On va montrer que s est un équilibre de Nash.

Si $1 \leq i \leq N$, il existe a dans le support de s_i tel que $u_i(s_{?i}, a) \leq u_i(s)$ (car, comme dans la preuve de 2.2.2, $u_i(s)$ est combinaison convexe des $u_i(s_{?i}, a)$ dont est supérieur au plus petit d'entre eux) : c'est-à-dire $\varphi_{i,a}(s) = 0$. Pour un tel a, la seconde expression $s_i^\sharp(a) = s_i(a)/\big(1 + \sum_{b\in A_i}\varphi_{i,b}(s)\big)$ montre, en tenant compte du fait que $s_i^\sharp = s_i$ puisque s est un point fixe, que $\sum_{b\in A_i}\varphi_{i,b}(s) = 0$, donc $\varphi_{i,b}(s) = 0$ pour tout b. On vient de voir que les $\varphi_{i,b}(s)$ sont nuls pour tout i et tout b, et on a expliqué que ceci signifie que s est un équilibre de Nash. ☺

2.2.5. La question du calcul *algorithmique* des équilibres de Nash, ou simplement d'*un* équilibre de Nash, est délicate en général, ou même si on se restreint à $N = 2$ joueurs (on verra en 2.3.5 ci-dessous que dans le cas particulier des jeux à somme nulle elle se simplifie considérablement). Il existe un algorithme pour $N = 2$, appelé algorithme de Lemke-Howson, qui généralise l'algorithme du simplexe pour la programmation linéaire pour trouver un équilibre de Nash d'un jeu en forme normale : comme l'algorithme du simplexe, il est exponentiel dans le pire cas, mais se comporte souvent bien « en pratique ».

Pour $N = 2$, une méthode qui peut fonctionner dans des cas suffisamment petits consiste à énumérer tous les supports (cf. 2.1.2) possibles des stratégies mixtes des joueurs dans un équilibre de Nash, c'est-à-dire toutes les $(2^{\#A_1} - 1) \times (2^{\#A_2} - 1)$ données de parties non vides de A_1 et A_2, et, pour chacune, appliquer le raisonnement suivant : si s_i est une meilleure réponse possible pour le joueur i

(contre la stratégie $s_{?i}$ de l'autre joueur) alors *toutes les options du support de s_i ont la même espérance de gain* (contre $s_{?i}$; cf. 2.2.2), ce qui fournit un jeu d'égalités linéaires sur les valeurs de $s_{?i}$. En rassemblant ces inégalités (ainsi que celles qui affirment que la somme des valeurs de s_i et de $s_{?i}$ valent 1), on arrive « normalement » à trouver tous les équilibres de Nash possibles : voir les exercices 8.2.1 et 8.2.2 (dernières questions) pour des exemples.

(Pour $N \geq 3$, on sera amené en général à résoudre des systèmes d'équations algébriques pour chaque combinaison de supports : ceci est algorithmiquement possible en théorie en vertu d'un théorème de Tarski et Seidenberg sur la décidabilité des systèmes d'équations algébriques réels, mais possiblement inextricable dans la pratique.)

2.2.6. Mentionnons en complément une notion plus générale que celle d'équilibre de Nash : si $s\colon A \to \mathbb{R}$ (où $A := A_1 \times \cdots \times A_N$) est cette fois une distribution de probabilités sur l'ensemble A des profils de stratégies pures (le rapport avec l'ensemble des profils de stratégies mixtes est explicité en 2.1.4), on dit que s est un **équilibre corrélé** lorsque pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tous $b, b' \in A_i$ on a

$$\sum_{a\,:\,a_i=b} s(a)\,(u_i(a) - u_i(a_{?i}, b')) \geq 0$$

où la somme est prise sur les $a \in A$ tels que $a_i = b$ et où $u_i(a_{?i}, b')$ désigne bien sûr la valeur de u_i en l'élément de A égal à a sauf que la i-ième coordonnée (qui vaut b) a été remplacée par b'.

De façon plus intuitive, il faut imaginer qu'un « corrélateur » tire au hasard un profil a de stratégies pures selon la distribution s, et la condition d'équilibre indiquée ci-dessus signifie que si chaque joueur i reçoit l'information ($b = a_i$) de l'option qui a été tirée pour lui, tant que les autres joueurs suivent les instructions ($a_{?i}$) du corrélateur, il n'a pas intérêt à choisir une autre option (b') que celle qui lui est proposée.

Pour dire les choses autrement, faisons les définitions suivantes. Lorsque $s_?$ une distribution de probabilités sur $A_{?i} := A_1 \times \cdots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \cdots \times A_N$ et $b \in A_i$, notons $u_i(s_?, b) := \sum_{a_? \in A_{?i}} s_?(a_?)\,u_i(a_?, b)$ le gain espéré du joueur i lorsque l'ensemble des autres joueurs joue un profil tiré selon $s_?$ et que i joue b. Lorsque s est une distribution de probabilités sur A, appelons $s[b]$ (pour $b \in A_i$ tel que $\sum_{a'\,:\,a'_i=b} s(a') > 0$) la distribution de probabilités s conditionnée à $a_i = b$ et projetée à $A_{?i}$, c'est-à-dire concrètement la distribution qui à $a_? \in A_{?i}$ associe $s(a_?, b)/\sum_{a'_? \in A_{?i}} s(a'_?, b)$. La condition que s soit un équilibre corrélé se réécrit alors en : $u_i(s[b], b) \geq u_i(s[b], b')$ pour tout $b \in A_i$ tel que $\sum_{a'\,:\,a'_i=b} s(a') > 0$ et tout $b' \in A_i$.

Dans le cas particulier où s est une distribution aux marginales indépendantes, c'est-à-dire de la forme $s(a) = s_1(a_1) \cdots s_N(a_N)$ (cf. 2.1.4), ce qu'on a noté

$s[b]$ ci-dessus est précisément la fonction qui à $a_? \in A_{?i}$ associe le produit $s_{?i}$ des $s_j(a_j)$ pour $j \neq i$, et la condition qu'on vient de dire est donc $u_i(s_{?i}, b) \geq u_i(s_{?i}, b')$ pour tout b dans le support de s_i et tout b'. D'après 2.2.2, c'est justement dire que $(s_1, \ldots, s_N)$ est un équilibre de Nash. Autrement dit : *un équilibre de Nash est la même chose qu'un équilibre corrélé dans lequel les marginales se trouvent être indépendantes.*

2.3 Jeux à somme nulle : le théorème du minimax

Théorème 2.3.1 (« du minimax », J. von Neumann, 1928)**.** Soient C et C' deux convexes compacts dans des espaces affines réels de dimension finie, et $u\colon C \times C' \to \mathbb{R}$ une application bi-affine (c'est-à-dire, affine en chaque variable séparément). Alors

$$\max_{x \in C} \min_{y \in C'} u(x, y) = \min_{y \in C'} \max_{x \in C} u(x, y)$$

Démonstration. Tout d'abord, l'inégalité dans un sens est évidente : on a

$$\max_{x \in C} \min_{y \in C'} u(x, y) = \min_{y \in C'} u(x_*, y) \leq u(x_*, y_*) \leq \max_{x \in C} u(x, y_*) = \min_{y \in C'} \max_{x \in C} u(x, y)$$

où $x_* \in C$ est un point où $\max_{x \in C} \min_{y \in C'} u(x, y)$ est atteint et $y_* \in C'$ un point où $\min_{y \in C'} \max_{x \in C} u(x, y)$ l'est. Il s'agit donc de prouver l'inégalité de sens contraire.

Commençons par supposer que C est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points $(x_i)_{i \in I}$ et C' de $(y_j)_{j \in J}$, et on expliquera plus loin comment se ramener à ce cas (même si c'est le seul qui servira dans le cadre de la théorie des jeux). Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on va définir une fonction $T\colon C \times C' \to C \times C'$ de la façon suivante. Donnons-nous $(x, y) \in C \times C'$. Pour chaque $i \in I$, on définit $\varphi_i(x, y) = \max(0,\ u(x_i, y) - u(x, y))$, et de même on pose $\psi_j(x, y) = \max(0,\ u(x, y) - u(x, y_j))$. Posons enfin $T(x, y) = (x^\sharp, y^\sharp)$ où $x^\sharp$ et $y^\sharp$ (qui dépendent tous les deux de x et y à la fois, malgré la notation) sont définis comme suit. On appelle $x^\sharp$ le barycentre de x affecté du coefficient 1 et des x_i (pour $i \in I$) affectés des coefficients respectifs $\varphi_i(x, y)$, c'est-à-dire $x^\sharp = \frac{x + \sum_{i \in I} \varphi_i(x,y)\, x_i}{1 + \sum_{i \in I} \varphi_i(x,y)}$; et soit de même $y^\sharp$ le barycentre de y avec coefficient 1 et des y_i avec les coefficients $\psi_i(x, y)$. Clairement, $x^\sharp$ et $y^\sharp$ sont dans C et C' respectivement (il s'agit de barycentres à coefficients positifs, c'est-à-dire de combinaisons convexes). La fonction $T\colon C \times C' \to C \times C'$ définie par $T(x, y) = (x^\sharp, y^\sharp)$ est continue. Par ailleurs, on a $x^\sharp = x$ si et seulement si x réalise $\max_{\tilde{x} \in C} u(\tilde{x}, y)$ (un sens est évident, et pour l'autre il suffit de se convaincre que s'il existe $\tilde{x}$ tel que $u(\tilde{x}, y) > u(x, y)$ alors il y a un i tel que ceci soit vrai en remplaçant $\tilde{x}$ par x_i, et on a alors $\varphi_i(x, y) > 0$ donc $u(x^\sharp, y) > u(x, y)$) ; et on a un résultat analogue pour y. La fonction T continue du compact convexe $C \times C'$ vers lui-même y admet d'après 2.2.4 un point fixe (x_0, y_0), vérifiant donc $(x_0^\sharp, y_0^\sharp) = (x_0, y_0)$, c'est-à-dire que $u(x_0, y_0) = \max_{x \in C} u(x, y_0) = \min_{y \in C'} u(x_0, y)$. On a donc maintenant

$$\max_{x \in C} \min_{y \in C'} u(x, y) \geq \min_{y \in C'} u(x_0, y) = u(x_0, y_0) = \max_{x \in C} u(x, y_0) \geq \min_{y \in C'} \max_{x \in C} u(x, y)$$

ce qu'on voulait.

Pour se ramener au cas où C et C' sont enveloppes convexes d'un nombre fini de points, on observe que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe Σ et Σ' des enveloppes convexes d'un nombre fini de points (= polytopes) contenues dans C et C' respectivement et telles que pour tout $x \in C$ on ait $\min_{y \in C'} u(x, y) > \min_{y \in \Sigma'} u(x, y) - \varepsilon$ et $\max_{x \in C} u(x, y) < \max_{x \in \Sigma} u(x, y) + \varepsilon$ (explication : il est trivial que pour chaque x il existe un Σ' vérifiant la condition demandée, le point intéressant est qu'un unique Σ' peut convenir pour tous les x ; mais pour chaque Σ' donné, l'ensemble des x pour lesquels il convient est un ouvert de C, qui est compact, donc un nombre fini de ces ouverts recouvrent C, et on prend l'enveloppe convexe de la réunion des Σ' en question ; on procède de même pour Σ). On a alors $\max_{x \in C} \min_{y \in C'} u(x, y) > \max_{x \in \Sigma} \min_{y \in \Sigma'} u(x, y) - \varepsilon$ et une inégalité analogue pour l'autre membre : on en déduit l'inégalité recherchée à 2ε près, mais comme on peut prendre ε arbitrairement petit, on a ce qu'on voulait. ☺

Corollaire 2.3.2. Soit C un convexe compact dans un espace affine réel de dimension finie, et $u \colon C^2 \to \mathbb{R}$ une application bi-affine antisymétrique (i.e., $u(y, x) = -u(x, y)$). Alors il existe $x \in C$ tel que pour tout $y \in C$ on ait $u(x, y) \geq 0$ (et la valeur commune des deux membres de l'égalité du théorème 2.3.1 est 0).

Démonstration. On applique le théorème : il donne $\max_{x \in C} \min_{y \in C} u(x, y) = \min_{y \in C} \max_{x \in C} u(x, y)$. Mais puisque u est antisymétrique ceci s'écrit encore $\min_{y \in C} \max_{x \in C}(-u(y, x))$, soit, en renommant les variables liées, $\min_{x \in C} \max_{y \in C}(-u(x, y)) = -\max_{x \in C} \min_{y \in C} u(x, y)$. Par conséquent, $\max_{x \in C} \min_{y \in C} u(x, y) = 0$ (il est son propre opposé), et en prenant un x qui réalise ce maximum, on a $\min_{y \in C} u(x, y) = 0$, ce qu'on voulait prouver. ☺

2.3.3. Le théorème 2.3.1 s'applique à la théorie des jeux de la manière suivante : si on considère un jeu à deux joueurs à somme nulle, en notant S_1 et S_2 les ensembles des stratégies mixtes des deux joueurs, et $u \colon S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ le gain espéré du joueur 1, le gain du joueur 2 étant donc $-u$, le fait que (x_0, y_0) soit un équilibre de Nash se traduit par le fait que x_0 soit la meilleure réponse possible de 1 contre y_0, i.e., $u(x_0, y_0) = \max_{x \in S_1} u(x, y_0)$, et le fait que y_0 soit la meilleure réponse possible de 2 contre x_0, c'est-à-dire $u(x_0, y_0) = \min_{y \in S_2} u(x_0, y)$ (puisque 2 cherche à maximiser $-u$, c'est-à-dire minimiser u). Comme on l'a expliqué dans la preuve, on a

$$\max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u(x,y) \geq \min_{y\in S_2} u(x_0,y) = u(x_0,y_0) = \max_{x\in S_1} u(x,y_0) \geq \min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u(x,y)$$

donc en fait il y a égalité partout : tout équilibre de Nash réalise la même valeur $u(x_0,y_0) = \max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u(x,y) = \min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u(x,y)$, qu'on appelle la **valeur** du jeu à somme nulle.

On peut donc parler de **stratégie optimale** pour le joueur 1, resp. 2 pour désigner une composante x_0, resp. y_0, d'un équilibre de Nash, i.e., vérifiant $\min_{y\in S_2} u(x_0,y) = \max_{x\in S_1}\min_{y\in S_2} u(x,y)$, resp. $\max_{x\in S_1} u(x,y_0) = \min_{y\in S_2}\max_{x\in S_1} u(x,y)$, ces deux quantités étant égales à la valeur du jeu.

Moralité : *dans un jeu à somme nulle, un profil de stratégies est un équilibre de Nash si et seulement si chaque joueur joue une stratégie optimale* (l'ensemble des stratégies optimales étant défini pour chaque joueur indépendamment).

Le corollaire 2.3.2 nous apprend (de façon peu surprenante) que si le jeu à somme nulle est *symétrique* (ce qui signifie que u est antisymétrique), alors la valeur du jeu est nulle.

2.3.4. Dans le contexte ci-dessus, on peut légèrement reformuler le minimax : si on se rappelle (cf. 2.2.2) qu'une fonction affine sur un simplexe prend son maximum (ou son minimum) sur un des sommets du simplexe, cela signifie que, quel que soit $x \in S_1$ fixé, le minimum $\min_{y\in S_2} u(x,y)$ est en fait atteint sur une stratégie *pure*, $\min_{y\in S_2} u(x,y) = \min_{b\in A_2} u(x,b)$ (avec A_2 l'ensemble des sommets de S_2, i.e., l'ensemble des stratégies pures du joueur 2), et de même $\max_{x\in S_1} u(x,y) = \max_{a\in A_1} u(a,y)$ quel que soit $y \in S_2$. *Ceci ne signifie pas* qu'il existe un équilibre de Nash en stratégies pures (penser à pierre-papier-ciseaux). Néanmoins, cela signifie que pour calculer la pire valeur possible $\min_{y\in S_2} u(x,y)$ d'une stratégie x du joueur 1, celui-ci peut ne considérer que les réponses en stratégies pures du joueur 2.

Si on appelle v la valeur du jeu, l'ensemble des x tels que $u(x,y) \geq v$ pour tout $y \in S_2$, c'est-à-dire l'ensemble des stratégies optimales pour le joueur 1, coïncide donc avec l'ensemble des x tels que $u(x,b) \geq v$ pour tout $b \in A_2$. En particulier, c'est un convexe compact dans S_1 (puisque chaque inégalité $u(x,b) \geq v$ définit un convexe compact dans S_1 vu que $x \mapsto u(x,b)$ est affine) : *en moyennant deux stratégies optimales pour un joueur on obtient encore une telle stratégie* (notamment, l'ensemble des équilibres de Nash est un convexe de $S_1 \times S_2$ — puisque c'est le produit du convexe des stratégies optimales pour le premier joueur par celui des stratégies optimales pour le second — affirmation qui n'est pas vraie en général pour des jeux qui ne sont pas à somme nulle).

Algorithme 2.3.5. Donnée une fonction $u\colon A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ (avec A_1, A_2 deux ensembles finis) définissant la matrice de gains pour le joueur 1 d'un jeu à somme nulle. On peut calculer une stratégie mixte optimale (cf. 2.3.3) pour le joueur 1 en résolvant, par exemple au moyen de l'algorithme du simplexe, le problème de programmation linéaire dont les variables sont les x_a pour $a \in A_1$ (les poids de la stratégie mixte) et v (le gain obtenu) cherchant à maximiser v sujet aux contraintes :

$$(\forall a \in A_1)\ x_a \geq 0$$

$$\sum_{a \in A_1} x_a = 1$$

$$(\forall b \in A_2)\ v \leq u(x, b) := \sum_{a \in A_1} u(a, b)\, x_a$$

Autrement dit, il s'agit d'un problème de programmation linéaire à $\#A_1 + 1$ variables avec des contraintes de positivité sur $\#A_1$ d'entre elles, une contrainte d'égalité et $\#A_2$ inégalités affines.

2.3.6. Pour ramener ce problème à un problème de programmation linéaire en *forme normale* (maximiser $\mathbf{p}x$ sous les contraintes $\mathbf{M}x \leq \mathbf{q}$ et $x \geq 0$), on sépare la variable v en $v_+ - v_-$ avec $v_+, v_- \geq 0$, et le problème devient de maximiser $v_+ - v_-$ sous les contraintes

$$v_+ \geq 0,\ v_- \geq 0,\ \ (\forall a \in A_1)\ x_a \geq 0$$

$$\sum_{a \in A_1} x_a \leq 1$$

$$-\sum_{a \in A_1} x_a \leq -1$$

$$(\forall b \in A_2)\ v_+ - v_- - \sum_{a \in A_1} u(a, b)\, x_a \leq 0$$

Le problème dual (minimiser ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{q}y$ sous les contraintes ${}^{\mathrm{t}}\mathbf{M}y \geq {}^{\mathrm{t}}\mathbf{q}$ et $y \geq 0$) est alors de minimiser $w_+ - w_-$ sous les contraintes

$$w_+ \geq 0,\ w_- \geq 0,\ \ (\forall b \in A_2)\ y_b \geq 0$$

$$\sum_{b \in A_2} y_b \geq 1$$

$$-\sum_{b \in A_2} y_b \geq -1$$

$$(\forall a \in A_1)\ w_+ - w_- - \sum_{b \in A_2} u(a, b)\, y_b \geq 0$$

Il s'agit donc exactement du même problème, mais pour l'autre joueur.

Le théorème 2.3.1 est essentiellement équivalent au théorème de dualité pour la programmation linéaire (qui assure que si le problème primal a un optimum x_0 alors le dual en a un y_0, et on a égalité des optima).

Comme l'algorithme du simplexe résout simultanément le problème primal et le problème dual, l'algorithme ci-dessus (exécuté avec l'algorithme du simplexe) trouve simultanément une stratégie optimale pour les deux joueurs.

3 Jeux de Gale-Stewart et détermination

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. Soit X un ensemble non vide quelconque (à titre indicatif, les cas $X = \{0,1\}$ et $X = \mathbb{N}$ seront particulièrement intéressants). Soit A un sous-ensemble de $X^{\mathbb{N}}$. Le **jeu de Gale-Stewart** $G_X(A)$ (ou $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, cf. 3.1.2) est défini de la manière suivante : Alice et Bob choisissent tour à tour un élément de X (autrement dit, Alice choisit $x_0 \in X$ puis Bob choisit $x_1 \in X$ puis Alice choisit $x_2 \in X$ et ainsi de suite). Ils jouent un nombre infini de tours, « à la fin » desquels la suite $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de leurs coups définit un élément de $X^{\mathbb{N}}$: si cet élément appartient à A, Alice **gagne**, sinon c'est Bob (la partie n'est jamais nulle).

Dans ce contexte, les suites finies $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ d'éléments de X s'appellent les **positions** (y compris la suite vide $()$, qui peut s'appeler position initiale) de $G_X(A)$, ou de G_X vu que A n'intervient pas ici ; leur ensemble $\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^\ell$ s'appelle parfois l'**arbre** du jeu G_X ; l'entier ℓ (tel que $\underline{x} \in X^\ell$) s'appelle la **longueur** de $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$. Une **partie** ou **confrontation** [1] de G_X est une suite infinie $\underline{\underline{x}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$.

3.1.2. Il peut arriver qu'on ait envie de faire commencer la partie à Bob. Il va de soi que ceci ne pose aucune difficulté, il faudra juste le signaler le cas échéant.

De façon générale, sauf précision expresse du contraire, « Alice » est le joueur qui cherche à jouer dans l'ensemble A tandis que « Bob » est celui qui cherche à jouer dans son complémentaire $B := X^{\mathbb{N}} \setminus A$. Le « premier joueur » est celui qui choisit les termes pairs de la suite, le « second joueur » est celui qui choisit les termes impairs.

On pourra noter $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ lorsqu'il est souhaitable d'insister sur le fait qu'Alice joue en premier, et $G_X^{\mathrm{b}}(A)$ lorsqu'on veut indiquer que Bob joue en premier : formellement, le jeu $G_X^{\mathrm{b}}(A)$ est le même que $G_X^{\mathrm{a}}(X^{\mathbb{N}} \setminus A)$ si ce n'est que les noms des joueurs sont échangés. On utilisera parfois $G_X(A)$ pour désigner

1. Le mot « partie » peut malheureusement désigner soit un sous-ensemble soit une partie d'un jeu au sens défini ici : le mot « confrontation » permet d'éviter l'ambiguïté.

indifféremment $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ ou $G_X^{\mathrm{b}}(A)$ (avec une tournure comme « quel que soit le joueur qui commence »).

Donnée une position $\underline{x}$ de longueur ℓ, le joueur « qui doit jouer » dans $\underline{x}$ désigne le premier joueur si ℓ est paire, et le second joueur si ℓ est impaire.

Définition 3.1.3. Pour un jeu G_X comme en 3.1.1, une **stratégie** pour le premier joueur (resp. le second joueur) est une fonction ς qui à une suite finie (=position) de longueur paire (resp. impaire) d'éléments de X associe un élément de X, autrement dit une fonction $\left(\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^{2\ell}\right) \to X$ (resp. $\left(\bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^{2\ell+1}\right) \to X$).

Lorsque dans une confrontation $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de G_X on a $\varsigma((x_0, \ldots, x_{i-1})) = x_i$ pour chaque i pair (y compris $\varsigma(()) = x_0$ en notant $()$ la suite vide), on dit que le premier joueur a joué la confrontation **selon** la stratégie ς ; de même, lorsque $\tau((x_0, \ldots, x_{i-1})) = x_i$ pour chaque i impair, on dit que le second joueur a joué la confrontation selon la stratégie τ.

Si ς et τ sont deux stratégies pour le premier et le second joueurs respectivement, on définit $\varsigma * \tau$ comme l'unique confrontation dans laquelle premier joueur joue selon ς et le second selon τ : autrement dit, x_i est défini par $\varsigma((x_0, \ldots, x_{i-1}))$ si i est pair ou $\tau((x_0, \ldots, x_{i-1}))$ si i est impair.

Si on se donne une partie A de $X^{\mathbb{N}}$ et qu'on convient qu'Alice joue en premier : la stratégie ς pour Alice est dite **gagnante** (dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$) lorsque Alice gagne toute confrontation où elle joue selon ς comme premier joueur, et la stratégie τ pour Bob est dite gagnante lorsque Bob gagne toute confrontation où il joue selon τ. Lorsque l'un ou l'autre joueur a une stratégie gagnante, le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ est dit **déterminé**.

3.1.4. Il est clair que les deux joueurs ne peuvent pas avoir simultanément une stratégie gagnante (il suffit de considérer la suite $\varsigma * \tau$ où ς et τ seraient des stratégies gagnantes pour les deux joueurs : elle devrait simultanément appartenir et ne pas appartenir à A).

En revanche, il faut se garder de croire que les jeux $G_X(A)$ sont toujours déterminés (on verra cependant des résultats positifs dans 3.3).

3.1.5. Introduisons la notation suivante : si $\underline{x} := (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ est une suite finie d'éléments de X et si A est un sous-ensemble de $X^{\mathbb{N}}$, on notera $\underline{x}^{\$}A$ l'ensemble des suites $(x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ telles que $(x_0, \ldots, x_{\ell-1}, x_\ell, \ldots)$ appartienne à A. Autrement dit, il s'agit de l'image réciproque de A par l'application $X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ qui insère $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ au début de la suite.

On utilisera notamment cette notation pour une suite à un seul terme : si $x \in X$ alors $x^{\$}A$ est l'ensemble des $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X^{\mathbb{N}}$ telles que $(x, x_1, x_2, \ldots) \in A$. (Ainsi, si $\underline{x} := (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$, on a $\underline{x}^{\$}A = x_{\ell-1}^{\$} \cdots x_1^{\$} x_0^{\$} A$.)

3.1.6. Si $\underline{x} := (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ est une position dans un jeu de Gale-Stewart $G_X(A)$, on peut considérer qu'elle définit un nouveau jeu $G_X(\underline{x}, A)$ consistant à jouer **à**

partir de là, c'est-à-dire que les joueurs jouent pour compléter cette suite, ou, ce qui revient au même, que leurs ℓ premiers coups sont imposés.

Plus précisément, on introduit le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}, A)$ (resp. $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}, A)$), qui est la modification du jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ (resp. $G_X^{\mathrm{b}}(A)$) où les ℓ premiers coups sont imposés par les valeurs de $\underline{x}$ (autrement dit, lorsque $i < \ell$, au i-ième coup, seule la valeur x_i peut être jouée). On identifiera parfois abusivement la position $\underline{x}$ du jeu $G_X(A)$ avec le jeu $G_X(\underline{x}, A)$ joué à partir de cette position.

Bien sûr, plutôt qu'*imposer* les ℓ premiers cours, on peut aussi considérer que les joueurs jouent directement à partir du coup numéroté ℓ (donc pour compléter $\underline{x}$) : les joueurs choisissent $x_\ell, x_{\ell+1}, x_{\ell+2}, \ldots$, on insère les coups imposés $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ au début de la confrontation, et on regarde si la suite tout entière appartient à A pour déterminer le gagnant. Quitte à renuméroter les coups effectivement choisis pour commencer à 0, on retrouve un jeu de Gale-Stewart, défini comme suit en utilisant la notation 3.1.5 : à savoir, le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}, A)$ peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}^{\$}A)$ lorsque ℓ est pair (=c'est à Alice de jouer dans la position $\underline{x}$), et $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}^{\$}A)$ lorsque ℓ est impair (=c'est à Bob de jouer) ; symétriquement, bien sûr, $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}, A)$ peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{b}}(\underline{x}^{\$}A)$ lorsque ℓ est pair, et $G_X^{\mathrm{a}}(\underline{x}^{\$}A)$ lorsque ℓ est impair.

3.1.7. On dira qu'une position $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ d'un jeu de Gale-Stewart $G_X(A)$ est **gagnante** pour Alice lorsque Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X(\underline{x}, A)$ qui consiste à jouer à partir de cette position (cf. 3.1.6). On définit de même une position gagnante pour Bob.

La proposition suivante est presque triviale et signifie qu'Alice (qui doit jouer) possède une stratégie gagnante si et seulement si elle peut jouer un coup x qui l'amène à une position d'où elle (Alice) a une stratégie gagnante, et Bob en possède une si et seulement si n'importe quel coup x joué par Alice amène à une position d'où il (Bob) a une stratégie gagnante :

Proposition 3.1.8. Soit X un ensemble non vide et $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Dans le jeu de Gale-Stewart $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, et en utilisant les définitions faites en 3.1.5 et 3.1.6 :

— Alice (premier joueur) possède une stratégie gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ si et seulement si *il existe* $x \in X$ tel qu'elle (=Alice) possède une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(x, A)$ (dont on rappelle qu'il peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{b}}(x^{\$}A)$ défini par le sous-ensemble $x^{\$}A$ et où Bob joue en premier) ;

— Bob (second joueur) possède une stratégie gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ si et seulement si *pour tout* $x \in X$ il (=Bob) possède une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(x, A)$ (dont on rappelle qu'il peut s'identifier au jeu $G_X^{\mathrm{b}}(x^{\$}A)$ défini par le sous-ensemble $x^{\$}A$ et où Bob joue en premier).

(Les mêmes affirmations valent, bien sûr, en échangeant « Alice » et « Bob » tout du long ainsi que G_X^{a} et G_X^{b}.)

Démonstration. La démonstration suivante ne fait que (laborieusement) formaliser l'argument « une stratégie gagnante pour Alice détermine un premier coup, après quoi elle a une stratégie gagnante, et une stratégie gagnante pour Bob est prête à répondre à n'importe quel coup d'Alice après quoi il a une stratégie gagnante » :

Si Alice (premier joueur) possède une stratégie ς gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, on pose $x := \varsigma(())$ le premier coup préconisé par cette stratégie, et on définit $\varsigma'((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \varsigma((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour i pair : cette définition fait que si $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Alice joue en second selon ς' alors $(x, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ en est une où elle joue en premier selon ς, donc cette suite appartient à A puisque ς est gagnante pour Alice dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, donc $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ appartient à $x^\$ A$, et Alice a bien une stratégie gagnante, ς' dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^\$ A)$ (où elle joue en second).

Réciproquement, si Alice possède une stratégie gagnante ς' dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^\$ A)$ (où elle joue en second), on définit ς par $\varsigma(()) = x$ et $\varsigma((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \varsigma'((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour $i > 0$ pair : cette définition fait que si $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Alice joue en premier selon ς alors $x_0 = x$ et $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est confrontation où elle (Alice) joue en second selon ς', donc cette suite appartient à $x^\$ A$ puisque ς' est gagnante pour Alice second joueur dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^\$ A)$, donc $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ appartient à A, et Alice a bien une stratégie gagnante, ς, dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ (où elle joue en premier).

Si Bob (second joueur) possède une stratégie τ gagnante dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ et si $x \in X$ est quelconque, on définit $\tau'((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \tau((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour i impair : cette définition fait que si $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Bob joue en premier selon τ' alors $(x, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ en est une où il joue en second selon τ, donc cette suite n'appartient pas à A puisque τ est gagnante pour Bob dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$, donc $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ n'appartient pas à $x^\$ A$, et Bob a bien une stratégie gagnante, τ', dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^\$ A)$ (où il joue en premier).

Réciproquement, si pour chaque $x \in X$ Bob possède une stratégie gagnante dans $G_X^{\mathrm{b}}(x^\$ A)$ (où il joue en premier), on en choisit une τ_x pour chaque x, et on définit τ par $\tau((x, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})) = \tau_x((x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}))$ pour i impair : cette définition fait que si $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une confrontation où Bob joue en second selon τ alors $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est confrontation où il (Bob) joue en premier selon τ_{x_0}, donc cette suite n'appartient pas à ${x_0}^\$ A$ puisque τ_{x_0} est gagnante pour Bob premier joueur dans $G_X^{\mathrm{b}}({x_0}^\$ A)$, donc $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ n'appartient pas à A, et Bob a bien une stratégie gagnante, τ, dans $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ (où il joue en second). ☺

3.1.9. En utilisant la terminologie 3.1.7, la proposition 3.1.8 peut se reformuler de la façon suivante, peut-être plus simple :

— une position $\underline{z}$ est gagnante pour le joueur qui doit jouer si et seulement si *il existe* un coup x menant à une position $\underline{z}x$ gagnante pour ce même joueur (qui est maintenant le joueur qui vient de jouer),

— une position $\underline{z}$ est gagnante pour le joueur qui vient de jouer si et seulement si *tous* les coups x mènent à des positions $\underline{z}x$ gagnantes pour ce même joueur (qui est maintenant le joueur qui doit jouer).

(Dans ces affirmations, « un coup x » depuis une position $\underline{z} := (z_0, \ldots, z_{\ell-1})$ doit bien sûr se comprendre comme menant à la position $\underline{z}x := (z_0, \ldots, z_{\ell-1}, x)$ obtenue en ajoutant x à la fin.)

3.1.10. On peut donc encore voir les choses comme suit : dire qu'Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ signifie que la position intiale $()$ est gagnante pour Alice, ce qui équivaut (d'après ce qu'on vient de voir) à : $\exists x_0$ tel que la position (x_0) soit gagnante pour Alice ; ce qui équivaut à : $\exists x_0 \, \forall x_1$ la position (x_0, x_1) est gagnante pour Alice ; ou encore : $\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2$ la position (x_0, x_1, x_2) est gagnante pour Alice ; ou encore : $\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3$ la position (x_0, x_1, x_2, x_3) est gagnante pour Alice ; et ainsi de suite.

Il peut donc être tentant de noter l'affirmation « Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ » par l'écriture abusive

$$\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \qquad (\mathscr{A})$$

Cette écriture abusive n'a pas de sens mathématique, mais on peut la *définir* comme signifiant « Alice a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ », tandis que « Bob a une stratégie gagnante dans le jeu $G_X^{\mathrm{a}}(A)$ » se noterait

$$\forall x_0 \, \exists x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \not\in A) \qquad (\mathscr{B})$$

Ces notations sont intuitivement intéressantes, mais elles présentent l'inconvénient de laisser croire que l'affirmation $\mathscr{A}$ est la négation de $\mathscr{B}$, ce qui n'est pas le cas en général (comme on l'a dit, il se peut qu'aucun des joueurs n'ait de stratégie gagnante). Ce qui est vrai en revanche est que la négation $\neg\mathscr{A}$ de $\mathscr{A}$ peut se réécrire (avec la notation abusive définie ci-dessus) comme

$$\begin{gathered}
\neg\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \\
\forall x_0 \, \neg\forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \\
\forall x_0 \, \exists x_1 \, \neg\exists x_2 \, \forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A) \\
\forall x_0 \, \exists x_1 \, \forall x_2 \, \neg\forall x_3 \cdots ((x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \in A)
\end{gathered}$$

mais on ne peut pas traverser l'« infinité de quantificateurs » pour passer à $\mathscr{B}$ sauf par exemple dans les conditions qu'on verra en 3.3.

3.2 Topologie produit

Définition 3.2.1. Soit X un ensemble non vide. Si $\underline{\underline{x}} := (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ est une suite d'éléments de X et $\ell \in \mathbb{N}$, on appelle ℓ-ième **voisinage fondamental** de $\underline{\underline{x}}$, et on note $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ l'ensemble de tous les éléments $(z_0, z_1, z_2, \ldots)$ de $X^{\mathbb{N}}$ dont les ℓ premiers termes coïncident avec celles de $\underline{\underline{x}}$, autrement dit $z_i = x_i$ si $i < \ell$.

On dit aussi qu'il s'agit du voisinage fondamental défini par la suite finie $\underline{x} = (x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ (il ne dépend manifestement que de ces termes), et on peut le noter $V_\ell(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ ou $V(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$.

Un sous-ensemble $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est dit **ouvert** [pour la topologie produit] lorsque pour tout $\underline{\underline{x}} \in A$ il existe un ℓ tel que le ℓ-ième voisinage fondamental $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ de $\underline{\underline{x}}$ soit inclus dans A. Autrement dit : dire que A est ouvert signifie que lorsque A contient une suite $\underline{\underline{x}} := (x_0, x_1, x_2, \ldots)$, il existe un rang ℓ tel que A contienne n'importe quelle suite obtenue en modifiant la suite $\underline{\underline{x}}$ à partir du rang ℓ.

Un sous-ensemble $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est dit **fermé** lorsque son complémentaire $B := X^{\mathbb{N}} \setminus A$ est ouvert.

3.2.2. On notera qu'il existe des parties de $X^{\mathbb{N}}$ à la fois ouvertes et fermées : c'est le cas non seulement de $\varnothing$ et de $X^{\mathbb{N}}$, mais plus généralement de n'importe quel voisinage fondamental $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ (en effet, $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ est ouvert car si $\underline{\underline{y}} \in V_\ell(\underline{\underline{x}})$, c'est-à-dire si $\underline{\underline{y}}$ coïncide avec $\underline{\underline{x}}$ sur les ℓ premiers termes, alors toute suite $\underline{\underline{z}}$ qui coïncide avec $\underline{\underline{y}}$ sur les ℓ premiers termes coïncide aussi avec $\underline{\underline{x}}$ dessus, et appartient donc à $V_\ell(\underline{\underline{x}})$, autrement dit, $V_\ell(\underline{\underline{y}})$ est inclus dans $V_\ell(\underline{\underline{x}})$; mais $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ est également fermé car si $\underline{\underline{y}} \notin V_\ell(\underline{\underline{x}})$, alors toute suite $\underline{\underline{z}}$ qui coïncide avec $\underline{\underline{y}}$ sur les ℓ premiers termes ne coïncide *pas* avec $\underline{\underline{x}}$ dessus, donc n'appartient pas à $V_\ell(\underline{\underline{x}})$, autrement dit $V_\ell(\underline{\underline{y}})$ est inclus dans le complémentaire de $V_\ell(\underline{\underline{x}})$).

Il sera utile de remarquer que l'intersection de deux voisinages fondamentaux V, V' d'une même suite $\underline{\underline{x}}$ est encore un voisinage fondamental de $\underline{\underline{x}}$ (en fait, cette intersection est tout simplement égale à V ou à V').

L'énoncé suivant est une généralité topologique :

Proposition 3.2.3. Soit X un ensemble non vide. Alors, dans $X^{\mathbb{N}}$ (pour la topologie produit) :

(i) $\varnothing$ et $X^{\mathbb{N}}$ sont ouverts,

(ii) une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert (i.e., si A_i est ouvert pour chaque $i \in I$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert),

(iii) une intersection finie d'ouverts est un ouvert (i.e., si $A_1, \ldots, A_n$ sont ouverts alors $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ est ouvert).

Démonstration. L'affirmation (i) est triviale.

Montrons (ii) : si les A_i sont ouverts et si $\underline{\underline{x}} \in \bigcup_{i\in I} A_i$, alors la définition d'une réunion fait qu'il existe i tel que $\underline{\underline{x}} \in A_i$, et comme A_i est ouvert il existe un voisinage fondamental de $\underline{\underline{x}}$ inclus dans A_i, donc inclus dans $\bigcup_{i\in I} A_i$: ceci montre que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est ouvert.

Montrons (iii) : il suffit de montrer que si A, A' sont ouverts alors $A \cap A'$ est ouvert. Soit $\underline{\underline{x}} \in A\cap A'$. Il existe des voisinages fondamentaux V et V' de $\underline{\underline{x}}$ inclus dans A et A' respectivement (puisque ces derniers sont ouverts) : alors $V \cap V'$ est un voisinage fondamental de $\underline{\underline{x}}$ inclus dans $A \cap A'$: ceci montre que $A \cap A'$ est ouvert. ☺

3.3 Détermination des jeux ouverts

3.3.1. La remarque suivante, bien que complètement évidente, sera cruciale : si $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ est une suite finie d'éléments de X (i.e., une position de G_X) et A une partie contenant le voisinage fondamental (cf. 3.2.1) défini par $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$, alors Alice possède une stratégie gagnante à partir de $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ dans le jeu $G_X(A)$ (cf. 3.1.6). Mieux : quoi que fassent l'un et l'autre joueur à partir de ce point, la partie sera gagnée par Alice. C'est tout simplement qu'on a fait l'hypothèse que *toute* suite commençant par $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ appartient à A.

Théorème 3.3.2 (D. Gale & F. M. Stewart, 1953)**.** Si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est ouvert, ou bien fermé, alors le jeu $G_X(A)$ (qu'il s'agisse de $G^{\mathrm{a}}_X(A)$ ou $G^{\mathrm{b}}_X(A)$) est déterminé.

Première démonstration. Il suffit de traiter le cas ouvert : le cas fermé s'en déduit d'après 3.1.2 en passant au complémentaire, c'est-à-dire en échangeant les deux joueurs (à condition d'avoir traité le cas ouvert aussi le cas $G^{\mathrm{a}}_X(A)$ où Alice joue en premier et le cas $G^{\mathrm{b}}_X(A)$ où Bob joue en premier).

Soit $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ouvert. Quel que soit le joueur qui commence, on va montrer que si Alice (le joueur qui cherche à jouer dans A) n'a pas de stratégie gagnante, alors Bob (le joueur qui cherche à jouer dans le complémentaire) en a une. On va définir une stratégie τ pour Bob en évitant les positions où Alice a une stratégie gagnante (une stratégie « défensive »).

Si $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ est une position où c'est à Bob de jouer et qui n'est pas gagnante pour Alice (c'est-à-dire qu'Alice n'a pas de stratégie gagnante à partir de là, cf. 3.1.7), alors d'après 3.1.8, (a) il existe un x tel que $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x)$ ne soit pas gagnante pour Alice : choisissons-un tel x et posons $\tau((x_0, \ldots, x_{i-1})) := x$. Aux points où τ n'a pas été défini par ce qui vient d'être dit, on le définit de façon arbitraire. Par ailleurs, si $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ est une position où c'est à Alice de jouer et qui n'est pas gagnante pour Alice, toujours d'après 3.1.8, on remarque que (b) quel que soit $y \in X$, la position $(x_0, \ldots, x_{i-1}, y)$ n'est pas gagnante pour Alice.

Si $x_0, x_1, x_2, \ldots$ est une confrontation où Bob joue selon τ, on voit par récurrence sur i qu'aucune des positions $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ n'est gagnante pour Alice :

pour $i = 0$ c'est l'hypothèse faite sur le jeu (à savoir, qu'Alice n'a pas de stratégie gagnante depuis la position initiale), pour les positions où c'est à Bob de jouer, c'est la construction de τ qui assure la récurrence (cf. (a) ci-dessus), et pour les positions où c'est à Alice de jouer, c'est le point (b) ci-dessus qui assure la récurrence.

On utilise maintenant le fait que A est supposé ouvert : si $x_0, x_1, x_2, \ldots$ appartient à A, alors il existe ℓ tel que toute suite commençant par $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ appartienne à A. Mais alors Alice a une stratégie gagnante à partir de la position $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ (cf. 3.3.1 : elle ne peut que gagner à partir de là). Or si Bob a joué selon τ, ceci contredit la conclusion du paragraphe précédent. On en déduit que si Bob joue selon τ, la confrontation n'appartient pas à A, c'est-à-dire que τ est gagnante pour Bob. ☺

Seconde démonstration. Comme dans la première démonstration (premier paragraphe), on remarque qu'il suffit de traiter le cas ouvert. Soit $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ ouvert.

On utilise la notion d'ordinaux qui sera introduite ultérieurement. Soit $X^* := \bigcup_{\ell=0}^{+\infty} X^\ell$ l'arbre des positions de G_X.

On définit les positions « gagnantes en 0 coups pour Alice » comme les positions $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ qui définissent un voisinage fondamental inclus dans A (cf. 3.3.1 : quoi que les joueurs fassent à partir de là, Alice aura gagné, et on peut considérer qu'Alice a déjà gagné).

En supposant définies les positions gagnantes en α coups pour Alice, on définit les positions « gagnantes en $\alpha + 1$ coups pour Alice » de la façon suivante : ce sont les positions $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ où c'est à Alice de jouer et pour lesquelles il existe un x tel que $(x_0, \ldots, x_{\ell-1}, x)$ soit gagnante en α coups pour Alice, ainsi que les positions $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ où c'est à Bob de jouer et pour lesquels, quel que soit $x \in X$, la position $(x_0, \ldots, x_{\ell-1}, x)$ est gagnante en $\alpha + 1$ coups pour Alice (au sens où on vient de le dire).

Enfin, si δ est un ordinal limite, en supposant définies les positions « gagnantes en α coups pour Alice » pour tout $\alpha < \delta$, on définit une position comme gagnante en δ coups par Alice lorsqu'elle est gagnante en α coups pour un certain $\alpha < \delta$.

La définition effectuée a les propriétés suivantes : (o) si une position est gagnante en α coups pour Alice alors elle est gagnante en α' coups pour tout $\alpha' > \alpha$, (i) si une position où c'est à Bob de jouer est gagnante en α coups pour Alice, alors tout coup (de Bob) conduit à une position gagnante en α coups pour Alice, et (ii) si une position où c'est à Alice de jouer est gagnante en $\alpha > 0$ coups pour Alice, alors il existe un coup (d'Alice) conduisant à une position gagnante en strictement moins que α coups (en fait, si $\alpha = \beta + 1$ est successeur, il existe un coup conduisant à une position gagnante en β coups par Alice, et si α est limite, la position elle-même est déjà gagnable en strictement moins que α coups).

Si la position initiale $()$ est gagnante en α coups par Alice pour un certain ordinal α, alors Alice possède une stratégie gagnante consistant à jouer, depuis une position gagnante en α coups, vers une position gagnante en β coups pour un certain $\beta < \alpha$ (ou bien $\beta = 0$), qui existe d'après (ii) ci-dessus : comme Bob ne peut passer d'une position gagnante en α coups par Alice que vers d'autres telles positions (cf. (i)), et comme toute suite strictement décroissante d'ordinaux termine, ceci assure à Alice d'arriver en temps fini à une position gagnante en 0 coups.

Réciproquement, si la position initiale () n'est pas gagnante en α coups par Alice quel que soit α (appelons-la « non comptée »), alors Bob possède une stratégie consistant à jouer toujours sur des telles positions non décomptées : d'après la définition des positions gagnantes en α coup, quand c'est à Alice de jouer, une position non comptée ne conduit qu'à des positions non comptées, et quand c'est à Bob de jouer, une position non comptée conduit à au moins une condition non comptée. Ainsi, si Bob joue selon cette stratégie, la confrontation $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ ne passe que par des positions non comptées, et en particulier, ne passe jamais par une position gagnante en 0 coups par Alice, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas avoir un voisinage fondamental inclus dans A, et comme A est ouvert, elle n'appartient pas à A, i.e., la confrontation est gagnée par Bob. ☺

3.3.3. Il ne faut pas croire que l'hypothèse « A est ouvert ou bien fermé » est anodine : il existe des jeux $G^{\mathrm{a}}_X(A)$ qui ne sont pas déterminés — autrement dit, même si dans toute confrontation donnée l'un des deux joueurs gagne, aucun des deux n'a de moyen systématique de s'en assurer.

Il ne faut pas croire pour autant que les seuls jeux déterminés soient ceux définis par une partie ouverte. Par exemple, il est facile de voir que si A est dénombrable, alors Bob possède une stratégie gagnante (en effet, si $a = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, alors Bob peut jouer au premier coup pour exclure a_0, c'est-à-dire jouer un x_1 tel que $x_1 \neq a_{0,1}$, puis au second coup pour exclure a_1, c'est-à-dire jouer un x_3 tel que $x_3 \neq a_{1,3}$, et ainsi de suite $x_{2i+1} \neq a_{i,2i+1}$: il s'agit d'un « argument diagonal constructif » ; l'argument fonctionne encore, quitte à décaler les indices, si c'est Bob qui commence).

Le résultat ci-dessous généralise à la fois le théorème 3.3.2 et ce qu'on vient de dire, et il assez technique à démontrer :

Théorème 3.3.4 (D. A. Martin, 1975)**.** Si $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est **borélien**, c'est-à-dire appartient à la plus petite partie de $\mathscr{P}(X^{\mathbb{N}})$ stable par complémentaire et réunions dénombrables (également appelée **tribu**) contenant les ouverts, alors le jeu $G_X(A)$ est déterminé.

(Autrement dit, non seulement un ouvert et un fermé sont déterminés, mais aussi une intersection dénombrable d'ouverts et une réunion dénombrable de fermés, ou encore une réunion dénombrable d'intersections dénombrables d'ouverts et une intersection dénombrable de réunions dénombrables de fermés, « et ainsi de suite » ; les mots « et ainsi de suite » glosent ici sur la construction des boréliens, qui est plus complexe qu'une simple récurrence.)

3.3.5. Des résultats de détermination encore plus forts ont été étudiés, et ne sont généralement pas prouvables dans la théorie des ensembles usuelle (par exemple, l'« axiome de détermination projective », indémontrable dans ZFC) ou sont même incompatibles avec elle (l'« axiome de détermination », qui affirme que pour toute partie $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ le jeu $G_{\{0,1\}}(A)$ est déterminé, contredit l'axiome du choix, et a des conséquences mathématiques remarquables comme le fait que toute partie de $\mathbb{R}$ est mesurable au sens de Lebesgue).

3.4 Détermination des jeux combinatoires

On va définir ici rapidement les notions relatives aux jeux impartiaux à information parfaite pour expliquer comment ces jeux peuvent se ramener à des jeux de Gale-Stewart et comment la détermination des jeux ouverts peut s'appliquer dans ce contexte :

Définition 3.4.1. Soit G un graphe orienté (c'est-à-dire un ensemble G muni d'une relation E irréflexive dont les éléments sont appelés arêtes du graphe, cf. 4.1.1 ci-dessous pour les définitions générales) dont les sommets seront appelés **positions** de G, et soit x_0 un sommet de G qu'on appellera **position initiale**. Le **jeu combinatoire impartial à information parfaite** associé à ces données est défini de la manière suivante : partant de $x = x_0$, Alice et Bob choisissent tour à tour un voisin sortant de x, autrement dit, Alice choisit une arête (x_0, x_1) de G, puis Bob choisit une arête (x_1, x_2) de G, puis Alice choisit une arête (x_2, x_3), et ainsi de suite. Si un joueur ne peut plus jouer, il a perdu ; si la confrontation dure un temps infini, elle est considérée comme nulle (ni gagnée ni perdue par les joueurs).

Une **partie** ou **confrontation** de ce jeu est une suite finie ou infinie (x_i) de sommets de G telle que x_0 soit la position initiale et que pour chaque $i \geq 1$ pour lequel x_i soit défini, ce dernier soit un voisin sortant de x_{i-1}. Lorsque le dernier x_i défini l'est pour un i pair, on dit que le premier joueur **perd** et que le second **gagne**, tandis que lorsque le dernier x_i défini l'est pour un i impair, on dit que le premier joueur gagne et que le second perd ; enfin, lorsque x_i est défini pour tout entier naturel i, on dit que la confrontation est nulle ou que les deux joueurs **survivent** sans gagner.

3.4.2. Pour un jeu comme en 3.4.1, va définir un, ou plutôt deux, jeux de Gale-Stewart : l'intuition est que si un joueur enfreint la « règle » du jeu (i.e., choisit un sommet qui n'est pas un voisin sortant du sommet actuel), il a immédiatement perdu — il n'y a manifestement pas grande différence entre avoir un jeu où un joueur *ne peut pas* faire un certain coup et un jeu où si ce joueur fait ce coup il a immédiatement perdu (quoi qu'il se passe par la suite). On va définir deux jeux de Gale-Stewart plutôt qu'un parce qu'un jeu de Gale-Stewart a forcément un gagnant (il n'y a pas de partie nulle), donc on va définir un jeu où les parties nulles sont comptées au bénéfice de Bob et un autre où elles sont comptées au bénéfice d'Alice.

Autrement dit, soit G un graphe orienté et $x_0 \in G$. On pose $X = G$ et on partitionne l'ensemble des suites à valeurs dans X en trois :

— l'ensemble D des (confrontations nulles dans le jeu combinatoire, c'est-à-dire des) suites $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ telles que pour chaque $i \geq 1$ le sommet x_i soit un voisin sortant de x_{i-1} (c'est-à-dire : (x_{i-1}, x_i) est une arête de G) (bref, personne n'a enfreint la règle),

— l'ensemble A des (confrontations gagnées par Alice dans le jeu combinatoire, c'est-à-dire des) suites $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ telles qu'il existe $i \geq 1$ pour lequel x_i n'est pas un voisin sortant de x_{i-1} et que le plus petit tel i soit *pair* (i.e., Bob a enfreint la règle en premier),

— l'ensemble B des (confrontations gagnées par Bob dans le jeu combinatoire, c'est-à-dire des) suites $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ telles qu'il existe $i \geq 1$ pour lequel x_i n'est pas un voisin sortant de x_{i-1} et que le plus petit tel i soit *impair* (i.e., Alice a enfreint la règle en premier).

(On a choisi ici d'indicer les suites par les entiers naturels non nuls : il va de soi que ça ne change rien à la théorie des jeux de Gale-Stewart ! Si on préfère, on peut les faire commencer à 0, et mettre dans A toutes les suites qui ne commencent pas par x_0.)

Le jeu de Gale-Stewart $G_X(A)$ est essentiellement identique au jeu considéré en 3.4.1, à ceci près que les confrontations nulles sont comptées comme des gains de Bob ; le jeu $G_X(A \cup D)$, pour sa part, est lui aussi identique à ceci près que les nuls sont comptés comme des gains d'Alice.

Lemme 3.4.3. Avec les notations de 3.4.2, les parties A et B sont ouvertes (pour la topologie produit, cf. 3.2.1).

Démonstration. Soit $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ est une suite d'éléments de $X = G$. Si la suite appartient à A alors, par définition de A, il existe un $i \geq 1$ pair tel que x_i ne soit pas un voisin sortant de x_{i-1} et tel que x_j soit un voisin sortant de x_{j-1} pour tout $1 \leq j < i$. On en déduit que le voisinage fondamental formé de toutes les suites qui coïncident avec $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ jusqu'à x_i inclus est contenu dans A. La même démonstration fonctionne pour B avec i impair. ☺

Théorème 3.4.4. Soit (G, x_0) un jeu combinatoire impartial à information parfaite comme en 3.4.1. Alors exactement l'une des trois affirmations suivantes est vraie :

— le premier joueur (Alice) possède une stratégie gagnante,
— le second joueur (Bob) possède une stratégie gagnante,
— chacun des deux joueurs possède une stratégie survivante.

(La notion de « stratégie » ici doit se comprendre comme pouvant dépendre de l'histoire des coups joués précédemment : voir 3.4.5 ci-dessous.)

Démonstration. Il est évident que les affirmations sont exclusives (si un joueur possède une stratégie gagnante, l'autre ne peut pas posséder de stratégie survivante, sinon on aurait une contradiction en les faisant jouer l'une contre l'autre).

Avec les notations de 3.4.2, d'après 3.4.3, les parties A et B sont ouvertes, donc 3.3.2 montre que les jeux définis par l'ouvert A et le fermé $A \cup D = X \setminus B$ sont déterminés.

Mais une stratégie gagnante d'Alice dans le jeu de Gale-Stewart défini par A est une stratégie gagnante dans le jeu combinatoire d'origine, tandis qu'une stratégie gagnante de Bob dans ce jeu de Gale-Stewart est une stratégie survivante dans le jeu d'origine ; ainsi, dans le jeu d'origine, soit Alice a une stratégie gagnante soit Bob a une stratégie survivante.

De même, une stratégie gagnante d'Alice dans le jeu défini par $A \cup D$ est une stratégie survivante dans le jeu d'origine, tandis qu'une stratégie gagnante de Bob dans ce jeu est une stratégie gagnante dans le jeu d'origine ; ainsi, dans le jeu d'origine, soit Alice a une stratégie survivante soit Bob a une stratégie gagnante.

En mettant ensemble ces deux disjonctions, on voit que l'un des trois faits énoncés est vrai. ☺

3.4.5. La notion de « stratégie » implicite dans le théorème 3.4.4 est une notion *historique* : puisque c'est ainsi qu'elles ont été définies en 3.1.3, les stratégies ont le droit de choisir le coup à jouer en fonction de *tous les coups joués antérieurement*. Il se trouve en fait qu'on a les mêmes résultats avec des stratégies *positionnelles*, c'est-à-dire, qui ne choisissent un coup qu'en fonction du sommet $x \in G$. C'est ce qui va être démontré dans la section suivante.

3.5 Détermination pour les stratégies positionnelles

3.5.1. Le but de la définition suivante est de formaliser, pour un jeu combinatoire comme en 3.4.1, les notions de stratégie positionnelle (dans laquelle un joueur ne choisit le coup à jouer qu'en fonction de la position actuelle), et de stratégie historique (dans laquelle il fait son choix en fonction de tous les coups joués antérieurement), sachant qu'on veut montrer au final que cette distinction a peu d'importance. Mais la définition sur laquelle on va vraiment travailler est formulée en 3.5.4, donc on peut se contenter de lire celle-ci.

Définition 3.5.2. Soit G un graphe orienté (cf. 3.4.1 et 4.1.1). Une **stratégie positionnelle** sur G est une fonction partielle $\varsigma\colon G \dashrightarrow G$ (i.e., une fonction définie sur un sous-ensemble de G) telle que $\varsigma(x)$ soit, s'il est défini, un voisin sortant de x (s'il n'est pas défini, il faut comprendre que le joueur abandonne la partie). Une **stratégie historique** sur G une fonction partielle $\varsigma\big(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} G^\ell\big) \dashrightarrow G$, où $\big(\bigcup_{\ell=1}^{+\infty} G^\ell\big)$ désigne l'ensemble des suites finies de G de longueur non nulle (i.e., des suites $z_0, \ldots, z_{\ell-1}$ d'éléments de G avec $\ell > 0$ entier) telle que $\varsigma(z_0, \ldots, z_{\ell-1})$ soit un voisin sortant de $z_{\ell-1}$.

Lorsque dans une confrontation $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de G (à partir d'une position initiale x_0) on a $x_i = \varsigma(x_{i-1})$ pour chaque $i \geq 1$ impair pour lequel x_i est défini, on dit que le premier joueur a joué la partie selon la stratégie positionnelle ς ; tandis que si $x_i = \tau(x_{i-1})$ pour chaque $i \geq 1$ pair pour lequel x_i est défini, on dit que le second joueur a joué la partie selon la stratégie τ. Pour une stratégie historique, il faut remplacer $x_i = \varsigma(x_{i-1})$ et $x_i = \tau(x_{i-1})$ par $x_i = \varsigma(x_0, \ldots, x_{i-1})$ et $x_i = \tau(x_0, \ldots, x_{i-1})$ respectivement.

La position initiale $x_0 \in G$ ayant été fixée, si ς et τ sont deux stratégies (positionnelles ou historiques), on définit $\varsigma * \tau$ comme la confrontation jouée lorsque le premier joueur joue selon ς et le second joue selon τ : autrement dit, x_0 est la position initiale, et, si x_{i-1} est défini, x_i est défini par $\varsigma(x_{i-1})$ ou $\varsigma(x_1, \ldots, x_{i-1})$ si i est impair et $\tau(x_{i-1})$ ou $\tau(x_1, \ldots, x_{i-1})$ si i est pair (si x_i n'est pas défini, la suite s'arrête là).

La stratégie (positionnelle ou historique) ς est dite **gagnante pour le premier joueur** à partir de la position initiale x_0 lorsque le premier joueur gagne toute confrontation où il joue selon ς, c'est-à-dire que la confrontation est finie et que le dernier x_i défini l'est pour un i impair. On définit de même une stratégie ς **survivante** (c'est-à-dire, permettant d'assurer au moins le nul) pour le premier joueur à partir d'une position initiale x_0, c'est-à-dire que dans toute confrontation où il joue selon ς, soit la confrontation est infinie (donc nulle) soit le dernier x_i défini l'est pour un i impair.

3.5.3. La notion de stratégie pour le second joueur peut être définie de façon analogue, bien sûr, mais la notion n'a pas beaucoup d'intérêt : une stratégie gagnante pour le second joueur à partir de x_0 est la même chose qu'une stratégie gagnante pour le premier joueur à partir de tout voisin sortant de x_0. Pour travailler avec les stratégies positionnelles, il vaut mieux supposer qu'elles sont, en fait, gagnantes partout où elles sont définies, ce qui amène à faire la définition suivante :

3.5.4. Dans ce qui suit, on va fixer un graphe orienté G et on aura besoin d'introduire l'ensemble $\mathcal{S}$ de ce qu'on pourrait appeler les « stratégies positionnelles gagnantes partout où définies », c'est-à-dire des stratégies positionnelles ς gagnantes pour le premier joueur à partir de n'importe quel point

x_0 où ς est défini ; autrement dit, il s'agit de l'ensemble des fonctions partielles $\varsigma\colon G \dashrightarrow G$ telles que

— si $\varsigma(x)$ est défini alors il est un voisin sortant de x, et que

— si $\varsigma(x_0)$ est défini et si (x_i) est une suite (*a priori* finie ou infinie) partant de x_0, dans laquelle $x_i = \varsigma(x_{i-1})$ pour $i \geq 1$ impair, et x_i est voisin sortant de x_{i-1} pour tout $i \geq 1$ [pair], alors la suite est de longueur finie et le dernier x_i défini l'est pour un i impair

(i.e., le premier joueur gagne n'importe quelle confrontation à partir d'une position initiale x_0 du domaine de définition de ς et où il joue selon ς).

L'ensemble $\mathcal{S}$ est partiellement ordonné par l'inclusion (si $\varsigma, \tau \in \mathcal{S}$, on dit que ς **prolonge** τ et on note $\varsigma \supseteq \tau$ ou $\tau \subseteq \varsigma$, lorsque l'ensemble de définition de ς contient celui de τ et que ς et τ coïncident là où τ est définie : ceci signifie bien que $\varsigma \supseteq \tau$ en tant qu'ensembles).

Lemme 3.5.5. Si $\varsigma, \varsigma' \in \mathcal{S}$ avec la notation introduite en 3.5.4, alors il existe $\varsigma'' \in \mathcal{S}$ qui prolonge ς et qui est également définie en tout point où ς' l'est.

Démonstration. Définissons ς'' par $\varsigma''(x) = \varsigma(x)$ si $\varsigma(x)$ est définie et $\varsigma''(x) = \varsigma'(x)$ si $\varsigma(x)$ n'est pas définie mais que $\varsigma'(x)$ l'est. Il est évident que ς'' prolonge ς et est également définie en tout point où ς' l'est : il reste à voir que $\varsigma'' \in \mathcal{S}$. Mais si $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (*a priori* finie ou infinie) est une confrontation jouée par le premier joueur selon ς'', montrons qu'elle est nécessairement gagnée par le premier joueur : or le premier joueur a soit joué selon ς tout du long, soit selon ς' tout du long, soit selon ς' puis ς, mais dans tous les cas il gagne. De façon détaillée : soit x_0 est domaine de définition de ς auquel cas tous les x_i pairs le sont et la confrontation est gagnée par le premier joueur ; soit x_0 est dans le domaine de définition de ς' mais pas de ς, auquel cas il n'existe qu'un nombre fini de i pairs tels que x_i ne soit pas dans domaine de définition de ς (puisque ς' ne peut pas donner une partie nulle) et si j est le plus grand d'entre eux, x_{j+1} est défini, et soit x_{j+2} n'est pas défini (auquel cas le premier joueur a gagné) soit x_{j+2} est dans le domaine de définition de ς et de nouveau le premier joueur gagne à partir de là. ☺

Lemme 3.5.6. Si $\varsigma_i \in \mathcal{S}$ pour chaque $i \in I$ avec la notation introduite en 3.5.4, et si pour tous i, j les fonctions ς_i et ς_j coïncident là où elles sont toutes deux définies, alors la fonction $\bigcup_{i \in I} \varsigma_i$ (c'est-à-dire la fonction définie sur la réunion des ensembles de définition des ς_i et qui coïncide avec n'importe quel ς_i sur l'ensemble de définition de celui-ci) appartient encore à $\mathcal{S}$.

Démonstration. Si $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (*a priori* finie ou infinie) est une confrontation jouée par le premier joueur selon $\varsigma := \bigcup_{i \in I} \varsigma_i$, alors en fait elle est jouée tout du long selon ς_i où i est n'importe quel indice tel que $\varsigma_i(x_0)$ soit définie. Comme $\varsigma_i \in \mathcal{S}$, cette confrontation est gagnée par le premier joueur. ☺

Le résultat ensembliste suivant sera admis (même si on pourrait s'en sortir en appliquant 4.2.6 à la place) :

Lemme 3.5.7 (principe maximal de Hausdorff)**.** Soit $\mathscr{F}$ un ensemble de parties d'un ensemble A. On suppose que $\mathscr{F}$ est non vide et que pour toute partie non vide $\mathscr{T}$ de $\mathscr{F}$ totalement ordonnée par l'inclusion (c'est-à-dire telle que pour $P, P' \in \mathscr{T}$ on a soit $P \subseteq P'$ soit $P \supseteq P'$) la réunion $\bigcup_{P\in\mathscr{T}} P$ soit contenue dans un élément de $\mathscr{F}$. Alors il existe dans $\mathscr{F}$ un élément M maximal pour l'inclusion (c'est-à-dire que si $P \supseteq M$ avec $P \in \mathscr{F}$ alors $P = M$).

Proposition 3.5.8. Avec la notation introduite en 3.5.4, il existe $\varsigma \in \mathcal{S}$ maximal pour l'inclusion (au sens où si $\varsigma \subseteq \varsigma'$ avec $\varsigma' \in \mathcal{S}$ alors $\varsigma = \varsigma'$) ; de plus, si $\varsigma' \in \mathcal{S}$, alors ς est défini en tout point où ς' l'est.

Démonstration. L'existence de $\varsigma \in \mathcal{S}$ maximal pour l'inclusion découle immédiatement de 3.5.7 en utilisant 3.5.6 pour constater que si $\mathscr{T} \subseteq \mathcal{S}$ est totalement ordonné pour l'inclusion alors la réunion $\bigcup_{\varsigma\in\mathscr{T}} \varsigma$ appartient à $\mathcal{S}$.

Une fois trouvé $\varsigma \in \mathcal{S}$ maximal pour l'inclusion, si $\varsigma' \in \mathcal{S}$, d'après 3.5.5, on peut trouver ς'' prolongeant ς et défini partout où ς' l'est, et comme ς est maximal, on a $\varsigma'' = \varsigma$, donc ς est bien défini partout où ς' l'est. ☺

3.5.9. En continuant les notations introduites en 3.5.4, on fixe maintenant $\varsigma \in \mathcal{S}$ maximal pour l'inclusion (dont l'existence est garantie par la proposition 3.5.8). Soit N l'ensemble des sommets x de G où $\varsigma(x)$ est défini (i.e., le domaine de définition de ς) ; on vient de voir que N est aussi l'ensemble des points où un élément quelconque de $\mathcal{S}$ est défini, i.e., l'ensemble des positions à partir desquelles le premier joueur a une stratégie positionnelle gagnante. Soit P l'ensemble des sommets $x \in G$ dont tous les voisins sortants appartiennent à N (y compris s'il n'y a pas de voisin sortant, i.e., si x est un puits) : clairement, P est l'ensemble des positions à partir desquelles le second joueur a une stratégie positionnelle gagnante (quel que soit le coup du joueur adversaire, il amènera à une position où on a une stratégie gagnante).

Enfin, on note $D := G \setminus (N \cup P)$ l'ensemble des sommets restants.

Proposition 3.5.10. Avec les notations introduites en 3.5.4 et 3.5.9,

(i) un sommet $x \in G$ appartient à N si et seulement si il a au moins un voisin sortant qui appartient à P,

(ii) un sommet $x \in G$ appartient à P si et seulement si tous ses voisins sortants appartiennent à N.

Démonstration. L'affirmation (ii) est la définition même de P et n'a donc pas à être prouvée. Il s'agit donc de montrer (i).

Si $x \in N$ alors $y := \varsigma(x)$ est un voisin sortant de x qui appartient à P puisque $\varsigma \in \mathcal{S}$. Réciproquement, si x a un voisin sortant y qui appartient à P, et si $\varsigma(x)$ n'était pas défini, on pourrait étendre ς en posant $\varsigma(x) = y$, ce qui donnerait un élément de $\mathcal{S}$ (toute partie jouée à partir de x conduit à y et de là à des points où ς est définie, donc est gagnée par le premier joueur), contredisant la maximalité de ς ; c'est donc que $\varsigma(x)$ était bien défini, i.e., $x \in N$. ☺

3.5.11. Par contraposée, sur l'ensemble $D := G \setminus (N \cup P)$ des sommets restants de G, on a les propriétés suivantes : $x \in G$ appartient à D si et seulement si

(i*) tous les voisins sortants de x sont dans $N \cup D$ *et*

(ii*) au moins l'un d'entre eux appartient à D.

On définit alors une stratégie positionnelle τ étendant ς de la façon suivante : si $\varsigma(x)$ est défini (i.e., $x \in N$), on pose $\tau(x) = \varsigma(x)$, et si $x \in D$ on choisit pour $\tau(x)$ un voisin sortant de x qui appartienne à D (lequel voisin existe d'après (ii*)). À partir d'un sommet x_0 dans D, si l'un ou l'autre joueur joue selon τ, ce joueur survit, puisque soit son adversaire le laisse toujours dans D auquel cas le joueur considéré peut toujours jouer (selon τ) en restant dans D, soit son adversaire quitte D et d'après (i*) joue vers N, et alors le joueur considéré gagne puisqu'il joue selon ς.

Bref, à partir d'un sommet de N le premier joueur a une stratégie *positionnelle* gagnante, à partir d'un sommet de P c'est le second joueur qui en a une, et à partir d'un sommet de D les deux joueurs ont une stratégie positionnelle survivante. (Dans tous les cas, on peut utiliser le τ qu'on vient de construire comme stratégie positionnelle.)

Théorème 3.5.12. Soit G un graphe orienté. Quel que soit le sommet x_0 de G choisi comme position initiale, dans le jeu combinatoire impartial à information parfaite considéré en 3.4.1, exactement l'une des trois affirmations suivantes est vraie :

— le premier joueur (Alice) possède une stratégie positionnelle gagnante,

— le second joueur (Bob) possède une stratégie positionnelle gagnante,

— chacun des deux joueurs possède une stratégie positionnelle survivante.

En particulier, l'existence d'une stratégie positionnelle gagnante ou survivante est équivalente à celle d'une stratégie historique de même nature.

De plus, si N, P, D sont les ensembles de sommets x_0 à partir desquels chacune des trois affirmations ci-dessus est vraie,

— un sommet $x \in G$ appartient à N si et seulement si il a au moins un voisin sortant qui appartient à P,

— un sommet $x \in G$ appartient à P si et seulement si tous ses voisins sortants appartiennent à N,

— un sommet $x \in G$ appartient à D si et seulement si tous ses voisins sortants appartiennent à $N \cup D$ et au moins l'un d'eux appartient à D.

Démonstration. L'existence des stratégies positionnelles a déjà été montré ci-dessus, ainsi que les propriétés sur N, P, D. L'équivalence entre stratégies positionnelles et historiques vient du fait que toute stratégie positionnelle peut être vue comme une stratégie historique (en ignorant l'historique) et du fait que les trois cas sont exclusifs aussi bien pour les stratégies historiques que positionnelles. ☺

3.5.13. On a en particulier redémontré le théorème 3.4.4, même si la démonstration suivie ici (consistant à prendre une stratégie positionnelle maximale pour l'inclusion) n'est peut-être pas très éclairante.

En utilisant la notion d'ordinaux, on pourrait donner une autre démonstration, plus explicite, du théorème 3.5.12 : elle consiste à reprendre la seconde démonstration qui a été donnée du théorème 3.4.4 et à constater qu'en la modifiant à peine elle conduit maintenant à définir une stratégie positionnelle ; un peu plus précisément, on définit par induction sur l'ordinal α les positions gagnantes en α coups par le premier joueur et les positions gagnantes en α coups par le second joueur, et une stratégie gagnante consiste à jouer d'une position gagnante en α coups pour le premier joueur vers une position gagnante en $\beta < \alpha$ coups pour le second joueur (pour les stratégies survivantes, on complète en jouant d'une position non étiquetée vers une position non étiquetée, mais le problème de la survie est de toute façon plus simple).

Dans le cas des jeux définis par un graphe bien-fondé (cf. 4.1.1), c'est-à-dire que le nul est impossible, la détermination est beaucoup plus simple à démontrer en on en verra encore une nouvelle démonstration dans le cadre de la théorie de Grundy.

Un bonus au théorème 3.5.12 est l'affirmation suivante :

Proposition 3.5.14. Dans le contexte du théorème 3.5.12, si N^*, P^*, D^* est une partition de G en trois parties vérifiant les trois propriétés qui ont été énoncées pour N, P, D (en remplaçant N, P, D par N^*, P^*, D^* respectivement), alors on a $N \subseteq N^* \subseteq N \cup D$ et $P \subseteq P^* \subseteq P \cup D$ et bien sûr $D \supseteq D^*$.

En particulier, si on utilise le théorème 4.2.5 ci-dessous pour définir la *plus petite* (pour l'inclusion) fonction partielle $f\colon G \dashrightarrow Z := \{\mathtt{P}, \mathtt{N}\}$ telle que $f(x)$ vaille $\mathtt{N}$ ssi x a au moins un voisin sortant y pour lequel $f(y) = \mathtt{P}$, et que $f(x)$ vaille $\mathtt{P}$ ssi pour tout voisin sortant y de x on a $f(y) = \mathtt{N}$, alors $f(x)$ vaut $\mathtt{P}$ ou bien $\mathtt{N}$ ou bien est indéfinie lorsque respectivement le premier joueur a une stratégie gagnante, le second joueur en a une, ou les deux ont une stratégie survivante.

Démonstration. Si N^*, P^*, D^* ont les mêmes propriétés que N, P, D, on peut définir une stratégie (positionnelle) consistant à jouer à partir de N^* dans P^* (c'est-à-dire à choisir pour chaque sommet de N^* un voisin sortant dans P^*) et à partir de D^* dans D^* : si le premier joueur suit cette stratégie à partir d'un sommet dans N^* ou D^* ne peut pas perdre puisque les propriétés des parties font que son coup sera toujours défini : donc $N^* \cup D^* \subseteq N \cup D$, ce qui signifie en passant au complémentaire $P^* \supseteq P$, et si le second joueur suit cette stratégie à partir d'un sommet dans P^* ou D^* il ne peut pas perdre non plus : donc $P^* \cup D^* \subseteq P \cup D$, ce qui signifie exactement $N^* \supseteq N$.

Le deuxième paragraphe est une reformulation de la même affirmation : la fonction $f\colon G \dashrightarrow Z := \{\mathtt{P}, \mathtt{N}\}$ définie par $f(x) = \mathtt{P}$ lorsque $x \in P$ et $f(x) = \mathtt{N}$ lorsque $x \in N$ est la plus petite fonction partielle vérifiant les propriétés qu'on a dites, i.e., la plus petite telle que $f(x) = \Phi(x, f|_{\mathrm{outnb}(x)})$ avec les notations du théorème 4.2.5 et $\Phi(x, g)$ valant $\mathtt{N}$ si $g(y)$ est défini et vaut $\mathtt{P}$ pour au moins un $y \in \mathrm{outnb}(x)$ et $\mathtt{P}$ si $g(y)$ est défini et vaut $\mathtt{N}$ pour tout $y \in \mathrm{outnb}(x)$ (comme Φ est cohérente en la seconde variable, on est bien dans le cas d'application du théorème 4.2.5, même si ici on a déjà démontré l'existence d'une plus petite f). ☺

4 Théorie de l'induction bien-fondée

Le but de cette partie est de présenter les outils fondamentaux sur les graphes orientés bien-fondés (cf. 4.1.1) utiles à la théorie combinatoire des jeux impartiaux. Il s'agit notamment de la théorie de l'induction bien-fondée (cf. 4.1.8 et 4.1.10).

4.1 Graphes orientés bien-fondés

Définition 4.1.1. Un **graphe orienté [simple]** est la donnée d'un ensemble G et d'une partie E de G^2 ne rencontrant pas la diagonale (i.e., un ensemble de couples (x, y) avec $x \neq y$) : si on préfère, il s'agit d'un ensemble G muni d'une relation E irréflexive. Les éléments de G s'appellent **sommets** et les éléments de E **arêtes** de G, et si $(x, y) \in E$, on dit qu'il y a une arête allant du sommet x au sommet y, ou arête de source x et de cible y, ou encore que y est **atteint** par une arête de source x, ou encore que y est un **voisin sortant** de x, et on notera $\mathrm{outnb}(x) = \{y : (x, y) \in E\}$ l'ensemble des voisins sortants de x. Un sommet qui n'a pas de voisin sortant est appelé **puits** dans G.

Un tel graphe est dit **fini** lorsque G est fini (il est clair que E l'est alors aussi). Il est dit **acyclique** lorsqu'il n'existe pas de suite finie (« cycle ») $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de sommets telle que (x_i, x_{i+1}) soit une arête pour chaque $0 \leq i \leq n-1$, où on convient que $x_n = x_0$.

Un graphe orienté (possiblement infini) est dit **bien-fondé** ou **progressivement fini** lorsqu'il n'existe pas de suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de sommets telle que

(x_i, x_{i+1}) soit une arête pour tout $i \in \mathbb{N}$ (i.e., aucun cycle ni chemin infini, cf. ci-dessous).

4.1.2. Il est évident que tout graphe bien-fondé est acyclique (s'il existe un cycle $x_0, \ldots, x_{n-1}$, on en déduit une suite infinie en posant $x_i = x_{i \bmod n}$) ; pour un graphe *fini*, la réciproque est vraie : en effet, s'il existe une suite infinie $x_0, x_1, x_2, \ldots$ avec une arête de x_i à x_{i+1} pour chaque i, il doit exister $p < q$ tels que $x_q = x_p$, et on obtient alors un cycle $x_p, \ldots, x_{q-1}$. En général, cependant, les notions sont distinctes, l'exemple le plus évident (de graphe acyclique mais mal fondé) étant sans doute celui de $\mathbb{N}$ dans lequel on fait pointer une arête de i à $i+1$ pour chaque i.

Définition 4.1.3. Si G est un graphe orienté on appelle **relation d'accessibilité** la clôture réflexive-transitive de la relation donnée par les arêtes de G : autrement dit, on dit que y est accessible à partir de x lorsqu'il existe $x{=}x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n{=}y$ tels que pour chaque i le sommet x_{i+1} soit voisin sortant de x_i (on autorise $n = 0$, c'est-à-dire que chaque sommet est toujours accessible à partir de lui-même).

On pourra aussi introduire la relation d'**accessibilité stricte** qui est la clôture transitive : autrement dit, la différence avec l'accessibilité définie ci-dessus est qu'on impose $n > 0$, i.e., on ne relie pas un sommet à lui-même.

L'ensemble des sommets accessibles à partir d'un sommet x s'appellera aussi l'**aval** de x et pourra se noter $\operatorname{downstr}(x)$ (c'est donc la plus petite partie P de G telle que $x \in P$ et $y \in P \Longrightarrow \operatorname{outnb}(y) \subseteq P$, cf. 4.1.5). On peut considérer l'aval de x comme un sous-graphe induit de G (c'est-à-dire, considérer le graphe dont l'ensemble des sommets est l'aval de x et dont les arêtes sont celles qui partent d'un tel sommet). On remarquera la convention faite que x appartient à son propre aval.

4.1.4. On peut remarquer que la relation d'accessibilité sur G est antisymétrique (i.e., est une relation d'ordre partiel large) si et seulement si G est acyclique : l'accessibilité stricte est alors l'ordre strict correspondant. Lorsque G est bien-fondé, la relation d'accessibilité stricte est elle-même bien-fondée (au sens où le graphe qu'elle définit est bien-fondé) : si on la voit comme une relation d'ordre partiel ($x > y$ signifiant que y est accessible à partir de x), cela signifie qu'il n'y a pas de suite infinie strictement décroissante.

Une relation d'ordre *total* (strict) $>$ qui soit bien-fondée, i.e., telle qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante, est appelée un **bon ordre**, ou définir un ensemble **bien-ordonné**.

Définition 4.1.5. Si G est un graphe orienté, on dira qu'un ensemble P de sommets de G est **aval-clos** lorsqu'il vérifie la propriété suivante : « si x est dans P alors tout voisin sortant de x est dans P » (soit $x \in P \Longrightarrow \operatorname{outnb}(x) \subseteq P$; ou de façon équivalente, « tout sommet accessible à partir d'un sommet de P est encore dans P »,).

Réciproquement, on dira qu'un ensemble P de sommets de G est **aval-inductif** lorsqu'il vérifie la propriété suivante : « si $x \in G$ est tel que tout voisin sortant de x appartient à P, alors x lui-même appartient à P » (i.e. « P contient tout sommet dont tous les voisins sortants sont dans P », soit $\mathrm{outnb}(x) \subseteq P \Longrightarrow x \in P$).

4.1.6. Il est clair qu'une intersection ou réunion quelconque d'ensembles aval-clos est encore aval-close. L'aval de x (ensemble des sommets accessibles depuis x) est toujours aval-clos, c'est même la plus petite partie aval-close contenant x, et il est facile de se convaincre qu'un ensemble de sommets est aval-clos si et seulement si il est une réunion d'avals.

Pour ce qui est des ensembles aval-inductifs, il est clair qu'une intersection quelconque d'ensembles aval-inductifs est aval-inductive. Leur nature, au moins dans un graphe bien-fondé, va être précisée dans ce qui suit, et ceci justifiera le terme d'« aval-inductif ».

Proposition 4.1.7 (induction bien-fondée)**.** Pour un graphe orienté G, les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (*) G est bien-fondé.
- (†) Tout ensemble *non vide* N de sommets de G contient un sommet $x \in N$ qui est un puits pour N, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune arête (x, y) de G avec $y \in N$ (i.e., aucun voisin sortant de x n'appartient à N).
- (‡) Si une partie $P \subseteq G$ vérifie la propriété suivante « si $x \in G$ est tel que tout voisin sortant de x appartient à P, alors x lui-même appartient à P » (i.e., « P est aval-inductif », cf. 4.1.5), alors $P = G$.

Démonstration. L'équivalence entre (†) et (‡) est complètement formelle : elle s'obtient en posant $P = G \setminus N$ ou réciproquement $N = G \setminus P$, en passant à la contraposée, et en passant aussi à la contraposée à l'intérieur de la propriété d'être aval-inductif (entre guillemets dans (‡)), et encore une fois dans la prémisse de cette propriété (« tout voisin sortant de x appartient à P » équivaut à « aucun voisin sortant de x n'appartient à N », i.e., « x est un puits pour N »).

Pour montrer que (†) implique (*), il suffit d'appliquer (†) à l'ensemble $N := \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ des sommets d'une suite telle qu'il y ait une arête de x_i à x_{i+1}.

Pour montrer que (*) implique (†), on suppose que N est un ensemble non-vide de sommets sans puits [i.e., puits pour N] : comme N est non-vide, on choisit $x_0 \in N$, et comme x_0 n'est pas un puits on peut choisir $x_1 \in N$ atteignable à partir de x_0 par une arête, puis $x_2 \in N$ atteignable à partir de x_1 et ainsi de suite — par récurrence (et par l'axiome du choix [dépendants]), on construit ainsi une suite (x_i) de sommets telle qu'il y ait une arête de x_i à x_{i+1}. ☺

La définition (*) choisie pour un graphe bien-fondé est la plus compréhensible, mais en un certain sens la définition (‡) est « la bonne » (en l'absence de l'axiome du choix, il faut utiliser (†) ou (‡), et en mathématiques constructives il faut utiliser (‡)). En voici une traduction informelle :

Scholie 4.1.8. Pour montrer une propriété P sur les sommets d'un graphe bien-fondé, on peut supposer (comme « hypothèse d'induction »), lorsqu'il s'agit de montrer que x a la propriété P, que cette propriété est déjà acquise pour tous les voisins sortants de x.

Exactement comme le principe de récurrence sur les entiers naturels, le principe d'induction bien-fondée peut servir non seulement à démontrer des propriétés sur les graphes bien-fondés, mais aussi à définir des fonctions dessus :

Théorème 4.1.9 (définition par induction bien-fondée)**.** Soit G un graphe orienté bien-fondé et Z un ensemble quelconque. Notons $\operatorname{outnb}(x) = \{y : (x, y) \in E\}$ l'ensemble des voisins sortants d'un sommet x de G (i.e., des y atteints par une arête de source x).

Appelons $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (x, f) où $x \in G$ et f une fonction de l'ensemble des voisins sortants de x vers Z (autrement dit, $\mathscr{F}$ est $\bigcup_{x\in G} \big(\{x\} \times Z^{\operatorname{outnb}(x)}\big)$). Soit enfin $\Phi\colon \mathscr{F} \to Z$ une fonction quelconque. Alors il existe une unique fonction $f\colon G \to Z$ telle que pour tout $x \in G$ on ait

$$f(x) = \Phi(x,\ f|_{\operatorname{outnb}(x)})$$

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité : si f et f' vérifient toutes les deux la propriété annoncée, soit P l'ensemble des sommets x de G tels que $f(x) = f'(x)$. Si $x \in G$ est tel que $\operatorname{outnb}(x) \subseteq P$, c'est-à-dire que $f|_{\operatorname{outnb}(x)} = f'|_{\operatorname{outnb}(x)}$, alors $f(x) = \Phi(x,\ f|_{\operatorname{outnb}(x)}) = \Phi(x,\ f'|_{\operatorname{outnb}(x)}) = f'(x)$, autrement dit, $x \in P$. La phrase précédente affirme précisément que P vérifie la propriété entre guillemets dans (‡) de 4.1.7, et d'après la proposition en question, on a donc $P = G$, c'est-à-dire $f = f'$. Ceci montre l'unicité.

Pour montrer l'existence, on considère l'ensemble $\mathfrak{E}$ des fonctions $e\colon H \to Z$ définies sur une partie aval-close $H \subseteq G$ et telles que pour tout $e(x) = \Phi(x, e|_{\operatorname{outnb}(x)})$ pour tout $x \in H$. Si $e, e' \in \mathfrak{E}$ alors e et e' coïncident là où toutes deux sont définies, comme le montre l'unicité qu'on a montrée (appliquée à e et e' sur l'ensemble aval-clos $H \cap H'$ de définition commun de e et e'). En particulier, la réunion [des graphes] de tous les $e \in \mathfrak{E}$ définit encore un élément f de $\mathfrak{E}$, maximal pour le prolongement. Soit P l'ensemble des $x \in G$ où f est définie. Si P contient (i.e., f est définie sur) tous les voisins sortants d'un certain $x \in G$, alors f est nécessairement définie aussi en x, sans quoi on pourrait l'y prolonger par $f(x) = \Phi(x,\ f|_{\mathrm{outnb}(x)})$, ce qui contredirait la maximalité de f. Par induction bien-fondée, on en conclut $P = G$, c'est-à-dire que f est définie sur G tout entier. C'est ce qu'on voulait. ☺

Ce théorème est difficile à lire. En voici une traduction informelle :

Scholie 4.1.10. Pour définir une fonction f sur un graphe bien-fondé, on peut supposer, lorsqu'on définit $f(x)$, que f est déjà défini (i.e., connu) sur tous les voisins sortants de x : autrement dit, on peut librement utiliser la valeur de $f(y)$ sur chaque sommet y voisin sortant de x, dans la définition de $f(x)$.

Voici un exemple d'application de la définition par induction bien-fondée :

Définition 4.1.11. Soit G un graphe orienté bien-fondé dans lequel chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins sortants (par exemple, un graphe fini acyclique). En utilisant le théorème 4.1.9, on définit alors une fonction $\mathrm{rk}\colon G \to \mathbb{N}$ par $\mathrm{rk}(x) = \max\{\mathrm{rk}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\} + 1$ où il est convenu que $\max \varnothing = -1$; formellement, c'est-à-dire qu'on pose $\Phi(x, r) = \max\{r(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\} + 1$ avec $\Phi(x, r) = 0$ si x est un puits, et qu'on appelle rk la fonction telle que $\mathrm{rk}(x) = \Phi(x, \mathrm{rk}|_{\mathrm{outnb}(x)})$ dont l'existence et l'unicité sont garanties par le théorème. Cette fonction rk s'appelle la **fonction rang** sur G, on dit que $\mathrm{rk}(x)$ est le rang (ou rang bien-fondé) d'un sommet x. (Voir aussi 4.1.18 pour une généralisation.)

4.1.12. Autrement dit, un sommet de rang 0 est un puits, un sommet de rang 1 est un sommet non-puits dont tous les voisins sortants sont terminaux, un sommet de rang 2 est un sommet dont tous les voisins sortants sont de rang ≤ 1 mais et au moins un est de rang exactement 1, et ainsi de suite.

Il revient au même de définir le rang de la manière suivante : le rang $\mathrm{rk}(x)$ d'un sommet x d'un graphe orienté bien-fondé est la plus grande longueur possible d'un chemin orienté partant de x, c'est-à-dire, le plus grand n tel qu'il existe une suite $x_0, x_1, \ldots, x_n$ telle que $x_0 = x$ et que pour chaque i le sommet x_{i+1} soit atteint par une arête de source x_i.

Voici un autre exemple de définition par induction bien-fondée :

Définition 4.1.13. Soit G un graphe orienté bien-fondé dans lequel chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins sortants. En utilisant le théorème 4.1.9, on définit alors une fonction $\mathrm{gr}\colon G \to \mathbb{N}$ par $\mathrm{gr}(x) = \mathrm{mex}\{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$ où, si $S \subseteq \mathbb{N}$, on note $\mathrm{mex}\, S := \min(\mathbb{N} \setminus S)$ pour le plus petit entier naturel *n'appartenant pas* à S ; formellement, c'est-à-dire qu'on pose $\Phi(x, g) = \mathrm{mex}\{g(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$ et qu'on appelle gr la fonction telle que $\mathrm{gr}(x) = \Phi(x, \mathrm{gr}|_{\mathrm{outnb}(x)})$ dont l'existence et l'unicité sont garanties par le théorème. Cette fonction gr s'appelle la **fonction de Grundy** sur G, on dit que $\mathrm{gr}(x)$ est la valeur de Grundy d'un sommet x. (Voir aussi 4.1.18 pour une généralisation.)

4.1.14. En particulier, un sommet de valeur de Grundy 0 est un sommet qui n'a que des sommets de valeur de Grundy > 0 comme voisins sortants (ceci inclut le cas particulier d'un puits), tandis qu'un sommet de valeur de Grundy > 0 est un sommet ayant au moins un sommet de valeur de Grundy 0 comme voisin sortant.

On verra que la notion de fonction de Grundy, et particulièrement le fait que la valeur soit nulle ou pas, a énormément d'importance dans l'étude de la théorie des jeux impartiaux. On verra aussi comment la définir sans l'hypothèse que chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins sortants (mais ce ne sera pas forcément un entier naturel : cf. 4.1.18). En attendant, peut se passer de cette hypothèse pour définir isolément l'ensemble des sommets de valeur de Grundy 0 :

Définition 4.1.15. Soit G un graphe orienté bien-fondé. En utilisant le théorème 4.1.9, on définit alors une partie $P \subseteq G$ telle que $x \in P$ ssi $\mathrm{outnb}(x) \cap P = \varnothing$; formellement, c'est-à-dire que pour $f\colon \mathrm{outnb}(x) \to \{\mathtt{P}, \mathtt{N}\}$ on définit $\Phi(x, g)$ comme valant $\mathtt{N}$ si g prend la valeur $\mathtt{P}$, et $\mathtt{P}$ si g vaut constamment $\mathtt{N}$ (y compris si g est la fonction vide), et qu'on appelle f la fonction telle que $f(x) = \Phi(x, f|_{\mathrm{outnb}(x)})$ dont l'existence et l'unicité sont garanties par le théorème, et enfin on pose $P = \{x \in G : f(x) = \mathtt{P}\}$.

Les éléments de P (i.e., les x tels que $f(x) = \mathtt{P}$) seront appelés les **P-sommets** (ou P-positions) de G, tandis que les éléments du complémentaire $G \setminus P$ (i.e., les x tels que $f(x) = \mathtt{N}$) seront appelés **N-sommets** (ou N-positions) de G : ainsi, *un P-sommet est un sommet dont tous les voisins sortants sont des N-sommets, et un N-sommet est un sommet qui a au moins un P-sommet pour voisin sortant*.

4.1.16. Dans un jeu combinatoire comme exposé en 1.3.9 et/ou 3.4.1, si le graphe est bien-fondé, les P-sommets sont les positions du jeu à partir desquelles le joueur Précédent (=second joueur) a une stratégie gagnante, tandis que les N-sommets sont celles à partir desquelles le joueur suivant ('N' comme « Next », =premier joueur) a une stratégie gagnante (consistant, justement, à jouer vers un P-sommet) : ceci résulte de 3.1.8 ou 3.1.9 (ou encore de 3.5.10 dans le cadre plus général de la section 3.5).

On peut donc résumer ainsi la stratégie gagnante « universelle » pour n'importe quel jeu combinatoire impartial à connaissance parfaite dont le graphe est bien-fondé : *jouer vers un P-sommet*, après quoi l'adversaire sera obligé de jouer vers un N-sommet (si tant est qu'il peut jouer), et on pourra de nouveau jouer vers un P-sommet, et ainsi de suite (et comme le graphe est bien-fondé, le jeu termine forcément en temps fini, et celui qui a joué pour aller vers les P-sommets aura gagné puisqu'il peut toujours jouer).

4.1.17. Pour illustrer la technique de démonstration par induction bien-fondée, montrons que si gr est la fonction de Grundy introduite en 4.1.13 et si P est la partie introduite en 4.1.15, alors on a $x \in P$ si et seulement si $\mathrm{gr}(x) = 0$, i.e., les P-sommets sont ceux pour lesquels la fonction de Grundy est nulle.

Par induction bien-fondé (cf. 4.1.8), on peut supposer la propriété (« $x \in P$ si et seulement si $\mathrm{gr}(x) = 0$ ») déjà connue pour tous les voisins sortants y du sommet x où on cherche à la vérifier. Si $x \in P$, cela signifie par définition de P que tous ses voisins sortants y de x sont dans $G \setminus P$, et d'après l'hypothèse d'induction cela signifie $\mathrm{gr}(y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathrm{outnb}(x)$, c'est-à-dire $\mathrm{mex}\{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\} = 0$ (puisque $\mathrm{mex}\, S = 0$ si et seulement si $0 \notin S$), ce qui signifie $\mathrm{gr}(x) = 0$. Toutes ces reformulations étaient des équivalences : on a bien montré que $x \in P$ équivaut à $\mathrm{gr}(x) = 0$, ce qui conclut l'induction.

4.1.18. En anticipant sur la notion d'ordinaux introduite dans la partie 5, la fonction rang peut se généraliser à n'importe quel graphe bien-fondé (sans hypothèse de nombre fini de voisins sortants), à condition d'autoriser des valeurs ordinales quelconques : précisément, on définit $\mathrm{rk}(x) = \sup\{\mathrm{rk}(y) + 1 : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$ (avec cette fois $\sup \varnothing = 0$ pour garder $\mathrm{rk}(x) = 0$ si x est un puits) c'est-à-dire que $\mathrm{rk}(x)$ est le plus petit ordinal strictement supérieur à $\mathrm{rk}(y)$ pour tout $y \in \mathrm{outnb}(x)$.

De même, la fonction de Grundy peut se généraliser à n'importe quel graphe bien-fondé en définissant $\mathrm{gr}(x) = \mathrm{mex}\{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$ où $\mathrm{mex}\, S$ désigne le plus petit ordinal *n'appartenant pas* à S (voir 6.1.3 pour une écriture formelle de cette définition). Il reste vrai (avec la même démonstration) que $\mathrm{gr}(x)$ est nul si et seulement si x est un P-sommet.

On peut donc résumer ainsi la stratégie gagnante « universelle » pour n'importe quel jeu combinatoire impartial à connaissance parfaite dont le graphe est bien-fondé : *jouer de façon à annuler la fonction de Grundy* (c'est-à-dire, jouer vers un P-sommet), après quoi l'adversaire sera obligé de jouer vers un sommet dont la valeur de Grundy est non-nulle, et on pourra de nouveau jouer vers zéro, et ainsi de suite (et comme le graphe est bien-fondé, le jeu termine forcément en temps fini, et celui qui a joué pour annuler la fonction de Grundy aura gagné puisqu'il peut toujours jouer).

4.1.19. Lorsque G est *fini* et bien-fondé, i.e., est un graphe fini acyclique (cf. 4.1.2), la fonction f définie par le théorème 4.1.9 peut se calculer algorithmiquement de la façon suivante (si tant est que Φ elle-même est calculable) :

— utiliser un algorithme de **tri topologique** (en ayant inversé le sens des arêtes pour se ramener à la convention usuelle) pour trouver une numérotation des sommets de G telle que pour toute arête (x, y) de G le sommet y précède x dans la numérotation ;

— parcourir tous les éléments $x \in G$ dans l'ordre de cette numérotation, et définir $f(x) = \Phi(x, f|_{\mathrm{outnb}(x)})$, qui aura toujours un sens car tous les éléments de $\mathrm{outnb}(x)$ auront été parcourus avant x.

Si le tri topologique a été effectué par parcours en largeur, il est compatible avec la fonction rang (et inversement, tout tri raffinant la fonction rang est un tri topologique et peut s'obtenir par parcours en largeur). La notion de rang ordinal (cf. 4.1.18) est donc une forme de généralisation transfinie du tri topologique.

Un algorithme évitant le tri topologique, au prix d'une plus grande complexité, mais ayant le bénéfice de fonctionner dans une situation plus générale (graphes non nécessairement bien-fondés/acycliques), sera exposé dans la section suivante (cf. 4.2.7).

4.2 Généralisations aux graphes non nécessairement bien-fondés

Définition 4.2.1. L'ensemble des sommets d'un graphe orienté dont l'aval est bien-fondé, autrement dit, l'ensemble des sommets x tels qu'il n'existe pas de suite $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de sommets où $x_0 = x$ et où pour chaque i le sommet x_{i+1} est atteint par une arête de source x_i, est appelé la **partie bien-fondée** du graphe.

4.2.2. Il sera utile pour la suite de remarquer que la partie bien-fondée de G est à la fois aval-close et aval-inductive (car on peut construire une suite infinie $x_0, x_1, x_2 \ldots$, avec x_{i+1} voisin sortant de x_i, commençant par un x_0 donné si et seulement si on peut le faire en commençant pour un certain voisin sortant x_1 de ce x_0).

Proposition 4.2.3. Si G est un graphe orienté non supposé bien-fondé, la partie bien-fondée de G est la plus petite (pour l'inclusion) partie P aval-inductive de P (i.e., vérifiant la propriété « si $x \in G$ est tel que tout voisin sortant de x appartient à P, alors x lui-même appartient à P », cf. 4.1.5).

Démonstration. La plus petite partie aval-inductive de G a bien un sens, car l'intersection de toutes les parties aval-inductives est encore aval-inductive (cf. 4.1.6).

Si x est un sommet de G et $\mathrm{downstr}(x)$ désigne son aval (considéré comme sous-graphe induit de G), il est clair que pour toute partie P aval-inductive de G, la partie $P \cap \mathrm{downstr}(x)$ de $\mathrm{downstr}(x)$ est aval-inductive dans ce dernier (le point important étant que les voisins sortants d'un sommet de $\mathrm{downstr}(x)$ dans ce dernier sont les mêmes que ceux dans G). En particulier, si $\mathrm{downstr}(x)$ est bien-fondé (c'est-à-dire, si x appartient à la partie bien-fondée de G), alors x appartient à toute partie aval-inductive de G.

Mais réciproquement, la partie bien-fondée de G est elle-même aval-inductive (car si $\mathrm{downstr}(y)$ est bien-fondé pour tout voisin sortant de x, il est clair que

$\mathrm{downstr}(x)$ est aussi bien-fondé, cf. 4.2.2), donc un sommet qui appartient à toute partie aval-inductive de G est, en particulier, dans la partie bien-fondée de G. ☺

4.2.4. Pour pouvoir énoncer le théorème suivant, on aura besoin de faire les rappels, définitions et remarques suivants. Une **fonction partielle** $A \dashrightarrow Z$, où A est un ensemble quelconque, n'est rien d'autre qu'une fonction définie $D \to Z$ sur une partie $D \subseteq A$ de Z (appelée **ensemble de définition** de la partie). Si $f, g\colon A \dashrightarrow Z$ sont deux fonctions partielles, on dit que f **prolonge** g et on note $f \supseteq g$ ou $g \subseteq f$, lorsque l'ensemble de définition D_f de f contient celui D_g de g et que f et g coïncident sur D_f (ceci signifie bien que $f \supseteq g$ en tant qu'ensembles si on identifie une fonction avec son graphe). Il s'agit bien sûr là d'un ordre partiel (sur l'ensemble des fonctions partielles $A \dashrightarrow Z$).

Enfin, si Φ est une fonction partielle elle-même définie sur l'ensemble des fonctions partielles $A \dashrightarrow Z$ (cet ensemble est $\bigcup_{D\subseteq A} Z^D$, si on veut), on dit que Φ est **cohérente** lorsque $\Phi(f) = \Phi(g)$ à chaque fois que f prolonge g et que $\Phi(g)$ est définie (autrement dit, une fois que Φ est définie sur une fonction partielle g, elle est définie sur tout prolongement de g et y prend la même valeur que sur g ; intuitivement, il faut s'imaginer que si g apporte assez d'information pour décider la valeur de $\Phi(g)$, toute information supplémentaire reste cohérente avec cette valeur).

Théorème 4.2.5. Soit G un graphe orienté et Z un ensemble quelconque. Notons $\mathrm{outnb}(x) = \{y : (x, y) \in E\}$ l'ensemble des voisins sortants d'un sommet x de G (i.e., des y atteints par une arête de source x).

Appelons $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (x, f) où $x \in G$ et f une fonction *partielle* de l'ensemble des voisins sortants de x vers Z (autrement dit, $\mathscr{F}$ est $\bigcup_{x\in G} \bigcup_{D\subseteq \mathrm{outnb}(x)} \big(\{x\} \times Z^D\big)$). Soit enfin $\Phi\colon \mathscr{F} \dashrightarrow Z$ une fonction partielle cohérente en la deuxième variable, c'est-à-dire telle que $\Phi(x, f) = \Phi(x, g)$ dès que $f \supseteq g$ et que $\Phi(x, g)$ est définie. Alors il existe une plus petite (au sens du prolongement) fonction partielle $f\colon G \dashrightarrow Z$ telle que pour tout $x \in G$ on ait

$$f(x) = \Phi(x,\ f|_{\mathrm{outnb}(x)})$$

(au sens où chacun des deux membres est défini ssi l'autre l'est, et dans ce cas ils ont la même valeur).

Si $\Phi(x, g)$ est défini à chaque fois que g est totale, alors la fonction f qu'on vient de décrire est définie *au moins* sur la partie bien-fondée de G.

Démonstration. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions partielles $f\colon G \dashrightarrow Z$. Pour $f \in \mathscr{D}$, on définit $\Psi(f)$ comme la fonction partielle $x \mapsto \Phi(x, f|_{\mathrm{outnb}(x)})$. Remarquons que si f prolonge g dans $\mathscr{D}$ alors $\Psi(f)$ prolonge $\Psi(g)$ (c'est une traduction de la cohérence supposée sur Φ). Le lemme suivant (appliqué à $X = G$, les autres notations étant inchangées) permet de conclure à l'existence de f.

Pour ce qui est de la dernière affirmation, on procède par induction bien-fondée sur la partie bien-fondée de G : si $f|_{\mathrm{outnb}(x)}$ est totale, i.e., si f est définie sur chaque voisin sortant de x, alors l'hypothèse faite sur Φ assure que $f(x)$ est définie, et l'induction bien-fondée ((‡) de 4.1.7 appliqué à l'intersection P de la partie bien-fondée de G et de l'ensemble de définition de f) montre alors que f est définie partout sur la partie bien-fondée de G. ☺

La démonstration du théorème repose crucialement sur le lemme suivant, dont on va donner deux démonstrations :

Lemme 4.2.6. Soient X et Z deux ensembles quelconques : notons $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions partielles $X \dashrightarrow Z$, qu'on verra comme des parties de $X \times Z$ ne contenant jamais deux couples (x, z_1) et (x, z_2) avec la même première coordonnée. (Lorsque $f \supseteq g$, on dit que « f prolonge g ».)

Soit $\Psi \colon \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ une fonction (totale !) vérifiant : Ψ est *croissante* pour l'inclusion, c'est-à-dire que si f prolonge g, alors $\Psi(f)$ prolonge $\Psi(g)$. Alors il existe une plus petite (au sens du prolongement) fonction partielle $f \in \mathscr{D}$ telle que $\Psi(f) = f$.

Première démonstration. Montrons d'abord que *si* il existe une fonction partielle $f \in \mathscr{D}$ telle que $\Psi(f) = f$, ou même simplement $\Psi(f) \subseteq f$, alors il en existe une plus petite. Pour cela, il suffit de considérer l'intersection h de toutes les f telles que $\Psi(f) \subseteq f$ (considérées comme des parties de $X \times Z$) : dès lors qu'il existe au moins un $f \in \mathscr{D}$ tel que $\Psi(f) \subseteq f$, cette intersection h est bien définie et est bien un élément de $\mathscr{D}$. Si $\Psi(f) \subseteq f$ alors $h \subseteq f$ (puisque h est l'intersection des f), donc $\Psi(h) \subseteq \Psi(f)$ (par croissance de Ψ), donc $\Psi(h) \subseteq f$ (par transitivité), et comme ceci est vrai pour tous les f dont l'intersection est h, on a finalement $\Psi(h) \subseteq h$; mais la croissance de Ψ donne alors aussi $\Psi(\Psi(h)) \subseteq \Psi(h)$, et du coup $\Psi(h)$ fait partie des f qu'on a intersectées pour former h, et on a ainsi $h \subseteq \Psi(h)$; bref, $\Psi(h) = h$, et h est à la fois le plus petit élément $f \in \mathscr{D}$ vérifiant $\Psi(f) \subseteq f$ (de par sa construction) et le plus petit vérifiant $\Psi(f) = f$ (puisqu'il vérifie cette propriété).

Reste à montrer qu'il existe bien une fonction partielle f telle que $\Psi(f) = f$, ou même simplement $\Psi(f) \subseteq f$. Pour cela, on introduit l'ensemble $\mathscr{E}$ des $f \in \mathscr{D}$ qui vérifient $\Psi(f) \supseteq f$ (inclusion dans le sens opposé du précédent !). Notons que $\mathscr{E}$ n'est pas vide puisque $\varnothing \in \mathscr{E}$ (où $\varnothing$ est la fonction vide, définie nulle part).

Soit maintenant $\mathfrak{M}$ l'ensemble des applications (totales !) $T \colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ qui vérifient (i) $T(f) \supseteq f$ pour tout $f \in \mathscr{E}$ et (ii) si $f \supseteq g$ alors $T(f) \supseteq T(g)$. Ainsi $\mathrm{id}_{\mathscr{E}} \in \mathfrak{M}$ (trivialement) et $\Psi \in \mathfrak{M}$ (par définition de $\mathscr{E}$ et par croissance de Ψ) ; et si $T, T' \in \mathfrak{M}$ on a $T' \circ T \in \mathfrak{M}$ (en notant $T' \circ T$ la composée). L'observation suivante sera cruciale : si $g \in \mathscr{E}$ et $T, T' \in \mathfrak{M}$, alors on a à la fois $(T' \circ T)(g) \supseteq T(g)$ (d'après (i) pour T') et $(T' \circ T)(g) \supseteq T'(g)$ (d'après (i) pour T et (ii) pour T').

Affirmation : si $g \in \mathscr{E}$ alors la réunion des $T(g)$ pour tous les $T \in \mathfrak{M}$ est, en fait, une fonction partielle. En effet, l'observation faite ci-dessus montre que si $T, T' \in \mathfrak{M}$ alors les fonctions partielles $T(g)$ et $T'(g)$ sont toutes deux restrictions d'une même fonction partielle $(T' \circ T)(g)$, donc il ne peut pas y avoir de conflit entre leurs valeurs (au sens où si toutes les deux sont définies en un $x \in X$, elles y coïncident) — c'est exactement ce qui permet de dire que la réunion est encore une fonction partielle. Notons $U(g) := \bigcup_{T \in \mathfrak{M}} T(g)$ cette réunion. On a au moins $U(g) \in \mathscr{D}$. Mais en fait, comme $U(g)$ prolonge tous les $T(g)$, la croissance de Ψ assure que $\Psi(U(g))$ prolonge tous les $\Psi(T(g))$, qui prolongent eux-mêmes les $T(g)$ (puisque $T(g) \in \mathscr{E}$), bref $\Psi(U(g)) \supseteq U(g)$ et ainsi $U(g) \in \mathscr{E}$.

Mais alors $U \in \mathfrak{M}$ (on vient de voir que U est une fonction $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$, et les propriétés (i) et (ii) sont claires). En particulier, $\Psi \circ U \in \mathfrak{M}$, donc $(\Psi \circ U)(g)$ fait partie des $T(g)$ dont $U(g)$ est la réunion, et on a donc $(\Psi \circ U)(g) \subseteq U(g)$, l'inclusion réciproque ayant déjà été vue (et de toute façon on n'en a pas besoin). On a donc bien trouvé une fonction partielle $f := U(\varnothing)$ telle que $\Psi(f) \subseteq f$ (même $\Psi(f) = f$). ☺

Seconde démonstration. On utilise la notion d'ordinaux. On pose $f_0 = \varnothing$, et par induction sur l'ordinal α on définit $f_{\alpha+1} = \Psi(f_\alpha)$ et si δ est un ordinal limite alors $f_\delta = \bigcup_{\gamma<\delta} f_\gamma$. On montre simultanément par induction sur α que f_α est bien définie, est une fonction partielle, et, grâce à la croissance de Ψ, prolonge f_β pour chaque $\beta < \alpha$ (c'est ce dernier point qui permet de conclure que $\bigcup_{\gamma<\delta} f_\gamma$ est une fonction partielle lorsque δ est un ordinal limite : la réunion d'une famille totalement ordonnée pour l'inclusion de fonctions partielles est encore une fonction partielle). Les inclusions $f_\beta \subseteq f_\alpha$ pour $\beta < \alpha$ ne peuvent pas être toutes strictes sans quoi on aurait une surjection d'un ensemble sur la classe des ordinaux. Il existe donc τ tel que $f_{\tau+1} = f_\tau$, c'est-à-dire $\Psi(f_\tau) = f_\tau$. D'autre part, si $\Psi(h) = h$, alors par induction sur α on montre $f_\alpha \subseteq h$ pour chaque α (l'étape successeur étant que si $f_\alpha \subseteq h$ alors $f_{\alpha+1} = \Psi(f_\alpha) \subseteq \Psi(h) = h$), donc en particulier $f_\tau \subseteq h$, et f_τ est bien le plus petit f tel que $\Psi(f) = f$. ☺

4.2.7. Lorsque G est *fini*, la fonction f définie par le théorème 4.2.5 (et *a fortiori* par le théorème 4.1.9) peut se calculer algorithmiquement de la façon suivante :

- initialement, poser $f(x) = \texttt{undefined}$ pour tout $x \in G$;
- parcourir tous les éléments $x \in G$ et, si $f(y)$ est défini pour suffisamment de voisins sortants y de x pour imposer $f(x)$, autrement dit, si $\Phi(x, f|_{\mathrm{outnb}(x)})$ est défini, alors définir $f(x)$ à cette valeur (noter qu'elle ne changera jamais ensuite du fait de la cohérence de Φ) ; et
- répéter l'opération précédente jusqu'à ce que f ne change plus.

La démonstration donnée avec les ordinaux correspond exactement à cet algorithme, à ceci près que « répéter l'opération » devra peut-être se faire de façon transfinie.

4.2.8. Les différentes définitions par induction bien-fondée proposées en exemple dans la section 4.1, c'est-à-dire la notion de rang bien-fondé (cf. 4.1.11), de fonction de Grundy (cf. 4.1.13) et de P-sommets et N-sommets (cf. 4.1.15), et même la généralisation ordinale des deux premiers (cf. 4.1.18), peuvent se généraliser à des graphes non nécessairement bien-fondés en utilisant le théorème 4.2.5 : il faudra juste admettre que ce soient des fonctions *partielles*, non définies sur certains sommets (voire, tous les sommets) qui ne sont pas dans la partie bien-fondée du graphe (cf. 4.2.1). Néanmoins, ces définitions ne présentent qu'un intérêt limité : le rang bien-fondé, par exemple, s'avère être défini exactement sur la partie bien-fondée de G (vérification facile) et coïncider avec le rang bien-fondé sur ce sous-graphe, et pour ce qui est des P-sommets et N-sommets, on obtient exactement la fonction évoquée en 3.5.14.

4.3 Écrasement transitif

Définition 4.3.1. Soit G un graphe orienté bien-fondé. En utilisant le théorème 4.1.9 (modulo la remarque qui suit), on définit alors une fonction f sur G par $f(x) = \{f(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$. L'image $f(G)$ de G par la fonction f (c'est-à-dire l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in G$) s'appelle l'**écrasement transitif** ou **écrasement de Mostowski** de G, tandis que f s'appelle la fonction d'écrasement, et la valeur $f(x)$ (qui n'est autre que l'écrasement transitif de l'aval de x vu comme un graphe orienté) s'appelle l'écrasement transitif du sommet x.

On considérera l'écrasement $f(G)$ de G comme un graphe orienté, en plaçant une arête de u vers v lorsque $v \in u$; autrement dit, lorsque $v = f(y)$ et $u = f(x)$ pour certains x, y de G tels qu'il existe une arête de x vers y.

4.3.2. En particulier, un puits a pour écrasement $\varnothing$, un sommet qui n'a pour voisins sortants que des sommets terminaux a pour écrasement $\{\varnothing\}$, un sommet qui n'a pour voisins sortants que de tels sommets a pour écrasement $\{\{\varnothing\}\}$ tandis que s'il a aussi des sommets terminaux pour voisins sortants ce sera $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, et ainsi de suite.

La terminologie « transitif » fait référence au fait qu'un ensemble E est dit transitif lorsque $v \in u \in E$ implique $v \in E$ (de façon équivalente, $E \subseteq \mathscr{P}(E)$ où $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E) : c'est le cas de $f(G)$ ici.

Il y a une subtilité ensembliste dans la définition ci-dessus, c'est qu'on ne peut pas donner *a priori* un ensemble Z dans lequel f prend sa valeur : il faut en fait appliquer une généralisation de 4.1.9 où Z est remplacé par l'univers de tous les ensembles : nous ne rentrerons pas dans ces subtilités, et admettrons qu'il existe bien une unique fonction f sur G qui vérifie $f(x) = \{f(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$ pour chaque $x \in G$.

Définition 4.3.3. Un graphe orienté G est dit **extensionnel** lorsque deux sommets x et x' ayant le même ensemble de voisins sortants ($\mathrm{outnb}(x) = \mathrm{outnb}(x')$) sont égaux.

Pour bien comprendre et utiliser la définition ci-dessus, il est pertinent de rappeler que *deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments* (**axiome d'extensionalité**).

Proposition 4.3.4. Un graphe orienté bien-fondé est extensionnel si et seulement si sa fonction d'écrasement f définie en 4.3.1 est injective.

Démonstration. Si f est injective et si $\mathrm{outnb}(x) = \mathrm{outnb}(x')$ alors en particulier $f(x) = f(x')$ (puisque $f(x)$ est définie comme l'image par f de $\mathrm{outnb}(x)$), donc $x = x'$. Ceci montre que G est extensionnel.

Réciproquement, G extensionnel et montrons que f est injective, c'est-à-dire que $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$. On va procéder par induction bien-fondée sur le graphe G^2 dont les sommets sont les couples (x, x') de sommets de G, avec une arête de (x, x') vers (y, y') lorsqu'il y en a de x vers y *et* de x' vers y' : il est clair que G^2 est bien-fondé ; soit P l'ensemble des sommets (x, x') de G^2 tels que $f(x) = f(x')$ implique $x = x'$ (autrement dit, l'ensemble des sommets tels que (x, x') tels que $x = x'$ *ou bien* $f(x) \neq f(x')$). Soit (x, x') un sommet de G^2 dont tous les voisins sortants vérifient l'hypothèse d'induction (i.e., appartiennent à P) : on suppose $f(x) = f(x')$ et on veut montrer $x = x'$ pour pouvoir conclure $P = G^2$. Or $f(x) \subseteq f(x')$ signifie que tout $f(y) \in f(x)$ appartient à $f(x')$, c'est-à-dire que pour tout voisin sortant y de x il existe un voisin sortant y' de x' pour lequel $f(y) = f(y')$, et l'hypothèse d'induction montre alors $y = y'$: ainsi, $\mathrm{outnb}(x) \subseteq \mathrm{outnb}(x')$, et par symétrie, $f(x) = f(x')$ montre $\mathrm{outnb}(x) = \mathrm{outnb}(x')$ donc, par extensionalité de G, on a $x = x'$ comme on le voulait. ☺

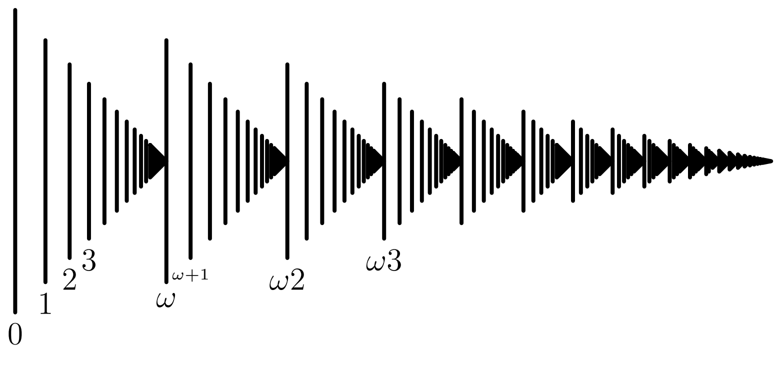
4.3.5. Si G est un graphe orienté (non nécessairement bien-fondé), et si $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets de G, on peut définir un *graphe quotient* $G/\sim$ dont les sommets sont les classes d'équivalences pour $\sim$ de sommets de G et dont les arêtes sont les couples $(\bar{x}, \bar{y})$ de classes telles qu'il existe une arête (x, y) (i.e., de x vers y) dans G avec $\bar{x}$ classe de x et $\bar{y}$ celle de y ; si ce graphe est extensionnel, on peut dire abusivement que $\sim$ l'est : concrètement, cela signifie que pour tous $x, x' \in G$, si pour chaque voisin sortant y de x il existe un voisin sortant y' de x' avec $y \sim y'$ et que la même chose vaut en échangeant x et x', alors $x \sim x'$. Une intersection quelconque de relations d'équivalence extensionnelles sur G est encore une relation d'équivalence extensionnelle, donc il existe une plus petite relation d'équivalence extensionnelle $\equiv$ sur G, c'est-à-dire un plus grand quotient $G/\equiv$ de G qui soit extensionnel (« plus grand » au sens où tout quotient de G par une relation d'équivalence se factorise à travers ce quotient $G/\equiv$).

Le contenu essentiel de la proposition 4.3.4 est que l'écrasement transitif $f(G)$ d'un graphe G bien-fondé réalise ce plus grand quotient extensionnel $G/\equiv$: la relation $f(x) = f(x')$ sur G est précisément la plus petite relation d'équivalence extensionnelle $\equiv$ sur G (en effet, la relation $f(x) = f(x')$ est évidemment extensionnelle, donc contient $\equiv$ par définition de celle-ci, mais l'écrasement de $G/\equiv$ est le même que celui de G, et comme la fonction d'écrasement est injective sur $G/\equiv$, on a bien $f(x) = f(x')$ ssi $x \equiv x'$).

5 Introduction aux ordinaux

5.1 Présentation informelle

5.1.1. Les ordinaux sont une sorte de nombres, totalement ordonnés et même « bien-ordonnés », qui généralisent les entiers naturels en allant « au-delà de l'infini » : les entiers naturels $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sont en particulier des ordinaux (ce sont les plus petits), mais il existe un ordinal qui vient après eux, à savoir ω, qui est lui-même suivi de $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$, après quoi vient $\omega \cdot 2$ (ou simplement $\omega 2$), et beaucoup d'autres choses.



(Une rangée de ω^2 allumettes.)

5.1.2. Les ordinaux servent à mesurer la taille des ensembles bien-ordonnés (c'est-à-dire, les ensembles totalement ordonnés dans lesquels il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante) exactement comme les entiers naturels servent à mesurer la taille des ensembles finis.

5.1.3. On pourra ajouter les ordinaux, et les multiplier, et même élever un ordinal à la puissance d'un autre, mais il n'y aura pas de soustraction ($\omega - 1$ n'a pas de sens, en tout cas pas en tant qu'ordinal, parce que ω est le plus petit ordinal infini). Les ordinaux ont de nombreux points en commun avec les entiers naturels (l'addition est associative, la multiplication aussi, on peut les écrire en binaire, etc.), mais aussi des différences importantes (l'addition n'est pas commutative : on a $1 + \omega = \omega$ mais $\omega + 1 > \omega$).

5.1.4. Comme la récurrence pour les entiers naturels, il y a sur les ordinaux (ou de façon équivalente, sur les ensembles bien-ordonnés) un principe d'*induction transfinie* (cf. 5.2.2), qui est en fait l'application directe à eux du principe d'induction bien-fondée : son énoncé est essentiellement le même que le principe parfois appelé de « récurrence forte » pour les entiers naturels, c'est-à-dire que :

Pour montrer une propriété sur tous les ordinaux α on peut faire l'hypothèse d'induction qu'elle est déjà connue pour les ordinaux $< \alpha$ au moment de la montrer pour α.

Comme la récurrence sur les entiers naturels, et comme l'induction bien-fondée dont c'est un cas particulier, l'induction transfinie permet soit de *démontrer* des propriétés sur les ordinaux, soit de *définir* des fonctions sur ceux-ci :

Pour définir une fonction sur tous les ordinaux α on peut faire l'hypothèse d'induction qu'elle est déjà définie pour les ordinaux $< \alpha$ au moment de la définir pour α.

5.1.5. Ce qui importe surtout pour la théorie des jeux est le fait suivant :

toute suite strictement décroissante d'ordinaux est finie

(généralisation du fait que toute suite strictement d'entiers naturels est finie). À cause de ça, les ordinaux peuvent servir à « mesurer » toutes sortes de processus qui terminent à coup sûr en temps fini, ou à généraliser les entiers naturels pour toutes sortes de processus qui terminent à coup sûr en temps fini mais pas en un nombre d'étapes borné *a priori*.

Par exemple, on peut imaginer que le dessin de la figure ci-dessus (figurant les ordinaux $< \omega^2$) représente une rangée d'allumettes qu'on pourrait utiliser dans un jeu de nim (cf. 1.3.10) : si on convient que les allumettes doivent être effacées *par la droite*, ce qui revient à diminuer strictement l'ordinal qui les compte (initialement ω^2), la ligne sera toujours vidée en temps fini même si les joueurs essaient de la faire durer le plus longtemps possible (le premier coup va faire tomber l'ordinal ω^2 à $\omega \cdot k + n$ avec $k, n \in \mathbb{N}$, après quoi les coups suivants l'amèneront au plus à $\omega \cdot k + n'$ avec $n' < n$ qui va finir par tomber à 0, puis on tombe à $\omega \cdot k' + m$ avec $k' < k$, et en continuant ainsi on finit forcément par retirer toutes les allumettes).

Plus formellement, quel que soit l'ordinal α, l'ensemble $\{\beta : \beta < \alpha\}$ des ordinaux plus petits, vu comme un graphe pour la relation $>$ (i.e., on fait pointer une arête orientée de chaque ordinal β vers chaque ordinal strictement plus petit), est bien-fondé, ou de façon équivalente, bien-ordonné.

5.1.6. Voici une façon imagée d'y penser qui peut servir à faire le lien avec la théorie des jeux : imaginons un génie qui exauce des vœux en nombre limité (les vœux eux-mêmes sont aussi limités et ne permettent certainement pas de faire le vœu d'avoir plus de vœux — peut-être qu'on ne peut que souhaiter un paquet de carambars, ou de transformer son ennemi en crapaud, ou d'annuler une transformation en crapaud qu'on aurait soi-même subie, ou des choses de ce genre). Si le génie est prêt à exaucer 3 vœux, on peut imaginer qu'à la fin de chaque vœu qu'on prononce on doive dire « maintenant, il me reste n vœux » avec n strictement inférieur à la valeur antérieure (initialement 3).

Cette définition se généralise aux ordinaux : un génie qui exauce α vœux est un génie qui demande qu'on formule un vœu et qu'on choisisse un ordinal $\beta < \alpha$, après quoi le vœu est exaucé et le génie se transforme en un génie qui exauce β vœux.

Ainsi, pour un génie qui exauce ω vœux on devra, lors du tout premier vœu qu'on formule, décider quel nombre de vœux il reste, ce nombre étant un *entier naturel*, aussi grand qu'on le souhaite — mais fini. Cela peut sembler sans importance (si on a de toute façon autant de vœux que l'on souhaite, même $N = 10^{1000}$, peu importe qu'on doive choisir un nombre dès le début). Mais comparons avec un génie qui exauce $\omega + 1$ vœux : pour celui-ci, lors du premier vœu que l'on formule, on pourra décider qu'il reste ω vœux et c'est au vœu suivant qu'on devra redescendre à un entier naturel (et le choisir). La différence entre avoir ω et $\omega+1$ vœux apparaîtra si on imagine un combat entre Aladdin et Jafar où Jafar utilise des vœux pour transformer Aladdin en crapaud et Aladdin pour redevenir humain : si Jafar a initialement ω vœux et Aladdin aussi, Jafar transforme Aladdin en crapaud et choisit qu'il lui reste N vœux avec N fini, alors Aladdin redevient humain choisit qu'il lui reste aussi au moins N vœux, et au final il est sauf ; alors que si Jafar a initialement $\omega + 1$ vœux et Aladdin seulement ω, Jafar transforme Aladdin en crapaud et tombe à ω, puis Aladdin est obligé de choisir un N fini en formulant le vœu de redevenir humain, et Jafar peut choisir au moins N vœux et gagne le combat (ainsi que quelques paquets de carambars).

5.1.7. La construction moderne des ordinaux, introduite par J. von Neumann en 1923, est mathématiquement très élégante mais peut-être d'autant plus difficile à comprendre qu'elle est subtile :

un ordinal est l'ensemble des ordinaux strictement plus petits que lui

— ainsi, l'entier 0 est défini comme l'ensemble vide $\varnothing$ (puisqu'il n'y a pas d'ordinaux plus petits que lui), l'entier 1 est défini comme l'ensemble $\{0\} = \{\varnothing\}$

ayant pour seul élément 0 (puisque 0 est le seul ordinal plus petit que 1), l'entier 2 est défini comme $\{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, l'entier 3 comme $\{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, et ainsi de suite, et l'ordinal ω est défini comme l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ de tous les entiers naturels, puis $\omega + 1$ comme l'ensemble $\omega \cup \{\omega\}$ des entiers naturels auquel on a ajouté le seul élément ω, et plus généralement $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Formellement, un ordinal est l'écrasement transitif (cf. 4.3.1) d'un ensemble bien-ordonné (i.e., totalement ordonné bien-fondé).

Cette définition a certains avantages, par exemple la borne supérieure d'un ensemble S d'ordinaux est simplement la réunion $\bigcup_{\alpha \in S} \alpha$ de(s éléments de) S. Néanmoins, elle n'est pas vraiment nécessaire à la théorie des ordinaux, et nous tâcherons d'éviter d'en dépendre. Mais il faut au moins retenir une idée :

5.1.8. Pour tout ensemble S d'ordinaux, il existe un ordinal qui est plus grand que tous les éléments de S ; il existe même un *plus petit* ordinal plus grand que tous les éléments de S, c'est-à-dire, une *borne supérieure* de S. Ce fait est la clé de l'inexhaustibilité des ordinaux : quelle que soit la manière dont on essaie de rassembler des ordinaux en un ensemble, on peut trouver un ordinal strictement plus grand qu'eux (en particulier, les ordinaux ne forment pas un ensemble, pour un peu la même raison que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas : il est « trop gros » pour tenir dans un ensemble).

Pour dire les choses différemment avec un slogan peut-être un peu approximatif :

À chaque fois qu'on a construit les ordinaux jusqu'à un certain point, on crée un nouvel ordinal qui vient juste après tous ceux-là.

5.1.9. Pour aider à comprendre comment les choses commencent, et en partant de l'idée générale que

comprendre un ordinal, c'est comprendre tous les ordinaux strictement plus petits que lui, et comment ils s'ordonnent

voici comment s'arrangent les plus petits ordinaux.

Après les entiers naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$ vient l'ordinal ω puis $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3$ et ainsi de suite, après quoi viennent $\omega 2, \omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \ldots$ qui sont suivis de $\omega 3$ et le même mécanisme recommence. Les ordinaux $\omega k + n$ pour $k, n \in \mathbb{N}$ sont ordonnés par l'ordre lexicographique donnant plus de poids à k : l'ordinal qui vient immédiatement après (c'est-à-dire, leur ensemble, si on utilise la construction de von Neumann) est $\omega \cdot \omega = \omega^2$, qui est suivi de $\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots$ et plus généralement des $\omega^2 + \omega k + n$, qui sont eux-mêmes suivis de $\omega^2 \cdot 2$. Les $\omega^2 \cdot n_2 + \omega \cdot n_1 + n_0$ sont ordonnés par l'ordre lexicographique donnant plus de poids à n_2, puis à n_1 puis à n_0. L'ordinal qui vient immédiatement après tous ceux-ci est ω^3.

En itérant ce procédé, on fabrique de même ω^4, puis ω^5 et ainsi de suite : les $\omega^r \cdot n_r + \cdots + \omega \cdot n_1 + n_0$ (c'est-à-dire en quelque sorte des polynômes en ω à coefficients dans $\mathbb{N}$) sont triés par ordre lexicographique en donnant plus de poids aux coefficients n_i pour i grand (et en identifiant bien sûr un cas où $n_r = 0$ par celui où il est omis : il s'agit de l'ordre lexicographique sur les suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang). L'ordinal qui vient immédiatement après est ω^ω, puis on a tous les $\omega^\omega + \omega^r \cdot n_r + \cdots + \omega \cdot n_1 + n_0$ jusqu'à $\omega^\omega \cdot 2$, et de même $\omega^\omega \cdot 3$, etc., jusqu'à $\omega^\omega \cdot \omega = \omega^{\omega+1}$.

En répétant ω fois toute cette séquence, on obtient $\omega^{\omega+2}$, puis de nouveau $\omega^{\omega+3}$ et ainsi de suite : après quoi vient $\omega^{\omega 2}$, et on voit comment on peut continuer de la sorte.

5.1.10. Plus généralement, tout ordinal va s'écrire de façon unique sous la forme $\omega^{\gamma_s} n_s + \cdots + \omega^{\gamma_1} n_1$ où $\gamma_s > \cdots > \gamma_1$ sont des ordinaux et $n_s, \ldots, n_1$ sont des entiers naturels non nuls (si un n_i est nul il convient de l'omettre) : il s'agit d'une sorte d'écriture en « base ω » de l'ordinal, appelée **forme normale de Cantor**. On compare deux formes normales de Cantor en comparant le terme dominant (le plus à gauche, i.e., $\omega^{\gamma_s} n_s$ dans les notations qui viennent d'être données, ce qui se fait lui-même en comparant les γ_s et sinon, les n_s), et s'ils sont égaux, en comparant le suivant et ainsi de suite.

La forme normale de Cantor ne permet cependant pas de « comprendre » tous les ordinaux, car il existe des ordinaux tels que $\varepsilon = \omega^\varepsilon$. Le plus petit d'entre eux est noté ε_0 et est la limite de $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$

5.1.11. On retiendra qu'il existe trois sortes d'ordinaux, cette distinction étant souvent utile dans les inductions :

— l'ordinal nul 0, qui est souvent un cas spécial,

— les ordinaux « successeurs », c'est-à-dire ceux qui sont de la forme $\beta + 1$ pour β un ordinal plus petit (de façon équivalente, il y a un plus grand ordinal strictement plus petit),

— les ordinaux qui sont la borne supérieure (ou « limite ») des ordinaux strictement plus petits et qu'on appelle, pour cette raison, « ordinaux limites » (autrement dit, δ est limite lorsque pour tout $\beta < \delta$ il existe β' avec $\beta < \beta' < \delta$).

À titre d'exemple, l'ordinal 0, l'ordinal 42 et l'ordinal ω sont des exemples de ces trois cas. D'autres ordinaux limites sont $\omega \cdot 2$, ou ω^2, ou encore $\omega^\omega + \omega^3 \cdot 7$, ou bien $\omega^{\omega+1}$; en revanche, $\omega^\omega + 1$ ou $\omega^{\omega 2} + 1729$ sont successeurs. Dans la forme normale de Cantor, un ordinal est successeur si et seulement si le dernier terme (le plus à droite) est un entier naturel non nul.

5.1.12. Les ordinaux vont servir à définir différents jeux qui, pris isolément, sont extrêmement peu intéressants, mais qui ont la vertu de permettre de « mesurer » d'autres jeux : ces jeux ont en commun que, partant d'un ordinal α, l'un ou l'autre joueur, ou les deux, ont la possibilité de le faire décroître (strictement), c'est-à-dire de le remplacer par un ordinal $\beta < \alpha$ strictement plus petit — comme expliqué en 5.1.5, ce processus termine forcément. Dans le cadre esquissé en 1.3.9, on a trois jeux associés à un ordinal α :

— Un jeu *impartial*, c'est-à-dire que les deux joueurs ont les mêmes options à partir de n'importe quelle position $\beta \leq \alpha$, à savoir, les ordinaux $\beta' < \beta$ — autrement dit, les deux joueurs peuvent décroître l'ordinal. Dans le cadre de 1.3.9, le graphe a pour sommets les ordinaux $\beta \leq \alpha$ avec une arête (« verte », i.e., utilisable par tout le monde) reliant β à β' lorsque $\beta' < \beta$. Il s'agit du jeu de nim (cf. 1.3.10) avec une seule ligne d'allumettes ayant initialement α allumettes (les allumettes sont bien ordonnées et doivent être retirées *par la droite* dans un dessin comme au début de cette section). Ce jeu s'appelle parfois le « nimbre » associé à l'ordinal α.

— Deux jeux *partisans* (=partiaux), où un joueur n'a aucun coup possible (il a donc immédiatement perdu si c'est à son tour de jouer, ce qui rend le jeu, pris isolément, encore plus inintéressant que le précédent) : un jeu « bleu » ou « positif », dans lequel seul le joueur « bleu » (également appelé « gauche », « Blaise »...) peut jouer, exactement comme dans le jeu impartial ci-dessus, tandis que l'autre joueur ne peut rien faire, et un jeu « rouge » ou « négatif », dans lequel seul le joueur « rouge » (également appelé « droite », « Roxane »...) peut jouer tandis que l'autre ne peut rien faire. Dans le cadre de 1.3.9, le graphe a pour sommets les ordinaux $\beta \leq \alpha$ avec une arête reliant β à β' lorsque $\beta' < \beta$, ces arêtes étant toutes bleues ou toutes rouges selon le jeu considéré. Il s'agit d'un jeu qui correspond à un certain avantage du joueur bleu, respectivement rouge, à rapprocher de l'histoire 5.1.6 ci-dessus. Le jeu bleu est parfois appelé le « nombre surréel » associé à l'ordinal α, tandis que le rouge est l'opposé du bleu.

5.2 Ensembles bien-ordonnés et induction transfinie

5.2.1. Un ensemble **[partiellement] ordonné** est un ensemble muni d'une relation $>$ (d'ordre *strict*) qui soit à la fois

— irréflexive ($x > x$ n'est jamais vrai quel que soit x), et

— transitive ($x > y$ et $y > z$ entraînent $x > z$).

Une telle relation est automatiquement antisymétrique ($x > y$ et $y > x$ ne sont jamais simultanément vrais pour $x \neq y$). On peut tout aussi bien définir un ensemble partiellement ordonné en utilisant l'ordre *large* $\geq$ ($x \geq y$ étant défini par $x > y$ ou $x = y$, ou symétriquement $x > y$ étant défini par $x \geq y$ et $x \neq y$), réflexive, antisymétrique et transitive. On note bien sûr $x \leq y$ pour $y \geq x$ et $x < y$ pour $y > x$.

Un ensemble partiellement ordonné est dit **totalement ordonné** lorsque pour tous $x \neq y$ on a soit $x > y$ soit $y > x$.

Un ensemble totalement ordonné bien-fondé W est dit **bien-ordonné**. D'après 4.1.7, ceci peut se reformuler de différentes façons :

(*) W est un ensemble totalement ordonné dans lequel il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante.

(†) W est un ensemble (partiellement) ordonné dans lequel toute partie *non vide* N a un plus petit élément.

(‡) W est totalement ordonné, et si une partie $P \subseteq W$ vérifie la propriété suivante « si $x \in W$ est tel que tout élément strictement plus petit que x appartient à P, alors x lui-même appartient à P » (on pourra dire « P est inductif »), alors $P = W$.

(Dans (†), « partiellement ordonné » suffit car si $\{x, y\}$ a un plus petit élément c'est bien qu'on a $x < y$ ou $y > x$.)

Scholie 5.2.2 (principe d'induction transfinie)**.** Pour montrer une propriété P sur les éléments d'un ensemble bien-ordonné W, on peut supposer (comme « hypothèse d'induction »), lorsqu'il s'agit de montrer que x a la propriété P, que cette propriété est déjà connue de tous les éléments strictement plus petits que x.

Proposition 5.2.3. Soit W un ensemble bien-ordonné et $S \subseteq W$ tel que $u < v$ avec $v \in S$ implique $u \in S$ (on peut dire que S est « aval-clos »). Alors soit $S = W$ soit il existe $x \in W$ tel que $S = \mathrm{precs}(x) := \{y \in W : y < x\}$.

Démonstration. Si $S \neq W$, soit x le plus petit élément de W qui n'est pas dans S. Si $y < x$ alors $y \in S$ par minimalité de x. Si $y \geq x$ alors on a $y \notin S$ car le contraire ($y \in S$) entraînerait $x \in S$ d'après l'hypothèse faite sur S. On a donc montré que $y \in S$ si et seulement si $y < x$, c'est-à-dire précisément $S = \mathrm{precs}(x)$. ☺

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 4.1.9 :

Théorème 5.2.4 (définition par induction transfinie)**.** Soit W un ensemble bien-ordonné et Z un ensemble quelconque. Notons $\mathrm{precs}(x) = \{y : y < x\}$ l'ensemble des éléments strictement plus petits que x dans W.

Appelons $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (x, f) où $x \in W$ et f une fonction de $\mathrm{precs}(x)$ vers Z (autrement dit, $\mathscr{F}$ est $\bigcup_{x\in W} \left(\{x\} \times Z^{\mathrm{precs}(x)}\right)$). Soit enfin $\Phi \colon \mathscr{F} \to Z$ une fonction quelconque. Alors il existe une unique fonction $f \colon W \to Z$ telle que pour tout $x \in W$ on ait

$$f(x) = \Phi(x,\, f|_{\mathrm{precs}(x)})$$

Scholie 5.2.5. Pour définir une fonction f sur un ensemble bien-ordonné, on peut supposer, lorsqu'on définit $f(x)$, que f est déjà défini (i.e., connu) sur tous les éléments strictement plus petits que x : autrement dit, on peut librement utiliser la valeur de $f(y)$ pour $y < x$, dans la définition de $f(x)$.

5.3 Comparaison d'ensembles bien-ordonnés, et ordinaux

5.3.1. Avant d'énoncer les résultats suivants, faisons une remarque évidente et une définition. La remarque est que si W est bien-ordonné et $E \subseteq W$ est un sous-ensemble de W, alors E est lui-même bien ordonné (pour l'ordre induit) ; ceci s'applique en particulier à $\operatorname{precs}(x) = \{y : y < x\}$. La définition est qu'une fonction f entre ensembles ordonnés est dite **croissante** lorsque $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$, et **strictement croissante** lorsque $x < y$ implique $f(x) < f(y)$, ce qui entre des ensembles totalement ordonnés signifie exactement la même chose que « injective et croissante ».

Proposition 5.3.2. Si W est un ensemble bien-ordonné, et si $f : W \to W$ est strictement croissante, alors $x \leq f(x)$ pour tout $x \in W$.

Démonstration. Montrons par induction transfinie que $x \leq f(x)$. Par hypothèse d'induction, on peut supposer $y \leq f(y)$ pour tout $y < x$. Supposons par l'absurde $f(x) < x$. Alors l'hypothèse d'induction appliquée à $y := f(x)$ donne $f(x) \leq f(f(x))$, tandis que la stricte croissance de f appliquée à $f(x) < x$ donne $f(f(x)) < f(x)$. On a donc une contradiction. ☺

Corollaire 5.3.3. Si W est bien-ordonné, la seule bijection croissante $W \to W$ est l'identité.

Démonstration. Si $f : W \to W$ est une bijection croissante, la proposition précédente appliquée à f montre $x \leq f(x)$ pour tout $x \in W$, mais appliquée à f^{-1} elle montre $x \leq f^{-1}(x)$ donc $f(x) \leq x$ et finalement $f(x) = x$. ☺

Corollaire 5.3.4. Si W, W' sont deux ensembles bien-ordonnés, il existe *au plus une* bijection croissante $W \to W'$ (i.e., s'il en existe une, elle est unique).

Une telle bijection peut s'appeler un **isomorphisme** d'ensemble bien-ordonnés, et on peut dire que W et W' ont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme entre eux (on conviendra en cf. 5.3.8 ci-dessous qu'on le note $\#W = \#W'$).

Démonstration. Si $f, g : W \to W'$ sont deux bijections croissantes, appliquer le corollaire précédent à la composée de l'une et de la réciproque de l'autre. ☺

Corollaire 5.3.5. Si W est un ensemble bien-ordonné, $x \in W$ et $\operatorname{precs}(x) = \{y : y < x\}$, alors il n'existe pas de fonction strictement croissante $W \to \operatorname{precs}(x)$.

Démonstration. Une telle fonction serait en particulier une fonction strictement croissante $W \to W$, donc vérifierait $x \leq f(x)$ d'après la proposition, ce qui contredit $f(x) \in \operatorname{precs}(x)$. ☺

Le théorème suivant assure que donnés deux ensembles bien-ordonnés, il y a moyen de les comparer :

Théorème 5.3.6. Si W, W' sont deux ensembles bien-ordonnés, alors exactement l'une des affirmations suivantes est vraie :
— il existe une bijection croissante $f\colon W \to \operatorname{precs}(y)$ avec $y \in W'$,
— il existe une bijection croissante $f\colon \operatorname{precs}(x) \to W'$ avec $x \in W$,
— il existe une bijection croissante $f\colon W \to W'$.
(Dans chaque cas, la bijection est automatiquement unique d'après 5.3.4. De plus, y est unique dans le premier cas et x l'est dans le second, d'après 5.3.5.)

Démonstration. Les affirmations sont exclusives d'après le corollaire précédent. Plus précisément, s'il existe une fonction strictement croissante $f\colon W \to W'$, en composant à droite par f on voit qu'il ne peut pas exister de fonction strictement croissante $W' \to \operatorname{precs}(x)$, donc le premier ou le dernier cas excluent celui du milieu, mais par symétrie les deux derniers excluent le premier et les trois cas sont bien exclusifs.

Considérons maintenant l'ensemble des couples $(x, y) \in W \times W'$ tels qu'il existe une bijection croissante (forcément unique !) entre $\operatorname{precs}_W(x)$ et $\operatorname{precs}_{W'}(y)$: d'après ce qu'on vient d'expliquer, pour chaque x il existe au plus un y tel qu'il y ait une telle bijection croissante, et pour chaque y il existe au plus un x. On peut donc voir cet ensemble de couples comme (le graphe d')une fonction partielle injective $\varphi\colon W \dashrightarrow W'$ (autrement dit, $\varphi(x)$ est l'unique y, s'il existe, tel qu'il existe une bijection croissante entre $\operatorname{precs}_W(x)$ et $\operatorname{precs}_{W'}(y)$).

Si $x_0 \leq x$ et si $\varphi(x) =: y$ est défini, une bijection croissante $f\colon \operatorname{precs}_W(x) \to \operatorname{precs}_{W'}(y)$ peut se restreindre à $\operatorname{precs}_W(x_0)$ et il est clair que son image est exactement $\operatorname{precs}_{W'}(f(x_0))$, ce qui montre que $\varphi(x_0)$ est définie et vaut $f(x_0) < y = \varphi(x)$, notamment φ est strictement croissante. D'après 5.2.3, l'ensemble de définition de φ est soit W tout entier soit de la forme $\operatorname{precs}_W(x)$ pour un $x \in W$. Symétriquement, son image est soit W' tout entier soit de la forme $\operatorname{precs}_{W'}(y)$ pour un $y \in W'$. Et comme on vient de le voir, φ est une bijection croissante entre l'un et l'autre. Ce ne peut pas être une bijection croissante entre $\operatorname{precs}_W(x)$ et $\operatorname{precs}_{W'}(y)$ sinon (x, y) lui-même serait dans φ, une contradiction. C'est donc que φ est exactement une bijection comme un des trois cas annoncés. ☺

L'affirmation suivante est une trivialité, mais peut-être utile à écrire explicitement :

Proposition 5.3.7. Soit X un ensemble bien-ordonné : si $w, w' \in X$ et qu'on pose $W = \operatorname{precs}_X(w)$ et $W' = \operatorname{precs}_X(w')$, les trois cas du théorème 5.3.6 se produisent exactement lorsque $w < w'$, resp. $w > w'$, resp. $w = w'$.

Démonstration. C'est évident : si $w < w'$ alors l'identité fournit une bijection croissante $W \to \operatorname{precs}_{W'}(w)$, et de même dans les autres cas. ☺

Définition 5.3.8. Soient W, W' deux ensembles bien-ordonnés. On notera $\#W < \#W'$, resp. $\#W > \#W'$, resp. $\#W = \#W'$, dans les trois cas du théorème 5.3.6. Autrement dit, $\#W = \#W'$ signifie qu'il existe une bijection croissante $W \to W'$ (unique d'après 5.3.4), ce qui définit une relation d'équivalence entre ensembles bien-ordonnés, et on note $\#W < \#W'$ lorsque $\#W = \#\operatorname{precs}(y)$ pour un $y \in W'$, le théorème 5.3.6 assurant qu'il s'agit d'une relation d'ordre total entre les classes d'équivalence qu'on vient de définir. La proposition 5.3.7 assure que si w, w' sont deux éléments d'un même ensemble bien-ordonné, alors $\#\operatorname{precs}(w) < \#\operatorname{precs}(w')$ se produit si et seulement si $w < w'$, et de même en remplaçant le signe $<$ par $=$ ou $>$.

La classe d'équivalence[2] $\#W$ pour la relation $\#W = \#W'$ s'appelle l'**ordinal** de W. Par abus de notation, si w est un élément d'un ensemble bien-ordonné, on peut noter $\#w$ pour $\#\operatorname{precs}(w)$ (autrement dit, on associe un ordinal non seulement à un ensemble bien-ordonné, mais aussi à un élément d'un ensemble bien-ordonné).

Si on préfère éviter la définition par classe d'équivalence, on peut aussi définir $\#W$ comme l'écrasement transitif (cf. 4.3.1) de W (**ordinal de von Neumann**), à savoir $\#W = \{\#x : x \in W\}$ où $\#x = \{\#y : y < x\}$, cette définition ayant bien un sens par induction transfinie (5.2.4 et 5.2.5).

On appelle ω l'ordinal $\#\mathbb{N}$ de l'ensemble des entiers naturels, et on identifie tout entier naturel n à l'ordinal de $\operatorname{precs}(n) = \{0, \ldots, n-1\}$ dans $\mathbb{N}$.

5.3.9. Les deux façons de définir les ordinaux reviennent essentiellement au même : en effet, s'il y a une bijection croissante $W \to W'$ (forcément unique), alors les écrasements transitifs de W et W' coïncident, et réciproquement, si les écrasements transitifs de W et W' coïncident, on définit une bijection croissante $W \to W'$ en envoyant $x \in W$ sur l'unique $y \in W'$ tel que $\operatorname{precs}_W(x)$ et $\operatorname{precs}_{W'}(y)$ aient le même écrasement transitif (on peut au préalable montrer le lemme suivant : si W est bien-ordonné et $y < x$ dans W alors l'écrasement

2. Pour être parfaitement rigoureux, à cause de subtilités ensemblistes, on ne peut pas vraiment définir des classes d'équivalence de façon usuelle dans ce contexte, d'où l'intérêt de la définition suivante (ordinaux de von Neumann).

transitif de $\mathrm{precs}(y)$, qui est un élément de celui de $\mathrm{precs}(x)$, ne lui est pas égal — ceci résulte d'une induction transfinie sur x).

Les ordinaux de von Neumann ont l'avantage d'être des ensembles bien-définis et de vérifier $\beta < \alpha$ si et seulement si $\beta \in \alpha$; ils ont comme inconvénient d'être peut-être plus difficiles à visualiser. Mais même si on n'identifie pas $\alpha = \#W$ à l'ensemble des ordinaux strictement plus petits, il est important de garder à l'esprit que l'ensemble des ordinaux strictement plus petits est $\{\#\,\mathrm{precs}(x) : x \in W\}$ (par définition de l'ordre !), et que $\alpha = \#\{\beta < \alpha\}$ (idem). Même si nous éviterons de supposer explicitement que les ordinaux sont construits à la façon de von Neumann, il arrivera souvent qu'on dise « un élément de α » pour parler d'un ordinal strictement plus petit que α (cela peut être considéré comme un abus de langage).

Le théorème 5.3.6 a la conséquence importante suivante sur les ordinaux :

Théorème 5.3.10. Tout ensemble d'ordinaux est bien-ordonné : deux ordinaux sont toujours comparables (on a toujours $\beta < \alpha$ ou $\beta > \alpha$ ou $\beta = \alpha$), et il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'ordinaux.

Autrement dit : dans tout ensemble non vide d'ordinaux il y en a un plus petit.

Démonstration. Le théorème 5.3.6 signifie exactement que les ordinaux sont *totalement* ordonnés. Reste à expliquer qu'ils sont bien-ordonnés, c'est-à-dire, qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$. Mais si on avait une telle suite, en appelant W un ensemble bien-ordonné tel que $\#W = \alpha_0$, chaque α_i suivant s'écrit $\#\,\mathrm{precs}(w_i)$ pour un $w_i \in W$, et d'après 5.3.7 on devrait avoir une suite strictement décroissante $w_1 > w_2 > \cdots$ dans W, ce qui contredit le fait que W est bien-ordonné.

La dernière affirmation vient de l'équivalence entre (*) et (†) dans 5.2.1. ☺

Proposition 5.3.11. Tout ensemble S d'ordinaux a une borne supérieure : autrement dit, il existe un ordinal $\sup S$ qui est le plus petit majorant (large) de S (i.e., le plus petit ordinal α tel que $\beta \leq \alpha$ pour tout $\beta \in S$), et un ordinal $\sup^+ S$ qui est le plus petit majorant strict de S (i.e., le plus petit ordinal α tel que $\beta < \alpha$ pour tout $\beta \in S$).

(On verra plus loin que $\sup^+ S = \sup\{\beta + 1 \colon \beta \in S\}$, donc cette notion n'est pas vraiment nouvelle.)

Démonstration. D'après ce qu'on vient de voir (dernière affirmation de 5.3.10), il suffit de montrer qu'il existe un majorant strict de S. Quitte à remplacer S par sa réunion avec l'ensemble des ordinaux inférieurs à un ordinal quelconque de S (pour les ordinaux de von Neumann, ceci revient à remplacer S par $S \cup \bigcup_{\alpha \in S} \alpha$), on peut supposer que (*) si $\alpha \in S$ et $\beta < \alpha$ alors $\beta \in S$. On vient de voir que

S est bien-ordonné : si $\alpha = \#S$, montrons qu'il s'agit d'un majorant strict de S ; or si $\beta \in S$, on a $\beta = \# \operatorname{precs}_S(\beta)$ d'après l'hypothèse (*) qu'on vient d'assurer, et la définition de l'ordre sur les ordinaux donne $\beta < \alpha$: ainsi, α est bien un majorant strict comme voulu. ☺

5.3.12. Une conséquence de cette proposition est qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ordinaux (car si S était un tel ensemble, il aurait un majorant strict, qui par définition ne peut pas appartenir à S) : c'est le **« paradoxe » de Burali-Forti** ; le mot « paradoxe » fait référence à une conception ancienne de la théorie des ensembles, mais selon les fondements modernes des mathématiques, ce phénomène n'a rien de paradoxal (intuitivement, il y a trop d'ordinaux pour pouvoir tenir dans un ensemble, de même qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles). Ces subtilités ensemblistes ne poseront pas de problème dans la suite de ces notes, il faut juste reconnaître leur existence.

5.4 Ordinaux successeurs et limites

5.4.1. On appelle **successeur** d'un ordinal α le plus petit ordinal strictement supérieur à α (qui existe d'après la proposition 5.3.11 : si on veut, c'est $\sup^+\{\alpha\}$) : il est facile de voir que cet ordinal est fabriqué en ajoutant un unique élément à la fin d'un ensemble bien-ordonné d'ordinal α ; on le note $\alpha + 1$, et on a $\beta \leq \alpha$ si et seulement si $\beta < \alpha + 1$. Réciproquement, tout ordinal ayant un plus grand élément (i.e., l'ordinal d'un ensemble bien-ordonné ayant un plus grand élément) est un successeur : en effet, si W a un plus grand élément x, alors $\#W$ est le successeur de $\# \operatorname{precs}(x)$.

5.4.2. On distingue maintenant trois sortes d'ordinaux :

— l'ordinal **nul** $0 = \#\varnothing$, mis à part de tous les autres,

— les ordinaux **successeurs**, c'est-à-dire ceux qui ont un plus grand élément (au sens expliqué ci-dessus),

— les autres, qu'on appelle ordinaux **limites**.

La terminologie d'ordinaux « limites » s'explique ainsi : si δ est un ordinal non nul qui n'est pas successeur, cela signifie que pour chaque $\beta < \delta$ il existe β' avec $\beta < \beta' < \delta$ (puisque β n'est pas le plus grand élément de δ). Ceci permet de dire que $\sup\{\beta < \alpha\} = \sup^+\{\beta < \alpha\}$ (de façon générale, on a $\sup^+\{\beta < \alpha\} = \alpha$ par définition), et on va définir la notion de limite ainsi :

5.4.3. Si δ est un ordinal limite et f est une fonction *croissante* définie sur les ordinaux strictement plus petits que δ et à valeurs ordinales, on appelle **limite** de f en δ la valeur $\sup\{f(\xi) : \xi < \delta\}$. On pourra la noter $\lim_{\xi \to \delta} f(\xi)$ ou simplement $\lim_\delta f$. (Il s'agit bien d'une limite pour une certaine topologie : la topologie de l'ordre ; plus exactement, c'est une limite car pour tous $\beta_1 < \lim_\delta f < \beta_2$, il existe ξ_0 tel que $\beta_1 < f(\xi) < \beta_2$ si $\xi_0 \leq \xi < \delta$.) Si f est aussi définie en δ et que $f(\delta) = \lim_\delta f$, on dit que f est **continue** en δ.

Ainsi, si δ est un ordinal limite, on peut écrire $\delta = \lim_{\xi\to\delta} \xi$ (et réciproquement, si f est *strictement* croissante, alors $\lim_{\xi\to\delta} f(\xi)$ est forcément un ordinal limite).

À titre d'exemple, si (u_n) est une suite croissante d'entiers naturels, sa limite en tant que fonction ordinale $\omega \to \omega$ est soit un entier naturel (lorsque la suite est bornée, donc constante à partir d'un certain rang) soit ω (lorsque la suite n'est pas bornée). Notamment, $\lim_{n\to\omega} 2^n = \omega$ (ce qui permettra de dire que $2^\omega = \omega$ quand on aura défini cet objet).

5.5 Somme, produit et exponentielle d'ordinaux

Les résultats de cette section seront admis (ils ne sont pas très difficiles à montrer — presque toujours par induction transfinie — mais seraient trop longs à traiter en détails).

5.5.1. Il existe deux façons équivalentes de définir la somme $\alpha + \beta$ de deux ordinaux.

La première façon consiste à prendre un ensemble bien-ordonné W tel que $\alpha = \#W$ et un ensemble bien-ordonné W' tel que $\beta = \#W'$, et définir $\alpha + \beta := \#W''$ où W'' est l'ensemble bien-ordonné qui est réunion disjointe de W et W' avec l'ordre qui place W' *après* W, c'est-à-dire formellement $W'' := \{(0, w) : w \in W\} \cup \{(1, w') : w' \in W'\}$ ordonné en posant $(i, w_1) < (i, w_2)$ ssi $w_1 < w_2$ et $(0, w) < (1, w')$ quels que soient $w \in W$ et $w' \in W'$ (il est facile de voir qu'il s'agit bien d'un bon ordre).

Autrement dit, intuitivement, une rangée de $\alpha + \beta$ allumettes s'obtient en ajoutant β allumettes *après* (i.e., *à droite d'*)une rangée de α allumettes.

La seconde façon consiste à définir $\alpha + \beta$ par induction transfinie sur β (le *second* terme) :

— $\alpha + 0 = \alpha$,

— $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ (cas successeur),

— $\alpha + \delta = \lim_{\xi\to\delta}(\alpha + \xi)$ si δ est limite.

Nous ne ferons pas la vérification du fait que ces définitions sont bien équivalentes, qui n'est cependant pas difficile (il s'agit de vérifier que la première définition vérifie bien les clauses inductives de la seconde).

5.5.2. Quelques propriétés de l'addition des ordinaux sont les suivantes :

— l'addition est associative, c'est-à-dire que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (on notera donc simplement $\alpha+\beta+\gamma$ et de même quand il y a plus de termes) ;

— l'ordinal nul est neutre à gauche comme à droite, c'est-à-dire que $0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$;

— le successeur de α est $\alpha + 1$;
— l'addition n'est pas commutative en général : par exemple, $1 + \omega = \omega$ (en décalant d'un cran toutes les allumettes) alors que $\omega + 1 > \omega$;
— l'addition est croissante en chaque variable, et même strictement croissante en la seconde (si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$, et si $\beta < \beta'$ alors $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$; le fait que $0 < 1$ mais $0 + \omega = 1 + \omega$ explique qu'il n'y a pas croissante stricte en la première variable) ;
— l'addition est continue en la seconde variable (c'est exactement ce que dit le cas limite dans la définition par induction transfinie) ;
— lorsque $\alpha \leq \alpha'$, il existe un unique β tel que $\alpha' = \alpha + \beta$ (certains auteurs le notent $-\alpha + \alpha'$: on prendra garde au fait qu'il s'agit d'une soustraction *à gauche*) ;
— comme conséquence de l'une des deux propriétés précédentes : si $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ alors $\beta = \beta'$ (simplification *à gauche* des sommes ordinales).

5.5.3. On pourrait aussi définir des sommes de séries d'ordinaux, ces séries étant elles-mêmes indicées par d'autres ordinaux (le cas des séries ordinaires étant le cas où l'ensemble d'indices est ω). Précisément, si α_ι est un ordinal pour tout $\iota < \gamma$ (avec γ un autre ordinal), on peut définir $\sum_{\iota<\gamma} \alpha_\iota$ par induction transfinie sur γ :
— $\sum_{\iota<0} \alpha_\iota = 0$ (somme vide !),
— $\sum_{\iota<\gamma+1} \alpha_\iota = \left(\sum_{\iota<\gamma} \alpha_\iota\right) + \alpha_\gamma$ (cas successeur),
— $\sum_{\iota<\delta} \alpha_\iota = \lim_{\xi\to\delta} \sum_{\iota<\xi} \alpha_\iota$ (cas limite).
Ainsi, dans le cas d'une série indicée par les entiers naturels, $\sum_{n<\omega} \alpha_n$ est la limite $n \to \omega$ de la suite croissante d'ordinaux $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1}$ (limite qui existe toujours en tant qu'ordinal).

Cette notion de somme peut servir à définir le produit, $\alpha\beta = \sum_{\iota<\beta} \alpha$, mais on va le redéfinir de façon plus simple :

5.5.4. Il existe deux façons équivalentes de définir le produit $\alpha \cdot \beta$ (ou $\alpha\beta$) de deux ordinaux.

La première façon consiste à prendre un ensemble bien-ordonné W tel que $\alpha = \#W$ et un ensemble bien-ordonné W' tel que $\beta = \#W'$, et définir $\alpha \cdot \beta := \#(W \times W')$ où $W \times W'$ est l'ensemble bien-ordonné qui est le produit cartésien de W et W' avec l'ordre lexicographique donnant plus de poids à W', c'est-à-dire $(w_1, w_1') < (w_2, w_2')$ ssi $w_1' < w_2'$ ou bien $w_1' = w_2'$ et $w_1 < w_2$ (il est facile de voir qu'il s'agit bien d'un bon ordre).

Autrement dit, intuitivement, une rangée de $\alpha\beta$ allumettes s'obtient en prenant une rangée de β allumettes et en y *remplaçant* chaque allumette par une rangée de α allumettes.

La seconde façon consiste à définir $\alpha\beta$ par induction transfinie sur β (le *second* facteur) :

— $\alpha \cdot 0 = 0$,
— $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ (cas successeur),
— $\alpha \cdot \delta = \lim_{\xi \to \delta}(\alpha \cdot \xi)$ si δ est limite.

Nous ne ferons pas la vérification du fait que ces définitions sont bien équivalentes, qui n'est cependant pas difficile (il s'agit de vérifier que la première définition vérifie bien les clauses inductives de la seconde).

5.5.5. Quelques propriétés de la multiplication des ordinaux sont les suivantes :

— la multiplication est associative, c'est-à-dire que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (on notera donc simplement $\alpha\beta\gamma$ et de même quand il y a plus de facteurs) ;
— l'ordinal nul est absorbant à gauche comme à droite, c'est-à-dire que $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$;
— l'ordinal 1 est neutre à gauche comme à droite, c'est-à-dire que $1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1$;
— la multiplication est distributive *à droite* sur l'addition, c'est-à-dire que $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (en particulier, $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$) ;
— la multiplication n'est pas commutative en général : par exemple, $2 \cdot \omega = \omega$ (en doublant chaque allumette) alors que $\omega \cdot 2 > \omega$;
— la distributivité à gauche ne vaut pas en général : par exemple, $(1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega$ n'est pas égal à $\omega + \omega = \omega \cdot 2$;
— la multiplication est croissante en chaque variable, et même strictement croissante en la seconde lorsque la première est non nulle (si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha \cdot \beta \leq \alpha' \cdot \beta$, et si $\beta < \beta'$ et $\alpha > 0$ alors $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \beta'$) ;
— la multiplication est continue en la seconde variable (c'est exactement ce que dit le cas limite dans la définition par induction transfinie) ;
— **division euclidienne** : pour tout α (ici appelé dividende) et tout $\beta > 0$ (ici appelé diviseur) il existe γ (ici appelé quotient) et $\rho < \beta$ (ici appelé reste) uniques tels que $\alpha = \beta\gamma + \rho$ (on prendra garde au fait qu'il s'agit d'une division *à gauche*) ;
— comme conséquence de l'une des deux propriétés précédentes : si $\beta\gamma = \beta\gamma'$ avec $\beta > 0$, alors $\gamma = \gamma'$ (simplification *à gauche* des produits ordinaux).

À titre d'exemple concernant la division euclidienne, tout ordinal α peut s'écrire de façon unique comme $\alpha = \omega\gamma + r$ avec r un entier naturel : on a alors $r > 0$ si et seulement si r est successeur (les ordinaux limites sont donc exactement les $\omega\gamma$ avec $\gamma > 0$) ; ce r sera le « chiffre des unités » de l'écriture de α en forme normale de Cantor ($\xi_{(0)}$ dans la notation de 5.5.9). On peut aussi écrire tout ordinal α de façon unique comme $\alpha = 2\gamma + r$ avec r valant 0 ou 1 : on peut dire que α est « pair » ou « impair » selon le cas (à titre d'exemple, ω est pair car $\omega = 2 \cdot \omega$) ; ce r sera de même le « chiffre des unités » de l'écriture binaire.

5.5.6. On pourrait aussi définir des produits d'ordinaux, ces produits étant eux-mêmes indicés par d'autres ordinaux (le cas des produits infinis ordinaires étant le cas où l'ensemble d'indices est ω). Précisément, si α_ι est un ordinal non nul pour tout $\iota < \gamma$ (avec γ un autre ordinal), on peut définir $\prod_{\iota<\gamma} \alpha_\iota$ par induction transfinie sur γ :

— $\prod_{\iota<0} \alpha_\iota = 1$ (produit vide !),

— $\prod_{\iota<\gamma+1} \alpha_\iota = \left(\prod_{\iota<\gamma} \alpha_\iota\right) \cdot \alpha_\gamma$ (cas successeur),

— $\prod_{\iota<\delta} \alpha_\iota = \lim_{\xi\to\delta} \prod_{\iota<\xi} \alpha_\iota$ (cas limite),

et on peut étendre au cas où certains ordinaux sont nuls en décrétant que, dans ce cas, le produit est nul (évidemment).

Ainsi, dans le cas d'un produit d'ordinaux non nuls indicé par les entiers naturels, $\prod_{n<\omega} \alpha_n$ est la limite $n \to \omega$ de la suite croissante d'ordinaux $\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}$ (limite qui existe toujours en tant qu'ordinal).

Cette notion de produit peut servir à définir le produit, $\alpha^\beta = \prod_{\iota<\beta} \alpha$, mais on va le redéfinir de façon plus simple :

5.5.7. Il existe deux façons équivalentes de définir l'exponentielle α^β de deux ordinaux.

La première façon consiste à prendre un ensemble bien-ordonné W tel que $\alpha = \#W$ et un ensemble bien-ordonné W' tel que $\beta = \#W'$, et définir $\alpha^\beta := \#(W^{(W')})$ où $W^{(W')}$ est l'ensemble des fonctions $W' \to W$ *prenant presque partout la valeur* 0, c'est-à-dire partout sauf en un nombre fini de points la plus petite valeur de W, cet ensemble étant muni de l'ordre lexicographique donnant plus de poids aux grandes composantes de la fonction, c'est-à-dire que $f < g$ lorsque le plus grand $w' \in W'$ tel que $f(w') \neq g(w')$ vérifie en fait $f(w') < g(w')$ (on peut vérifier qu'il s'agit bien d'un bon ordre).

La seconde façon consiste à définir α^β par induction transfinie sur β (l'exposant) :

— $\alpha^0 = 1$,

— $\alpha^{\beta+1} = (\alpha^\beta) \cdot \alpha$ (cas successeur),

— $\alpha^\delta = \lim_{\xi\to\delta} \alpha^\xi$ si δ est limite.

Nous ne ferons pas la vérification du fait que ces définitions sont bien équivalentes, qui n'est cependant pas difficile (il s'agit de vérifier que la première définition vérifie bien les clauses inductives de la seconde).

5.5.8. Quelques propriétés de l'exponentiation des ordinaux sont les suivantes :

— pour tout β, on a $1^\beta = 1$;

— pour tout $\beta > 0$, on a $0^\beta = 0$ (en revanche, $0^0 = 1$) ;

— on a $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$;

— on a $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$;

— l'exponentiation est croissante en chaque variable (si on écarte $0^0 = 1$), et même strictement croissante en l'exposant (β) lorsque la base α est > 1 ;

— l'exponentiation est continue en l'exposant variable (c'est exactement ce que dit le cas limite dans la définition par induction transfinie).

Il peut être éclairant de vérifier $2^\omega = \omega$ avec les deux définitions de l'exponentiation. Selon la définition avec des ensembles bien-ordonnés, $2^\omega = \#(\{0,1\}^{(\mathbb{N})})$ où $\{0,1\}^{(\mathbb{N})}$ est l'ensemble des suites de 0 et de 1 dont presque tous les termes sont des 0, ordonnées par l'ordre lexicographique donnant le plus de poids aux valeurs lointaines de la suite : or de telles suites peuvent se voir comme des écritures binaire (écrites à l'envers, i.e., en commençant par le poids faible), et se comparent comme des écritures binaires, si bien que $\{0,1\}^{(\mathbb{N})}$ est isomorphe, en tant qu'ensemble bien-ordonné, à l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels, et son ordinal est bien ω. Selon la définition inductive, 2^ω est la limite de 2^n pour $n \to \omega$, c'est-à-dire la borne supérieure de $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$, or cette borne supérieure est ω (ce ne peut pas être plus, parce que tous les 2^n sont des entiers naturels donc majorés par ω, et ce ne peut pas être moins car aucun ordinal $< \omega$, i.e., aucun entier naturel, ne majore tous les 2^n).

5.5.9. Soient α, τ des ordinaux avec $\tau > 1$ (dans la pratique, on ne s'intéressera guère qu'à $\tau = 2$ et $\tau = \omega$) : alors il existe une unique écriture

$$\alpha = \tau^{\gamma_s}\xi_s + \cdots + \tau^{\gamma_1}\xi_1$$

où $\gamma_s > \cdots > \gamma_1$ et $\xi_s, \ldots, \xi_1$ tous non nuls et strictement inférieurs à τ, ou, ce qui revient au même (mais en changeant ξ_i en $\xi_{(\gamma_i)}$),

$$\alpha = \cdots + \tau^\iota \xi_{(\iota)} + \cdots + \tau\xi_{(1)} + \xi_{(0)}$$

où les $\xi_{(\iota)}$ sont tous nuls sauf un nombre fini (ce qui rend finie la somme ci-dessus) et tous $< \tau$.

Deux telles expressions se comparent par l'ordre lexicographique donnant le plus de poids aux puissances élevées de τ. On parle d'écriture de α **en base** τ : on dit que les $\xi_{(\iota)}$ sont les *chiffres* de cette écriture. On souligne que les chiffres sont *tous nuls sauf un nombre fini* (ce qui permet de les comparer lexicographiquement).

Les deux cas les plus importants sont $\tau = 2$ et $\tau = \omega$: le cas $\tau = 2$ correspond à l'**écriture binaire** d'un ordinal, c'est-à-dire son écriture comme somme décroissante finie de puissances de 2 distinctes, et le cas $\tau = \omega$ s'appelle écriture en **forme normale de Cantor**, c'est-à-dire comme somme décroissante finie de puissances de ω.

La forme normale de Cantor est la manière usuelle d'écrire les ordinaux (par exemple, ω, $\omega + 7$, $\omega \cdot 5$, ω^2, ω^ω ou encore $\omega^{\omega \cdot 2}$ sont des formes normales de Cantor, fussent-elles un peu dégénérées ; un exemple moins dégénéré serait $\omega^{\omega^3} \cdot 7 + \omega^{\omega+5} \cdot 42 + \omega^3 + 666$) ; on va expliquer au paragraphe suivant que la forme normale de Cantor itérée (c'est-à-dire appliquée aux exposants γ_i eux-mêmes, et à leurs exposants, et ainsi de suite) permet de « comprendre » et de manipuler informatiquement un ordinal ε_0 passablement grand. L'écriture binaire est moins souvent utilisée pour les ordinaux, et son rapport avec la forme normale de Cantor sera expliqué en 5.5.13.

5.5.10. La forme normale de Cantor (ou plus exactement, la forme normale de Cantor *itérée*, c'est-à-dire appliquée récursivement aux exposants de la forme normale de Cantor) permet de comprendre, et de manipuler informatiquement, les ordinaux strictement inférieurs à un certain ordinal appelé ε_0.

Plus exactement, on peut donner la définition suivante : un ordinal $< \varepsilon_0$ est *soit* un entier naturel n (qui pourra aussi s'écrire $\omega^0 \cdot n$ si on le souhaite), qu'on compare comme on compare usuellement les entiers naturels, *soit* une écriture de la forme $\omega^{\gamma_s} n_s + \cdots + \omega^{\gamma_1} n_1$ où $\gamma_s > \cdots > \gamma_1$ sont eux-mêmes des ordinaux $< \varepsilon_0$ (précédemment définis), et les n_i sont des entiers naturels non nuls, et de telles expressions se comparent par ordre lexicographique (i.e., comparer d'abord γ_s, ou, s'ils sont égaux, comparer les n_s, ou, s'ils sont égaux, comparer le terme suivant, etc.).

À titre d'exemple, $\alpha := \omega^{\omega^{\omega 3} \cdot 7 + \omega^{\omega+5} \cdot 42} \cdot 1729 + \omega^{\omega^{\omega 2} \cdot 1000 + \omega + 33} \cdot 299\,792\,458$ est un ordinal $< \varepsilon_0$ (écrit en forme normale de Cantor) car le premier exposant, $\omega^{\omega 3} \cdot 7 + \omega^{\omega+5} \cdot 42$, est lui-même un ordinal $< \varepsilon_0$ écrit en forme normale de Cantor et supérieur au second exposant, $\omega^{\omega 2} \cdot 1000 + \omega + 33$. L'ordinal α est plus grand que $\beta := \omega^{\omega^{\omega 3} \cdot 7 + \omega^{\omega+4} \cdot 333} \cdot 2016 + \omega^{\omega^{\omega 3} \cdot 5 + \omega + 33} \cdot 299\,792\,458$ car (une fois qu'on a vérifié, de même, que β est correctement écrit) le premier exposant de α, à savoir $\omega^{\omega 3} \cdot 7 + \omega^{\omega+5} \cdot 42$, est supérieur au premier exposant de β, à savoir $\omega^{\omega 3} \cdot 7 + \omega^{\omega+4} \cdot 333$ (cette comparaison se fait elle-même en comparant le premier exposant, dans les deux cas $\omega \cdot 3$, puis son coefficient, dans les deux cas 7, puis l'exposant suivant, et c'est là qu'on constate que $\omega + 5$ dépasse $\omega + 4$).

Formellement, on peut définir ε_0 comme l'ordinal (le $\#$ au sens de 5.3.8) de l'ensemble bien-ordonné des écritures qu'on vient de présenter pour l'ordre qu'on vient de dire. Cet ordinal est la limite de $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$ c'est-à-dire le plus petit ordinal tel que $\varepsilon = \omega^\varepsilon$.

5.5.11. (**Digression.** Plus généralement, on appelle ε_α le α-ième ordinal tel que $\varepsilon = \omega^\varepsilon$: si on préfère, $\varepsilon_{\beta+1}$ est la limite de $\varepsilon_\beta, \varepsilon_\beta^{\varepsilon_\beta}, \varepsilon_\beta^{\varepsilon_\beta^{\varepsilon_\beta}}, \ldots$, et lorsque δ est limite, ε_δ est la limite des ε_ξ pour $\xi \to \delta$; on pourrait utiliser ce genre de notations jusqu'à $\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\cdots}}}$ qui est le plus petit ordinal tel que $\zeta = \varepsilon_\zeta$. Mais il ne faut pas s'imaginer qu'on puisse espérer épuiser les ordinaux par ce genre d'opérations : tous les ordinaux que nous venons de mentionner sont *dénombrables*, c'est-à-dire qu'ils sont les ordinaux de certains bons ordres sur $\mathbb{N}$ (ou un ensemble fini), et toutes les opérations $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha + \beta$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^\beta$ et même $\alpha \mapsto \varepsilon_\alpha$ envoient les ordinaux dénombrables sur les ordinaux dénombrables. Or il existe des ordinaux indénombrables, le plus petit étant appelé ω_1, qui est donc la borne supérieure des ordinaux dénombrables, ou, dans la construction de von Neumann, l'ensemble des ordinaux dénombrables : cet ordinal a la propriété que *toute suite strictement croissante (indicée par les entiers naturels) à valeurs dans [les ordinaux plus petits que]* ω_1 *est bornée*, c'est-à-dire qu'on ne peut jamais le fabriquer comme limite d'une suite.)

5.5.12. Expliquons rapidement pourquoi la forme normale de Cantor permet de calculer la somme ou le produit de deux ordinaux.

Pour l'addition, à part le fait qu'elle est associative, on a simplement besoin de savoir que :

— si $\gamma < \gamma'$ alors $\omega^\gamma \cdot n + \omega^{\gamma'} \cdot n' = \omega^{\gamma'} \cdot n'$ (autrement dit, les plus grandes puissances de ω absorbent les plus petites situées à leur gauche),

— et bien sûr, $\omega^\gamma \cdot n + \omega^\gamma \cdot n' = \omega^\gamma \cdot (n + n')$ par associativité à droite (on peut donc regrouper deux puissances égales).

À titre d'exemple, la somme de $\omega^{\omega 2} \cdot 2 + \omega^7 \cdot 3$ et $\omega^{\omega 2} \cdot 5 + 12$ dans cet ordre vaut $\omega^{\omega 2} \cdot 7 + 12$, et dans l'autre sens elle vaut $\omega^{\omega 2} \cdot 7 + \omega^7 \cdot 3$.

Pour la multiplication, comme elle est distributive à droite et associative, il suffit de savoir calculer le produit de $\omega^{\gamma_s} n_s + \cdots + \omega^{\gamma_1} n_1$ (en forme normale de Cantor, avec les γ_i strictement décroissants et les n_i strictement positifs) par $\omega^{\gamma'}$ *à droite*, et par $n' > 0$ (entier) lui aussi *à droite*. Or on a :

— $(\omega^{\gamma_s} n_s + \cdots + \omega^{\gamma_1} n_1) \times \omega^{\gamma'} = \omega^{(\gamma_s + \gamma')}$ dès que $\gamma' > 0$, et

— $(\omega^{\gamma_s} n_s + \cdots + \omega^{\gamma_1} n_1) \times n' = \omega^{\gamma_s} n_s n' + \cdots + \omega^{\gamma_1} n_1$ dès que $n' > 0$ (i.e., seul le coefficient le plus à gauche est multiplié par n', les autres sont inchangés).

À titre d'exemple, le produit de $\omega^{\omega 2} \cdot 2 + \omega^7 \cdot 3$ et $\omega^{\omega 2} \cdot 5 + 12$ dans cet ordre vaut $\omega^{\omega 4} \cdot 5 + \omega^{\omega 2} \cdot 24 + \omega^7 \cdot 3$, et dans l'autre sens il vaut $\omega^{\omega 4} \cdot 2 + \omega^{\omega 2 + 7} \cdot 3$.

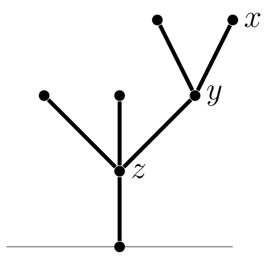
5.5.13. Puisque $\omega = 2^\omega$ (et par conséquent, $\omega^\gamma\, 2^c = 2^{\omega\gamma + c}$), l'écriture binaire d'un ordinal s'obtient en remplaçant chaque chiffre n (un entier naturel) dans sa forme normale de Cantor par l'écriture binaire de n (somme de 2^c pour des entiers naturels c distincts). À titre d'exemple,

$$\begin{array}{rllll} & \omega^{\omega^2 \cdot 3} \cdot 5 & + \omega^{\omega+1} \cdot 8 & + \omega^{17} \cdot 6 & + 12 \\ = & 2^{\omega^3 \cdot 3 + 2} + 2^{\omega^3 \cdot 3} & + 2^{\omega^2 + \omega + 3} & + 2^{\omega \cdot 17 + 2} + 2^{\omega \cdot 17 + 1} & + 2^3 + 2^2 \end{array}$$

5.6 Retour sur le jeu de l'hydre

5.6.1. À tout arbre fini enraciné T on peut associer un ordinal $o(T) < \varepsilon_0$ par récurrence sur la profondeur de l'arbre, de la façon suivante : si $T_1, \ldots, T_r$ sont les sous-arbres ayant pour racine les fils de la racine, triés de façon que $o(T_1) \geq \cdots \geq o(T_r)$, alors on pose $o(T) = \omega^{o(T_1)} + \cdots + \omega^{o(T_r)}$ (autrement dit, quitte à regrouper les puissances identiques, ceci donne la forme normale de Cantor de $o(T)$).

À titre d'exemple, dans le dessin



le sous-arbre partant de x a pour valeur 0 (il n'a aucun fils), celui partant de y a pour valeur $\omega^0 + \omega^0 = 2$, celui partant de z a pour valeur $\omega^2 + 2$, et l'arbre tout entier a pour valeur ω^{ω^2+2}.

Il est facile de se convaincre que si on remplace un T_i par un autre arbre T'_i avec $o(T'_i) < o(T_i)$ alors l'arbre T' résultant vérifie $o(T') < o(T)$. Ceci marche donc à n'importe quel niveau de remplacement.

5.6.2. Rappelons maintenant les règles du jeu de l'hydre qui ont été données en 1.3.14 : Hercule choisit une *tête* de l'hydre, c'est-à-dire une feuille x de l'arbre, et la décapite en la supprimant de l'arbre. L'hydre se reproduit alors de la façon suivante : soit y le nœud parent de x dans l'arbre, et z le nœud parent de y (grand-parent de x, donc) : si l'un ou l'autre n'existe pas, rien ne se passe (l'hydre passe son tour) ; sinon, l'hydre choisit un entier naturel n (aussi grand qu'elle veut) et attache à z autant de nouvelles copies de y (mais sans la tête x qui a été décapitée) qu'elle le souhaite. Si on appelle T_y le sous-arbre de l'hydre partant du nœud y avant décapitation et T'_y le même après décapitation, on a $o(T'_y) < o(T_y)$ (puisqu'on a décapité une tête), donc $\omega^{o(T'_y)} \cdot n < \omega^{o(T_y)}$ *quel que soit* n entier naturel. Ainsi, si on appelle T_z et T'_z les sous-arbres partant de z avant et après décapitation + reproduction, on voit que T'_z est obtenu en remplaçant $\omega^{o(T_y)}$ dans son écriture en forme normale de Cantor par un terme $\omega^{o(T'_y)} \cdot n$ strictement plus petit. On a donc $o(T'_z) < o(T_z)$, et cette inégalité stricte vaut encore pour l'arbre tout entier.

On voit donc que si on considère la suite des ordinaux associés aux différentes formes de l'hydre au cours d'une partie du jeu de l'hydre, cette suite est *strictement décroissante*, et d'après 5.1.5 ou 5.3.10, le jeu termine donc toujours en temps fini.

6 Jeux combinatoires impartiaux à information parfaite

6.1 Récapitulations

6.1.1. On a introduit en 1.3.9 et plus formellement en 3.4.1 la notion de *jeu combinatoire impartial* (à information parfaite) associé à un graphe G muni d'un sommet initial x_0 (c'est le jeu où, partant de $x = x_0$, chacun des deux joueurs choisit à son tour un voisin sortant de x : si l'un des joueurs ne peut pas jouer, il a perdu, tandis que si la confrontation se continue indéfiniment, elle est considérée comme nulle) ; on a vu en 3.4.4 que ces jeux sont déterminés.

On fera dans toute cette partie l'hypothèse supplémentaire que le graphe G est bien-fondé (cf. 4.1.1), c'est-à-dire qu'aucune confrontation ne peut être nulle (=durer indéfiniment) : il arrive forcément un point où l'un des joueurs ne peut plus jouer (et a donc perdu), et la détermination signifie qu'un des joueurs a une stratégie *gagnante*. On peut qualifier un tel jeu de « bien-fondé » ou de **terminant**.

6.1.2. Il va de soi qu'une position x d'un jeu combinatoire impartial G peut elle-même être considérée comme un jeu combinatoire impartial : le jeu joué **à partir de là**, à savoir celui dont x est la position initiale (on avait fait une remarque semblable pour les jeux de Gale-Stewart en 3.1.6) et dont l'ensemble des positions est G ou, mieux (cf. paragraphe suivant) l'aval de x. On se permettra souvent d'identifier ainsi une position et un jeu.

Pour éviter des discussions inutiles, on fera aussi souvent implicitement l'hypothèse, en parlant d'un jeu combinatoire impartial (G, x_0), que tout sommet de G est accessible depuis x_0 (cf. 4.1.3 ; i.e., il n'y a pas de positions « inutiles » car inaccessibles) : on peut toujours se ramener à cette hypothèse en remplaçant G par l'aval de x_0, c'est-à-dire, en supprimant les positions inaccessibles.

On notera parfois abusivement un jeu G au lieu de la donnée (G, x_0) (c'est d'autant plus critiquable que x_0 est peut-être plus important que G comme expliqué aux deux paragraphes précédents ; néanmoins, ce n'est pas vraiment grave car x_0 peut être retrouvé, si on a fait l'hypothèse du paragraphe précédent, comme le seul sommet à partir duquel tout sommet est accessible).

On rappelle la définition de la fonction de Grundy (généralisant 4.1.13 à des valeurs non nécessairement finies, comme expliqué en 4.1.18) :

Définition 6.1.3. Soit G un graphe orienté bien-fondé. On appelle **fonction de Grundy** sur G la fonction gr définie sur G et à valeurs ordinales définie inductivement (en utilisant le théorème 4.1.9) par $\mathrm{gr}(x) = \mathrm{mex}\{\mathrm{gr}(y) : y \in \mathrm{outnb}(x)\}$ (où $\mathrm{mex}\, S$ désigne le plus petit ordinal n'appartenant pas à S, qui existe d'après 5.3.10 et 5.3.11). On appelle valeur (ou fonction) de Grundy du jeu combinatoire impartial (terminant) associé à (G, x_0) la valeur $\mathrm{gr}(x_0)$.

On rappelle qu'on a vu (cf. 4.1.16 à 4.1.18) que le second joueur (=joueur Précédent) a une stratégie gagnante si et seulement si la valeur de Grundy est 0, tandis que le premier joueur (=joueur suivant (Next)) en a une si et seulement si elle est $\neq 0$. (On parlera de P-positions et de N-positions selon que la valeur de Grundy est nulle ou non.) La stratégie « universelle » consiste toujours à *jouer de façon à annuler la valeur de Grundy* du sommet vers lequel on joue (i.e., jouer vers les P-positions).

(On notera parfois $G \doteq 0$ pour dire que le second joueur a une stratégie gagnante, i.e., la valeur de Grundy de G est 0, i.e., la position initiale de G est une P-position ; et $G \parallel 0$ pour dire que le premier joueur a une stratégie gagnante, i.e., la valeur de Grundy de G est $\neq 0$, i.e., la position initiale de G est une N-position. Ces notations seront surtout utiles dans la section 7.)

La signification exacte de la valeur de Grundy (au-delà du fait qu'elle soit nulle ou non nulle) est plus mystérieuse. Pour l'éclaircir, on va introduire les *nimbres* (déjà évoqués en 5.1.12) :

Définition 6.1.4. Soit α un ordinal. On appelle alors **nimbre** associé à α, et on note $*\alpha$, le jeu combinatoire impartial dont

— l'ensemble des positions est l'ensemble des ordinaux $\beta \leq \alpha$ (c'est-à-dire, si on utilise la construction de von Neumann des ordinaux, cf. 5.1.7, l'ensemble $\alpha + 1$),

— la relation d'arête (définissant le graphe) est $>$, c'est-à-dire que les voisins sortants de $\beta \leq \alpha$ sont les ordinaux $\beta' < \beta$, et

— la position initiale est α.

Autrement dit, il s'agit du jeu où, partant de l'ordinal $\beta = \alpha$, chaque joueur peut diminuer l'ordinal β, c'est-à-dire le remplacer par un ordinal $\beta' < \beta$ de son choix (ce jeu termine en temps fini d'après 5.1.5 ou 5.3.10).

On dira aussi que $*\alpha$ est le jeu constituée d'« une rangée de α allumettes » au nim (si α est fini, cela coïncide bien avec ce qu'on a dit en 1.3.10). En accord avec la remarque 6.1.2, on peut identifier les positions du nimbre $*\alpha$ avec les jeux $*\beta$ pour $\beta \leq \alpha$.

Proposition 6.1.5. La valeur de Grundy du nimbre $*\alpha$ est α.

Démonstration. On procède par induction transfinie (cf. 5.2.2) : si on sait que $\mathrm{gr}(*\beta) = \beta$ pour tout $\beta < \alpha$, alors $\mathrm{gr}(*\alpha)$ est le plus petit ordinal différent de β pour $\beta < \alpha$, c'est donc exactement α. ☺

6.2 Somme de nim

Définition 6.2.1. Soient G_1, G_2 deux jeux combinatoires impartiaux dont on note x_1, x_2 les positions initiales et E_1, E_2 les relations d'arêtes. On appelle **somme**

de nim (ou simplement « somme ») de G_1 et G_2, et on note $G_1 \oplus G_2$ le jeu combinatoire impartial dont

— l'ensemble des positions est $G_1 \times G_2$,
— la relation d'arête (définissant le graphe) est $(E_1 \times \mathrm{id}_{G_2}) \cup (\mathrm{id}_{G_1} \times E_2)$, c'est-à-dire que les voisins sortants de $(y_1, y_2) \in G_1 \times G_2$ sont les (z_1, y_2) avec z_1 voisin sortant de y_1 ainsi que les (y_1, z_2) avec z_2 voisin sortant de y_1, et
— la position initiale est (x_1, x_2).

6.2.2. Autrement dit, jouer à $G_1 \oplus G_2$ signifie que chaque joueur a, lorsque son tour vient (depuis la position (y_1, y_2)), le choix entre jouer dans G_1 (c'est-à-dire aller en (z_1, y_2) avec z_1 voisin sortant de y_1 dans G_1) *ou exclusif* jouer dans G_2 (c'est-à-dire aller en (y_1, z_2) avec z_2 voisin sortant de y_2 dans G_2).

Il est clair que la somme de nim est commutative et associative, au sens où les jeux $G_1 \oplus G_2$ et $G_2 \oplus G_1$ sont isomorphes (=les graphes sont isomorphes par un isomorphisme qui envoie la position initiale de l'un sur celle de l'autre, en l'occurrence $(y_1, y_2) \mapsto (y_2, y_1)$) et de même pour $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$ et $G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$. On peut donc parler sans souci du jeu $G_1 \oplus \cdots \oplus G_n$ ou $\bigoplus_{i=1}^n G_i$ pour la somme de nim d'un nombre fini de jeux. Il s'agit simplement du jeu où chaque joueur, lorsque son tour vient, a la faculté de joueur un coup dans un et un seul des G_i.

Notamment, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des ordinaux, le **jeu de nim** ayant n rangées avec ces nombres (« nimbres » !) d'allumettes est défini comme le jeu $\bigoplus_{i=1}^n (*\alpha_i)$, c'est-à-dire le jeu où chaque joueur, lorsque son tour vient, a la faculté de décroître un et un seul des α_i.

Proposition 6.2.3. Si G_1, G_2 sont bien-fondés, alors $G_1 \oplus G_2$ est bien-fondé.

Démonstration. S'il existe une suite infinie $x_{(i)} = (x_{(i),1}, x_{(i),2})$ de sommets de $G_1 \oplus G_2$ avec $x_{(i+1)}$ voisin sortant de $x_{(i)}$, alors soit l'ensemble des i tels que $x_{(i+1),1}$ soit voisin sortant de $x_{(i),1}$ soit celui des i tels que $x_{(i+1),2}$ soit voisin sortant de $x_{(i),2}$ doit être infini : dans les deux cas on a une contradiction. (Autre démonstration : la relation d'accessibilité sur $G_1 \oplus G_2$ définit l'ordre partiel produit, qui est inclus, i.e., plus faible, que l'ordre lexicographique, et ce dernier est bien-ordonné d'après 5.5.4.) ☺

Définition 6.2.4. Soient α_1, α_2 deux ordinaux. On appelle **somme de nim** de α_1 et α_2 et on note $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ l'ordinal défini inductivement (cf. 5.2.5) par

$$\begin{aligned}\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \operatorname{mex}\big(&\{\beta_1 \oplus \alpha_2 : \beta_1 < \alpha_1\}\\ &\cup \{\alpha_1 \oplus \beta_2 : \beta_2 < \alpha_2\}\big)\end{aligned}$$

Autrement dit, il s'agit du plus petit ordinal qui n'est ni de la forme $\beta_1 \oplus \alpha_2$ pour $\beta_1 < \alpha_1$ ni de la forme $\alpha_1 \oplus \beta_2$ pour $\beta_2 < \alpha_2$; cette définition a bien un sens d'après 6.2.3. Encore autrement (en utilisant 6.1.5 et une induction transfinie évidente), il s'agit de la valeur de Grundy du jeu $(*\alpha_1) \oplus (*\alpha_2)$.

6.2.5. Pour comprendre cette définition, le mieux est de calculer quelques valeurs. Voici le tableau des $n_1 \oplus n_2$ pour $n_1 < 16$ et $n_2 < 16$:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Chaque case est calculée en prenant la *plus petite valeur qui ne figure pas déjà plus à gauche dans la ligne ou plus haut dans la colonne*.

6.2.6. Dans ce qui suit, on utilisera souvent implicitement le raisonnement suivant : pour montrer que $\operatorname{mex} S = \alpha$, il suffit de montrer que (1) tout élément de S est différent de α, et que (2) tout ordinal $< \alpha$ appartient à S.

Proposition 6.2.7. L'opération $\oplus$ est commutative sur les ordinaux.

Première démonstration. Par induction transfinie sur α_1 et α_2, on prouve $\alpha_2 \oplus \alpha_1 = \alpha_1 \oplus \alpha_2$: en effet, $\alpha_2 \oplus \alpha_1 = \operatorname{mex}(\{\alpha_2 \oplus \beta_1 : \beta_1 < \alpha_1\} \cup \{\beta_2 \oplus \alpha_1 : \beta_2 < \alpha_2\})$, et par hypothèse d'induction ceci vaut $\operatorname{mex}(\{\beta_1 \oplus \alpha_2 : \beta_1 < \alpha_1\} \cup \{\alpha_1 \oplus \beta_2 : \beta_2 < \alpha_2\}) = \alpha_1 \oplus \alpha_2$. ☺

Seconde démonstration. Cela résulte de la commutativité de $\oplus$ sur les jeux et de l'observation que $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \operatorname{gr}(*\alpha_1 \oplus *\alpha_2)$. ☺

Proposition 6.2.8. L'ordinal 0 est neutre pour $\oplus$.

Première démonstration. Par induction sur α, on prouve $\alpha \oplus 0 = \alpha$: en effet, $\alpha \oplus 0 = \operatorname{mex}\{\beta \oplus 0 : \beta < \alpha\}$, et par hypothèse d'induction ceci vaut $\operatorname{mex}\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$. ☺

Seconde démonstration. Cela résulte de l'observation que $\alpha \oplus 0 = \operatorname{gr}(*\alpha_1 \oplus *0)$ et du fait que $*0$ est le jeu trivial ayant une seule position, si bien que $G \oplus *0 \cong G$ pour n'importe quel G. ☺

Proposition 6.2.9. Pour tous $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_2$, si $\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \alpha_1 \oplus \alpha'_2$, alors $\alpha_2 = \alpha'_2$.

Démonstration. Si ce n'est pas le cas, supposons sans perte de généralité que $\alpha'_2 < \alpha_2$. Alors $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ est le mex d'un ensemble contenant $\alpha_1 \oplus \alpha'_2$, donc il ne peut pas lui être égal, d'où une contradiction. ☺

Théorème 6.2.10. Si G_1, G_2 sont deux jeux combinatoires impartiaux bien-fondés ayant valeurs de Grundy respectivement α_1, α_2, alors la valeur de Grundy de $G_1 \oplus G_2$ est $\alpha_1 \oplus \alpha_2$.

Démonstration. On procède par induction bien-fondée sur les positions de $G_1 \oplus G_2$ (ce qui est justifié d'après 6.2.3) : il s'agit de montrer que $\operatorname{gr}(y_1 \oplus y_2) = \operatorname{gr}(y_1) \oplus \operatorname{gr}(y_2)$ (en notant $y_1 \oplus y_2$ la position (y_1, y_2) de $G_1 \oplus G_2$), et on peut supposer ce fait déjà connu lorsque l'un de y_1 ou exclusif y_2 est remplacé par un voisin sortant. Or $\operatorname{gr}(y_1 \oplus y_2)$ est le plus petit ordinal qui n'est ni de la forme $\operatorname{gr}(z_1 \oplus y_2)$ (avec z_1 voisin sortant de y_1) ni de la forme $\operatorname{gr}(y_1 \oplus z_2)$ (avec z_2 voisin sortant de y_2), c'est-à-dire, par hypothèse d'induction, ni de la forme $\operatorname{gr}(z_1) \oplus \operatorname{gr}(y_2)$ ni de la forme $\operatorname{gr}(y_1) \oplus \operatorname{gr}(z_2)$. Mais quand z_1 parcourt les voisins sortants de y_1, les ordinaux $\operatorname{gr}(z_1)$ sont tous distincts de $\operatorname{gr}(y_1)$ et parcourent au moins tous les ordinaux strictement plus petits que lui (c'est la définition de gr) : par conséquent, les $\operatorname{gr}(z_1) \oplus \operatorname{gr}(y_2)$ sont tous distincts de $\operatorname{gr}(y_1) \oplus \operatorname{gr}(y_2)$ (on a utilisé 6.2.9) et parcourent au moins tous les $\beta_1 \oplus \operatorname{gr}(y_2)$ pour $\beta_1 < \operatorname{gr}(y_1)$, et de même, les $\operatorname{gr}(y_1) \oplus \operatorname{gr}(z_2)$ sont tous distincts de $\operatorname{gr}(y_1) \oplus \operatorname{gr}(y_2)$ et parcourent au moins tous les $\operatorname{gr}(y_2) \oplus \beta_2$ pour $\beta_2 < \operatorname{gr}(y_2)$: ceci montre bien (cf. 6.2.6) que le mex de toutes ces valeurs est $\operatorname{gr}(y_1) \oplus \operatorname{gr}(y_2)$, c'est-à-dire $\operatorname{gr}(y_1 \oplus y_2) = \operatorname{gr}(y_1) \oplus \operatorname{gr}(y_2)$. ☺

Proposition 6.2.11. L'opération $\oplus$ est associative.

Première démonstration. Par induction sur α_1, α_2 et α_3, on prouve $(\alpha_1 \oplus \alpha_2) \oplus \alpha_3 = \alpha_1 \oplus (\alpha_2 \oplus \alpha_3)$. Pour cela, il suffit de prouver que tout ordinal ξ strictement inférieur à l'un des deux membres est différent de l'autre. Par symétrie, supposons $\xi < (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \oplus \alpha_3$ et on veut prouver $\xi \neq \alpha_1 \oplus (\alpha_2 \oplus \alpha_3)$: alors on a soit $\xi = \gamma \oplus \alpha_3$ avec $\gamma < \alpha_1 \oplus \alpha_2$ qui peut lui-même s'écrire (A) $\gamma = \beta_1 \oplus \alpha_2$ où $\beta_1 < \alpha_1$ ou bien (B) $\gamma = \alpha_1 \oplus \beta_2$ où $\beta_2 < \alpha_2$, soit (C) $\xi = (\alpha_1 \oplus \alpha_2) \oplus \alpha'_3$ où

$\alpha'_3 < \alpha_3$. Dans le cas (A), en utilisant l'hypothèse d'induction, on a maintenant $\xi = (\beta_1 \oplus \alpha_2) \oplus \alpha_3 = \beta_1 \oplus (\alpha_2 \oplus \alpha_3)$ et d'après 6.2.9 ceci est différent de $\alpha_1 \oplus (\alpha_2 \oplus \alpha_3)$. Les cas (B) et (C) sont tout à fait analogues. ☺

Seconde démonstration. Cela résulte de l'associativité de $\oplus$ sur les jeux et de l'observation que $(\alpha_1 \oplus \alpha_2) \oplus \alpha_3 = \mathrm{gr}(((*\alpha_1) \oplus (*\alpha_2)) \oplus (*\alpha_3))$ qui utilise 6.2.10. ☺

Proposition 6.2.12. Pour tout α on a $\alpha \oplus \alpha = 0$.

Première démonstration. Par induction sur α, on prouve $\alpha \oplus \alpha = 0$. Or on a $\alpha \oplus \alpha = \mathrm{mex}\{\beta \oplus \alpha : \beta < \alpha\}$, donc il suffit de montrer $\beta \oplus \alpha \neq 0$ pour tout $\beta < \alpha$. Mais si $\beta \oplus \alpha = 0$, puisque l'hypothèse d'induction assure $\beta \oplus \beta = 0$, avec 6.2.9 on conclut $\alpha = \beta$, d'où une contradiction. ☺

Seconde démonstration. Le second joueur a une stratégie gagnante au jeu $(*\alpha) \oplus (*\alpha)$ consistant à reproduire chaque coup de son adversaire sur l'autre ligne (assurant que la position reste toujours de la forme $(*\beta) \oplus (*\beta)$). On a donc $\mathrm{gr}((*\alpha) \oplus (*\alpha))$, c'est-à-dire $\alpha \oplus \alpha = 0$. ☺

Proposition 6.2.13. La somme de nim $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n$ est le plus petit ordinal qui n'est pas de la forme $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \beta_i \oplus \cdots \oplus \alpha_n$, où exactement un des α_i a été remplacé par un ordinal β_i strictement plus petit.

Première démonstration. On procède par récurrence sur n. Tout d'abord, en utilisant 6.2.9, on voit que chaque $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \beta_i \oplus \cdots \oplus \alpha_n$ est différent de $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n$. D'autre part, si $\xi < \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n$, alors quitte à écrire $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n = \alpha' \oplus \alpha_n$ avec $\alpha' := \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_{n-1}$, on a soit $\xi = \gamma \oplus \alpha_n$ où $\gamma < \alpha'$, soit $\xi = \alpha' \oplus \beta_n$ où $\beta_n < \alpha_n$; le second cas a bien la forme $\xi = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_{n-1} \oplus \beta_n$ voulue, et dans le premier cas l'hypothèse de récurrence permet d'écrire $\gamma = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \beta_i \oplus \cdots \oplus \alpha_{n-1}$ avec $\beta_i < \alpha_i$ (où $i \leq n-1$), d'où $\xi = \alpha_1 \oplus \cdots \oplus \beta_i \oplus \cdots \oplus \alpha_n$. Ceci prouve bien que $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n$ est le plus petit ordinal qui ne soit pas de la forme $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \beta \oplus \cdots \oplus \alpha_n$, comme souhaité. ☺

Seconde démonstration. En appliquant 6.2.10 (et une récurrence immédiate sur n), on voit que $\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_n = \mathrm{gr}((*\alpha_1) \oplus \cdots \oplus (*\alpha_n))$. Or les positions de $(*\alpha_1) \oplus \cdots \oplus (*\alpha_n)$ sont justement les $(*\alpha_1) \oplus \cdots \oplus (*\beta_i) \oplus \cdots \oplus (*\alpha_n)$ pour $\beta_i < \alpha_i$, et la conclusion découle de la définition de gr. ☺

Proposition 6.2.14. Soient $\gamma_1 > \cdots > \gamma_r$ des ordinaux : alors la somme usuelle (cf. 5.5.1) $2^{\gamma_1} + \cdots + 2^{\gamma_r}$ des puissances de 2 correspondantes coïncide avec la somme de nim $2^{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus 2^{\gamma_r}$.

Démonstration. On procède par induction transfinie sur $2^{\gamma_1} + \cdots + 2^{\gamma_r}$. On veut montrer que $\alpha := 2^{\gamma_1} + \cdots + 2^{\gamma_r}$ est égal à $2^{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus 2^{\gamma_r}$, c'est-à-dire, d'après 6.2.13, qu'il s'agit du plus petit ordinal qui n'est pas de la forme $2^{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus \beta_i \oplus \cdots \oplus 2^{\gamma_r}$ pour un certain $\beta_i < 2^{\gamma_i}$. Pour ceci (cf. 6.2.6), il suffit de montrer que (1) α n'est pas de la forme qu'on vient de dire, et que (2) tout ordinal $< \alpha$ l'est.

Or dans la somme de nim $2^{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus \beta_i \oplus \cdots \oplus 2^{\gamma_r}$ avec $\beta_i < 2^{\gamma_i}$, en écrivant β_i en binaire et en utilisant l'hypothèse d'induction, on a $\beta_i = 2^{\gamma'_1} \oplus \cdots \oplus 2^{\gamma'_s}$ où $\gamma_i > \gamma'_1 > \cdots > \gamma'_s$. Avec les propriétés déjà démontrées sur la somme de nim (commutativité, associativité, et surtout 6.2.12), on peut supprimer les puissances de 2 qui apparaissent deux fois et on obtient ainsi une somme de nim de puissances de 2 distinctes qui fait intervenir les puissances 2^{γ_1} à $2^{\gamma_{i-1}}$ et certaines puissances strictement plus petites que 2^{γ_i}. En utilisant de nouveau l'hypothèse d'induction, cette somme se revoit comme une écriture binaire, et puisqu'il n'y a pas 2^{γ_i} dedans, elle est strictement plus petite que α (on rappelle que les écritures binaires des ordinaux se comparent lexicographiquement). Ceci montre (1).

Pour ce qui est de (2), considérons un ordinal $\alpha' < \alpha$, qui s'écrit donc en binaire comme une somme de la forme $2^{\gamma_1} + \cdots + 2^{\gamma_{i-1}} + 2^{\gamma''_1} + \cdots + 2^{\gamma''_s}$ avec $\gamma_i > \gamma''_1 > \cdots > \gamma''_s$. L'hypothèse d'induction permet de réécrire cette somme comme une somme de nim. Quitte à ajouter $2^{\gamma_{i+1}}, \ldots, 2^{\gamma_r}$ dans la somme et annuler les puissances de 2 qui apparaissent deux fois, on voit qu'on peut écrire α' sous la forme $2^{\gamma_1} \oplus \cdots \oplus \beta_i \oplus \cdots \oplus 2^{\gamma_r}$ où β_i est une somme de nim de puissances de 2 toutes strictement plus petites que 2^{γ_i}. En utilisant de nouveau l'hypothèse d'induction, cette somme de nim est une somme usuelle, c'est-à-dire une écriture binaire, et $\beta_i < 2^{\gamma_i}$ puisqu'il n'y a pas de 2^{γ_i} dans l'écriture binaire en question. Ceci prouve (2). ☺

Récapitulons ce qu'on a montré :

Théorème 6.2.15. La somme de nim d'ordinaux (définie en 6.2.4) peut se calculer en écrivant les ordinaux en question en binaire et en effectuant le *ou exclusif* de ces écritures binaires (c'est-à-dire que le coefficient devant chaque puissance de 2 donnée vaut 1 lorsque exactement l'un des coefficients des nombres ajoutés vaut 1, et 0 sinon).

La valeur de Grundy de la somme de nim de jeux combinatoires impartiaux bien-fondés se calcule donc comme le *ou exclusif* des valeurs de Grundy des composantes. Notamment, la valeur de Grundy d'un jeu de nim est le *ou exclusif* des nombres d'allumettes des différentes lignes.

Enfin, la valeur de Grundy d'un jeu combinatoire impartial bien-fondé G peut se voir comme l'unique ordinal α tel que le second joueur ait une stratégie gagnante dans $G \oplus *\alpha$.

Démonstration. L'affirmation du premier paragraphe résulte de 6.2.14 et de 6.2.12 (ainsi que de la commutativité et l'associativité, *ad lib.*) pour annuler les puissances de 2 identiques.

L'affirmation du second paragraphe est une reformulation de 6.2.10 (et pour le jeu de nim, cf. aussi 6.1.5).

Enfin, l'affirmation du troisième paragraphe en résulte d'après 6.2.9 (pour l'unicité de α) et 6.2.12. ☺

6.2.16. On savait déjà que dire que la valeur de Grundy d'un jeu combinatoire impartial bien-fondé G vaut 0 signifie que le second joueur a une stratégie gagnante. On voit maintenant que dire que cette valeur vaut 1 signifie que le second joueur a une stratégie gagnante dans le jeu modifié où les joueurs peuvent passer un tour exactement une fois dans le jeu (le premier joueur qui utilise cette faculté la consomme pour tout le monde, et le jeu n'est fini qu'une fois ce tour consommé) : en effet, c'est simplement une reformulation du jeu $G \oplus *1$.

6.2.17. On peut définir une relation d'équivalence $\doteq$ entre jeux combinatoires impartiaux bien-fondés par : $G \doteq H$ lorsque le second joueur possède une stratégie gagnante au jeu $G \oplus H$ (c'est-à-dire que [la position initiale de] $G \oplus H$ est une P-position, ou encore que sa valeur de Grundy est nulle).

Selon le modèle de 7.1.9 plus bas, on peut montrer que $\doteq$ est une relation d'équivalence et qu'elle est compatible avec la somme de nim (c'est-à-dire que si $G \doteq G'$ et $H \doteq H'$ alorsq $G \oplus H \doteq G' \oplus H'$) : le point crucial est que si le second joueur possède une stratégie gagnante à un jeu G_0 alors le joueur qui a une stratégie gagnante à $G \oplus G_0$ est le même qu'à G (comparer avec 7.1.7 ci-dessous).

Cette relation $\doteq$ sera particulièrement pertinente pour les jeux partisans (dont la théorie est esquissée dans la section 7 ci-dessous), mais dans le cas des jeux impartiaux considérés ici, elle est complètement contenue dans la valeur de Grundy : on a $G \doteq H$ si et seulement si $\mathrm{gr}(G) = \mathrm{gr}(H)$ (en effet, $G \doteq H$ équivaut par définition au fait que le second joueur ait une stratégie gagnante à $G \oplus H$, c'est-à-dire $\mathrm{gr}(G \oplus H) = 0$, ce qui d'après 6.2.10 signifie $\mathrm{gr}(G) \oplus \mathrm{gr}(H) = 0$, autrement dit, cf. 6.2.12, que $\mathrm{gr}(G) = \mathrm{gr}(H)$). Bref, les « classes d'équivalence » pour la relation $\doteq$ sont précisément données par les ordinaux à travers la valeur de Grundy.

6.2.18. À côté de la somme de nim définie en 6.2.4, il existe aussi une opération de **produit de nim** définie inductivement par

$$\alpha \otimes \beta := \mathrm{mex}\left\{(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') : \alpha' < \alpha, \text{ et } \beta' < \beta\right\}$$

On renvoie à l'exercice 8.6.2 pour une interprétation de cette opération en termes de jeux, et à 8.6.3 pour plus d'informations sur cette opération : on y montre notamment qu'elle est commutative et distributive sur la somme de nim, et en fait, on peut voir que les deux opérations de nim munissent la classe de tous les ordinaux d'une structure de corps commutatif (de caractéristique 2 et algébriquement clos).

7 Notions sur les combinatoires partisans à information parfaite

7.1 Jeux partisans, ordre, et somme

Définition 7.1.1. Soit G un graphe orienté dont l'ensemble E des arêtes est réunion de deux sous-ensembles L (les arêtes *bleues*) et R (les arêtes *rouges*) et soit x_0 un sommet de G. Le **jeu combinatoire partisan à information parfaite** associé à ces données est défini de la manière suivante : partant de $x = x_0$, Blaise (=joueur Bleu, =joueur gauche, =Left) et Roxane (=joueur Rouge, =joueur droite, =Right) choisissent tour à tour un voisin sortant de x avec la contrainte supplémentaire que chacun doit suivre une arête de sa couleur, autrement dit, Blaise choisit une arête bleue $(x_0, x_1) \in L$ de G, puis Roxane choisit une arête rouge $(x_1, x_2) \in R$ de G, puis Blaise choisit une arête $(x_2, x_3) \in L$, et ainsi de suite. Si un joueur ne peut plus jouer, il a perdu ; si la confrontation dure un temps infini, elle est considérée comme nulle (ni gagnée ni perdue par les joueurs). On peut considérer le jeu où Blaise commence (qu'on vient de décrire) ou celui où Roxane commence (exactement analogue : Roxane choisit $(x_0, x_1) \in R$ puis Blaise choisit $(x_1, x_2) \in L$, etc.).

On dira que y est un « voisin sortant bleu » ou une « option gauche » de x lorsque $(x, y) \in L$, et de même un « voisin sortant rouge » ou une « option droite » de x lorsque $(x, y) \in R$.

Une arête à la fois rouge et bleue (i.e., empruntable par les deux joueurs) sera dite **verte**[3].

Les jeux impartiaux sont identifiés aux jeux partisans pour lesquels $L = R = E$ (i.e., toutes les arêtes sont vertes : les joueurs ont toujours les mêmes ensembles d'options).

7.1.2. On fera toujours l'hypothèse que le graphe est bien-fondé, c'est-à-dire que la partie nulle est impossible. Les mêmes remarques qu'en 6.1.2 s'appliquent pour les jeux partisans.

7.1.3. On ne précise pas si Blaise ou Roxane joue en premier. Dans chacun des cas, il résulte des techniques de la section 3.4 (ou de 7.2.1 plus bas) que l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante. Il résulte que quatre cas (exclusifs et exhaustifs) sont possibles pour un jeu combinatoire partisan terminant (=bien-fondé) G :

3. Il serait sans doute plus logique de la qualifier de violette...

— Blaise a une stratégie gagnante, qui que soit le joueur qui commence : dans ce cas, on dira que le jeu est **strictement positif** et on notera $G > 0$;
— Roxane a une stratégie gagnante, qui que soit le joueur qui commence : dans ce cas, on dira que le jeu est **strictement négatif** et on notera $G < 0$;
— le second joueur a une stratégie gagnante, quel qu'il soit : dans ce cas, on dira que le jeu est **nul** (au sens de Conway) et on notera $G \doteq 0$;
— le premier joueur a une stratégie gagnante, quel qu'il soit : dans ce cas, on dira que le jeu est **flou** et on notera $G \parallel 0$.

Pour motiver la convention de considérer les jeux où le *second* joueur a une stratégie gagnante comme nuls, on rappelle que dans le cas où G est impartial, ce sont les jeux dont la valeur de Grundy est nulle (et notamment que ces jeux ont la propriété qu'on peut les ignorer dans une somme de nim).

On définit aussi $G \geq 0$ (le jeu est alors qualifié de positif) lorsque $G > 0$ ou bien $G \doteq 0$: concrètement, cela signifie donc que Blaise a une stratégie gagnante à condition qu'il joue en *second*. De même, $G \leq 0$ signifie que Roxane a une stratégie gagnante à condition qu'elle joue en second. On note parfois $G \lhd 0$ pour dire que $G < 0$ ou bien $G \parallel 0$ (c'est-à-dire la négation de $G > 0$: Blaise a une stratégie gagnante à condition qu'il joue en *premier*), et de même $G \rhd 0$ pour $G > 0$ ou $G \parallel 0$.

7.1.4. On définit également l'**opposé** d'un jeu combinatoire partisan G comme le jeu $-G$ (ou $\ominus G$) dans lequel les arêtes bleues et rouges sont échangées (i.e., L et R sont échangés). Il va de soi que $-G$ est strictement positif, resp. strictement négatif, resp. nul, resp. flou, selon que G est strictement négatif, resp. strictement positif, resp. nul, resp. flou.

Définition 7.1.5. Soient G_1, G_2 deux jeux combinatoires partisans dont on note x_1, x_2 les positions initiales et E_1, E_2 les relations d'arêtes, avec L_1, L_2 les ensembles d'arêtes bleues et R_1, R_2 les rouges. On appelle **somme disjonctive**, ou simplement « somme », de G_1 et G_2, et on note $G_1 + G_2$ (ou $G_1 \oplus G_2$) le jeu combinatoire partisan dont
— l'ensemble des positions est $G_1 \times G_2$,
— la relation d'arête (définissant le graphe) est $(E_1 \times \mathrm{id}_{G_2}) \cup (\mathrm{id}_{G_1} \times E_2)$, c'est-à-dire que les voisins sortants de $(y_1, y_2) \in G_1 \times G_2$ sont les (z_1, y_2) avec z_1 voisin sortant de y_1 ainsi que les (y_1, z_2) avec z_2 voisin sortant de y_1,
— la couleur des arêtes vient de G_1 et de G_2, c'est-à-dire que l'ensemble des arêtes bleues est $(L_1 \times \mathrm{id}_{G_2}) \cup (\mathrm{id}_{G_1} \times L_2)$ (formé des arêtes $((y_1, y_2), (z_1, y_2))$ avec (y_1, z_1) dans L_1 et des $((y_1, y_2), (y_1, z_2))$ avec (y_2, z_2) dans L_2) et l'ensemble des arêtes rouges est de même $(R_1 \times \mathrm{id}_{G_2}) \cup (\mathrm{id}_{G_1} \times R_2)$, et
— la position initiale est (x_1, x_2).

7.1.6. Autrement dit, comme pour les jeux impartiaux, jouer à G_1+G_2 signifie que chaque joueur a, lorsque son tour vient (depuis la position (y_1, y_2)), le choix entre jouer dans G_1 (c'est-à-dire aller en (z_1, y_2) avec z_1 voisin sortant de y_1 dans G_1 de la couleur du joueur) *ou exclusif* jouer dans G_2 (c'est-à-dire aller en (y_1, z_2) avec z_2 voisin sortant de y_2 dans G_2 de la couleur du joueur). La somme de nim est le cas particulier de la somme disjonctive appliquée aux jeux impartiaux.

Comme pour les jeux impartiaux, la somme est commutative et associative (à isomorphisme près).

Toute la cohérence de la théorie est fondée sur la proposition élémentaire suivante :

Proposition 7.1.7. La somme de deux jeux (combinatoires partisans bien-fondés) nuls est nulle. La somme de deux jeux strictement positifs, ou d'un strictement positif et d'un nul, est strictement positive. La somme de deux jeux strictement négatifs, ou d'un strictement négatif et d'un nul, est strictement négative. La somme d'un jeu flou et d'un jeu nul est floue. (En revanche, la somme de deux jeux flous n'est pas nécessairement floue.)

Enfin, la somme d'un jeu et de son opposé est nulle.

Démonstration. Supposons que le second joueur ait une stratégie gagnante dans chacun de G_1 et G_2 : il en a aussi une à $G_1 + G_2$, consistant à répliquer à chaque coup de son adversaire dans la même composante que celui-ci a joué, selon la stratégie gagnante dans cette composante. Ceci montre que si $G_1 \doteq 0$ et $G_2 \doteq 0$ alors $G_1 + G_2 \doteq 0$.

Supposons que Blaise ait une stratégie gagnante dans G_1 (i.e., $G_1 > 0$) et qu'il en ait encore une dans G_2 à condition de jouer en second (i.e., $G_2 \geq 0$). Alors il en a une dans $G_1 \oplus G_2$, consistant à répliquer à chaque coup de Roxane dans la même composante qu'elle a joué, selon la stratégie gagnante qu'il a dans la composante en question ; et s'il doit jouer le premier coup, il jouera selon la stratégie gagnante dans G_1. Ceci montre que si $G_1 > 0$ et $G_2 \geq 0$ alors $G_1 + G_2 > 0$.

L'affirmation concernant les jeux négatifs est évidemment symétrique.

Supposons que le premier joueur ait une stratégie gagnante dans G_1 (i.e., $G_1 \parallel 0$) et que le second en ait une dans G_2 (i.e., $G_2 \doteq 0$). Alors le premier joueur a une dans $G_1 \oplus G_2$, consistant à jouer au premier coup dans G_1 selon la stratégie gagnante de celui-ci, puis à répliquer à chaque coup de son adversaire dans la même composante que celui-ci a joué, selon la stratégie gagnante dans cette composante. Ceci montre que si $G_1 \parallel 0$ et $G_2 \doteq 0$ alors $G_1 + G_2 \parallel 0$.

(La somme de deux jeux flous n'est pas forcément floue puisque $*\alpha$ est flou pour tout ordinal $\alpha > 0$, or $(*\alpha) \oplus (*\alpha) \doteq 0$ comme on l'a vu en 6.2.12 ou comme il résulte de la dernière affirmation.)

Enfin, le second joueur a une stratégie gagnante dans $G + (-G)$ consistant à répliquer chaque coup de son adversaire dans la composante opposée à celle où celui-ci vient de jouer. Ceci montre que $G + (-G) \doteq 0$. ☺

7.1.8. On définit fort logiquement $G \doteq H$, resp. $G > H$, resp. $G \geq H$, resp. $G \parallel H$, resp. etc., lorsque $G + (-H)$ est $\doteq 0$, resp. > 0, resp. ≥ 0, resp. $\parallel 0$, resp. etc. La relation $G \doteq H$ se lit « G et H sont égaux au sens de Conway », la relation $G > H$ (resp. $G < H$) se lit « G est strictement supérieur (resp. inférieur) à H », la relation $G \geq H$ (resp. $G \leq H$) se lit « G est supérieur (resp. inférieur) ou égal à H », la relation $G \parallel H$ se lit « G est confus par rapport à H ».

Intuitivement, il faut comprendre $G > H$ comme signifiant que « Blaise a strictement plus d'avantage dans G que dans H » (i.e., G est strictement plus favorable à Blaise que H).

Sous ces conditions :

Proposition 7.1.9. La relation $\doteq$ est une relation d'équivalence. Elle est compatible à la somme (c'est-à-dire que si $G \doteq G'$ et $H \doteq H'$ alors $G + H \doteq G' + H'$) ainsi qu'aux relations $>$, $\geq$, $\parallel$, etc. (c'est-à-dire que si $G \doteq G'$ et $H \doteq H'$ et $G > H$ alors $G' > H'$ et de même en remplaçant « $>$ » par une des autres relations).

Les jeux combinatoires partisans bien-fondés modulo la relation $\doteq$ forment un groupe abélien partiellement ordonné par la relation $>$.

Démonstration. Tout est complètement formel à partir de ce qu'on a dit en 7.1.7. Le fait que $G \doteq G$ signifie exactement que $G + (-G) \doteq 0$, ce qu'on a vu ; le fait que $G \doteq G'$ implique $G' \doteq G$ vient de ce que l'opposé d'un jeu nul est nul ; le fait que $G \doteq G'$ et $G' \doteq G''$ impliquent $G \doteq G''$ vient de ce que la somme de deux jeux nuls est nulle. La compatibilité à la somme vient aussi de ce que la somme de jeux nuls est nulle (remarquer que $G' \doteq G + (G' + (-G))$). La compatibilité à l'ordre vient de ce que la somme d'un jeu nul et d'un jeu strictement positif est strictement positif. Le fait que $>$ est une relation d'ordre vient de ce que la somme de deux jeux strictement positifs est strictement positive (pour la transitivité).

Les propriétés de groupe sont claires : on a vu l'associativité et la commutativité (à isomorphisme près, donc *a fortiori* à $\doteq$ près), et comme $G + (-G) \doteq 0$, on a bien l'existence d'un symétrique. ☺

7.1.10. La théorie des jeux combinatoires partisans bien-fondés développée par John H. Conway s'intéresse essentiellement aux jeux *modulo* la relation $\doteq$. C'est-à-dire, aux propriétés des jeux ou opérations dessus qui sont préservées par cette relation d'équivalence : comme on vient de le voir, le « signe » du jeu, ou la somme disjonctive en sont ; un exemple d'une opération qui *n'est pas* compatible à $\doteq$ est l'« impartialisation » du jeu définie en 7.2.1 ci-dessous, ou une opération plus simple consistant à rendre vertes toutes les arêtes du jeu — il n'est pas difficile de trouver des exemples de jeux tels que $G \doteq G'$ mais que cette relation ne vaille plus après l'opération.

On peut appeler **valeur** d'un jeu G la classe de G pour la relation $\doteq$. La proposition ci-dessus affirme donc que les *valeurs* des jeux combinatoires partisans bien-fondés forment un groupe abélien partiellement ordonné. Cette notion de valeur peut être considérée comme une généralisation de la fonction de Grundy (puisque d'après 6.2.15, pour deux jeux impartiaux H, H', la relation $H \doteq H'$ équivaut à $H \oplus H' \doteq 0$ c'est-à-dire $\mathrm{gr}(H \oplus H') = 0$ c'est-à-dire $\mathrm{gr}(H) \oplus \mathrm{gr}(H') = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{gr}(H) = \mathrm{gr}(H')$), et les *nimbres* peuvent être considérés comme les valeurs particulières des jeux impartiaux (sur lesquelles la loi de groupe est le « ou exclusif » des représentations binaires). La structure du groupe des valeurs des jeux combinatoires partisans (bien-fondés) généraux est cependant beaucoup plus difficile à comprendre. Les *nombres surréels* évoqués en 7.3 permettent d'éclaircir un petit peu cette structure.

7.2 Lien entre jeux partisans et jeux impartiaux

7.2.1. Le point suivant mérite d'être éclairci : *on peut toujours décrire un jeu combinatoire partisan à partir d'un jeu impartial ou deux.*

En effet, à partir d'un jeu combinatoire partisan (G, x_0), on peut fabriquer un graphe $\tilde{G}$ dont les sommets sont l'ensemble $G \times \{\mathrm{L}, \mathrm{R}\}$ des couples formés d'un sommet de G et d'une étiquette L ou R (qui sert à retenir « le joueur qui doit maintenant jouer »), avec une arête entre (x, L) et (y, R) dans $\tilde{G}$ lorsque (x, y) appartient à l'ensemble L des arêtes bleues de G et une arête entre (x, R) et (y, L) dans $\tilde{G}$ lorsque (x, y) appartient à l'ensemble R des arêtes rouges de G. Autrement dit, le jeu $\tilde{G}$ retient dans sa position à quel joueur il incombe de jouer, et permet à partir d'une position de ce genre de suivre une arête de la couleur correspondante dans G (après quoi ce sera à l'autre joueur de jouer). Selon qu'on prend pour position initiale (x_0, L) ou (x_0, R), on obtient deux jeux combinatoires impartiaux (l'un correspondant à « commencer à jouer en tant que Blaise » et l'autre à « commencer à jouer en tant que Roxane ») : on les notera, disons, $\tilde{G}_{\mathrm{L}}$ et $\tilde{G}_{\mathrm{R}}$. De plus, si G est bien-fondé, $\tilde{G}$ l'est aussi.

Cette construction fait que les affirmations « Blaise a une stratégie gagnante dans [le jeu partisan] G s'il joue en premier » et « le premier joueur a une stratégie gagnante dans [le jeu impartial] $\tilde{G}_{\mathrm{L}}$ » sont équivalentes presque par définition, et de même « Blaise a une stratégie gagnante dans [le jeu partisan] G s'il joue en second » est équivalent à « le second joueur a une stratégie gagnante dans [le jeu impartial] $\tilde{G}_{\mathrm{R}}$ » et de même en échangeant simultanément Blaise et Roxane et L et R. Bref, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{cclcl}
G \doteq 0 & \text{ssi} & \tilde{G}_{\mathrm{L}} \doteq 0 & \text{et} & \tilde{G}_{\mathrm{R}} \doteq 0 \\
G > 0 & \text{ssi} & \tilde{G}_{\mathrm{L}} \parallel 0 & \text{et} & \tilde{G}_{\mathrm{R}} \doteq 0 \\
G < 0 & \text{ssi} & \tilde{G}_{\mathrm{L}} \doteq 0 & \text{et} & \tilde{G}_{\mathrm{R}} \parallel 0 \\
G \parallel 0 & \text{ssi} & \tilde{G}_{\mathrm{L}} \parallel 0 & \text{et} & \tilde{G}_{\mathrm{R}} \parallel 0 \\
G \geq 0 & \text{ssi} & & & \tilde{G}_{\mathrm{R}} \doteq 0 \\
G \leq 0 & \text{ssi} & \tilde{G}_{\mathrm{L}} \doteq 0 & &
\end{array}$$

où lorsque H est un jeu combinatoire impartial on a écrit $H \doteq 0$ pour dire que sa position initiale est une P-position (si on préfère, $\mathrm{gr}(H) = 0$) et $H \parallel 0$ pour dire qu'elle est une N-position (si on préfère, $\mathrm{gr}(H) \neq 0$).

7.2.2. À cause de la remarque du point précédent, on peut se demander quel est l'intérêt de l'étude des jeux combinatoires partisans : plutôt qu'étudier G, autant étudier les deux jeux impartiaux $\tilde{G}_{\mathrm{L}}$ (correspondant à faire commencer Blaise) et $\tilde{G}_{\mathrm{R}}$ (correspondant à faire commencer Roxane) au moyen de la théorie des jeux combinatoires impartiaux. La raison pour laquelle cette approche ne marche pas est que *la construction $\tilde{G}$ ne se comporte pas bien vis-à-vis de la somme*, c'est-à-dire que $\widetilde{G+H}$ ne coïncide pas du tout avec $\tilde{G} \oplus \tilde{H}$.

Pour s'en rendre compte et comprendre la différence, le mieux est de considérer la somme de deux copies du jeu G des échecs [4] :

— Si on fait la somme $G + G$ de deux copies des échecs comme jeux *partisans*, alors Blaise et Roxane ont chacun une couleur et gardent la même couleur tout du long du jeu : chacun, à son tour, peut jouer sur l'un ou l'autre échiquier, mais jouera toujours de la même couleur (du coup, sur un échiquier donné, il se peut qu'une couleur joue plusieurs fois de suite, ce qui n'est normalement pas permis par les règles des échecs).

— Si on fait la somme $\tilde{G} \oplus \tilde{G}$ de deux copies des échecs comme jeux *impartiaux* construits avec la construction $\tilde{\ }$ (c'est-à-dire en déplaçant l'information du joueur à qui il incombe de jouer dans la « position » des échecs), alors Blaise et Roxane jouent sur deux échiquiers et choisissent celui sur lequel ils vont faire un coup, mais ce coup sera fait de la couleur qui doit jouer sur cet échiquier-là (i.e., la couleur opposée à celle du joueur qui a joué en dernier sur cet échiquier-là) : du coup, Blaise et Roxane n'ont pas une couleur bien définie chacun, mais en contrepartie, la partie jouée sur un échiquier donné sera une partie d'échecs normale (alternant les deux couleurs). En fait, comme $\tilde{G} \oplus \tilde{G}$ est forcément un jeu nul (puisque c'est la somme de deux jeux impartiaux égaux, cf. 6.2.12), le second joueur a une stratégie gagnante ici (consistant, dans les faits, à faire jouer son adversaire contre lui-même !).

4. Les échecs ne sont peut-être pas un jeu bien-fondé au sens où nous l'entendons, et d'ailleurs on peut discuter la mathématisation des règles exactes, mais on veut juste donner une idée.

On voit bien qu'il s'agit de jeux très différents, et la première construction (la somme disjonctive de jeux partisans) est plus naturelle si on doit étudier quel joueur a une avance sur lequel.

7.2.3. Même si la construction $\tilde{G}$ n'est pas compatible avec la somme comme on vient de l'expliquer, on peut se rappeler que, pour toute position x d'un jeu impartial H, on a $x \doteq 0$ si et seulement si $y \parallel 0$ pour tout voisin sortant y de x, et inversement $x \parallel 0$ si et seulement si $y \doteq 0$ pour un voisin sortant y de x (c'est une reformulation de 4.1.15). On en déduit :

Proposition 7.2.4. Soit G un jeu combinatoire partisan bien-fondé. Alors pour toute option x de G (identifiée au jeu ayant x pour position initiale) :

- On a $x \geq 0$ si et seulement si : $r \rhd 0$ pour tout voisin sortant *rouge* r de x.
- On a $x \leq 0$ si et seulement si : $\ell \lhd 0$ pour tout voisin sortant *bleu* ℓ de x.
- On a $x \rhd 0$ si et seulement si : $\ell \geq 0$ pour au moins un voisin sortant *bleu* ℓ de x.
- On a $x \lhd 0$ si et seulement si : $r \leq 0$ pour au moins un voisin sortant *rouge* r de x.

Autrement dit : une position positive est une position depuis laquelle Roxane ne peut jouer que vers des positions non négatives (=strictement positives ou floues) ; et une position négative est une position depuis laquelle Blaise ne peut jouer que vers des positions non positives (=strictement négatives ou floues).

Démonstration. On a par exemple $x \geq 0$ ssi et seulement si $\tilde{x}_{\mathrm{R}} \doteq 0$, soit si et seulement si tout $\tilde{y}_{\mathrm{L}} = (y, \mathrm{L})$ voisin sortant de $\tilde{x}_{\mathrm{R}} = (x, \mathrm{R})$ vérifie $\tilde{y}_{\mathrm{L}} \parallel 0$, c'est-à-dire $y \rhd 0$ pour tout y voisin sortant rouge de x. Les autres cas sont analogues. ☺

7.3 Les nombres surréels (une esquisse)

7.3.1. Parmi les jeux combinatoires partisans (ou leurs valeurs, c'est-à-dire ces mêmes jeux vus modulo $\doteq$), il en est de particulièrement importants qui sont appelés « nombres surréels » (ou simplement « nombres ») : ils sont *totalement* ordonnés (entre deux nombres surréels x, x', on peut avoir $x < x'$ ou $x \doteq x'$ ou $x > x'$ mais jamais $x \parallel x'$), ils forment eux aussi un groupe abélien (et même un corps !), et on peut s'en servir pour comparer les jeux combinatoires partisans (bien-fondés) généraux.

Les nombres surréels sont par ailleurs remarquables en ce qu'ils généralisent *à la fois* les ordinaux et les nombres réels (et contiennent des éléments surprenants comme $\omega - 42$ ou $\omega + \sqrt{2}$ ou $2\pi\omega$ ou $1/\omega$ ou $\sqrt{\omega}$ ou $\omega^{\sqrt{5}}$).

Définition 7.3.2. Soit α un ordinal et $\sigma \colon \{\beta : \beta < \alpha\} \to \{+, -\}$ une fonction quelconque définie sur les ordinaux $< \alpha$ et à valeurs dans $\{+, -\}$ (on dira que σ

est une **suite de signes** et que α est sa **longueur**). Le **nombre surréel** associé à ces données est le jeu combinatoire partisan bien-fondé dont

— l'ensemble des positions est l'ensemble des ordinaux $\beta \leq \alpha$,
— la relation d'arête (définissant le graphe) est $>$, c'est-à-dire que les voisins sortants de $\beta \leq \alpha$ sont les ordinaux $\beta' < \beta$,
— l'arête (β, β') est colorée en bleu si $\sigma(\beta') = +$ et en rouge si $\sigma(\beta') = -$, et
— la position initiale est α.

Lorsque la suite de signes σ est constamment égale à $+$, le nombre surréel défini est appelé nombre surréel associé à l'ordinal α.

7.3.3. Autrement dit, on peut considérer qu'on a affaire à une rangée de α allumettes, mais cette fois-ci elles sont coloriées en bleu ou rouge : les allumettes doivent être retirées par la droite, et le joueur qui joue doit avoir la même couleur que l'allumette retirée la plus à gauche (par exemple, si $\sigma(0) = +$, l'allumette la plus à gauche est bleue et seul Blaise a le droit de retirer toutes les allumettes d'un coup ; si $\sigma(1) = -$, l'allumette suivante est rouge et Roxane a le droit de retirer toutes les allumettes à droite de celle-là incluse, etc.). Au moins pour un ordinal α fini, ce jeu peut être vu comme un cas particulier du jeu de Hackenbush introduit en 1.3.13, pour un graphe formé d'une seule tour verticale, en disposant les allumettes les unes sur les autres plutôt qu'en ligne (dans ce cas, $\sigma(0)$ donne la couleur de celle qui est le plus en bas et qui supporte toutes les autres, $\sigma(1)$ donne la couleur de la suivante, etc.).

Le cas particulier introduit en 5.1.12 sous le nom de nombre surréel associé à l'ordinal α est bien le cas où σ est constamment $+$ (seul le joueur bleu peut jouer à décroître l'ordinal, l'autre joueur ne peut jamais rien faire).

L'opposé d'un nombre surréel défini par sa suite de signes s'obtient en changeant tous les signes de la suite.

7.3.4. Il est évident qu'un nombre surréel défini par une suite de signes σ est strictement positif lorsque $\sigma(0) = +$ (Blaise peut gagner en un seul coup en retirant immédiatement toutes les allumettes, c'est-à-dire en jouant vers la position 0), et strictement négatif lorsque $\sigma(0) = -$. Le seul nombre surréel qui n'est ni strictement positif ni strictement négatif est 0, défini par l'ordinal $\alpha = 0$ et la suite de signes vide. Autrement dit, le signe d'un nombre surréel est donné par le premier signe de la suite de signes. Un nombre surréel n'est jamais flou.

En fait, on peut se convaincre que les nombres surréels sont totalement ordonnés par l'ordre lexicographique sur leurs suites de signes : si x est défini par σ de longueur α et x' par σ' de longueur α', et si on appelle γ la longueur commune entre σ et σ' (c'est-à-dire le plus grand ordinal $\leq \max(\alpha, \alpha')$ tel que $\sigma(\beta) = \sigma'(\beta)$ si $\beta < \gamma$), alors on a $x < x'$ si et seulement si $\sigma(\gamma) < \sigma(\gamma')$ où on convient que $- < \mathrm{nd} < +$ avec nd signifiant « non défini » (c'est-à-dire le cas où σ ou σ' a justement comme longueur γ, de sorte que la valeur en γ n'est pas définie). Par exemple, l'ordre sur tous les nombres surréels de longueur ≤ 2 représentés par leurs suites de signes est donné par $(--) < (-) < (-+) < () < (+-) < (+) < (++)$ (en fait, il s'agit des nombres $-2 < -1 < -\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2} < 1 < 2$). L'égalité au sens de Conway entre deux nombres surréels ne peut se produire que s'ils ont la même longueur et la même suite de signes.

7.3.5. On peut montrer que la somme (i.e., la somme disjonctive, en tant que jeux) de deux nombres surréels est égale au sens de Conway (i.e., a la même valeur) qu'un (unique) nombre surréel : autrement dit, les nombres surréels forment pour l'addition un sous-groupe des jeux partisans.

À titre d'exemple, le jeu x défini par la suite de signes $(+-)$ (c'est-à-dire de longueur 2 avec $\sigma(0) = +$ et $\sigma(1) = -$: autrement dit, Blaise peut jouer vers le jeu nul $0 = ()$ et Roxane peut jouer vers le jeu $1 = (+)$) vérifie $x + x \doteq 1$: en effet, on peut se convaincre que le second joueur quel qu'il soit a une stratégie gagnante dans le jeu formé de la somme disjonctive de deux copies de $(+-)$ et d'une copie de $-1 = (-)$ (l'opposé de l'ordinal 1) : par exemple, si Blaise commence à jouer dans $(+-) + (+-) + (-)$, il joue efface forcément un des signes $+$ et le $-$ qui suit, ce qui laisse $(+-) + (-)$ et Roxane gagne en jouant vers $(+) + (-)$; tandis que si Roxane commence dans $(+-) + (+-) + (-)$, elle va jouer soit vers $(+) + (+-) + (-)$ soit vers $(+-) + (+-)$, dans le premier cas Blaise gagne en jouant $(+) + (-)$, dans le second c'est encore plus facile. On dira donc que x correspond au nombre réel $\frac{1}{2}$.

7.3.6. Il n'est cependant pas évident de calculer la suite de signes de $x + x'$ à partir de celles de x et de celle de x'. (Pour donner un exemple, ajouter 1 à un nombre surréel directement à partir de sa suite de signes se fait de la façon — bien compliquée — suivante : on commence par sauter tous les blocs de signes identiques dont la longueur est multiple de ω ; si on arrive ainsi au bout de la suite ou bien que le signe suivant est un $+$, on insère un $+$ à cet endroit-là ; s'il y a au moins deux signes $-$, on en retire un ; s'il y a un unique signe $-$, soit c'est le dernier de la suite auquel cas on le retire, soit il est lui-même suivi d'un signe $+$, auquel cas on remplace cette combinaison $-+$ par $+-$.)

Les ordinaux se voient, comme on l'a déjà dit, comme les nombres surréels dont la suite de signe n'a que des signes $+$ (l'addition sur les nombres surréels ne redonne pas exactement l'addition usuelle sur les ordinaux, puisque cette dernière n'est pas commutative, mais elle n'est pas très éloignée : en fait, l'addition qu'on obtient est l'addition terme à terme des formes normales de Cantor, c'est-à-dire l'addition des mêmes puissances de ω, opération également appelée « somme naturelle » des ordinaux).

Les nombres dyadiques (ceux de la forme $\frac{p}{2^k}$) se voient comme les nombres surréels dont la suite de signes est de longueur *finie* (par exemple $\frac{1}{2} = (+-)$).

Les nombres réels se voient comme les nombres surréels dont la suite de signes et de longueur $\leq \omega$ et qui ne se terminent pas par une infinité de signes tous égaux (pour obtenir la suite de signes d'un nombre réel strictement positif et qui n'est pas dyadique, on commence par mettre un nombre de $+$ égal à sa partie entière, puis la séquence $+-$, puis l'écriture binaire de la partie fractionnaire du nombre en remplaçant 1 par $+$ et 0 par $-$).

7.3.7. On peut même définir une multiplication sur les nombres surréels qui font d'eux un corps totalement ordonné et « réel-clos » (c'est-à-dire que, comme sur les réels, tout polynôme de degré impair a une racine et que tout élément positif a une racine carrée). Cette multiplication peut même être définie entre un nombre réel et [la valeur d']un jeu partisan.

8 Exercices

(Les sections de cette partie sont numérotées de la même manière que les parties de l'ensemble, et font appel aux notions correspondantes.)

8.2 Jeux en forme normale

Exercice 8.2.1.

Alice joue contre Bob un jeu dans lequel elle choisit une option parmi deux possibles appelées U et V, et Bob choisit une option parmi deux appelées X et Y (les modalités du choix varient selon les questions ci-dessous) : les gains d'*Alice* (c'est-à-dire, la fonction qu'elle cherche à maximiser) sont donnés par le tableau ci-dessous, en fonction de son choix (colonne de gauche) et de celui de Bob (ligne du haut) :

↓A, B→	X	Y
U	3	1
V	0	4

(1) On suppose que Bob fait son choix *après* Alice, et en connaissant le choix d'Alice, et qu'il cherche à minimiser le gain d'Alice (i.e., le gain de Bob est l'opposé de celui d'Alice). Comment Alice a-t-elle intérêt à jouer et comment Bob répondra-t-il ? Quelle est le gain d'Alice dans ce cas ?

Corrigé. Si Alice choisit U, Bob répondra par Y et le gain d'Alice sera 1 ; si Alice choisit V, Bob répondra par X et le gain d'Alice sera 0. Comme Alice veut maximiser son gain, elle a intérêt à choisir U, et Bob répondra par Y, et le gain d'Alice sera 1 dans ce cas. ✓

(2) On suppose maintenant que Bob fait son choix *avant* Alice, et qu'Alice connaîtra le choix de Bob ; on suppose toujours que Bob cherche à minimiser le gain d'Alice. Que fera Bob et comment Alice répondra-t-elle ? Quelle est le gain d'Alice dans ce cas ?

Corrigé. Si Bob choisit X, Alice répondra par U et le gain d'Alice sera 3 ; si Bob choisit Y, Alice répondra par V et le gain d'Alice sera 4. Comme Bob veut minimiser le gain d'Alice, il a intérêt à choisir X, et Alice répondra par U, et le gain d'Alice sera 3 dans ce cas. ✓

(3) On suppose qu'Alice et Bob font leur choix séparément, sans connaître le choix de l'autre, et toujours que Bob cherche à minimiser le gain d'Alice. Comment ont-ils intérêt à faire leurs choix ? Quel est le gain (espéré) d'Alice dans ce cas ?

Corrigé. On a affaire à un jeu à somme nulle écrit en forme normale : l'algorithme 2.3.5 nous indique qu'on obtient la stratégie optimale d'Alice en résolvant le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } v \text{ avec} \\ p_U \geq 0\ ,\ \ p_V \geq 0 \\ p_U + p_V = 1 \\ v - 3p_U - 0p_V \leq 0 \ \ \text{(X)} \\ v - 1p_U - 4p_V \leq 0 \ \ \text{(Y)} \end{cases}$$

On peut l'écrire sous forme normale en réécrivant $v = v_+ - v_-$ avec $v_+, v_- \geq 0$, mais on gagne un petit peu en remarquant que v sera forcément positif puisque tous les gains du tableau le sont, donc on peut ajouter la contrainte $v \geq 0$. Pour la même raison, on peut transformer la contrainte d'égalité $p_U + p_V = 1$ en l'inégalité $p_U + p_V \leq 1$. Une application de l'algorithme du simplexe donne finalement l'optimum $v = 2$ atteint pour $p_U = \frac{2}{3}$ et $p_V = \frac{1}{3}$, avec pour le dual $q_X = \frac{1}{2}$ et $q_Y = \frac{1}{2}$ (les inégalités (X) et (Y) sont toutes les deux saturées).

Autrement dit, Alice joue les options U et V avec probabilités $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, Bob réplique avec les options X et Y de façon équiprobable, et le gain espéré d'Alice est 2, qui est la valeur du jeu à somme nulle en forme normale considéré ici. ✓

(4) On suppose maintenant que Bob cherche à *maximiser* le gain d'Alice (i.e., il n'est plus son adversaire comme dans les questions (1), (2) et (3), mais son allié). On cherche à déterminer quels sont les équilibres de Nash possibles. On notera (p_U, p_V, q_X, q_Y) un profil de stratégies mixtes général, où p_U, p_V (positifs de somme 1) sont les poids des deux options d'Alice (=probabilités qu'elle les joue), et q_X, q_Y (positifs, également de somme 1) les poids des deux options de Bob. On va discuter selon le support des stratégies (i.e., selon les ensembles d'options qui ont un poids strictement positif). (a) Quels sont les équilibres

de Nash évidents en stratégies pures ? Expliquer pourquoi ce sont bien les seuls équilibres de Nash où l'un des deux joueurs a une stratégie pure. (b) Calculer ce que doivent valoir p_U et p_V dans un équilibre de Nash où $q_X > 0$ et $q_Y > 0$ (i.e., les options X et Y de Bob sont dans le support), et ce que doivent valoir q_X et q_Y dans un équilibre de Nash où $p_U > 0$ et $p_V > 0$ (i.e., les options U et V d'Alice sont dans le support). Ces contraintes donnent-elles effectivement un équilibre de Nash ? (c) Conclure quant à l'ensemble des équilibres de Nash du jeu considéré.

Corrigé. (a) Deux équilibres de Nash sont évidents : si Alice joue (purement) U et Bob joue (purement) X, aucun n'a intérêt à changer puisque 3 est maximum sur la ligne et sur la colonne ; si Alice joue (purement) V et Bob joue (purement) Y, aucun n'a intérêt à changer puisque 4 est maximum sur la ligne et sur la colonne. Les gains d'Alice (et de Bob) dans chacun de ces cas sont donc 3 et 4 respectivement.

Il s'agit là de l'ensemble des équilibres de Nash où l'un des deux joueurs a une stratégie pure : par exemple, si Alice joue purement U, Bob ne peut que répondre par purement X puisque le gain 3 est strictement plus grand que tout autre gain sur la ligne (i.e., donner un poids non nul à une autre option de Bob ne pourrait que diminuer le gain).

(b) Si $q_X > 0$ et $q_Y > 0$, les stratégies pures X et Y de Bob donnent forcément le même gain, car si l'une d'elle donnait un gain strictement supérieure à l'autre, Bob aurait intérêt à augmenter le poids q correspondant et améliorerait ainsi strictement sa réponse. Autrement dit, l'espérance de gain contre la stratégie pure X, c'est-à-dire $3p_U$, est égale à l'espérance de gain contre la stratégie pure Y, soit $p_U + 4p_V$. On a donc $3p_U = p_U + 4p_V$, et comme aussi $p_U + p_V = 1$ on trouve $(p_U, p_V) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ en résolvant le système (soit la même stratégie mixte que trouvée en (3), ce qui n'est pas un hasard vu que le signe des gains de Bob n'est pas du tout intervenu dans le raisonnement). De même, si $p_U > 0$ et $p_V > 0$, on a $3q_X + q_Y = 4q_Y$, et comme aussi $q_X + q_Y = 1$ on trouve $(q_X, q_Y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en résolvant le système (même remarque).

Bref, on a un équilibre de Nash *potentiel* donné par $(p_U, p_V, q_X, q_Y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire exactement le même profil que dans la question (3) quand les joueurs étaient adversaires. Ceci peut surprendre, mais le fait est qu'aucun des deux joueurs n'a (strictement) intérêt à changer unilatéralement sa stratégie puisque les deux options qui se présentent à lui sont indifférentes (elles ont le même gain espéré) compte tenu du comportement de l'autre. On a donc bien trouvé un troisième équilibre de Nash.

(c) Pour résumer, on a trois équilibres de Nash récapitulés par le tableau (triés par ordre de gain espéré décroissant) :

p_U	p_V	q_X	q_Y	gain
0	1	0	1	4
1	0	1	0	3
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2

et on a prouvé que c'étaient bien les seuls. ✓

Exercice 8.2.2.

Alice joue contre Bob un jeu dans lequel elle choisit une option parmi trois possibles appelées U, V et W, et Bob choisit une option parmi trois appelées X, Y et Z (les modalités du choix varient selon les questions ci-dessous) : les gains d'*Alice* (c'est-à-dire, la fonction qu'elle cherche à maximiser) sont donnés par le tableau ci-dessous, en fonction de son choix (colonne de gauche) et de celui de Bob (ligne du haut) :

↓A, B→	X	Y	Z
U	6	0	4
V	0	6	4
W	2	2	7

(1) On suppose que Bob fait son choix *après* Alice, et en connaissant le choix d'Alice, et qu'il cherche à minimiser le gain d'Alice (i.e., le gain de Bob est l'opposé de celui d'Alice). Comment Alice a-t-elle intérêt à jouer et comment Bob répondra-t-il ? Quelle est le gain d'Alice dans ce cas ?

<u>*Corrigé.*</u> Si Alice choisit U, Bob répondra par Y et le gain d'Alice sera 0 ; si Alice choisit V, Bob répondra par X et le gain d'Alice sera 0 ; si Alice choisit W, Bob répondra par X ou Y indifféremment et le gain d'Alice sera 2. Comme Alice veut maximiser son gain, elle a intérêt à choisir W, et Bob répondra par X ou Y indifféremment, et le gain d'Alice sera 2 dans ce cas. ✓

(2) On suppose maintenant que Bob fait son choix *avant* Alice, et qu'Alice connaîtra le choix de Bob ; on suppose toujours que Bob cherche à minimiser le gain d'Alice. Que fera Bob et comment Alice répondra-t-elle ? Quelle est le gain d'Alice dans ce cas ?

<u>*Corrigé.*</u> Si Bob choisit X, Alice répondra par U et le gain d'Alice sera 6 ; si Bob choisit Y, Alice répondra par V et le gain d'Alice sera 6 ; si Bob choisit Z, Alice répondra par W indifféremment et le gain d'Alice sera 7. Comme Bob veut minimiser le gain d'Alice, il a intérêt à choisir X ou Y, et Alice répondra par U ou V respectivement, et le gain d'Alice sera 6 dans ce cas. ✓

(3) On suppose que Bob joue *aléatoirement*, en choisissant de façon équiprobable (i.e., avec probabilité $\frac{1}{3}$) chacune des trois options (X, Y et Z) qui s'offrent à lui. Alice a connaissance de ce fait mais ne connaît pas le résultat du

tirage : comment a-t-elle intérêt à jouer ? Quelle est le gain (espéré) d'Alice dans ce cas ?

<u>*Corrigé.*</u> Le choix de Bob étant purement aléatoire, le gain espéré d'Alice est donné par la combinaison convexe correspondante des colonnes du graphe : si elle choisit U, son gain espéré est $\frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 4 = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, si elle choisit V, son gain espéré est $\frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 6 + \frac{1}{3} \times 4 = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}$, et si elle choisit W, son gain espéré est $\frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 7 = \frac{11}{3} = 3 + \frac{2}{3}$. Alice a donc intérêt à choisir W, pour un gain espéré de $3 + \frac{2}{3}$. ✓

(4) On suppose qu'Alice et Bob font leur choix séparément, sans connaître le choix de l'autre, et toujours que Bob cherche à minimiser le gain d'Alice. Comment ont-ils intérêt à faire leurs choix ? Quel est le gain (espéré) d'Alice dans ce cas ?

<u>*Corrigé.*</u> On a affaire à un jeu à somme nulle écrit en forme normale : l'algorithme 2.3.5 nous indique qu'on obtient la stratégie optimale d'Alice en résolvant le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{maximiser } v \text{ avec} \\ p_U \geq 0 \ , \quad p_V \geq 0 \ , \quad p_W \geq 0 \\ p_U + p_V + p_W = 1 \\ v - 6p_U - 0p_V - 2p_W \leq 0 \ \ \text{(X)} \\ v - 0p_U - 6p_V - 2p_W \leq 0 \ \ \text{(Y)} \\ v - 4p_U - 4p_V - 7p_W \leq 0 \ \ \text{(Z)} \end{cases}$$

On peut l'écrire sous forme normale en réécrivant $v = v_+ - v_-$ avec $v_+, v_- \geq 0$, mais on gagne un petit peu en remarquant que v sera forcément positif puisque tous les gains du tableau le sont, donc on peut ajouter la contrainte $v \geq 0$. Une application de l'algorithme du simplexe donne finalement l'optimum $v = 3$ atteint pour $p_U = \frac{1}{2}$ et $p_V = \frac{1}{2}$ et $p_W = 0$, avec pour le dual $q_X = \frac{1}{2}$ et $q_Y = \frac{1}{2}$ et $q_Z = 0$ (les inégalités (X) et (Y) sont saturées et (Z) ne l'est pas).

Autrement dit, Alice joue les options U et V de façon équiprobable, Bob réplique avec les options X et Y de façon équiprobable, et le gain espéré d'Alice est 3, qui est la valeur du jeu à somme nulle en forme normale considéré ici. ✓

(5) On suppose maintenant que Bob cherche à *maximiser* le gain d'Alice (i.e., il n'est plus son adversaire comme dans les questions (1), (2) et (4), mais son allié). On cherche à déterminer quels sont les équilibres de Nash possibles. On notera $(p_U, p_V, p_W, q_X, q_Y, q_Z)$ un profil de stratégies mixtes général, où p_U, p_V, p_W (positifs de somme 1) sont les poids des trois options d'Alice (=probabilités qu'elle les joue), et q_X, q_Y, q_Z (positifs, également de somme 1) les poids des trois options de Bob. On va discuter selon le support des stratégies (i.e., selon les ensembles d'options qui ont un poids strictement positif). (a) Pour

commencer, quelles sont les équilibres de Nash évidents en stratégies pures ? Expliquer pourquoi ce sont bien les seuls équilibres de Nash où l'un des deux joueurs a une stratégie pure. (b) Rappeler pourquoi dans un équilibre de Nash où $q_X > 0$ et $q_Y > 0$ (i.e., les options X et Y sont dans le support), on a $6p_U + 2p_W = 6p_V + 2p_W$ (les stratégies pures X et Y de Bob sont forcément indifférentes compte tenu de la stratégie d'Alice), et comment on obtient des égalités de ce genre pour toute autre hypothèse sur le support. (c) Montrer que l'hypothèse $q_X, q_Y, q_Z > 0$ (toutes les options de Bob sont dans le support) conduit à une valeur impossible pour p_U, p_V, p_W, et en déduire qu'aucun équilibre de Nash n'a les trois options de Bob dans le support. Montrer ensuite qu'aucun équilibre de Nash n'a les trois options d'Alice dans le support (procéder de même et se ramener à ce qu'on vient de montrer). (d) Trouver les équilibres de Nash avec $q_X, q_Y > 0$, en étudiant chacun des cas $p_U = 0$, $p_V = 0$ et $p_W = 0$. (e) Trouver les équilibres de Nash avec $q_X, q_Z > 0$, en étudiant chacun des cas $p_U = 0$, $p_V = 0$ et $p_W = 0$. (f) Conclure quant à l'ensemble des équilibres de Nash du jeu considéré.

<u>*Corrigé.*</u> (a) Trois équilibres de Nash sont évidents : si Alice joue (purement) U et Bob joue (purement) X, aucun n'a intérêt à changer puisque 6 est maximum sur la ligne et sur la colonne ; si Alice joue (purement) V et Bob joue (purement) Y, aucun n'a intérêt à changer puisque 6 est maximum sur la ligne et sur la colonne ; et si Alice joue (purement) W et Bob joue (purement) Z, aucun n'a intérêt à changer puisque 7 est maximum sur la ligne et sur la colonne. Les gains d'Alice (et de Bob) dans chacun de ces trois cas sont donc 6, 6 et 7 respectivement.

Il s'agit là de l'ensemble des équilibres de Nash où l'un des deux joueurs a une stratégie pure : par exemple, si Alice joue purement U, Bob ne peut que répondre par purement X puisque le gain 6 est strictement plus grand que tout autre gain sur la ligne (i.e., donner un poids non nul à une autre option de Bob ne pourrait que diminuer le gain).

(b) Si $q_X > 0$ et $q_Y > 0$, les stratégies pures X et Y de Bob donnent forcément le même gain, car si l'une d'elle donnait un gain strictement supérieure à l'autre, Bob aurait intérêt à augmenter le poids q correspondant et améliorerait ainsi strictement sa réponse. Autrement dit, l'espérance de gain contre la stratégie pure X, c'est-à-dire $6p_U + 2p_W$, est égale à l'espérance de gain contre la stratégie pure Y, soit $6p_V + 2p_W$. De même, si $q_X > 0$ et $q_Z > 0$, on a $6p_U + 2p_W = 4p_U + 4p_V + 7p_W$, et ainsi de suite. Ceci vaut aussi dans l'autre sens : si $p_U > 0$ et $p_V > 0$ alors $6q_X + 4q_Z = 6q_Y + 4q_Z$ par exemple (les stratégies pures U et V d'Alice sont indifférentes).

(c) Si $q_X, q_Y, q_Z > 0$, d'après ce qu'on vient de dire en (b), on a $6p_U + 2p_W = 6p_V + 2p_W = 4p_U + 4p_V + 7p_W$, et comme aussi $p_U + p_V + p_W = 1$ on trouve $(p_U, p_V, p_W) = (\frac{5}{8}, \frac{5}{8}, -\frac{1}{4})$ en résolvant le système. Une de ces valeurs est strictement négative, donc un tel équilibre de Nash n'est pas possible. Bref, ceci montre que tout équilibre de Nash omet forcément une des options X, Y ou Z de Bob.

De même, si $p_U, p_V, p_W > 0$, d'après ce qu'on a dit en (b), on a $6q_X + 4q_Z = 6q_Y + 4q_Z = 2q_X + 2q_Y + 7q_Z$, ce qui avec $q_X + q_Y + q_Z = 1$ se résout en $(q_X, q_Y, q_Z) = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$. Ces valeurs sont *a priori* possibles, mais comme on a montré ci-dessus que q_X, q_Y, q_Z ne peuvent pas être simultanément strictement positifs, cette possibilité est exclue. Bref, ceci montre que tout équilibre de Nash omet forcément une des options U, V ou W d'Alice.

(d) Si $q_X, q_Y > 0$, on a $6p_U + 2p_W = 6p_V + 2p_W$, et on a toujours $p_U + p_V + p_W = 1$. On résout séparément chacun des systèmes obtenu en ajoutant une des équations $p_U = 0$, $p_V = 0$ et $p_W = 0$ (on sait qu'on a forcément une de ces égalités en vertu de la conclusion de la question (c)). Pour $p_U = 0$ ou $p_V = 0$ on trouve $(p_U, p_V, p_W) = (0, 0, 1)$, c'est-à-dire une stratégie pure, qu'on a déjà traitée. Pour $p_W = 0$, on trouve $(p_U, p_V, p_W) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, ce qui implique à son tour $(q_X, q_Y, q_Z) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ (en résolvant $6q_X + 4q_Z = 6q_Y + 4q_Z$ avec $q_Z = 0$ et $q_X + q_Y + q_Z = 1$), or ceci n'est pas un équilibre de Nash car le gain espéré est 3 (pour Alice comme pour Bob, bien sûr) et Bob fera mieux en répondant Z (pour un gain espéré de 4).

(e) Si $q_X, q_Z > 0$, on a $6p_U + 2p_W = 4p_U + 4p_V + 7p_W$, et on a toujours $p_U + p_V + p_W = 1$. On résout séparément chacun des systèmes obtenu en ajoutant une des équations $p_U = 0$, $p_V = 0$ et $p_W = 0$ (on sait qu'on a forcément une de ces égalités en vertu de la conclusion de la question (c)). Pour $p_U = 0$, on trouve une solution impossible (un des poids est strictement négatif). Pour $p_W = 0$, on trouve $(p_U, p_V, p_W) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, ce qui implique à son tour $(q_X, q_Y, q_Z) = (0, 0, 1)$, c'est-à-dire une stratégie pure, qu'on a déjà traitée. Reste $p_V = 0$: on trouve alors $(p_U, p_V, p_W) = (\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7})$, ce qui implique à son tour $(q_X, q_Y, q_Z) = (\frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7})$, donnant un gain espéré de $\frac{34}{7}$; on vérifie que la stratégie pure V d'Alice donne un gain strictement inférieure contre celle $(\frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7})$ de Bob (à savoir, $\frac{16}{7}$) et que la stratégie pure Y de Bob donne un gain strictement inférieur contre celle $(\frac{5}{7}, 0, \frac{2}{7})$ d'Alice (en l'occurrence, $\frac{4}{7}$), donc aucun des joueurs n'a intérêt à changer unilatéralement sa stratégie (les deux options du support sont indifférentes, et la troisième diminue strictement le gain). Bref, on a bien trouvé un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Comme le jeu est symétrique par échange simultané des options U et V d'Alice et X et Y de Bob, on a aussi traité le cas $q_Y, q_Z > 0$. Bref, on a traité les six possibilités de support de la stratégie de Bob (les stratégies pures en (a), celles ayant les trois options dans le support en (c), et celles ayant deux options dans le support en (d) et (e)).

(f) Les cinq équilibres de Nash trouvés sont récapitulés par le tableau (triés par ordre de gain espéré décroissant) :

p_U	p_V	p_W	q_X	q_Y	q_Z	gain
0	0	1	0	0	1	7
1	0	0	1	0	0	6
0	1	0	0	1	0	6
$\frac{5}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	$4+\frac{6}{7}$
0	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$	$4+\frac{6}{7}$

et on a prouvé que c'étaient bien les seuls. ✓

Exercice 8.2.3.

On considère le jeu en forme normale suivant : *trois* joueurs (Alice, Bob et Charlie, par exemple) choisissent indépendamment les uns des autres un élément de l'ensemble $\{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}$:

— s'ils ont tous les trois choisi la même option, ils gagnent tous 0,

— si l'un d'entre eux a choisi une option différente des deux autres, celui qui a choisi cette option gagne 2 et chacun des deux autres gagne -1.

Il sera utile de remarquer que les joueurs ont des rôles complètement symétriques, et que les options sont également symétriques.

(Attention, même si la somme des gains des trois joueurs vaut toujours 0, ce n'est pas un « jeu à somme nulle » au sens classique, car ces derniers ne sont définis que pour *deux* joueurs.)

(1) Écrire le tableau des gains du jeu considéré. (On choisira une façon raisonnable de présenter un tableau à trois entrées, par exemple comme plusieurs tableaux à deux entrées mis côte à côte.)

<u>*Corrigé.*</u> On fait deux tableaux, l'un pour le cas où Alice joue `0`,

`0`A, ↓B, C→	`0`	`1`
`0`	$0, 0, 0$	$-1, -1, +2$
`1`	$-1, +2, -1$	$+2, -1, -1$

et l'autre pour le cas où Alice joue `1`,

`1`A, ↓B, C→	`0`	`1`
`0`	$+2, -1, -1$	$-1, +2, -1$
`1`	$-1, -1, +2$	$0, 0, 0$

Chacune des entrées doit bien sûr lister trois nombres, pour les gains d'Alice, Bob et Charlie respectivement. ✓

Si $p \in [0; 1]$, on notera simplement p la stratégie mixte d'un joueur qui consiste à choisir l'option `1` avec probabilité p, et l'option `0` avec probabilité $1 - p$.

(2) Vérifier que l'espérance de gain d'Alice si elle joue selon la stratégie mixte p tandis que Bob joue selon la stratégie mixte q et Charlie selon la stratégie mixte r vaut : $-2pq - 2pr + 4qr + 2p - q - r$. (Ici, p, q, r sont trois réels entre 0 et 1.)

Corrigé. Si Alice joue `0`, son espérance de gain est $-q(1-r)-(1-q)r+2qr$ d'après le premier tableau donné en réponse à la question précédente, soit $4qr-q-r$. Si Alice joue `1`, son espérance de gain vaut $2(1-q)(1-r)-q(1-r)-(1-q)r = 4qr-3q-3r+2$. Si elle joue p, son espérance de gain vaut $1-p$ fois $4qr-q-r$ plus p fois $4qr-3q-3r+2$, ce qui vaut l'expression $-2pq-2pr+4qr+2p-q-r$ annoncée. ✓

(3) On se demande à quelle condition sur la stratégie mixte q jouée par Bob et la stratégie mixte r jouée par Charlie les options `0` et `1` d'Alice sont indifférentes pour elle (c'est-à-dire, lui apportent la même espérance de gain). Montrer que c'est le cas si et seulement si $q+r=1$.

Corrigé. On cherche à quelle condition la valeur $4qr-q-r$ (qui se retrouve en substituant 0 à p dans $-2pq-2pr+4qr+2p-q-r$) est égale à $4qr-3q-3r+2$ (obtenue en mettant p à 1). La différence entre les deux vaut $2-2q-2r$, qui est donc nulle si et seulement si $q+r=1$, comme annoncé. ✓

(4) Déduire de la question (3) que si un profil (p,q,r) de stratégies mixtes est un équilibre de Nash et que $0<p<1$ alors $q+r=1$.

Corrigé. Si (p,q,r) est un équilibre de Nash en stratégies mixtes et si $0<p<1$, c'est-à-dire si Alice pondère effectivement ses deux stratégies pures, c'est que les gains espérés qu'elles lui apportent sont égaux (si l'une était strictement meilleure que l'autre, Alice aurait strictement intérêt à ne jouer que celle-là), c'est-à-dire $q+r=1$ comme on vient de le voir. ✓

(5) En déduire tous les équilibres de Nash (p,q,r) du jeu (on pourra distinguer des cas selon que $p=0$, $p=1$ ou $0<p<1$ et de même pour q et r ; la symétrie doit permettre de simplifier le travail).

Corrigé. Considérons un équilibre de Nash (p,q,r). On a vu en (4) que si l'un des trois nombres n'est ni 0 ni 1, la somme des deux autres vaut nécessairement 1.

(A) Si au moins deux des trois nombres sont strictement entre 0 et 1, disons sans perte de généralité que p et q le sont. Alors $q+r=1$ et $p+r=1$, ce qui donne $p=q$. Mais le fait que $r=1-q$ avec $0<q<1$ implique que $0<r<1$. On a donc aussi $p+q=1$, ce qui implique $p=q=\frac{1}{2}$ et du coup $r=\frac{1}{2}$ puisque le raisonnement est complètement symétrique. Or il est clair que $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est bien un équilibre de Nash (toutes les options deviennent indifférentes pour tout le monde).

(B) Si un seul des trois nombres est strictement entre 0 et 1, disons sans perte de généralité que p l'est. Alors $q+r=1$, et comme q et r doivent valoir chacun 0 ou 1, les seules possibilités sont $(p,0,1)$ et symétriquement $(p,1,0)$. Vérifions que $(p,0,1)$ constitue bien un équilibre de Nash, y compris si $p=0$ ou $p=1$ (le cas $(p,1,0)$ étant bien sûr symétrique) : dans $(p,0,1)$, Alice a un gain espéré de -1 qui ne varie pas selon p ; Bob y a un gain espéré de $3p-1$, qui est supérieur ou égal au gain $-3p+2$ qu'il espère obtenir en changeant d'option, et le cas de Charlie est exactement symétrique. On a donc bien affaire à un équilibre de Nash.

(C) Enfin, si p, q, r dont tous dans $\{0, 1\}$, on a déjà vu en (B) que si deux valent 0 et un vaut 1 ou le contraire, on a affaire à un équilibre de Nash. Reste le cas de $(0, 0, 0)$ ou $(1, 1, 1)$, et ce ne sont certainement pas des équilibres de Nash car les trois joueurs ont intérêt à changer unilatéralement de stratégie.

Finalement, on a trouvé comme équilibre de Nash : le point isolé $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, et l'hexagone formé des segments paramétrés par $(p, 0, 1)$, $(1, 0, r)$, $(1, q, 0)$, $(p, 1, 0)$, $(0, 1, r)$ et $(0, q, 1)$ où la seule variable prend une valeur quelconque dans $[0; 1]$ (intuitivement, ce sont des équilibres où deux joueurs sont en position de gagner, et le troisième, qui est en position de « faiseur de roi », ne peut pas gagner mais choisit au hasard lequel des deux autres gagne). ✓

(6) Dans cette question, on modifie le jeu : plutôt que faire leurs choix indépendamment, les joueurs les font et les déclarent successivement (Alice, puis Bob, puis Charlie). (a) Que va faire Bob si Alice choisit `0` ? (b) Informellement, expliquer qui est avantagé ou désavantagé par cette modification de la règle.

Corrigé. (a) Si Alice choisit `0`, Bob a bien sûr intérêt à choisir `1` (car s'il choisit lui-même `0`, Charlie choisira `1` et Bob a le pire gain possible de -1). Charlie sera alors dans la situation de choisir qui d'Alice ou de Bob gagne sans pouvoir gagner lui-même (il est « faiseur de roi »). La situation est complètement symétrique si Alice choisit `1`, et le choix d'Alice est complètement indifférent puisque les deux options sont équivalentes de son point de vue.

(b) On peut donc dire que Charlie est désavantagé par le fait de jouer en dernier : il ne pourra pas gagner, seulement choisir lequel des deux autres joueurs gagne. (Ceci est un peu paradoxal quand on se rappelle que dans un jeu à *deux* joueurs à somme nulle, on ne peut qu'être avantagé par le fait d'avoir connaissance de l'option choisie par l'adversaire.) ✓

8.3 Jeux de Gale-Stewart et détermination

Exercice 8.3.1.

On considère dans cet exercice une variante des jeux de Gale-Stewart où au lieu qu'un joueur « gagne » et l'autre « perde », il va leur être attribué un gain réel comme dans les jeux à somme nulle. Plus exactement, ce type de jeu est décrit comme suit. On fixe un ensemble X (non vide) et une fonction $u \colon X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ dite fonction de gain d'Alice (la fonction de gain de Bob serait $-u$). Alice et Bob choisissent tour à tour un élément de X comme pour un jeu de Gale-Stewart, et jouent un nombre infini de coups, « à la fin » desquels la suite $\underline{\underline{x}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ définit un élément $\underline{\underline{x}} \in X^{\mathbb{N}}$. Le gain d'Alice est alors $u(\underline{\underline{x}})$ (le but d'Alice est de le maximiser) et le gain de Bob est $-u(\underline{\underline{x}})$ (le but de Bob est de maximiser cette quantité, c'est-à-dire de minimiser $u(\underline{\underline{x}})$).

(1) Expliquer pourquoi ce type de jeu peut être considéré comme une généralisation des jeux de Gale-Stewart.

Corrigé. Si $G_X(A)$ où $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$ est un jeu de Gale-Stewart défini par un sous-ensemble A de $X^{\mathbb{N}}$, on peut définir une fonction $u\colon X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ par $u(\underline{\underline{x}}) = 1$ si $x \in A$ et $u(\underline{\underline{x}}) = -1$ si $x \notin A$, c'est-à-dire utiliser la valeur $+1$ pour un gain d'Alice et -1 pour un gain de Bob. Les buts d'Alice et de Bob dans le jeu défini par cette fonction sont alors exactement les mêmes que dans le jeu $G_X(A)$. ✓

(2) On suppose désormais que $u\colon X^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ est *continue*, ce qui signifie par définition que pour tout $\underline{\underline{x}} \in X^{\mathbb{N}}$ et tout $\varepsilon > 0$ réel, il existe ℓ tel que pour tout $y \in V_\ell(\underline{\underline{x}})$ on ait $|u(\underline{\underline{y}}) - u(\underline{\underline{x}})| < \varepsilon$. Montrer que quel que soit $v \in \mathbb{R}$ l'ensemble des $\underline{\underline{x}}$ tels que $u(\underline{\underline{x}}) > v$ est ouvert, et de même pour l'ensemble des $\underline{\underline{x}}$ tels que $u(\underline{\underline{x}}) < v$.

Corrigé. Fixons un réel v. Montrons que l'ensemble A_v des $\underline{\underline{x}}$ tels que $u(\underline{\underline{x}}) > v$ est ouvert. Si $\underline{\underline{x}}$ est dans A_v, i.e., vérifie $u(\underline{\underline{x}}) > v$, alors la définition de la continuité appliquée à ce $\underline{\underline{x}}$ et à $\varepsilon := u(\underline{\underline{x}}) - v$ assure qu'il existe ℓ tel que pour tout $y \in V_\ell(\underline{\underline{x}})$ on ait $|u(\underline{\underline{y}}) - u(\underline{\underline{x}})| < \varepsilon$, et cette dernière inégalité implique $u(\underline{\underline{y}}) > u(\underline{\underline{x}}) - \varepsilon = v$, donc on a encore $u(\underline{\underline{y}}) > v$, autrement dit $\underline{\underline{y}} \in A_v$. On a donc montré que pour tout $\underline{\underline{x}}$ dans A_v il existe ℓ tel que tout $\underline{\underline{y}}$ dans $V_\ell(\underline{\underline{x}})$ soit encore dans A_v, c'est exactement dire que A_v est ouvert. Le cas de l'ensemble B_v des $\underline{\underline{x}}$ tels que $u(\underline{\underline{x}}) < v$ est exactement analogue (on prendra $\varepsilon := v - u(\underline{\underline{x}})$). ✓

(3) (a) En déduire que pour tout v réel, soit Alice possède une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$, soit Bob possède une stratégie lui garantissant qu'Alice aura un gain $\leq v$ (c'est-à-dire que lui, Bob, aura un gain $\geq -v$). (b) Montrer que les deux ne peuvent se produire simultanément que pour *au plus un* réel v. Un tel v s'appelle la **valeur** du jeu.

Corrigé. (a) Quel que soit v réel, on vient de voir que l'ensemble A_v des $\underline{\underline{x}}$ tels que $u(\underline{\underline{x}}) > v$ est ouvert. La détermination des jeux de Gale-Stewart ouverts (théorème 3.3.2) implique donc que soit Alice a une stratégie lui garantissant de tomber dans A_v, c'est-à-dire un gain $> v$, et *a fortiori* $\geq v$, soit Bob a une stratégie qui lui garantit de tomber dans le complémentaire de A_v, c'est-à-dire garantissant qu'Alice aura un gain $\leq v$.

(b) S'il existait deux réels $v' < v$ tels qu'Alice possède une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$ et que Bob possède une stratégie lui garantissant qu'Alice aura un gain $\leq v'$, on aurait une contradiction lorsque ces deux joueurs jouent leurs stratégies respectives. ✓

(4) Indépendamment de tout ce qui précède, montrer que si w est un réel et I_0 et I_1 deux parties de $\mathbb{R}$ vérifiant (i) si $v \in I_0$ et $v' < v$ alors $v' \in I_0$ et de même pour I_1, et (ii) tout $v < w$ appartient à $I_0 \cup I_1$, alors en fait soit tout $v < w$ appartient à I_0 soit tout $v < w$ appartient à I_1. (On pourra considérer à quel I_a

appartient $w - \frac{1}{n}$ et faire varier n.)

<u>*Corrigé.*</u> Pour chaque entier $n > 0$, on a $w - \frac{1}{n} \in I_0 \cup I_1$ d'après (ii), disons donc $w - \frac{1}{n} \in I_{a(n)}$ avec $a(n) \in \{0, 1\}$. Soit il existe une infinité de valeurs de n telles que $a(n)$ vaille 0, soit $a(n)$ vaut constamment 1 à partir d'un certain point — et en particulier, il existe une infinité de valeurs de n telles que $a(n)$ vaille 1. Bref, dans tous les cas, il existe $b \in \{0, 1\}$ tel que $a(n)$ prenne une infinité de fois la valeur b, c'est-à-dire $w - \frac{1}{n} \in I_b$ une infinité de n, autrement dit, pour des n arbitrairement grands. Mais si $v < w$, on peut trouver n plus grand que $1/(w - v)$ tel que $w - \frac{1}{n} \in I_b$ d'après ce qu'on vient de dire, or $v < w - \frac{1}{n}$, et la propriété (i) montre alors que $v \in I_b$: on a bien montré que tout $v < w$ appartient à I_b. ✓

(5) On suppose désormais que $X = \{0, 1\}$ (et toujours que u est continue). Le but de cette question est de montrer (pour $w \in \mathbb{R}$) que si Alice possède pour tout $v < w$ une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$, alors en fait Alice possède une stratégie lui garantissant un gain $\geq w$: autrement dit, si Alice peut se garantir n'importe quel gain $v < w$ alors elle peut se garantir le gain w lui-même. Pour abréger, on dira qu'une position est « v-gagnante [pour Alice] » si Alice possède une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$ à partir de cette position (on notera qu'une position v-gagnante est évidemment v'-gagnante pour tout $v' < v$) ; et on dira qu'une position est « presque w-gagnante [pour Alice] » si elle est v-gagnante pour tout $v < w$.

On cherche donc à montrer, en s'inspirant de la démonstration du théorème de Gale-Stewart, que si la position initiale (ou, en fait, une position quelconque) est presque w-gagnante, alors elle est w-gagnante. (a) Montrer que si une position $(z_0, \ldots, z_{i-1})$ où c'est à Alice de jouer est presque w-gagnante, alors *il existe* $x \in X$ (un coup d'Alice) tel que $(z_0, \ldots, z_{i-1}, x)$ soit presque w-gagnante (on pourra utiliser (4)). (b) Montrer que si une position $(z_0, \ldots, z_{i-1})$ où c'est à Bob de jouer est presque w-gagnante, alors *pour tout* $x \in X$ (coup de Bob), la position $(z_0, \ldots, z_{i-1}, x)$ est presque w-gagnante. (c) Montrer que si $\underline{\underline{x}} \in X^{\mathbb{N}}$ et $u(\underline{\underline{x}}) < w$ alors il existe ℓ tel que $(x_0, \ldots, x_{\ell-1})$ ne soit pas presque w-gagnante. (d) En déduire (en construisant une stratégie d'Alice qui cherche à rester dans des positions presque w-gagnantes) que si la position initiale est presque w-gagnante, alors elle est w-gagnante.

<u>*Corrigé.*</u> (a) Si $\underline{z} := (z_0, \ldots, z_{i-1})$ est une position où c'est à Alice de jouer qui est presque w-gagnante, elle est v-gagnante pour tout $v < w$, autrement dit, pour chaque $v < w$, Alice possède une stratégie qui lui garantit un gain $\geq v$. D'après 3.1.9, cela signifie que pour chaque $v < w$, il existe un coup $x \in X$ d'Alice tel que la position $\underline{z}x = (z_0, \ldots, z_{i-1}, x)$ soit v-gagnante. Pour $x \in \{0, 1\}$, soit I_x l'ensemble des v tels que la position $\underline{z}x = (z_0, \ldots, z_{i-1}, x)$ soit v-gagnante : la propriété (i) de la question (4) a été observée dans la question, et la propriété (ii) est exactement la phrase précédente. On déduit de la question (4)

qu'il existe $x \in \{0,1\}$ tel que la position $\underline{z}x = (z_0, \ldots, z_{i-1}, x)$ soit v-gagnante pour tout $v < w$, autrement dit, soit presque w-gagnante, ce qu'on voulait montrer.

(b) Si $\underline{z} := (z_0, \ldots, z_{i-1})$ est une position où c'est à Bob de jouer qui est presque w-gagnante, elle est v-gagnante pour tout $v < w$, autrement dit, pour chaque $v < w$, Alice possède une stratégie qui lui garantit un gain $\geq v$. D'après 3.1.9, cela signifie que pour chaque $v < w$, et pour chaque coup $x \in X$ de Bob, la position $\underline{z}x = (z_0, \ldots, z_{i-1}, x)$ est v-gagnante. En permutant les quantificateurs : pour chaque coup $x \in X$ de Bob et pour chaque $v < w$, la position $\underline{z}x$ est v-gagnante. C'est bien dire que pour chaque coup $x \in X$ de Bob, la position $\underline{z}x$ est presque w-gagnante, ce qu'on voulait montrer.

(c) Si $u(\underline{\underline{x}}) < w$, et si v est choisi tel que $u(\underline{\underline{x}}) < v < w$, alors par continuité de u (cf. question (2)), il existe ℓ tel que u soit $< v$ sur $V_\ell(\underline{\underline{x}})$, autrement dit, aucune confrontation qui prolonge $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ ne peut donner un gain $\geq v$ à Alice, et en particulier, la position $x_0, \ldots, x_{\ell-1}$ n'est pas v-gagnante, donc elle n'est pas presque w-gagnante.

(d) Si $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ est une position où c'est à Alice de jouer et qui est presque w-gagnante, alors d'après (a) il existe un x tel que $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x)$ soit presque w-gagnante : choisissons-un tel x et posons $\tau((x_0, \ldots, x_{i-1})) := x$: d'après (b), quel que soit $y \in X$, la position $(x_0, \ldots, x_{i-1}, x, y)$ est presque w-gagnante (et c'est de nouveau à elle de jouer). Aux points où τ n'a pas été défini par ce qui vient d'être dit, on le définit de façon arbitraire.

Si $\underline{\underline{x}} = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ est une confrontation où Alice joue selon τ, on voit par récurrence sur i que chacune des positions $(x_0, \ldots, x_{i-1})$ est presque w-gagnante si la position initiale l'est : pour $i = 0$ c'est l'hypothèse faite (à savoir que la position initiale est presque w-gagnante), pour les positions où c'est à Alice de jouer, c'est la construction de τ qui assure la récurrence (cf. (a) ci-dessus), et pour les positions où c'est à Bob de jouer, c'est la question (b) qui assure la récurrence. Mais la question (c) assure qu'on a alors $u(\underline{\underline{x}}) \geq w$. On a donc bien défini une stratégie qui garantit à Alice un gain $\geq w$. ✓

(6) (On suppose toujours que $X = \{0,1\}$ que u est continue.) (a) Montrer que si u est bornée, alors la valeur du jeu existe, autrement dit, il existe v tel qu'Alice possède une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$ et que Bob possède une stratégie lui garantissant qu'Alice aura un gain $\leq v$. (On pourra considérer la borne supérieure w des v pour lesquels Alice possède une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$, et appliquer la question (5).) (b) En considérant une fonction comme $\arctan \circ u$ ou $\tanh \circ u$, montrer qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse « u est bornée ». (bonus) Déduire de ce qui précède que toute fonction continue $u \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes (on pourra considérer un jeu où les coups de Bob sont purement et simplement ignorés).

Corrigé. (a) Soit I l'ensemble des v pour lesquels Alice possède une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$ (i.e., pour lesquels la position initiale est v-gagnante, dans la terminologie de (4)). Si v est strictement supérieur à un majorant de u (qui existe car u est supposée bornée), il est évident qu'il est impossible d'obtenir un gain $\geq v$, donc v majore strictement I. Si v est strictement inférieur à un minorant de u, il est évident qu'il est impossible de *ne pas* obtenir un gain $\geq v$, donc $v \in I$. Soit $w := \sup I$, qui existe puisque I est non vide et majoré. Si $v < w$, alors il existe $v' \in I$ tel que $v < v' < w$, ce qui implique que $v \in I$ (puisqu'une stratégie garantissant un gain $\geq v'$ garantit *a fortiori* un gain $\geq v$). On voit donc qu'Alice a une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$ pour tout $v < w$. La question (5) montre alors qu'Alice a une stratégie lui garantissant un gain $\geq w$. *A contrario*, si $v > w$, alors Alice n'a pas de stratégie lui garantissant un gain $\geq v$, donc Bob a une stratégie lui garantissant qu'Alice aura un gain $\leq v$ (d'après la question (3)(a)). En appliquant l'analogue pour Bob de la question (5) (qui s'en déduit en échangeant les joueurs, c'est-à-dire en changeant u en $-u$), Bob a lui aussi une stratégie lui garantissant qu'Alice aura un gain $\leq w$. On a bien prouvé que w est la valeur du jeu.

(b) Si u n'est plus supposée bornée, soit $\tilde{u} = h \circ u$ où $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée et strictement croissante (par exemple $\arctan$ ou $\tanh$). Alors $\tilde{u}$ est continue et bornée, donc la question précédente montre que le jeu qu'elle définit a une valeur $\tilde{w}$. Cette valeur ne peut pas être strictement supérieure à toute valeur de h (vu qu'Alice a une stratégie lui garantissant un gain $\geq \tilde{w}$) ni strictement inférieure à toute valeur de h (vu que Bob a une stratégie lui garantissant qu'Alice aura un gain $\leq \tilde{w}$). C'est donc (en utilisant les valeurs intermédiaires) que $\tilde{w} = h(w)$ pour un certain w. Alors il est clair qu'une stratégie garantissant à Alice un gain $\geq \tilde{w}$ dans le jeu défini par $\tilde{u}$ lui garantit un gain $\geq w$ dans le jeu défini par u, et de même pour Bob : ceci montre que w est la valeur du jeu défini par u.

(bonus) Si u est une fonction continue $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, en considérant la fonction $\hat{u}\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ qui ignore les coups joués par Bob et calcule u sur les coups joués par Alice (i.e., formellement, $\hat{u}(\underline{\underline{x}}) = u(\check{\underline{\underline{x}}})$ où $\check{x}_i = x_{2i}$), il est clair qu'Alice a une stratégie lui garantissant un gain $\geq v$ si et seulement si u prend une valeur $\geq v$. Comme on vient de voir qu'il existe un plus grand tel v (la valeur du jeu), cela signifie bien que u est bornée et atteint ses bornes. ✓

(7) Soit $u\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ qui à $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ associe $\sum_{i=0} x_i 2^{-i-1}$ (le nombre réel dont la représentation binaire est donnée par 0 virgule la suite des x_i). Vérifier que u est continue et calculer la valeur du jeu qu'elle définit (quelle est la stratégie optimale pour Alice et pour Bob ?).

<u>*Corrigé.*</u> La fonction u est continue car si $\varepsilon < 2^{-\ell}$ alors la valeur $u(\underline{\underline{x}})$ est définie à ε près par la donnée des ℓ premiers termes de la suite $\underline{\underline{x}}$. Il est évident qu'Alice a intérêt à ne jouer que des 1 (jouer autre chose ne ferait que diminuer

son gain) et Bob que des 0. La valeur du jeu est donc $u(0,1,0,1,0,1,\ldots) = \frac{1}{3}$. ✓

8.5 Introduction aux ordinaux

Exercice 8.5.1.

Ranger les ordinaux suivants par ordre croissant : $\omega^{\omega+1}+\omega^{\omega}\cdot 33$; $\omega\cdot 3+42$; $\omega^{\omega+1}+\omega+33$; $\omega^{\omega+2}+\omega^{\omega}$; $\omega^2\cdot 42+1000$; $\omega^2+\omega$; $\omega^2\cdot 42+\omega$; ω^{ω^2+1} ; $\omega^{\omega^{(\omega\cdot 2)}}$; $\omega^{\omega^{\omega}}+1$; $\omega^{\omega+1}+\omega\cdot 33$; ω^{ω^2} ; $\omega^{\omega^2+1}+\omega^{\omega\cdot 2}\cdot 1000$; $\omega^{\omega^2+\omega}$; $\omega\cdot 3$; $\omega^{(\omega^{\omega}\cdot 2)}$; ω^{ω^3} ; $\omega^{\omega+1}+1000$; $\omega^{\omega+2}$; $\omega^{\omega+1}\cdot 2$; $\omega\cdot 2+1729$; ω^2+1000 ; 42 ; $\omega^{\omega^2+\omega}+\omega^{\omega^2+1}$; $\omega^{\omega\cdot 2}\cdot 1000$; $\omega^2\cdot 42$; $\omega^{\omega+1}+\omega^2\cdot 33$; ω^2 ; ω ; $\omega^{\omega+1}$; $\omega^{\omega^2+1}+\omega^{\omega^2}\cdot 42$; $\omega^{\omega\cdot 2}+\omega^{\omega+2}$; $\omega^{\omega^2+\omega}+\omega^{\omega^2}+\omega^{\omega+1}$; $\omega^{\omega^{(\omega^2)}}$; $\omega^{\omega^2+1}\cdot 2$; $\omega^2+\omega\cdot 42$; $\omega+42$; $\omega^{\omega^2\cdot 2}$; $\omega^{\omega\cdot 2+42}$; $\omega^{\omega\cdot 2}$; $\omega\cdot 2$; $\omega^{\omega+1}+\omega^2+33$; $\omega^{\omega^{(\omega+1)}}$; ω^{ω} ; $\omega^{\omega^2+\omega+1}$; $\omega^{\omega^{\omega}}\cdot 2$; $\omega^{\omega^{\omega}}$; 0 ; $\omega^{\omega^2}+\omega^{\omega+1}$; $\omega^{(\omega^{\omega}+1)}$.

Corrigé. On vérifie que tous ces ordinaux sont écrits en forme normale de Cantor (et les exposants de ω aussi, etc.). On les compare donc en comparant à chaque fois la plus grande puissance de ω.

Dans l'ordre croissant : 0 ; 42 ; ω ; $\omega+42$; $\omega\cdot 2$; $\omega\cdot 2+1729$; $\omega\cdot 3$; $\omega\cdot 3+42$; ω^2 ; ω^2+1000 ; $\omega^2+\omega$; $\omega^2+\omega\cdot 42$; $\omega^2\cdot 42$; $\omega^2\cdot 42+1000$; $\omega^2\cdot 42+\omega$; ω^{ω} ; $\omega^{\omega+1}$; $\omega^{\omega+1}+1000$; $\omega^{\omega+1}+\omega+33$; $\omega^{\omega+1}+\omega\cdot 33$; $\omega^{\omega+1}+\omega^2+33$; $\omega^{\omega+1}+\omega^2\cdot 33$; $\omega^{\omega+1}+\omega^{\omega}\cdot 33$; $\omega^{\omega+1}\cdot 2$; $\omega^{\omega+2}$; $\omega^{\omega+2}+\omega^{\omega}$; $\omega^{\omega\cdot 2}$; $\omega^{\omega\cdot 2}+\omega^{\omega+2}$; $\omega^{\omega\cdot 2}\cdot 1000$; $\omega^{\omega\cdot 2+42}$; ω^{ω^2} ; $\omega^{\omega^2}+\omega^{\omega+1}$; ω^{ω^2+1} ; $\omega^{\omega^2+1}+\omega^{\omega\cdot 2}\cdot 1000$; $\omega^{\omega^2+1}+\omega^{\omega^2}\cdot 42$; $\omega^{\omega^2+1}\cdot 2$; $\omega^{\omega^2+\omega}$; $\omega^{\omega^2+\omega}+\omega^{\omega^2}+\omega^{\omega+1}$; $\omega^{\omega^2+\omega}+\omega^{\omega^2+1}$; $\omega^{\omega^2+\omega+1}$; $\omega^{\omega^2\cdot 2}$; ω^{ω^3} ; $\omega^{\omega^{\omega}}$; $\omega^{\omega^{\omega}}+1$; $\omega^{\omega^{\omega}}\cdot 2$; $\omega^{(\omega^{\omega}+1)}$; $\omega^{(\omega^{\omega}\cdot 2)}$; $\omega^{\omega^{(\omega+1)}}$; $\omega^{\omega^{(\omega\cdot 2)}}$; et enfin $\omega^{\omega^{(\omega^2)}}$. ✓

Exercice 8.5.2.

(a) Que vaut $(\omega+1)+(\omega+1)$?

(b) Plus généralement, que vaut $(\omega+1)+\cdots+(\omega+1)$ avec n termes $\omega+1$ (où n est un entier naturel ≥ 1) ?

(c) En déduire ce que vaut $(\omega+1)\cdot n$.

(d) En déduire ce que vaut $(\omega+1)\cdot\omega$.

(e) En déduire ce que vaut $(\omega+1)\cdot(\omega+1)$.

(f) En déduire ce que vaut $(\omega+1)^2$.

Corrigé. (a) On a $(\omega+1)+(\omega+1) = \omega+1+\omega+1 = \omega+(1+\omega)+1 = \omega+\omega+1 = \omega\cdot 2+1$.

(b) En procédant de même, on voit que dans la somme de n termes $\omega+1$, chaque 1 est absorbé par le ω qui *suit*, sauf le dernier 1 qui demeure : la somme vaut donc $\omega\cdot n+1$.

(c) Quel que soit l'ordinal α, la somme $\alpha + \cdots + \alpha$ avec n termes α vaut $\alpha \cdot n$ (ceci se voit soit par une récurrence immédiate sur n avec la définition par induction de la multiplication, soit en utilisant la distributivité à droite, c'est-à-dire $\alpha \cdot n = \alpha \cdot (1 + \cdots + 1) = \alpha + \cdots + \alpha$). On a donc $(\omega + 1) \cdot n = \omega \cdot n + 1$.

(d) L'ordinal $(\omega + 1) \cdot \omega$ est donc la limite (c'est-à-dire la borne supérieure) des $(\omega + 1) \cdot n = \omega \cdot n + 1$ pour $n \to \omega$. Cette borne supérieure vaut ω^2 : en effet, $\omega^2 \geq \omega \cdot n + 1$ pour chaque $n < \omega$, mais inversement, si $\gamma < \omega^2$, on a $\gamma < \omega \cdot n$ pour un certain n (par exemple en utilisant le fait que $\omega^2 = \omega \cdot \omega$ est elle-même la limite des $\omega \cdot n$, c'est-à-dire le plus petit ordinal supérieur ou égal à eux), et en particulier $\gamma < \omega \cdot n + 1$; ou, si on préfère, quel que soit n on a $\omega \cdot n \leq \omega \cdot n + 1 \leq \omega \cdot (n + 1)$ où $\omega \cdot n$ et $\omega \cdot (n + 1)$ ont la même limite ω^2 quand $n \to \omega$, d'où il résulte que $\omega \cdot n + 1$ aussi.

(e) On a $(\omega + 1) \cdot (\omega + 1) = (\omega + 1) \cdot \omega + (\omega + 1) = \omega^2 + \omega + 1$.

(f) On a toujours $\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$, donc $(\omega + 1)^2 = \omega^2 + \omega + 1$ comme on vient de le montrer. ✓

Exercice 8.5.3.

(a) Que vaut $(\omega 2) \cdot (\omega 2)$?

(b) Plus généralement, que vaut $(\omega 2) \cdots (\omega 2)$ avec n facteurs $\omega 2$ (où n est un entier naturel ≥ 1) ?

(c) En déduire ce que vaut $(\omega 2)^n$.

(d) En déduire ce que vaut $(\omega 2)^\omega$. Comparer avec $\omega^\omega \cdot 2^\omega$.

(e) En déduire ce que vaut $(\omega 2)^{\omega + n}$ pour $n \geq 1$ entier naturel.

(f) En déduire ce que vaut $(\omega 2)^{\omega 2}$.

Corrigé. (a) On a $(\omega 2) \cdot (\omega 2) = \omega \cdot 2 \cdot \omega \cdot 2 = \omega \cdot (2 \cdot \omega) \cdot 2 = \omega \cdot \omega \cdot 2 = \omega^2 \cdot 2$.

(b) En procédant de même, on voit que dans le produit de n facteurs $\omega 2$, chaque 2 est absorbé par le ω qui *suit*, sauf le dernier 2 qui demeure : le produit vaut donc $\omega^n \cdot 2$.

(c) Quel que soit l'ordinal α, le produit $\alpha \cdots \alpha$ avec n facteurs α vaut α^n (ceci se voit soit par une récurrence immédiate sur n avec la définition par induction de l'exponentiation, soit en écrivant $\alpha^n = \alpha^{1 + \cdots + 1} = \alpha \cdots \alpha$). On a donc $(\omega 2)^n = \omega^n \cdot 2$.

(d) L'ordinal $(\omega 2)^\omega$ est la limite (c'est-à-dire la borne supérieure) des $\omega^n \cdot 2$ pour $n \to \omega$. Cette borne supérieure vaut ω^ω : en effet, $\omega^\omega \geq \omega^n \cdot 2$ pour chaque $n < \omega$, mais inversement, si $\gamma < \omega^\omega$, on a $\gamma < \omega^n$ pour un certain n (par exemple en utilisant le fait que ω^ω est lui-même la limite des ω^n, c'est-à-dire le plus petit ordinal supérieur ou égal à eux), et en particulier $\gamma < \omega^n \cdot 2$; ou, si on préfère, quel que soit n on a $\omega^n \leq \omega^n \cdot 2 \leq \omega^{n+1}$ où ω^n et ω^{n+1} ont la même limite ω^ω quand $n \to \omega$, d'où il résulte que $\omega^n \cdot 2$ aussi.

Bref, $(\omega 2)^\omega = \omega^\omega$. En revanche, $\omega^\omega \cdot 2^\omega = \omega^\omega \cdot \omega = \omega^{\omega + 1}$ est strictement plus grand.

(e) On a $(\omega 2)^{\omega+n} = (\omega 2)^{\omega} \cdot (\omega 2)^{n} = \omega^{\omega} \cdot \omega^{n} \cdot 2$ d'après les questions précédentes, donc ceci vaut $\omega^{\omega+n} \cdot 2$.

(f) L'ordinal $(\omega 2)^{\omega 2}$ est la limite des $\omega^{\omega+n} \cdot 2$ pour $n \to \omega$, et le même raisonnement qu'en (d) montre que cette limite est $\omega^{\omega+\omega} = \omega^{\omega 2}$. Bref, $(\omega 2)^{\omega 2} = \omega^{\omega 2}$. ✓

Exercice 8.5.4.

On dit qu'un ordinal α est **infini** lorsque $\alpha \geq \omega$. Montrer qu'un ordinal est infini si et seulement si $1 + \alpha = \alpha$.

Corrigé. Si α est infini, on a $\alpha \geq \omega$, donc il existe un unique ordinal β tel que $\alpha = \omega + \beta$. On a alors $1 + \alpha = 1 + (\omega + \beta) = (1 + \omega) + \beta = \omega + \beta = \alpha$.

Si, en revanche, α est fini, c'est-à-dire $\alpha < \omega$, alors α est un entier naturel, et comme l'addition ordinale sur les entiers naturels coïncide avec l'addition usuelle sur ceux-ci, on a $1 + \alpha > \alpha$. ✓

Exercice 8.5.5.

On rappelle que si $\alpha' \geq \alpha$ sont deux ordinaux, il existe un unique β tel que $\alpha' = \alpha + \beta$. (a) En déduire que si $\gamma < \gamma'$ alors $\omega^{\gamma} + \omega^{\gamma'} = \omega^{\gamma'}$ (on pourra utiliser la conclusion de l'exercice précédent). (b) Expliquer pourquoi $\omega^{\gamma'} + \omega^{\gamma}$, lui, est strictement plus grand que $\omega^{\gamma'}$ et ω^{γ}.

Corrigé. (a) Si $\gamma < \gamma'$, il existe β tel que $\gamma' = \gamma + \beta$, si bien qu'on a $\omega^{\gamma} + \omega^{\gamma'} = \omega^{\gamma} + \omega^{\gamma+\beta} = \omega^{\gamma} + \omega^{\gamma} \cdot \omega^{\beta} = \omega^{\gamma}(1 + \omega^{\beta})$. La conclusion voulue découle donc du fait que $1 + \omega^{\beta} = \omega^{\beta}$: or ceci résulte de l'exercice précédent (on a $\beta \neq 0$ puisque $\gamma' \neq \gamma$, donc $\beta \geq 1$, donc $\omega^{\beta} \geq \omega$).

(b) On a $\omega^{\gamma} > 0$ donc $\omega^{\gamma'} + \omega^{\gamma} > \omega^{\gamma'}$ (par stricte croissance de la somme en la variable de droite), et comme $\omega^{\gamma'} > \omega^{\gamma}$, la somme est également $> \omega^{\gamma}$. (On pouvait aussi invoquer la comparaison des formes normales de Cantor.) ✓

Exercice 8.5.6.

(A) (1) Que vaut $2^{\omega+1}$? (2) Que vaut 2^{ω^2} ? (3) Expliquer pourquoi $\omega^{\omega} = \omega \cdot \omega^{\omega}$. En déduire ce que vaut $2^{\omega^{\omega}}$. (À chaque fois, on écrira les ordinaux demandés en forme normale de Cantor.)

(B) On suppose que $\varepsilon = \omega^{\varepsilon}$. (1) Que vaut $\varepsilon^{\varepsilon}$? (2) Que vaut $\varepsilon^{\varepsilon^{\varepsilon}}$ (on pourra utiliser un des deux exercices précédents) ? (À chaque fois, plusieurs écritures sont possibles.)

Corrigé. (A) (1) On a $2^{\omega+1} = 2^{\omega} \cdot 2^{1} = \omega \cdot 2$. (2) On a $2^{\omega^2} = 2^{\omega \cdot \omega} = (2^{\omega})^{\omega} = \omega^{\omega}$. (3) On a $\omega \cdot \omega^{\omega} = \omega^{1} \cdot \omega^{\omega} = \omega^{1+\omega} = \omega^{\omega}$. On en déduit que $2^{\omega^{\omega}} = 2^{\omega \cdot \omega^{\omega}} = (2^{\omega})^{\omega^{\omega}} = \omega^{\omega^{\omega}}$.

(B) (1) On a $\varepsilon^{\varepsilon} = (\omega^{\varepsilon})^{\varepsilon} = \omega^{\varepsilon^2}$ ou, si on préfère, $\omega^{\omega^{\varepsilon \cdot 2}}$. (2) On a $\varepsilon^{\varepsilon^{\varepsilon}} = (\omega^{\varepsilon})^{\varepsilon^{\varepsilon}} = \omega^{\varepsilon \cdot \varepsilon^{\varepsilon}} = \omega^{\varepsilon^{1+\varepsilon}}$. Or $1 + \varepsilon = \varepsilon$ d'après un des exercices précédents (parce que ε est infini ou parce que la somme est $\omega^0+\omega^\varepsilon$), donc $\varepsilon^{\varepsilon^\varepsilon} = \omega^{\varepsilon^\varepsilon}$. D'après la sous-question précédente, c'est aussi $\omega^{\omega^{\varepsilon^2}}$ ou encore $\omega^{\omega^{\omega^{\varepsilon\cdot 2}}}$. ✓

8.6 Jeux combinatoires à information parfaite

Exercice 8.6.1.

Soit k un entier naturel fixé. On considère le jeu suivant : une position du jeu consiste en un certain nombre (fini) de jetons placés sur des cases étiquetées par les ordinaux. Par exemple, il pourrait y avoir trois jetons sur la case 42 et un sur la case ω ; ou bien douze jetons sur la case 0. Un coup du jeu consiste à retirer un jeton d'une case, disons α, et le remplacer par exactement k jetons situées sur des cases $< \alpha$ quelconques (y compris plusieurs fois la même). Par exemple, s'il y a un jeton sur la case 3 et si $k = 7$, on peut le remplacer par quatre jetons sur la case 2 et trois sur la case 0. (Le nombre de jetons présents dans le jeu augmente donc de $k - 1$ à chaque coup joué.) On remarquera que les jetons sur la case 0 ne peuvent plus être retirés ou servir de quelque manière que ce soit (en tout cas si $k \geq 1$) : on pourra dire que la case 0 est la « défausse » des jetons. Le jeu se termine lorsque tous les jetons sont sur la case 0 (=dans la défausse), car il n'est alors plus possible de jouer. Les joueurs (Alice et Bob) jouent à tour de rôle et celui qui ne peut plus jouer a perdu.

(1) Montrer que le jeu termine toujours en temps fini. (On pourra par exemple coder la position sous la forme d'un ordinal écrit en forme normale de Cantor et montrer qu'il décroît strictement.)

Corrigé. À une position du jeu ayant n_i jetons sur la case α_i on peut associer l'ordinal $\omega^{\alpha_1}n_1+\cdots+\omega^{\alpha_s}n_s$ où les α_i ont été triés de façon à avoir $\alpha_1 > \cdots > \alpha_s$. Un coup consistant à remplacer $\omega^{\alpha_i}n_i$ par $\omega^{\alpha_i}(n_i-1)$ en même temps qu'on ajoute un nombre fini (k) de termes strictement inférieurs à ω^{α_i} : ceci fait donc décroître strictement l'ordinal en question, et en particulier, la partie doit terminer en temps fini. ✓

(2) Dans le cas particulier où $k = 1$, expliquer pourquoi le jeu est simplement une reformulation du jeu de nim.

Corrigé. Lorsque $k = 1$, un coup consiste simplement à déplacer un jeton vers une case d'ordinal strictement plus petit ; on peut identifier la position ayant n_i jetons sur la case α_i à un partie de nim ayant n_i lignes avec α_i allumettes : le coup consistant à déplacer un jeton de la case α_i vers la case $\alpha'_i < \alpha_i$ peut se voir comme un coup de nim consistant à diminuer le nombre d'allumettes de la ligne qui en a α_i pour qu'il en reste α'_i. Les jeux sont donc complètement équivalents. ✓

(3) Dans le cas général, montrer qu'une position du jeu peut se voir comme somme de nim de positions ayant un seul jeton. Que peut-on dire des positions ayant plusieurs jetons sur la même case ? Expliquer comment on pourrait modifier les règles, sans changer vraiment le jeu, pour qu'il n'y ait jamais plusieurs jetons sur la même case.

Corrigé. Il n'y a aucune interaction entre les jetons dans le jeu. En particulier, jouer à une somme de nim de deux positions du jeu considéré dans cet exercice revient au même que de jouer à la position ayant la réunion de ces deux ensembles de jetons. Par exemple, la somme de nim de deux positions, l'une ayant un unique jeton sur la case α et l'autre ayant un unique jeton sur la case α' revient au même que la position ayant deux jetons, un sur la case α et l'autre sur la case α' (quitte à se rappeler si un jeton est un descendant de celui de la case α ou de celui de la case α', on peut transformer toute position ou partie d'un jeu en une position ou partie de l'autre), et la même chose vaut avec plus de deux jetons. (Si on veut être extrêmement rigoureux, « revenir au même » dans ce paragraphe signifie que les jeux en question ont le même écrasement transitif, cf. 4.3.1, ce qui implique notamment qu'ils ont même valeur de Grundy.)

En particulier, deux jetons sur la même case peuvent être considérés comme s'annulant (puisque la somme de nim de deux jeux égaux donne un jeu nul, c'est-à-dire dont la valeur de Grundy est nulle, cf. 6.2.12) : concrètement, ajouter deux jetons sur la même case ne changera jamais rien, dès qu'un joueur joue sur l'un, son adversaire pourra reproduire le même coup sur l'autre.

On peut donc modifier la règle du jeu sans le changer substantiellement (concrètement, sans en changer la valeur de Grundy) en décrétant que si on jeton tombe sur une case déjà occupée par un autre jeton, les deux s'annulent — si bien qu'au final il n'y a jamais plus qu'un jeton sur une case donnée. ✓

(4) Montrer que la valeur de Grundy d'un état du jeu est la somme de nim sur tous les jetons du jeu d'un valeur $f_k(\alpha)$ où α est la case où se trouve le jeton.

Corrigé. Si x est une position quelconque du jeu, N son nombre de jetons et $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ les cases sur lesquelles se trouvent les jetons, on vient de voir que x est équivalent à la somme de nim des positions u_{α_i} où u_α désigne la position ayant un unique jeton sur la case α. D'après 6.2.15, on en déduit que $\mathrm{gr}(x) = \bigoplus_{i=1}^N \mathrm{gr}(u_{\alpha_i})$, et en posant $f_k(\alpha) = \mathrm{gr}(u_\alpha)$, on a montré ce qui était demandé : $\mathrm{gr}(x) = \bigoplus_{i=1}^N f_k(\alpha_i)$. ✓

(5) Donner une définition inductive directe de la fonction f_k (sans faire référence à un jeu). Que vaut $f_k(0)$ (pour $k \geq 1$) ?

Corrigé. Comme $f_k(\alpha)$ est la valeur de Grundy de la position u_α ayant un unique jeton sur la case α, la définition de la fonction de Grundy fait que $f_k(\alpha)$ est le mex de toutes les valeurs de Grundy des options (=voisins sortants) de u_α, c'est-à-dire des coups qu'on peut faire à partir de là. La règle du jeu est que ce sont les positions ayant k jetons sur cases numérotées $< \alpha$, et on a vu que la valeur de Grundy d'une telle position est la somme de nim des f_k correspondants. On a donc la définition inductive

$$f_k(\alpha) = \operatorname{mex}\Big\{ \bigoplus_{i=1}^{k} f_k(\beta_i) : \beta_1, \ldots, \beta_k < \alpha \Big\}$$

c'est-à-dire que $f_k(\alpha)$ est le plus petit ordinal qui ne peut pas s'écrire comme somme de nim de k valeurs de f_k sur des ordinaux strictement plus petits.

Pour $\alpha = 0$, notamment, on a $f_k(0) = 0$ d'après la définition ci-dessus (il s'agit du mex de l'ensemble vide) ou simplement en se rappelant que la position u_0 ayant un jeton dans la défausse ne permet pas de faire de coup. ✓

(6) Pour $k = 1$, que vaut $f_1(\alpha)$? Et pour $k = 0$, que vaut $f_0(\alpha)$?

Corrigé. Pour $k = 1$, la définition inductive trouvée à la question précédente donne $f_1(\alpha) = \operatorname{mex}\{f_1(\beta) : \beta < \alpha\}$: une induction transfinie immédiate montre $f_1(\alpha) = \alpha$ (en effet, si on suppose que $f_1(\beta) = \beta$ pour tout $\beta < \alpha$, alors la définition montre que $f_1(\alpha)$ vaut $\operatorname{mex}\{\beta : \beta < \alpha\} = \alpha$). Si on préfère, comme on a vu que le jeu pour $k = 1$ est simplement le jeu de nim, on invoque 6.1.5 pour affirmer $f_1(\alpha) = \alpha$.

Pour $k = 0$, la définition inductive donne $f_0(\alpha) = \operatorname{mex}\{0\}$ (la somme de nim vide vaut 0), donc $f_0(\alpha) = 1$ pour tout α. Si on préfère, comme le jeu pour $k = 0$ consiste simplement à ce que chaque joueur tour à tour retire un jeton, il est évident que seule compte la parité du nombre total N de jetons, et que la valeur de Grundy de ce jeu est égale à 0 ou 1 selon que ce nombre N total de jetons est pair ou impair. ✓

(7) Pour tout $k \geq 1$, montrer que f_k est une fonction strictement croissante.

Corrigé. Si $\alpha < \alpha'$ alors $f_k(\alpha')$ est le mex d'un ensemble $\{\bigoplus_{i=1}^{k} f_k(\beta_i) : \beta_1, \ldots, \beta_k < \alpha'\}$ qui contient celui $\{\bigoplus_{i=1}^{k} f_k(\beta_i) : \beta_1, \ldots, \beta_k < \alpha\}$ dont $f_k(\alpha)$ est le mex. Mais par ailleurs, $f_k(\alpha') \neq f_k(\alpha)$ puisqu'on peut prendre $\beta_1 = \alpha$ et $\beta_2, \ldots, \beta_k = 0$ (et qu'on a vu $f_k(0) = 0$). On a donc $f_k(\alpha') > f_k(\alpha)$. ✓

(8) Calculer les premières valeurs de $f_2(n)$ (pour n entier naturel). En considérant le nombre $n-1$ et notamment la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de $n - 1$, et/ou la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de $f_2(n)$, formuler une conjecture quant à la valeur de $f_2(n)$. Montrer cette conjecture.

Corrigé. On a vu que $f_2(n)$ est défini inductivement (i.e., récursivement) comme le plus petit entier naturel qui n'est pas de la forme $f_2(n_1) \oplus f_2(n_2)$ avec $n_1, n_2 < n$. Pour faciliter les calculs, on peut aussi remarquer que (pour $n > 0$) c'est le plus petit entier naturel *non nul* qui n'est pas sous la forme $f_2(n_1) \oplus f_2(n_2)$ avec $n_1 < n_2 < n$ (en effet, le cas $n_1 = n_2$ donne de toute façon zéro, et dans les autres cas, par symétrie on peut prendre $n_1 < n_2$) ; ou encore, si on préfère séparer le cas $n_1 = 0$ du reste : le plus petit entier naturel non nul qui n'est pas ni sous la forme $f_2(n')$ pour $0 < n' < n$ ni sous la forme $f_2(n_1) \oplus f_2(n_2)$ pour $0 < n_1 < n_2 < n$. On calcule ainsi de proche en proche :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-1$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_2(n)$	0	1	2	4	7	8	11	13	14	16	19

En considérant la parité du nombre de 1 dans l'écriture binaire de $n-1$ et/ou de $f_2(n)$, on constate expérimentalement que (A) les valeurs $f_2(n)$ pour $n > 0$ ont un nombre impair de 1 dans leur écriture binaire, et sont même exactement tous ces nombres rangés par ordre croissant, et (B) $f_2(n)$ vaut $2(n-1)$ ou $2(n-1)+1$ selon que $n-1$ a un nombre impair ou pair de 1 dans son écriture binaire. Il est facile de voir que ces affirmations sont équivalentes : les nombres ayant un nombre impair de 1 dans leur écriture binaire s'obtiennent, dans l'ordre, en prenant les écritures binaires des entiers (ici $n-1$) et en ajoutant le bit 0 ou 1 à la fin (c'est-à-dire en calculant $2(n-1)$ ou $2(n-1)+1$) pour que le nombre total de bits 1 soit impair, ce qui donne l'équivalence entre (A) et (B).

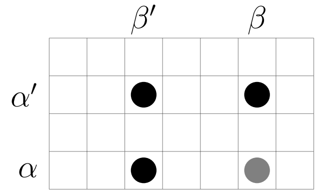
(Note : certains appellent « odieux » — un jeu de mot sur « odd » en anglais — les entiers naturels ayant un nombre impair de 1 dans leur écriture binaire : voir par exemple `http://oeis.org/A000069` trouvé en entrant les premières valeurs de $f_2(n)$ dans l'OEIS.)

Montrons les affirmations (A) et (B) conjecturées ci-dessus, en procédant par récurrence sur n, autrement dit, montrons par récurrence sur $n > 0$ que $f_2(n)$ parcourt dans l'ordre tous les nombres, dits « odieux », ayant un nombre impair de 1 dans leur écriture binaire. On a remarqué ci-dessus que $f_2(n)$ est le plus petit entier naturel non nul qui n'est pas ni sous la forme $f_2(n')$ pour $0 < n' < n$ ni sous la forme $f_2(n_1) \oplus f_2(n_2)$ pour $0 < n_1 < n_2 < n$. Pour montrer que $f_2(n)$ est le plus petit nombre odieux m strictement supérieur aux $f_2(n')$ pour $n' < n$, il suffit donc de montrer que (a) les $f_2(n_1) \oplus f_2(n_2)$ ne sont jamais odieux, et (b) ils parcourent au moins tous les nombres non-odieux inférieurs à m. Autrement dit, il suffit de montrer que : (a) la somme de nim de deux nombres odieux n'est pas odieuse, et que (b) tout nombre qui n'est pas odieux est la somme de nim de deux nombres odieux plus petits que lui. Or ces deux affirmations sont claires sur la représentation binaire. Ceci démontre donc la conjecture. ✓

Exercice 8.6.2.

On considère le jeu suivant : une position du jeu consiste en un certain nombre fini de jetons placés sur un damier possiblement transfini dont les cases étiquetées par un couple (α, β) d'ordinaux (on dira que α est [le numéro de] la ligne de la case et β [le numéro de] la colonne). Plusieurs jetons peuvent se trouver sur la même case sans effet particulier (ils s'empilent).

Un coup du jeu consiste à faire l'opération suivante : le joueur qui doit jouer choisit un jeton du jeu, disons sur la case (α, β), et il choisit aussi arbitrairement $\alpha' < \alpha$ (i.e., une ligne située plus haut) et $\beta' < \beta$ (i.e., une colonne située plus à gauche) : il retire alors le jeton choisi de la case (α, β) et le remplace par *trois* jetons, sur les cases (α', β), (α, β') et (α', β'). (Par exemple, un coup valable consiste à remplacer un jeton sur la case $(42, 7)$ par trois sur les cases $(18, 7)$, $(42, 5)$ et $(18, 5)$.) Le nombre de jetons augmente donc de 2 à chaque coup.



(Le jeton en gris remplacé par les trois noirs.)

On remarquera que les jetons sur la ligne ou la colonne 0 ne peuvent plus être retirés ou servir de quelque manière que ce soit : on pourra dire que cette ligne et cette colonne 0 sont la « défausse » des jetons. Le jeu se termine lorsque chacun des jetons est sur la ligne ou la colonne 0 (=dans la défausse), car il n'est alors plus possible de jouer. Les joueurs (Alice et Bob) jouent à tour de rôle et le premier qui ne peut plus jouer a perdu.

(0) Décrire brièvement le jeu complètement équivalent dans lequel il n'y a pas de ligne ou de colonne 0 (on fait démarrer la numérotation à 1), c'est-à-dire pas de défausse (les jetons disparaissent plutôt qu'être défaussés) : quels sont les types de coups possibles à ce jeu ? (Distinguer selon que $\alpha' = 0$ ou non, et selon que $\beta' = 0$ ou non.) On se permettra dans la suite d'utiliser librement l'une ou l'autre variante du jeu.

Corrigé. Les jetons défaussés ne jouant aucun rôle dans le jeu, on peut les ignorer et obtenir un jeu équivalent. Les lignes et les colonnes sont alors numérotés par des ordinaux non nuls, c'est-à-dire ≥ 1. Les quatre types de coups possibles dans ce jeu, selon que α' et/ou β' vaut 0, sont alors :

— simplement retirer un jeton de la case (α, β) [cas où $\alpha' = 0$ et $\beta' = 0$],

— déplacer un jeton de la case (α, β) vers une case (α, β') plus à gauche (i.e., $\beta' < \beta$) dans la ligne [cas où $\alpha' = 0$ et $\beta' \neq 0$],

— déplacer un jeton de la case (α, β) vers une case (α', β) plus haut (i.e., $\alpha' < \alpha$) dans la colonne [cas où $\alpha' \neq 0$ et $\beta' = 0$],

— remplacer un jeton de la case (α, β) par un jeton sur une case (α, β') plus à gauche dans la ligne, un autre sur une case (α', β) plus haut dans la colonne, et un troisième sur la case (α', β') à l'intersection de la nouvelle ligne et de la nouvelle colonne, comme dans le jeu d'origine [cas où $\alpha' \neq 0$ et $\beta' \neq 0$].

✓

(1) (a) Montrer qu'il existe une fonction $h(\alpha, \beta)$ de deux ordinaux α, β et à valeurs ordinales qui soit strictement croissante en chaque variable (c'est-à-dire que si $\alpha' < \alpha$ alors $h(\alpha', \beta) < h(\alpha, \beta)$ et que si $\beta' < \beta$ alors $h(\alpha, \beta') < h(\alpha, \beta)$). Pour cela, on pourra, comme on préfère, poser $h(\alpha, \beta) = \omega^{\max(\alpha,\beta)} + \omega^{\min(\alpha,\beta)}$ ou bien $h(\alpha, \beta) = \alpha \boxplus \beta$ où $\alpha \boxplus \beta$ désigne l'ordinal dont les chiffres de la forme normale de Cantor sont la somme des chiffres correspondants de α et de β. (b) En déduire que le jeu considéré dans cet exercice termine toujours en temps fini. (On pourra par exemple considérer la somme des ω^γ où γ parcourt, dans l'ordre décroissant, les valeurs $h(\alpha, \beta)$ pour les cases (α, β) où il y a un jeton.)

Corrigé. (a) Si on pose $h(\alpha, \beta) = \omega^{\max(\alpha,\beta)} + \omega^{\min(\alpha,\beta)}$ et si $\alpha' < \alpha$, alors soit $\max(\alpha', \beta) < \max(\alpha, \beta)$ soit $\max(\alpha', \beta) = \max(\alpha, \beta)$ et alors $\min(\alpha', \beta) < \min(\alpha, \beta)$: dans les deux cas, $h(\alpha', \beta) < h(\alpha, \beta)$ par comparaison des formes normales de Cantor. Comme la fonction h est symétrique en ses deux arguments, on a aussi $h(\alpha, \beta') < h(\alpha, \beta)$ si $\beta' < \beta$.

Si on préfère poser $h(\alpha, \beta) = \alpha \boxplus \beta$, et si $\alpha' < \alpha$, le chiffre correspondant à la plus haute puissance de ω qui diffère est strictement plus petit dans la forme normale de Cantor de α' que celui de α, et cette affirmation est encore vraie lorsqu'on ajoute chiffre à chiffre la forme normale de Cantor de β, donc on a bien $h(\alpha', \beta) < h(\alpha, \beta)$. Comme la fonction h est symétrique en ses deux arguments, on a aussi $h(\alpha, \beta') < h(\alpha, \beta)$ si $\beta' < \beta$.

(*Remarque :* En fait, la fonction $\boxplus$, aussi appelée « somme naturelle » sur les ordinaux, est plus adaptée dans ce contexte, parce qu'on peut se convaincre que $\alpha \boxplus \beta = \sup^+ \big(\{\alpha' \boxplus \beta : \alpha' < \alpha\} \cup \{\alpha \boxplus \beta' : \beta' < \beta\}\big)$, c'est-à-dire qu'elle est justement la plus petite fonction strictement croissante en chacun de ses arguments. On comparera cette définition avec $\alpha \oplus \beta = \operatorname{mex} \big(\{\alpha' \oplus \beta : \alpha' < \alpha\} \cup \{\alpha \oplus \beta' : \beta' < \beta\}\big)$. En revanche, l'addition usuelle ne convient pas, parce que $\alpha' + \beta$ peut être égal à $\alpha + \beta$ même si $\alpha' < \alpha$, par exemple $1 + \omega = 0 + \omega$.)

(b) À une position du jeu ayant s jetons sur les cases (α_i, β_i) (pour $i = 1, \ldots, s$) on peut associer l'ordinal $\omega^{\gamma_1} + \cdots + \omega^{\gamma_s}$ où les $\gamma_i := h(\alpha_i, \beta_i)$ ont été triés de façon à avoir $\gamma_1 \geq \cdots \geq \gamma_s$ (donc, quitte à regrouper les mêmes puissances, à avoir une forme normale de Cantor). Un coup consiste à remplacer un terme ω^{γ_i} par une somme de $\omega^{\gamma'}$ pour des $\gamma' < \gamma_i$ vu que $h(\alpha', \beta) < h(\alpha, \beta)$ et $h(\alpha, \beta') < h(\alpha, \beta)$ et *a fortiori* $h(\alpha', \beta') < h(\alpha, \beta)$ si $\alpha' < \alpha$ et $\beta' < \beta$. Ceci fait donc décroître strictement l'ordinal en question, et en particulier, la partie doit terminer en temps fini. ✓

(2) Dans le cas particulier où il n'y a qu'une ligne de jetons (numérotée 1 ; ou bien deux lignes numérotées 0 et 1 si on garde la défausse), expliquer pourquoi le jeu est simplement une reformulation du jeu de nim.

Corrigé. Un coup joué sur un jeton de la ligne 1 consiste simplement soit à le retirer soit à le déplacer vers une colonne plus à gauche ; on peut identifier la position ayant n_i jetons sur la case $(1,\alpha_i)$ à un partie de nim ayant n_i lignes avec α_i allumettes : le coup consistant à déplacer un jeton de la case α_i vers la case $\alpha_i' < \alpha_i$ peut se voir comme un coup de nim consistant à diminuer le nombre d'allumettes de la ligne qui en a α_i pour qu'il en reste α_i' ; et le fait de retirer un jeton sur la case $(1,\alpha_i)$ comme le coup de nim consistant à retirer toutes les allumettes de la ligne correspondante. Les jeux sont donc complètement équivalents. ✓

(3) Montrer que la valeur de Grundy d'un état quelconque du jeu vaut

$$\bigoplus_{i=1}^{s}(\alpha_i \otimes \beta_i)$$

où $(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_s,\beta_s)$ sont les cases où se trouvent les s jetons (répétées en cas de jetons multiples), où $\oplus$ désigne la somme de nim, et où l'opération $\otimes$ sur les ordinaux est définie inductivement par

$$\alpha \otimes \beta := \operatorname{mex}\Big\{(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') : \alpha' < \alpha,\ \text{et } \beta' < \beta\Big\} \qquad (*)$$

Corrigé. Il n'y a aucune interaction entre les jetons dans le jeu. En particulier, jouer à une somme de nim de deux positions du jeu considéré dans cet exercice revient au même que de jouer à la position ayant la réunion de ces deux ensembles de jetons. Si on note $u_{\alpha,\beta}$ la position du jeu ayant un unique jeton sur la case (α,β), on déduit de 6.2.15 que la valeur de Grundy d'un état quelconque du jeu vaut $\bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{gr}(u_{\alpha_i,\beta_i})$. Or $\operatorname{gr}(u_{\alpha,\beta})$ est le plus petit ordinal qui n'est pas de la forme $\operatorname{gr}(z)$ pour z une position voisine sortante de $u_{\alpha,\beta}$, et d'après ce qu'on vient de dire, on obtient exactement $\operatorname{gr}(u_{\alpha,\beta}) = \operatorname{mex}\big\{\operatorname{gr}(u_{\alpha',\beta}) \oplus \operatorname{gr}(u_{\alpha,\beta'}) \oplus \operatorname{gr}(u_{\alpha',\beta'}) : \alpha' < \alpha, \beta' < \beta\big\}$, c'est-à-dire bien $\operatorname{gr}(u_{\alpha,\beta}) = \alpha \otimes \beta$ (même définition inductive), et on a montré ce qui était demandé. ✓

(4) Calculer la valeur de $\alpha \otimes \beta$ pour $0 \leq \alpha \leq 5$ et $0 \leq \beta \leq 5$. Pour accélérer les calculs ou bien pour les confirmer, on pourra utiliser les résultats de l'exercice 8.6.3 (il n'est pas nécessaire d'avoir traité l'exercice en question). On ne demande pas de détailler les calculs, mais on recommande de les vérifier soigneusement.

Corrigé. En procédant inductivement, on trouve :

$\otimes$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	3	1	8	10
3	0	3	1	2	12	15
4	0	4	8	12	6	2
5	0	5	10	15	2	7

(pour simplifier les calculs, on peut notamment utiliser la commutativité, et le fait que $\alpha \otimes 3 = \alpha \otimes (2 \oplus 1) = (\alpha \otimes 2) \oplus \alpha$ et de même $\alpha \otimes 5 = \alpha \otimes (4 \oplus 1) = (\alpha \otimes 4) \oplus \alpha$; si on n'a pas l'habitude de calculer des sommes de nim, le mieux est sans doute de tout écrire en binaire, quitte à reconvertir ensuite). ✓

(5) Si vous deviez jouer dans la position suivante (les lignes et colonnes sont numérotées à partir de 1, autrement dit la défausse n'est pas figurée), quel coup feriez-vous ?

	1	2	3	4	5
1	●				
2		●			
3			●		
4				●	
5					●

<u>Corrigé.</u> La valeur de Grundy est $(1 \otimes 1) \oplus (2 \otimes 2) \oplus (3 \otimes 3) \oplus (4 \otimes 4) \oplus (5 \otimes 5) = 1 \oplus 3 \oplus 2 \oplus 6 \oplus 7 = 1$, et on veut l'annuler. Plusieurs coups sont possibles pour y arriver, par exemple : retirer le jeton en $(1,1)$ (c'est-à-dire jouer $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (1,1,0,0)$) ; ou bien, remonter le jeton $(3,3)$ en $(1,3)$ (c'est-à-dire jouer $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (3,3,1,0)$) ; ou encore, remplacer le jeton $(5,5)$ par trois jetons en $(4,5)$, $(5,4)$ et $(4,4)$ (c'est-à-dire jouer $(\alpha, \beta, \alpha', \beta') = (5,5,4,4)$). ✓

Exercice 8.6.3.

On définit inductivement une opération $\alpha \otimes \beta$ (**produit de nim**) de deux ordinaux α, β par $\alpha \otimes \beta := \operatorname{mex}\{(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') : \alpha' < \alpha, \beta' < \beta\}$ (autrement dit, par la formule (*) de l'exercice 8.6.2 ; il n'est pas nécessaire d'avoir traité l'exercice en question, même s'il est possible de s'en servir). La notation $\oplus$ désigne la somme de nim. On rappelle par ailleurs que $\gamma = \operatorname{mex} S$ signifie que $\gamma \notin S$ et que tout ordinal $\gamma' < \gamma$ appartient à S.

(1) Montrer que $\otimes$ est commutative, c'est-à-dire que $\beta \otimes \alpha = \alpha \otimes \beta$ quels que soient les ordinaux α, β.

<u>Corrigé.</u> Par induction sur α et β, on prouve $\beta \otimes \alpha = \alpha \otimes \beta$ en supposant que la même formule est vraie si l'un de α ou β est remplacé par un ordinal strictement plus petit. Or $\beta \otimes \alpha = \operatorname{mex}\{(\beta \otimes \alpha') \oplus (\beta' \otimes \alpha) \oplus (\beta' \otimes \alpha') : \alpha' < \alpha, \beta' < \beta\}$ (en utilisant la commutativité de $\oplus$), et par hypothèse d'induction ceci vaut $\operatorname{mex}\{(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') : \alpha' < \alpha, \beta' < \beta\} = \alpha \otimes \beta$.

Si on préfère, on peut aussi utiliser le jeu défini dans l'exercice 8.6.2, en remarquant qu'échanger les coordonnées des cases de tous les jetons ne change rien au jeu (i.e., les règles sont symétriques ligne/colonne) donc ne change pas la fonction de Grundy. ✓

(2) Montrer que 0 est absorbant pour $\otimes$, c'est-à-dire $\alpha \otimes 0 = 0$ pour tout ordinal α. Montrer que 1 est neutre pour $\otimes$, soit $\alpha \otimes 1 = \alpha$ pour tout ordinal α.

Corrigé. On a $\alpha \otimes 0 = \operatorname{mex} \varnothing = 0$ (puisqu'il n'existe pas de $\beta' < 0$). Pour la seconde affirmation, par induction sur α, on prouve $\alpha \otimes 1 = \alpha$: en effet, $\alpha \otimes 1 = \operatorname{mex}\{(\alpha' \otimes 1) \oplus (\alpha \otimes 0) \oplus (\alpha' \otimes 0) : \alpha' < \alpha\}$, et en utilisant le fait que 0 est aborbant pour $\otimes$ et neutre pour $\oplus$ et l'hypothèse d'induction, ceci vaut $\operatorname{mex}\{\alpha' : \alpha' < \alpha\} = \alpha$.

Si on préfère, on peut aussi utiliser le jeu défini dans l'exercice 8.6.2, en remarquant qu'un jeton sur la ligne ou colonne 0 est mort (défaussé), et que jouer sur la ligne ou colonne 1 revient à jouer au jeu de nim d'après la question (2) de l'exercice 8.6.2. ✓

(3) (a) Montrer que si $\alpha' \neq \alpha$ et $\beta' \neq \beta$, alors $(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') \neq \alpha \otimes \beta$. (b) En déduire que si $\alpha \otimes \beta = \alpha \otimes \beta'$ alors $\alpha = 0$ ou bien $\beta = \beta'$.

Corrigé. (a) Grâce aux propriétés de la somme de nim ($\gamma \neq \gamma'$ équivaut à $\gamma \oplus \gamma' \neq 0$), la condition qu'on veut montrer est équivalente à : $(\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') \neq 0$. Sous cette forme, on voit qu'il y a symétrie entre α' et α et entre β' et β : on peut donc supposer $\alpha' < \alpha$ et $\beta' < \beta$, auquel cas la propriété est claire par la définition même de $\otimes$ comme un mex.

(b) C'est le cas particulier du (a) lorsque $\alpha' = 0$. ✓

(4) Montrer que $\otimes$ est distributive sur $\oplus$, c'est-à-dire $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$. Pour cela, on pourra procéder par induction et remarquer que pour montrer $\lambda = \mu$ il suffit de montrer que (a) $\xi < \lambda$ implique $\xi \neq \mu$ et que (b) $\xi < \mu$ implique $\xi \neq \lambda$. (Et on rappelle que si $\xi < \operatorname{mex} S$ alors $\xi \in S$.)

Corrigé. Pour montrer $\lambda = \mu$ il suffit de montrer que (a) $\xi < \lambda$ implique $\xi \neq \mu$ et que (b) $\xi < \mu$ implique $\xi \neq \lambda$: en effet, la contraposée de (a) est que $\mu \geq \lambda$, et la contraposée de (b) est que $\lambda \geq \mu$.

Procédons par induction pour prouver $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$: on peut supposer cette égalité connue si au moins l'un des ordinaux α, β, γ est remplacé par un strictement plus petit.

(a) Si $\xi < \alpha \otimes (\beta \oplus \gamma)$, alors on peut écrire $\xi = (\alpha' \otimes (\beta \oplus \gamma)) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta')$ où $\alpha' < \alpha$ et $\delta' < \beta \oplus \gamma$. La définition inductive de $\oplus$ permet alors d'écrire soit $\delta' = \beta' \oplus \gamma$ où $\beta' < \beta$, soit $\delta' = \beta \oplus \gamma'$ où $\gamma' < \gamma$: par symétrie, plaçons nous sans perte de généralité dans le premier cas. On a alors $\xi = (\alpha' \otimes (\beta \oplus \gamma)) \oplus (\alpha \otimes (\beta' \oplus \gamma)) \oplus (\alpha' \otimes (\beta' \oplus \gamma))$. Par hypothèse d'induction, on peut développer les trois termes, et quitte à simplifier les deux termes $\alpha' \otimes \gamma$ qui apparaissent, on obtient $\xi = (\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') \oplus (\alpha \otimes \gamma)$. Puisque la somme $(\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta')$ des trois premiers termes est différente de $\alpha \otimes \beta$ (d'après (3)(a)), on en déduit que $\xi \neq (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$, ce qu'on voulait.

(b) Maintenant, si $\xi < (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$, on a soit $\xi = \delta' \oplus (\alpha \otimes \gamma)$ avec $\delta' < \alpha \otimes \beta$, soit $\xi = (\alpha \otimes \beta) \oplus \varepsilon'$ avec $\varepsilon' < \alpha \otimes \gamma$: par symétrie, plaçons nous sans perte de généralité dans le premier cas. On peut alors écrire $\delta' = (\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta')$ avec $\alpha' < \alpha$ et $\beta' < \beta$, donc on a : $\xi = (\alpha' \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \beta') \oplus (\alpha' \otimes \beta') \oplus (\alpha \otimes \gamma)$. Quitte à faire apparaître deux termes $\alpha' \otimes \gamma$ qui s'annulent, l'hypothèse d'induction permet de réécrire $\xi = (\alpha' \otimes (\beta \oplus \gamma)) \oplus (\alpha \otimes (\beta' \oplus \gamma)) \oplus (\alpha' \otimes (\beta' \oplus \gamma))$. Or $\beta' \oplus \gamma \neq \beta \oplus \gamma$: en utilisant (3)(a), on a $\xi \neq \alpha \otimes (\beta \oplus \gamma)$, ce qu'on voulait. ✓

On *admet* que $\otimes$ est associative, c'est-à-dire $(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$ (ce n'est pas très difficile à prouver).

(5) On va enfin montrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe un α^* tel que $\alpha \otimes \alpha^* = 1$, c'est-à-dire, un *inverse* pour le produit de nim. Pour cela, on suppose par l'absurde le contraire, et on considère α le *plus petit* ordinal non nul qui n'a pas d'inverse, et on va arriver à une contradiction. Pour cela, appelons $\delta_0 = \sup^+ \big(\{\alpha\} \cup \{\beta^* : \beta < \alpha\}\big)$ (où β^* désigne l'inverse de β, qu'on a supposé exister vu que $\beta < \alpha$) le plus petit ordinal strictement supérieur à α et aux inverses des ordinaux $< \alpha$, et par récurrence sur l'entier naturel n, posons $\delta_{n+1} = \sup^+ \big(\{\beta_1 \oplus \beta_2 : \beta_1, \beta_2 < \delta_n\} \cup \{\beta_1 \otimes \beta_2 : \beta_1, \beta_2 < \delta_n\}\big)$ le plus petit ordinal strictement supérieur à la somme ou au produit de nim de deux ordinaux strictement plus petits que δ_n (on a bien sûr $\delta_{n+1} \geq \delta_n$). Soit enfin $\delta = \lim_{n\to\omega} \delta_n = \sup\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$. (a) Expliquer pourquoi si $\beta_1, \beta_2 < \delta$ alors $\beta_1 \oplus \beta_2 < \delta$ et $\beta_1 \otimes \beta_2 < \delta$. (b) Montrer que si $0 < \alpha' < \alpha$ alors nécessairement $\alpha' \otimes \delta \geq \delta$ (dans le cas contraire, considérer le produit de nim de $\alpha' \otimes \delta$ par $(\alpha')^*$ et utiliser (a)). (c) En déduire que si $0 < \alpha' < \alpha$ et $\delta' < \delta$, alors $(\alpha' \otimes \delta) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta')$ est $\geq \delta$ (dans le cas contraire, montrer que le premier terme serait $< \delta$). En particulier, il est $\neq 1$. (d) Expliquer pourquoi si $\alpha' = 0$ alors $(\alpha' \otimes \delta) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta')$ est encore une fois $\neq 1$. (e) En déduire que $\alpha \otimes \delta = 1$ et conclure.

Corrigé. (a) Si $\beta < \delta$, comme δ est la borne supérieure des δ_n, il existe n tel que $\beta < \delta_n$. Ainsi, si $\beta_1, \beta_2 < \delta$, il existe n tel que $\beta_1, \beta_2 < \delta_n$ (en prenant le maximum des deux n obtenus), donc $\beta_1 \oplus \beta_2 < \delta_{n+1}$ et $\beta_1 \otimes \beta_2 < \delta_{n+1}$ d'après la définition de δ_{n+1}, ce qui donne bien $\beta_1 \oplus \beta_2 < \delta$ et $\beta_1 \otimes \beta_2 < \delta$.

(b) Si $0 < \alpha' < \alpha$ et si $\alpha' \otimes \delta < \delta$, alors comme $(\alpha')^* < \delta_0 \leq \delta$, on a $(\alpha')^* \otimes (\alpha' \otimes \delta) < \delta$ d'après (a). Or $(\alpha')^* \otimes (\alpha' \otimes \delta) = \delta$ par associativité et par le fait que $(\alpha')^*$ est l'inverse de α' : contradiction.

(c) Si $0 < \alpha' < \alpha$ et $\delta' < \delta$, montrons que $\gamma := (\alpha' \otimes \delta) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta')$ est $\geq \delta$. Dans le cas contraire, $\alpha' \otimes \delta$ serait la somme de nim de γ, qui est $< \delta$ par hypothèse, de $\alpha \otimes \delta'$ qui est $< \delta$ par (a), et de $\alpha' \otimes \delta'$ qui l'est aussi ; de nouveau par (a), on aurait $\alpha' \otimes \delta < \delta$, ce qui contredit (b).

(d) Si $\alpha' = 0$ alors $(\alpha' \otimes \delta) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta') = \alpha \otimes \delta' \neq 1$ puisqu'on a supposé que α n'avait pas d'inverse.

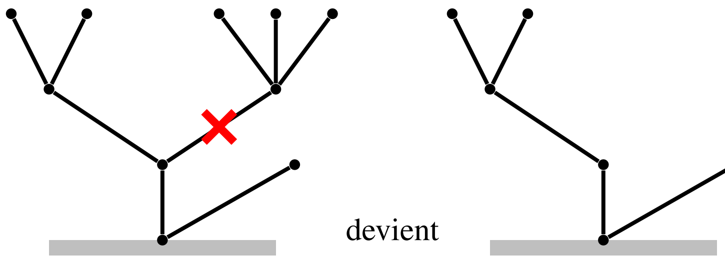
(e) Par définition, $\alpha \otimes \delta$ est le plus petit ordinal qui n'est pas de la forme

$(\alpha' \otimes \delta) \oplus (\alpha \otimes \delta') \oplus (\alpha' \otimes \delta')$ pour $\alpha' < \alpha$ et $\delta' < \delta$. Or on a montré en (c) et (d) que cette expression n'est jamais 1, et en revanche elle peut être 0 (pour $\alpha' = \delta' = 0$). Le plus petit ordinal qui n'est pas de cette forme est donc 1 : mais on a alors prouvé $\alpha \otimes \delta = 1$, ce qui contredit l'hypothèse que α n'ait pas d'inverse. ✓

Remarque : On a donc vu que les ordinaux, pour les opérations $\oplus$ et $\otimes$, i.e., les « nimbres », forment donc un *corps* commutatif, corps dit de « caractéristique 2 » car $1 \oplus 1 = 0$. Un raisonnement assez semblable à celui fait en (5) permettrait de montrer, en outre, que ce corps est « algébriquement clos », c'est-à-dire que tout polynôme non constant y a une racine. Les entiers naturels strictement inférieurs à 2^{2^r}, quant à eux, forment le corps fini ayant ce nombre d'éléments.)

Exercice 8.6.4.

On s'intéresse dans cet exercice au jeu de **Hackenbush impartial en arbre**, défini comme suit. L'état du jeu est représenté par un arbre (fini, enraciné [5]). Deux joueurs alternent et chacun à son tour choisit une arête de l'arbre et l'efface, ce qui fait automatiquement disparaître du même coup tout le sous-arbre qui descendait de cette arête (voir figure). Le jeu se termine lorsque plus aucun coup n'est possible (c'est-à-dire que l'arbre est réduit à sa seule racine), auquel cas, selon la convention habituelle, le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.



(1) Expliquer pourquoi une position de ce jeu peut être considérée comme une somme de nim de différents jeux du même type. Plus exactement, soit T un arbre de racine x, soient $y_1, \ldots, y_r$ les fils de x, soient $T_1, \ldots, T_r$ les sous-arbres ayant pour racines $y_1, \ldots, y_r$ et soient $T'_1, \ldots, T'_r$ les arbres de racine x où T'_i est formé de x et de T_i (avec une arête entre x et y_i) : expliquer pourquoi la position représentée par l'arbre T est la somme de nim de celles représentées par $T'_1, \ldots, T'_r$. Qu'en déduit-on sur la valeur de Grundy de la position T ?

<u>*Corrigé.*</u> Il s'agit simplement d'observer que les différentes branches de l'arbre n'interagissent pas du tout. Jouer à la somme de nim des jeux de Hackenbush représentés par les arbres $T'_1, \ldots, T'_r$ revient, si on veut, à jouer à Hackenbush sur la réunion disjointe de ces arbres, et comme la racine n'intervient pas, cela ne change rien au jeu de réunir leurs racines en une seule, ce qui donne l'arbre T.

5. C'est-à-dire que la racine fait partie de la donnée de l'arbre, ce qui est la convention la plus courante.

On en déduit que $\mathrm{gr}(T) = \mathrm{gr}(T'_1) \oplus \cdots \mathrm{gr}(T'_r)$ où $\mathrm{gr}(T)$ désigne, par abus de notation, la valeur de Grundy de la position de Hackenbush représentée par l'arbre T, et où $\oplus$ désigne la somme de nim des entiers naturels. ✓

$* * *$

Indépendamment de ce qui précède, on va considérer une nouvelle opération sur les jeux : si G est un jeu combinatoire impartial, vu comme un graphe orienté (bien-fondé), on définit un jeu noté $*{:}G$ défini en ajoutant une unique position 0 à G comme on va l'expliquer. Pour chaque position z de G il y a une position notée $*{:}z$ de $*{:}G$, et il y a une unique autre position, notée 0, dans $*{:}G$; pour chaque arête $z \to z'$ de G, il y a une arête $*{:}z \to *{:}z'$ dans $*{:}G$, et il y a de plus une arête $*{:}z \to 0$ dans $*{:}G$ pour chaque z (en revanche, 0 est un puits, c'est-à-dire qu'aucune arête n'en part) ; la position initiale de $*{:}G$ est $*{:}z_0$ où z_0 est celle de G. De façon plus informelle, pour jouer au jeu $*{:}G$, chaque joueur peut soit faire un coup normal ($*{:}z \to *{:}z'$) de G, soit appliquer un coup « destruction totale » $*{:}z \to 0$ qui fait terminer immédiatement le jeu (et celui qui l'applique a gagné [6]).

(2) Montrer par induction bien-fondée que si G est un jeu combinatoire impartial (bien-fondé) de valeur de Grundy α, alors $*{:}G$ a pour valeur de Grundy $1 + \alpha$.

Corrigé. Observons tout d'abord que la valeur de Grundy de la position 0 de $*{:}G$ vaut 0 puisque c'est un puits. Montrons par induction bien-fondée sur les sommets de $*{:}G$ que la valeur de Grundy de la position $*{:}z$ vaut $1 + \mathrm{gr}(z)$ où $\mathrm{gr}(z)$ désigne la valeur de Grundy de la position z dans G. Les voisins sortants de $*{:}z$ sont 0 et les $*{:}z'$ pour z' voisin sortant de z (dans G) ; la définition de la valeur de Grundy assure donc que $\mathrm{gr}(*{:}z) = \mathrm{mex}(\{0\} \cup \{\mathrm{gr}(*{:}z') : z' \in \mathrm{outnb}(z)\})$, c'est-à-dire que la valeur de Grundy de $*{:}z$ est le plus petit ordinal qui n'est ni 0 ni un $\mathrm{gr}(*{:}z')$ pour z' voisin sortant de z ; mais par hypothèse d'induction, on peut remplacer $\mathrm{gr}(*{:}z')$ par $1+\mathrm{gr}(z')$, ce qui donne $\mathrm{gr}(*{:}z) = \mathrm{mex}(\{0\} \cup \{1+\mathrm{gr}(z') : z' \in \mathrm{outnb}(z)\})$. Montrons que ce mex vaut $1 + \mathrm{gr}(z)$: pour cela, il suffit d'observer que (A) $1 + \mathrm{gr}(z)$ ne vaut ni 0 ni $1 + \mathrm{gr}(z')$, et (B) tout ordinal $< 1 + \mathrm{gr}(z)$ vaut soit 0 soit $1 + \mathrm{gr}(z')$. Or le (A) est clair car $1 + \mathrm{gr}(z) > 0$ et que $\mathrm{gr}(z') \neq \mathrm{gr}(z)$ assure $1 + \mathrm{gr}(z') \neq 1 + \mathrm{gr}(z)$, et le (B) est clair car si $\beta < 1 + \mathrm{gr}(z)$, alors soit $\beta = 0$ soit $\beta = 1 + \beta'$ où $\beta' < \mathrm{gr}(z)$, auquel cas la définition de gr assure qu'il existe z' voisin sortant de z tel que $\beta' = \mathrm{gr}(z')$. ✓

(3) On revient au jeu de Hackenbush impartial en arbre. Soit T un arbre de racine y et T' l'arbre obtenu en ajoutant une nouvelle racine x à T, c'est-à-dire que les sommets de T' sont ceux de T plus x, qui en est la racine, avec une arête entre x et y. Expliquer pourquoi le jeu de Hackenbush représenté par T' s'obtient

6. Ce jeu considéré tout seul n'est donc pas très amusant puisqu'on a toujours la possibilité de gagner instantanément.

par la construction « $*\!:$ » considérée en (2) à partir de celui représenté par T. Qu'en déduit-on sur la valeur de Grundy de la position T' par rapport à celle de T ?

<u>*Corrigé.*</u> Un coup dans le jeu de Hackenbush représenté par l'arbre T' peut consister soit à couper l'arbre à sa racine, c'est-à-dire couper l'arête reliant x et y, ce qui met fin au jeu immédiatement, soit à jouer dans T (i.e., couper une arête de celui-ci) ; c'est précisément la définition qu'on a donnée de la construction « $*\!:$ ».

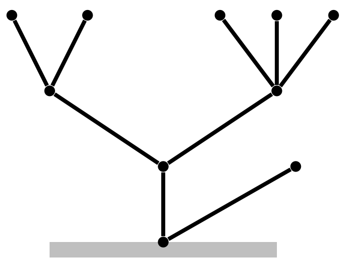
On en déduit que $\mathrm{gr}(T') = 1 + \mathrm{gr}(T)$ (comme par ailleurs on a ici affaire à des entiers naturels, le $+$ est commutatif, donc dans cette question on peut aussi l'écrire $\mathrm{gr}(T') = \mathrm{gr}(T) + 1$). ✓

(4) Déduire des questions précédentes une méthode pour calculer la valeur de Grundy d'une position quelconque au Hackenbush impartial en arbre.

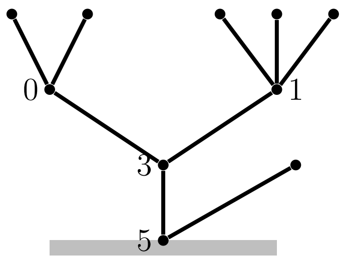
<u>*Corrigé.*</u> Des questions précédentes, on déduit que la valeur de Grundy d'un arbre T au Hackenbush impartial se calcule comme la somme de nim des $\mathrm{gr}(T'_i) = 1 + \mathrm{gr}(T_i)$ où les T_i sont les sous-arbres partant des fils de la racine de T.

On peut donc calculer la valeur de Grundy d'un arbre en calculant celle de ses sous-arbres enracinés aux différents nœuds, des feuilles vers la racine : dès qu'on a calculé la valeur de Grundy de tous les sous-arbres enracinés aux fils $y_1, \ldots, y_r$ d'un nœud x, on en déduit celle du sous-arbre enraciné en leur père x comme la somme de nim des valeurs en question incrémentées de 1. ✓

(5) Quelle est la valeur de Grundy de la position représentée ci-dessous ? (Il s'agit de la position utilisée en exemple plus haut.) Quel coup préconiseriez-vous dans cette situation ?



<u>*Corrigé.*</u> On trouve les valeurs de Grundy suivantes en notant à côté de chaque nœud la valeur du sous-arbre enraciné en ce nœud :



La valeur de Grundy recherchée est donc 5. En étudiant les différentes possibilités, on trouve qu'un coup gagnant possible consiste à retirer n'importe laquelle des arêtes les plus en haut sur le dessin (dans tous les cas, le sommet étiqueté 3 sur la figure ci-dessus passe à 0 et la racine de même). ✓

(La question qui suit est indépendante des questions précédentes et concerne les jeux combinatoires *partisans*.)

(6) On remarque que la construction $*{:}G$ définie avant la question (2) peut se définir de façon identique lorsque G est un jeu partisan, en donnant à une arête $*{:}z \to *{:}z'$ la même couleur que $z \to z'$, et à une arête $*{:}z \to 0$ la couleur verte (ce qui signifie : à la fois bleue et rouge). En décrivant une stratégie, montrer que si $G \geq H$ on a aussi $*{:}G \geq *{:}H$, et en déduire que si $G \doteq H$ alors $*{:}G \doteq *{:}H$ (où $\doteq$ désigne l'égalité au sens de Conway des jeux partisans).

<u>*Corrigé.*</u> Tout d'abord, observons que $-(*{:}G) = *{:}(-G)$ puisque la construction « $*{:}$ » est symétrique entre bleu et rouge.

La condition $G \geq H$ signifie que le joueur bleu (Blaise) possède une stratégie gagnante au jeu $G - H = G + (-H)$ s'il joue en second. Montrons qu'il en possède encore une à $(*{:}G) - (*{:}H) = (*{:}G) + (*{:}(-H))$ en considérant comment il répond à un coup de son adversaire (Roxane). Si Roxane joue un coup de « destruction totale » sur l'une des composantes $(*{:}G)$ ou $(*{:}(-H))$, Blaise réplique sur l'autre et gagne. Si Roxane joue un coup dans une des deux composantes G ou $-H$, Blaise répond selon la stratégie qu'il est supposé posséder. Dans tous les cas, Blaise peut répondre à tout coup de Roxane, donc il gagne. Ceci montre $*{:}G \geq *{:}H$.

Comme $G \doteq H$ signifie $G \geq H$ et $G \leq H$, on a bien $*{:}G \geq *{:}H$ et $*{:}G \leq *{:}H$ d'après ce qu'on vient d evoir, c'est-à-dire $*{:}G \doteq *{:}H$. (La valeur d'un jeu partisan $*{:}G$ est donc déterminée par la valeur de G.) ✓

Index

A
à partir de là, 28, 77
accessibilité, 45
accessibilité stricte, 45
acyclique (graphe), 44
affine (application), 17
affine (combinaison), *voir* combinaison affine
arbre d'un jeu, 27
arête, 44
atteindre, 44
aval, 45
aval-clos, 45
aval-inductif, 46

B
barycentre, 17
barycentrique (combinaison), *voir* combinaison barycentrique
bien-fondé (graphe), 44
bien-fondé (jeu), 77
bien-ordonné (ensemble), 45, 63
binaire (écriture), 73
bon ordre, 45
borélien, 35
Burali-Forti (paradoxe de), 68

C
Cantor (forme normale de), 61, 73
chomp, 12
Choquet (jeu topologique de), 14
cohérente (fonction), 52
colombe et faucon, 7
combinaison affine, 17
combinaison barycentrique, 17
combinaison convexe, 17
combinatoire (jeu), 36, 85
confrontation, 27, 36
continue (fonction ordinale), 69
convexe, 17
convexe (combinaison), *voir* combinaison convexe
corrélé (équilibre), 22
coup, 3
croissante (fonction), 64

D
définition (ensemble de), 52
déterminé (jeu), 28
dilemme du prisonnier, 7
division euclidienne, 71

E
écrasement de Mostowski, 55
écrasement transitif, 55
écriture binaire, 73
écriture en base τ, 73
epsilon 0 (ordinal), 74
équilibre corrélé, 22
équilibre de Nash, 19
état, 3
extensionalité (axiome), 56
extensionnel (graphe), 56

F
fermé, 32
fini (graphe), 44
flou (jeu), 86
forme normale (jeu en), 17

G
gagnante, 3
gagnante (position), 29
gagnante (stratégie), 28, 39
gain, 3, 17, 27, 36
gain espéré, 19
Gale-Stewart (jeu de), 14, 27

graphe orienté [simple], 44
Grundy (fonction de), 10, 48, 77
guerre des sexes, 8

H
Hackenbush, 13, 121
historique (stratégie), 39
hydre (jeu de l'), 14, 76

I
impartial (jeu), 4, 36
information complète (jeu à), 4
information parfaite (jeu à), 4, 36, 85
initiale (position), 36
isomorphes (ensembles bien-ordonnés), 64

J
joueurs, 3

L
Lemke-Howson (algorithme de), 21
limite, 68
limite (ordinal), 68

M
meilleure réponse, 19
mex, 48, 50
mixte (stratégie), 17

N
Nash (équilibre de), 19
négatif (jeu), 86
nim (jeu de), 10, 79
nim (produit de), *voir* produit de nim
nim (somme de), *voir* somme de nim
nimbre, 62, 78
nombre de joueurs, 3
nombre surréel, 92
normale (jeu en forme), 17
N-position, 49, 78
nul (jeu), 86
nul (ordinal), 68

O
opposé, 86
optimale (stratégie), 25
option, 3, 17
ordinal, 57, 66
ordonné (ensemble), 62
ouvert, 32

P
partage (jeu du), 8
partial (jeu), *voir* partisan
partie, *voir* confrontation
partie bien-fondée, 51
partielle (fonction), 52
partisan (jeu), 4, 85
pierre-papier-ciseaux, 6
pile ou face, 5
positif (jeu), 86
position, 27, 36
position initiale, 36
positionnelle (stratégie), 39
positions, 3
P-position, 49, 78
produit de nim, 84, 118
profil de stratégies mixtes, 18
profil de stratégies pures, 17
progressivement fini, *voir* bien-fondé
prolonge, 40, 52
puits, 44
pure (stratégie), 17

R
rang, 48
retournement de pièces, 11

S
somme de nim, 10, 78, 79
somme disjonctive, 86
somme nulle (jeu à), 4
sommet, 44
sortant (voisin), 44
stratégie, 3, 28

stratégie gagnante, 28, 39
stratégie historique, 39
stratégie mixte, 17
stratégie optimale, 25
stratégie positionnelle, 39
stratégie pure, 17
stratégie survivante, 39
strict (équilibre de Nash), 19
strictement croissante (fonction), 64
successeur (ordinal), 68
suite de signes, 92
support (d'une stratégie mixte), 17
surréel (nombre), 92
survie, 36
survivante (stratégie), 39

T
terminant (jeu), 77
totalement ordonné (ensemble), 63
tri topologique, 50
tribu, 35
trouillard (jeu du), 7

U
ultimatum (jeu de l'), 8

V
valeur (d'un jeu à somme nulle), 25
valeur (d'un jeu combinatoire partisan), 89
voisin sortant, 44
voisinage fondamental, 32
von Neumann (ordinal de), 59, 66