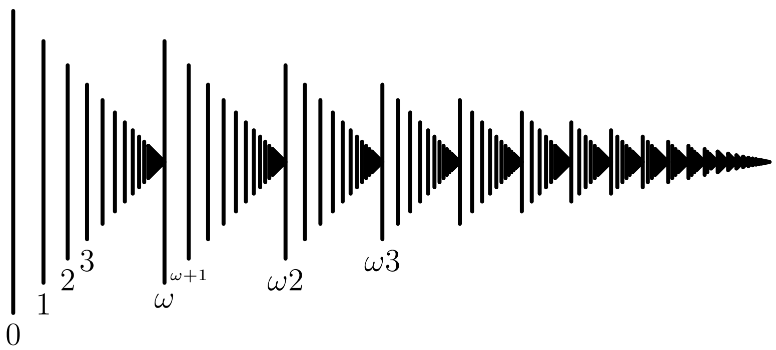
extensionnelles sur G est encore une relation d'équivalence extensionnelle, donc il existe une plus petite relation d'équivalence extensionnelle $\equiv$ sur G, c'est-à-dire un plus grand quotient $G/\equiv$ de G qui soit extensionnel (« plus grand » au sens où tout quotient de G par une relation d'équivalence se factorise à travers ce quotient $G/\equiv$).

Le contenu essentiel de la proposition 4.3.4 est que l'écrasement transitif $f(G)$ d'un graphe G bien-fondé réalise ce plus grand quotient extensionnel $G/\equiv$: la relation $f(x) = f(x')$ sur G est précisément la plus petite relation d'équivalence extensionnelle $\equiv$ sur G (en effet, la relation $f(x) = f(x')$ est évidemment extensionnelle, donc contient $\equiv$ par définition de celle-ci, mais l'écrasement de $G/\equiv$ est le même que celui de G, et comme la fonction d'écrasement est injective sur $G/\equiv$, on a bien $f(x) = f(x')$ ssi $x \equiv x'$).

5 Introduction aux ordinaux

5.1 Présentation informelle

5.1.1. Les ordinaux sont une sorte de nombres, totalement ordonnés et même « bien-ordonnés », qui généralisent les entiers naturels en allant « au-delà de l'infini » : les entiers naturels $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ sont en particulier des ordinaux (ce sont les plus petits), mais il existe un ordinal qui vient après eux, à savoir ω, qui est lui-même suivi de $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$, après quoi vient $\omega \cdot 2$ (ou simplement $\omega 2$), et beaucoup d'autres choses.



(Une rangée de ω^2 allumettes.)

5.1.2. Les ordinaux servent à mesurer la taille des ensembles bien-ordonnés (c'est-à-dire, les ensembles totalement ordonnés dans lesquels il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante) exactement comme les entiers naturels servent à mesurer la taille des ensembles finis.

5.1.3. On pourra ajouter les ordinaux, et les multiplier, et même élever un ordinal à la puissance d'un autre, mais il n'y aura pas de soustraction ($\omega - 1$ n'a pas

Les ordinaux

Présentation informelle:

Il s'agit d'une généralisation des entiers naturels "au-delà du fini", parfois appelés nombres "transfinis". Les premiers ordinaux sont les entiers naturels $(0, 1, 2, 3, \dots)$ après quoi vient un ordinal infini noté ω, puis $\omega+1$, $\omega+2$, $\omega+3, \dots$ $\omega+\omega = \omega\cdot 2$, $\omega\cdot 2+1$, $\omega 2+2, \dots$, $\omega 3, \dots$ $\omega 4, \dots$, ω^2, $\omega^2+1, \dots$ $\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega+1, \dots$, $\omega^2+\omega 2$, $\omega^2+\omega 2+1$, $\dots$ $\omega^2+\omega 3 \dots$, $\omega^2 2, \dots$ [$\omega^2 \underline{m}+\omega \underline{n}+\underline{p}$ ordonnés lexicographiquement (avec $m, n, p \in \mathbb{N}$)]

$\omega^3, \dots$ [$\underbrace{\omega^3 n_3+\omega^2 n_2+\omega n_1+n_0}_{\text{"Forme normale de Cantor"}}$ ordonnés lexicographiquement]

$[\omega^k n_k+\dots+\omega n_1+n_0]$, ω^ω, $\omega^\omega+1, \dots$ $\omega^\omega+\omega$, $\omega^\omega+\omega+1, \dots$ $\omega^\omega+\omega 2, \dots$

$\omega^\omega 2, \dots$ $\omega^\omega 3, \dots$ $\omega^\omega 4 \dots$ $\omega^\omega\cdot\omega = \omega^{\omega+1}, \dots$ $\omega^{\omega+2}, \dots$ $\omega^{\omega+3}, \dots$, $\omega^{\omega 2}, \dots$

$\omega^{\omega^2}, \dots$ $\omega^{\omega^\omega}, \dots$ $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots$, $\underset{\boxed{\omega^{\varepsilon_0}}}{\underset{\shortparallel}{\varepsilon_0}}$, $\varepsilon_0+1, \dots$ $\varepsilon_0 2 \dots$ $\varepsilon_0\omega$, $\varepsilon_0\omega^2$, $\varepsilon_0\omega^\omega, \dots$ ε_0^2,

$\varepsilon_0^\omega = \omega^{\varepsilon_0+1}, \dots$

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_2, \dots$ ε_ω, $\varepsilon_{\omega+1} \dots$ $\varepsilon_\varepsilon \dots$

$\omega 2 = \omega + \omega$

$2\omega = 2 + 2 + 2 + \cdots$

de sens, en tout cas pas en tant qu'ordinal, parce que ω est le plus petit ordinal infini). Les ordinaux ont de nombreux points en commun avec les entiers naturels (l'addition est associative, la multiplication aussi, on peut les écrire en binaire, etc.), mais aussi des différences importantes (l'addition n'est pas commutative : on a $1 + \omega = \omega$ mais $\omega + 1 > \omega$).

5.1.4. Comme la récurrence pour les entiers naturels, il y a sur les ordinaux (ou de façon équivalente, sur les ensembles bien-ordonnés) un principe d'*induction transfinie* (cf. 5.2.2), qui est en fait l'application directe à eux du principe d'induction bien-fondée : son énoncé est essentiellement le même que le principe parfois appelé de « récurrence forte » pour les entiers naturels, c'est-à-dire que :

Pour montrer une propriété sur tous les ordinaux α on peut faire l'hypothèse d'induction qu'elle est déjà connue pour les ordinaux $< \alpha$ au moment de la montrer pour α.

Comme la récurrence sur les entiers naturels, et comme l'induction bien-fondée dont c'est un cas particulier, l'induction transfinie permet soit de *démontrer* des propriétés sur les ordinaux, soit de *définir* des fonctions sur ceux-ci :

Pour définir une fonction sur tous les ordinaux α on peut faire l'hypothèse d'induction qu'elle est déjà définie pour les ordinaux $< \alpha$ au moment de la définir pour α.

5.1.5. Ce qui importe surtout pour la théorie des jeux est le fait suivant :

toute suite strictement décroissante d'ordinaux est finie

(généralisation du fait que toute suite strictement d'entiers naturels est finie). À cause de ça, les ordinaux peuvent servir à « mesurer » toutes sortes de processus qui terminent à coup sûr en temps fini, ou à généraliser les entiers naturels pour toutes sortes de processus qui terminent à coup sûr en temps fini mais pas en un nombre d'étapes borné *a priori*.

Par exemple, on peut imaginer que le dessin de la figure ci-dessus (figurant les ordinaux $< \omega^2$) représente une rangée d'allumettes qu'on pourrait utiliser dans un jeu de nim (cf. 1.3.10) : si on convient que les allumettes doivent être effacées *par la droite*, ce qui revient à diminuer strictement l'ordinal qui les compte (initialement ω^2), la ligne sera toujours vidée en temps fini même si les joueurs essaient de la faire durer le plus longtemps possible (le premier coup va faire tomber l'ordinal ω^2 à $\omega \cdot k + n$ avec $k, n \in \mathbb{N}$, après quoi les coups suivants l'amèneront au plus à $\omega \cdot k + n'$ avec $n' < n$ qui va finir par tomber à 0, puis on tombe à $\omega \cdot k' + m$ avec $k' < k$, et en continuant ainsi on finit forcément par retirer toutes les allumettes).

Plus formellement, quel que soit l'ordinal α, l'ensemble $\{\beta : \beta < \alpha\}$ des ordinaux plus petits, vu comme un graphe pour la relation $>$ (i.e., on fait pointer une arête orientée de chaque ordinal β vers chaque ordinal strictement plus petit), est bien-fondé, ou de façon équivalente, bien-ordonné.

5.1.6. Voici une façon imagée d'y penser qui peut servir à faire le lien avec la théorie des jeux : imaginons un génie qui exauce des vœux en nombre limité (les vœux eux-mêmes sont aussi limités et ne permettent certainement pas de faire le vœu d'avoir plus de vœux — peut-être qu'on ne peut que souhaiter un paquet de carambars, ou de transformer son ennemi en crapaud, ou d'annuler une transformation en crapaud qu'on aurait soi-même subie, ou des choses de ce genre). Si le génie est prêt à exaucer 3 vœux, on peut imaginer qu'à la fin de chaque vœu qu'on prononce on doive dire « maintenant, il me reste n vœux » avec n strictement inférieur à la valeur antérieure (initialement 3).

Cette définition se généralise aux ordinaux : un génie qui exauce α vœux est un génie qui demande qu'on formule un vœu et qu'on choisisse un ordinal $\beta < \alpha$, après quoi le vœu est exaucé et le génie se transforme en un génie qui exauce β vœux.

Ainsi, pour un génie qui exauce ω vœux on devra, lors du tout premier vœu qu'on formule, décider quel nombre de vœux il reste, ce nombre étant un *entier naturel*, aussi grand qu'on le souhaite — mais fini. Cela peut sembler sans importance (si on a de toute façon autant de vœux que l'on souhaite, même $N = 10^{1000}$, peu importe qu'on doive choisir un nombre dès le début). Mais comparons avec un génie qui exauce $\omega + 1$ vœux : pour celui-ci, lors du premier vœu que l'on formule, on pourra décider qu'il reste ω vœux et c'est au vœu suivant qu'on devra redescendre à un entier naturel (et le choisir). La différence entre avoir ω et $\omega+1$ vœux apparaîtra si on imagine un combat entre Aladdin et Jafar où Jafar utilise des vœux pour transformer Aladdin en crapaud et Aladdin pour redevenir humain : si Jafar a initialement ω vœux et Aladdin aussi, Jafar transforme Aladdin en crapaud et choisit qu'il lui reste N vœux avec N fini, alors Aladdin redevient humain choisit qu'il lui reste aussi au moins N vœux, et au final il est sauf ; alors que si Jafar a initialement $\omega + 1$ vœux et Aladdin seulement ω, Jafar transforme Aladdin en crapaud et tombe à ω, puis Aladdin est obligé de choisir un N fini en formulant le vœu de redevenir humain, et Jafar peut choisir au moins N vœux et gagne le combat (ainsi que quelques paquets de carambars).

5.1.7. La construction moderne des ordinaux, introduite par J. von Neumann en 1923, est mathématiquement très élégante mais peut-être d'autant plus difficile à comprendre qu'elle est subtile :

un ordinal est l'ensemble des ordinaux strictement plus petits que lui

— ainsi, l'entier 0 est défini comme l'ensemble vide $\varnothing$ (puisqu'il n'y a pas d'ordinaux plus petits que lui), l'entier 1 est défini comme l'ensemble $\{0\} = \{\varnothing\}$

$0 = \varnothing = \{\}$

$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$

$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$3 = \{0, 1, 2\}$ ...

$\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = \mathbb{N}$

$\omega + 1 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\} = \omega \cup \{\omega\}$

$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$

ayant pour seul élément 0 (puisque 0 est le seul ordinal plus petit que 1), l'entier 2 est défini comme $\{0,1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, l'entier 3 comme $\{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$, et ainsi de suite, et l'ordinal ω est défini comme l'ensemble $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ de tous les entiers naturels, puis $\omega+1$ comme l'ensemble $\omega \cup \{\omega\}$ des entiers naturels auquel on a ajouté le seul élément ω, et plus généralement $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. Formellement, un ordinal est l'écrasement transitif (cf. 4.3.1) d'un ensemble bien-ordonné (i.e., totalement ordonné bien-fondé).

Cette définition a certains avantages, par exemple la borne supérieure d'un ensemble S d'ordinaux est simplement la réunion $\bigcup_{\alpha \in S} \alpha$ de(s éléments de) S. Néanmoins, elle n'est pas vraiment nécessaire à la théorie des ordinaux, et nous tâcherons d'éviter d'en dépendre. Mais il faut au moins retenir une idée :

5.1.8. Pour tout ensemble S d'ordinaux, il existe un ordinal qui est plus grand que tous les éléments de S ; il existe même un *plus petit* ordinal plus grand que tous les éléments de S, c'est-à-dire, une *borne supérieure* de S. Ce fait est la clé de l'inexhaustibilité des ordinaux : quelle que soit la manière dont on essaie de rassembler des ordinaux en un ensemble, on peut trouver un ordinal strictement plus grand qu'eux (en particulier, les ordinaux ne forment pas un ensemble, pour un peu la même raison que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas : il est « trop gros » pour tenir dans un ensemble).

Pour dire les choses différemment avec un slogan peut-être un peu approximatif :

À chaque fois qu'on a construit les ordinaux jusqu'à un certain point, on crée un nouvel ordinal qui vient juste après tous ceux-là.

5.1.9. Pour aider à comprendre comment les choses commencent, et en partant de l'idée générale que

comprendre un ordinal, c'est comprendre tous les ordinaux strictement plus petits que lui, et comment ils s'ordonnent

voici comment s'arrangent les plus petits ordinaux.

Après les entiers naturels $0, 1, 2, 3, \ldots$ vient l'ordinal ω puis $\omega+1, \omega+2, \omega+3$ et ainsi de suite, après quoi viennent $\omega 2, \omega 2 + 1, \omega 2 + 2, \ldots$ qui sont suivis de $\omega 3$ et le même mécanisme recommence. Les ordinaux $\omega k + n$ pour $k, n \in \mathbb{N}$ sont ordonnés par l'ordre lexicographique donnant plus de poids à k : l'ordinal qui vient immédiatement après (c'est-à-dire, leur ensemble, si on utilise la construction de von Neumann) est $\omega \cdot \omega = \omega^2$, qui est suivi de $\omega^2 + 1, \omega^2 + 2, \ldots$ et plus généralement des $\omega^2 + \omega k + n$, qui sont eux-mêmes suivis de $\omega^2 \cdot 2$. Les $\omega^2 \cdot n_2 + \omega \cdot n_1 + n_0$ sont ordonnés par l'ordre lexicographique donnant plus de poids à n_2, puis à n_1 puis à n_0. L'ordinal qui vient immédiatement après tous ceux-ci est ω^3.

En itérant ce procédé, on fabrique de même ω^4, puis ω^5 et ainsi de suite : les $\omega^r \cdot n_r + \cdots + \omega \cdot n_1 + n_0$ (c'est-à-dire en quelque sorte des polynômes en ω à coefficients dans $\mathbb{N}$) sont triés par ordre lexicographique en donnant plus de poids aux coefficients n_i pour i grand (et en identifiant bien sûr un cas où $n_r = 0$ par celui où il est omis : il s'agit de l'ordre lexicographique sur les suites d'entiers nulles à partir d'un certain rang). L'ordinal qui vient immédiatement après est ω^ω, puis on a tous les $\omega^\omega + \omega^r \cdot n_r + \cdots + \omega \cdot n_1 + n_0$ jusqu'à $\omega^\omega \cdot 2$, et de même $\omega^\omega \cdot 3$, etc., jusqu'à $\omega^\omega \cdot \omega = \omega^{\omega+1}$.

En répétant ω fois toute cette séquence, on obtient $\omega^{\omega+2}$, puis de nouveau $\omega^{\omega+3}$ et ainsi de suite : après quoi vient $\omega^{\omega 2}$, et on voit comment on peut continuer de la sorte.

5.1.10. Plus généralement, tout ordinal va s'écrire de façon unique sous la forme $\omega^{\gamma_s} n_s + \cdots + \omega^{\gamma_1} n_1$ où $\gamma_s > \cdots > \gamma_1$ sont des ordinaux et $n_s, \ldots, n_1$ sont des entiers naturels non nuls (si un n_i est nul il convient de l'omettre) : il s'agit d'une

$\omega^{\omega+7} \cdot 8 + \omega^{12} + 1000$

sorte d'écriture en « base ω » de l'ordinal, appelée **forme normale de Cantor**. On compare deux formes normales de Cantor en comparant le terme dominant

$\omega^{\omega+8} \cdot 7 + \omega^3 + 42$

(le plus à gauche, i.e., $\omega^{\gamma_s} n_s$ dans les notations qui viennent d'être données, ce qui se fait lui-même en comparant les γ_s et sinon, les n_s), et s'ils sont égaux, en comparant le suivant et ainsi de suite.

La forme normale de Cantor ne permet cependant pas de « comprendre » tous

$\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0} = \omega^{\omega^{\varepsilon_0}}$

les ordinaux, car il existe des ordinaux tels que $\varepsilon = \omega^\varepsilon$. Le plus petit d'entre eux est noté ε_0 et est la limite de $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \ldots$

5.1.11. On retiendra qu'il existe trois sortes d'ordinaux, cette distinction étant souvent utile dans les inductions :

— l'ordinal nul 0, qui est souvent un cas spécial,

— les ordinaux « successeurs », c'est-à-dire ceux qui sont de la forme $\beta + 1$ pour β un ordinal plus petit (de façon équivalente, il y a un plus grand ordinal strictement plus petit),

— les ordinaux qui sont la borne supérieure (ou « limite ») des ordinaux strictement plus petits et qu'on appelle, pour cette raison, « ordinaux limites » (autrement dit, δ est limite lorsque pour tout $\beta < \delta$ il existe β' avec $\beta < \beta' < \delta$).

À titre d'exemple, l'ordinal 0, l'ordinal 42 et l'ordinal ω sont des exemples de ces trois cas. D'autres ordinaux limites sont $\omega \cdot 2$, ou ω^2, ou encore $\omega^\omega + \omega^3 \cdot 7$, ou bien $\omega^{\omega+1}$; en revanche, $\omega^\omega + 1$ ou $\omega^{\omega 2} + 1729$ sont successeurs. Dans la forme normale de Cantor, un ordinal est successeur si et seulement si le dernier terme (le plus à droite) est un entier naturel non nul.

5.1.12. Les ordinaux vont servir à définir différents jeux qui, pris isolément, sont extrêmement peu intéressants, mais qui ont la vertu de permettre de « mesurer » d'autres jeux : ces jeux ont en commun que, partant d'un ordinal α, l'un ou l'autre joueur, ou les deux, ont la possibilité de le faire décroître (strictement), c'est-à-dire de le remplacer par un ordinal $\beta < \alpha$ strictement plus petit — comme expliqué en 5.1.5, ce processus termine forcément. Dans le cadre esquissé en 1.3.9, on a trois jeux associés à un ordinal α :

— Un jeu *impartial*, c'est-à-dire que les deux joueurs ont les mêmes options à partir de n'importe quelle position $\beta \leq \alpha$, à savoir, les ordinaux $\beta' < \beta$ — autrement dit, les deux joueurs peuvent décroître l'ordinal. Dans le cadre de 1.3.9, le graphe a pour sommets les ordinaux $\beta \leq \alpha$ avec une arête (« verte », i.e., utilisable par tout le monde) reliant β à β' lorsque $\beta' < \beta$. Il s'agit du jeu de nim (cf. 1.3.10) avec une seule ligne d'allumettes ayant initialement α allumettes (les allumettes sont bien ordonnées et doivent être retirées *par la droite* dans un dessin comme au début de cette section). Ce jeu s'appelle parfois le « nimbre » associé à l'ordinal α.

— Deux jeux *partisans* (=partiaux), où un joueur n'a aucun coup possible (il a donc immédiatement perdu si c'est à son tour de jouer, ce qui rend le jeu, pris isolément, encore plus inintéressant que le précédent) : un jeu « bleu » ou « positif », dans lequel seul le joueur « bleu » (également appelé « gauche », « Blaise »...) peut jouer, exactement comme dans le jeu impartial ci-dessus, tandis que l'autre joueur ne peut rien faire, et un jeu « rouge » ou « négatif », dans lequel seul le joueur « rouge » (également appelé « droite », « Roxane »...) peut jouer tandis que l'autre ne peut rien faire. Dans le cadre de 1.3.9, le graphe a pour sommets les ordinaux $\beta \leq \alpha$ avec une arête reliant β à β' lorsque $\beta' < \beta$, ces arêtes étant toutes bleues ou toutes rouges selon le jeu considéré. Il s'agit d'un jeu qui correspond à un certain avantage du joueur bleu, respectivement rouge, à rapprocher de l'histoire 5.1.6 ci-dessus. Le jeu bleu est parfois appelé le « nombre surréel » associé à l'ordinal α, tandis que le rouge est l'opposé du bleu.

5.2 Ensembles bien-ordonnés et induction transfinie

5.2.1. Un ensemble **[partiellement] ordonné** est un ensemble muni d'une relation $>$ (d'ordre *strict*) qui soit à la fois

— irréflexive ($x > x$ n'est jamais vrai quel que soit x), et

— transitive ($x > y$ et $y > z$ entraînent $x > z$).

Une telle relation est automatiquement antisymétrique ($x > y$ et $y > x$ ne sont jamais simultanément vrais pour $x \neq y$). On peut tout aussi bien définir un ensemble partiellement ordonné en utilisant l'ordre *large* $\geq$ ($x \geq y$ étant défini par $x > y$ ou $x = y$, ou symétriquement $x > y$ étant défini par $x \geq y$ et $x \neq y$), réflexive, antisymétrique et transitive. On note bien sûr $x \leq y$ pour $y \geq x$ et $x < y$ pour $y > x$.

"Trichotomie"

ou $x<y$, $x=y$, ou $x>y$ dans un ens. totalement ordonné

Un ensemble partiellement ordonné est dit **totalement ordonné** lorsque pour tous $x \neq y$ on a soit $x > y$ soit $y > x$.

Un ensemble totalement ordonné bien-fondé W est dit **bien-ordonné**. D'après 4.1.7, ceci peut se reformuler de différentes façons :

$x \to y$ lorsque $x > y$

(*) W est un ensemble totalement ordonné dans lequel il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante.

(†) W est un ensemble (partiellement) ordonné dans lequel toute partie *non vide* N a un plus petit élément.

(‡) W est totalement ordonné, et si une partie $P \subseteq W$ vérifie la propriété suivante « si $x \in W$ est tel que tout élément strictement plus petit que x appartient à P, alors x lui-même appartient à P » (on pourra dire « P est inductif »), alors $P = W$.

(Dans (†), « partiellement ordonné » suffit car si $\{x, y\}$ a un plus petit élément c'est bien qu'on a $x < y$ ou $y > x$.)

Scholie 5.2.2 (principe d'induction transfinie)**.** Pour montrer une propriété P sur les éléments d'un ensemble bien-ordonné W, on peut supposer (comme « hypothèse d'induction »), lorsqu'il s'agit de montrer que x a la propriété P, que cette propriété est déjà connue de tous les éléments strictement plus petits que x.

Proposition 5.2.3. Soit W un ensemble bien-ordonné et $S \subseteq W$ tel que $u < v$ avec $v \in S$ implique $u \in S$ (on peut dire que S est « aval-clos »). Alors soit $S = W$ soit il existe $x \in W$ tel que $S = \mathrm{precs}(x) := \{y \in W : y < x\}$.

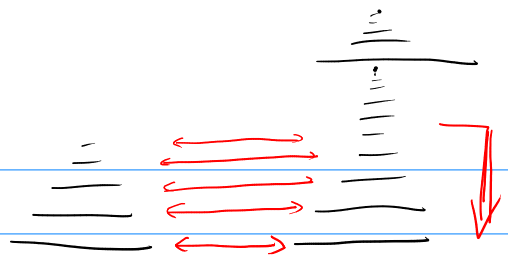
Démonstration. Si $S \neq W$, soit x le plus petit élément de W qui n'est pas dans S. Si $y < x$ alors $y \in S$ par minimalité de x. Si $y \geq x$ alors on a $y \notin S$ car le contraire ($y \in S$) entraînerait $x \in S$ d'après l'hypothèse faite sur S. On a donc montré que $y \in S$ si et seulement si $y < x$, c'est-à-dire précisément $S = \mathrm{precs}(x)$. ☺

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème 4.1.9 :

Théorème 5.2.4 (définition par induction transfinie)**.** Soit W un ensemble bien-ordonné et Z un ensemble quelconque. Notons $\mathrm{precs}(x) = \{y : y < x\}$ l'ensemble des éléments strictement plus petits que x dans W.

Appelons $\mathscr{F}$ l'ensemble des couples (x, f) où $x \in W$ et f une fonction de $\mathrm{precs}(x)$ vers Z (autrement dit, $\mathscr{F}$ est $\bigcup_{x \in W} \left(\{x\} \times Z^{\mathrm{precs}(x)}\right)$). Soit enfin $\Phi \colon \mathscr{F} \to Z$ une fonction quelconque. Alors il existe une unique fonction $f \colon W \to Z$ telle que pour tout $x \in W$ on ait

$$f(x) = \Phi(x,\, f|_{\mathrm{precs}(x)})$$



Exemples d'ensembles bien-ordonnés :

$\mathbb{N}$, $\{0,1,2,3,\dots,n-1\}$ (finis, avec l'ordre usuel)

$\mathbb{N} \cup \{\omega\}$ où on impose $\omega > k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

Contre-exemples :

$\mathbb{Z}$ (pas de plus petit élément), $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0; +\infty[$ n'est pas bien-ordonné car $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroît strictement

ou car $]0; +\infty[$ n'a pas de plus petit élément

idem $\mathbb{Q}_{\geq 0} = [0; +\infty[\cap \mathbb{Q}$.

$f : W \to Z$

$\operatorname{precs}(x) := \{y \in W \mid y < x\}$ — pour définir $f(x)$ ops f connue sur $\operatorname{precs}(x)$

Scholie 5.2.5. Pour définir une fonction f sur un ensemble bien-ordonné, on peut supposer, lorsqu'on définit $f(x)$, que f est déjà défini (i.e., connu) sur tous les éléments strictement plus petits que x : autrement dit, on peut librement utiliser la valeur de $f(y)$ pour $y < x$, dans la définition de $f(x)$.

5.3 Comparaison d'ensembles bien-ordonnés, et ordinaux

5.3.1. Avant d'énoncer les résultats suivants, faisons une remarque évidente et une définition. La remarque est que si W est bien-ordonné et $E \subseteq W$ est un sous-ensemble de W, alors E est lui-même bien ordonné (pour l'ordre induit) ; ceci s'applique en particulier à $\operatorname{precs}(x) = \{y : y < x\}$. La définition est qu'une fonction f entre ensembles ordonnés est dite **croissante** lorsque $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$, et **strictement croissante** lorsque $x < y$ implique $f(x) < f(y)$, ce qui entre des ensembles totalement ordonnés signifie exactement la même chose que « injective et croissante ».

[cas particulier : si (u_n) est une suite d'entiers naturels strictement croissante alors $u_n \geq n$ $(\forall n)$]

Proposition 5.3.2. Si W est un ensemble bien-ordonné, et si $f : W \to W$ est strictement croissante, alors $x \leq f(x)$ pour tout $x \in W$.

Démonstration. Montrons par induction transfinie que $x \leq f(x)$. Par hypothèse d'induction, on peut supposer $y \leq f(y)$ pour tout $y < x$. Supposons par l'absurde $f(x) < x$. Alors l'hypothèse d'induction appliquée à $y := f(x)$ donne $f(x) \leq f(f(x))$, tandis que la stricte croissance de f appliquée à $f(x) < x$ donne $f(f(x)) < f(x)$. On a donc une contradiction. ☺

"isomorphe"

Corollaire 5.3.3. Si W est bien-ordonné, la seule bijection croissante $W \to W$ est l'identité.

Démonstration. Si $f : W \to W$ est une bijection croissante, la proposition précédente appliquée à f montre $x \leq f(x)$ pour tout $x \in W$, mais appliquée à f^{-1} elle montre $x \leq f^{-1}(x)$ donc $f(x) \leq x$ et finalement $f(x) = x$. ☺

Corollaire 5.3.4. Si W, W' sont deux ensembles bien-ordonnés, il existe *au plus une* bijection croissante $W \to W'$ (i.e., s'il en existe une, elle est unique).

Une telle bijection peut s'appeler un **isomorphisme** d'ensemble bien-ordonnés, et on peut dire que W et W' ont **isomorphes** lorsqu'il existe un isomorphisme entre eux (on conviendra en cf. 5.3.8 ci-dessous qu'on le note $\#W = \#W'$).

Démonstration. Si $f, g : W \to W'$ sont deux bijections croissantes, appliquer le corollaire précédent à la composée de l'une et de la réciproque de l'autre. ☺

Corollaire 5.3.5. Si W est un ensemble bien-ordonné, $x \in W$ et $\operatorname{precs}(x) = \{y : y < x\}$, alors il n'existe pas de fonction strictement croissante $W \to \operatorname{precs}(x)$.

Démonstration. Une telle fonction serait en particulier une fonction strictement croissante $W \to W$, donc vérifierait $x \leq f(x)$ d'après la proposition, ce qui contredit $f(x) \in \operatorname{precs}(x)$. ☺

Le théorème suivant assure que donnés deux ensembles bien-ordonnés, il y a moyen de les comparer :

Trichotomie sur les ensembles bien ordonnés

Théorème 5.3.6. Si W, W' sont deux ensembles bien-ordonnés, alors exactement l'une des affirmations suivantes est vraie :

Notation :

— il existe une bijection croissante $f\colon W \to \operatorname{precs}(y)$ avec $y \in W'$, $\#W < \#W'$
— il existe une bijection croissante $f\colon \operatorname{precs}(x) \to W'$ avec $x \in W$, $\#W > \#W'$
— il existe une bijection croissante $f\colon W \to W'$. $\#W = \#W'$

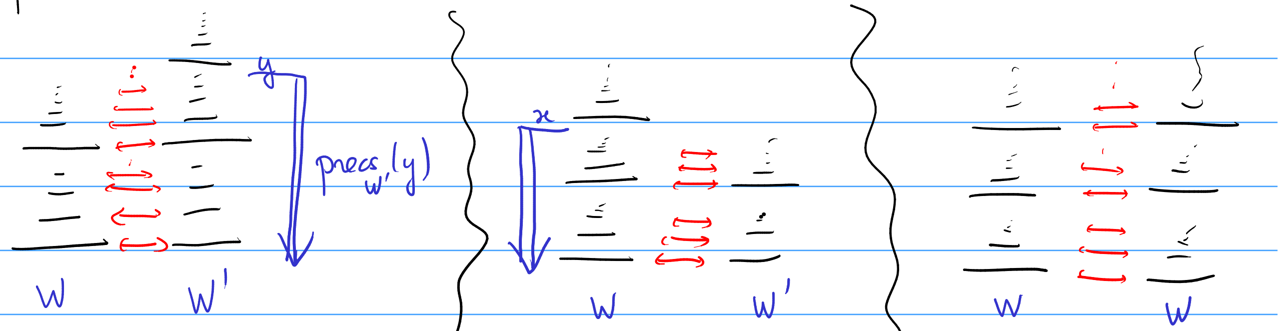
(Dans chaque cas, la bijection est automatiquement unique d'après 5.3.4. De plus, y est unique dans le premier cas et x l'est dans le second, d'après 5.3.5.)

Démonstration. Les affirmations sont exclusives d'après le corollaire précédent. Plus précisément, s'il existe une fonction strictement croissante $f\colon W \to W'$, en composant à droite par f on voit qu'il ne peut pas exister de fonction strictement croissante $W' \to \operatorname{precs}(x)$, donc le premier ou le dernier cas excluent celui du milieu, mais par symétrie les deux derniers excluent le premier et les trois cas sont bien exclusifs.

Considérons maintenant l'ensemble des couples $(x, y) \in W \times W'$ tels qu'il existe une bijection croissante (forcément unique !) entre $\operatorname{precs}_W(x)$ et $\operatorname{precs}_{W'}(y)$: d'après ce qu'on vient d'expliquer, pour chaque x il existe au plus un y tel qu'il y ait une telle bijection croissante, et pour chaque y il existe au plus un x. On peut donc voir cet ensemble de couples comme (le graphe d')une fonction partielle injective $\varphi\colon W \dashrightarrow W'$ (autrement dit, $\varphi(x)$ est l'unique y, s'il existe, tel qu'il existe une bijection croissante entre $\operatorname{precs}_W(x)$ et $\operatorname{precs}_{W'}(y)$).

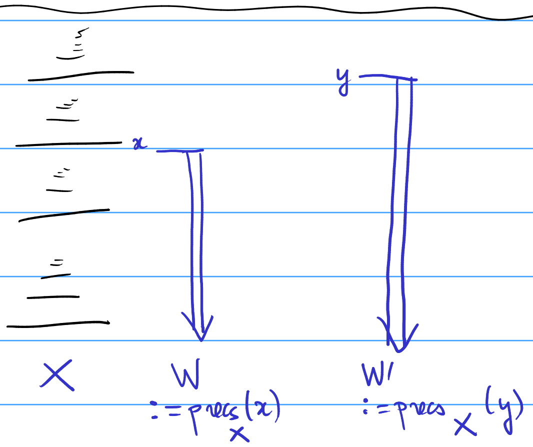
Si $x_0 \leq x$ et si $\varphi(x) =: y$ est défini, une bijection croissante $f\colon \operatorname{precs}_W(x) \to \operatorname{precs}_{W'}(y)$ peut se restreindre à $\operatorname{precs}_W(x_0)$ et il est clair que son image est exactement $\operatorname{precs}_{W'}(f(x_0))$, ce qui montre que $\varphi(x_0)$ est définie et vaut $f(x_0) < y = \varphi(x)$, notamment φ est strictement croissante. D'après 5.2.3, l'ensemble de définition de φ est soit W tout entier soit de la forme $\operatorname{precs}_W(x)$ pour un $x \in W$. Symétriquement, son image est soit W' tout entier soit de la forme $\operatorname{precs}_{W'}(y)$ pour un $y \in W'$. Et comme on vient de le voir, φ est une bijection croissante entre l'un et l'autre. Ce ne peut pas être une bijection croissante entre $\operatorname{precs}_W(x)$ et $\operatorname{precs}_{W'}(y)$ sinon (x, y) lui-même serait dans φ, une contradiction. C'est donc que φ est exactement une bijection comme un des trois cas annoncés. ☺

Thm 5.3.6 : si W et W' sont b.o. (bien ordonnés), 3 possibilités exclusives :



$W \longrightarrow \mathrm{precs}_{W'}(y)$ bij croissante	$\mathrm{precs}_W(x) \longrightarrow W'$ bij croissante	$W \longrightarrow W'$ bij croissante (isomorphisme)
$\#W < \#W'$	$\#W > \#W'$	$\#W = \#W'$

Prop 5.3.7 :



on a $\#W < \#W'$ (resp. $\#W > \#W'$ resp. $\#W = \#W'$)

ssi $x < y$ (resp. $x > y$, resp. $x = y$)

"$\#W = \#W'$" est une relation d'équivalence, compatible avec "$\#W < \#W'$"

(si $\#W_1 = \#W_2$ et $\#W_1' = \#W_2'$ et $\#W_1 < \#W_1'$ alors $\#W_2 < \#W_2'$)

Un ordinal est une classe d'équivalence par la relation $\#W = \#W'$

"il existe un isomorphisme entre W et W'"

(= une classe d'isomorphisme d'ensembles bien ordonnés)

L'ordinal (= la classe d'équivalence) de W est noté $\#W$.

Les ordinaux sont totalement ordonnés par 5.3.6

Ex: $W := \left\{ \begin{array}{l} \text{—— } c \\ \text{—— } b \\ \text{—— } a \end{array} \right\}$ ($\{a,b,c\}$ avec l'ordre $a<b<c$) est bien ordonné, et son ordinal $\#W$ est 3

$\#\{=\} = 2$ $\qquad \#\{—\} = 1$ $\qquad \#\emptyset = 0$

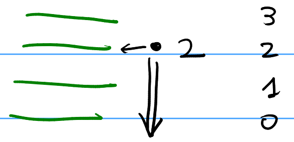
$\#\mathbb{N} = \#\{\vdots\} =: \omega$

Si n est un entier naturel, $\#\{0,1,2,\dots,n-1\} = n$ comme ordinal

Moralité : les ordinaux mesurent la taille des ensembles b.o.

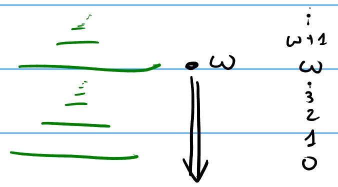
On peut aussi s'en servir pour étiqueter les éléments d'un ensemble b.o. W quelconque en étiquetant $x \in W$ par l'ordinal $\#\mathrm{prec}_W(x)$

Ex:



(Les étiquettes associées aux éléments de W sont précisément les ordinaux $< \#W$)

Ex 2



$\#W = \omega 2$

L'affirmation suivante est une trivialité, mais peut-être utile à écrire explicitement :

Proposition 5.3.7. Soit X un ensemble bien-ordonné : si $w, w' \in X$ et qu'on pose $W = \mathrm{precs}_X(w)$ et $W' = \mathrm{precs}_X(w')$, les trois cas du théorème 5.3.6 se produisent exactement lorsque $w < w'$, resp. $w > w'$, resp. $w = w'$.

Démonstration. C'est évident : si $w < w'$ alors l'identité fournit une bijection croissante $W \to \mathrm{precs}_{W'}(w)$, et de même dans les autres cas. ☺

Définition 5.3.8. Soient W, W' deux ensembles bien-ordonnés. On notera $\#W < \#W'$, resp. $\#W > \#W'$, resp. $\#W = \#W'$, dans les trois cas du théorème 5.3.6. Autrement dit, $\#W = \#W'$ signifie qu'il existe une bijection croissante $W \to W'$ (unique d'après 5.3.4), ce qui définit une relation d'équivalence entre ensembles bien-ordonnés, et on note $\#W < \#W'$ lorsque $\#W = \#\,\mathrm{precs}(y)$ pour un $y \in W'$, le théorème 5.3.6 assurant qu'il s'agit d'une relation d'ordre total entre les classes d'équivalence qu'on vient de définir. La proposition 5.3.7 assure que si w, w' sont deux éléments d'un même ensemble bien-ordonné, alors $\#\,\mathrm{precs}(w) < \#\,\mathrm{precs}(w')$ se produit si et seulement si $w < w'$, et de même en remplaçant le signe $<$ par $=$ ou $>$.

La classe d'équivalence[2] $\#W$ pour la relation $\#W = \#W'$ s'appelle l'**ordinal** de W. Par abus de notation, si w est un élément d'un ensemble bien-ordonné, on peut noter $\#w$ pour $\#\,\mathrm{precs}(w)$ (autrement dit, on associe un ordinal non seulement à un ensemble bien-ordonné, mais aussi à un élément d'un ensemble bien-ordonné).

« Étiquette » de w (dans W)

Si on préfère éviter la définition par classe d'équivalence, on peut aussi définir $\#W$ comme l'écrasement transitif (cf. 4.3.1) de W (**ordinal de von Neumann**), à savoir $\#W = \{\#x : x \in W\}$ où $\#x = \{\#y : y < x\}$, cette définition ayant bien un sens par induction transfinie (5.2.4 et 5.2.5).

On appelle ω l'ordinal $\#\mathbb{N}$ de l'ensemble des entiers naturels, et on identifie tout entier naturel n à l'ordinal de $\mathrm{precs}(n) = \{0, \ldots, n-1\}$ dans $\mathbb{N}$.

5.3.9. Les deux façons de définir les ordinaux reviennent essentiellement au même : en effet, s'il y a une bijection croissante $W \to W'$ (forcément unique), alors les écrasements transitifs de W et W' coïncident, et réciproquement, si les écrasements transitifs de W et W' coïncident, on définit une bijection croissante $W \to W'$ en envoyant $x \in W$ sur l'unique $y \in W'$ tel que $\mathrm{precs}_W(x)$ et $\mathrm{precs}_{W'}(y)$ aient le même écrasement transitif (on peut au préalable montrer le lemme suivant : si W est bien-ordonné et $y < x$ dans W alors l'écrasement

2. Pour être parfaitement rigoureux, à cause de subtilités ensemblistes, on ne peut pas vraiment définir des classes d'équivalence de façon usuelle dans ce contexte, d'où l'intérêt de la définition suivante (ordinaux de von Neumann).

transitif de $\mathrm{precs}(y)$, qui est un élément de celui de $\mathrm{precs}(x)$, ne lui est pas égal — ceci résulte d'une induction transfinie sur x).

Les ordinaux de von Neumann ont l'avantage d'être des ensembles bien-définis et de vérifier $\beta < \alpha$ si et seulement si $\beta \in \alpha$; ils ont comme inconvénient d'être peut-être plus difficiles à visualiser. Mais même si on n'identifie pas $\alpha = \#W$ à l'ensemble des ordinaux strictement plus petits, il est important de garder à l'esprit que l'ensemble des ordinaux strictement plus petits est $\{\#\,\mathrm{precs}(x) : x \in W\}$ (par définition de l'ordre !), et que $\alpha = \#\{\beta < \alpha\}$ (idem). Même si nous éviterons de supposer explicitement que les ordinaux sont construits à la façon de von Neumann, il arrivera souvent qu'on dise « un élément de α » pour parler d'un ordinal strictement plus petit que α (cela peut être considéré comme un abus de langage).

Le théorème 5.3.6 a la conséquence importante suivante sur les ordinaux :

Théorème 5.3.10. Tout ensemble d'ordinaux est bien-ordonné : deux ordinaux sont toujours comparables (on a toujours $\beta < \alpha$ ou $\beta > \alpha$ ou $\beta = \alpha$), et il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'ordinaux.

Autrement dit : dans tout ensemble non vide d'ordinaux il y en a un plus petit.

min $\mathbb{N}$:= plus petit ordinal appartenant à $\mathbb{N}$

Démonstration. Le théorème 5.3.6 signifie exactement que les ordinaux sont *totalement* ordonnés. Reste à expliquer qu'ils sont bien-ordonnés, c'est-à-dire, qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$. Mais si on avait une telle suite, en appelant W un ensemble bien-ordonné tel que $\#W = \alpha_0$, chaque α_i suivant s'écrit $\#\,\mathrm{precs}(w_i)$ pour un $w_i \in W$, et d'après 5.3.7 on devrait avoir une suite strictement décroissante $w_1 > w_2 > \cdots$ dans W, ce qui contredit le fait que W est bien-ordonné.

La dernière affirmation vient de l'équivalence entre (*) et (†) dans 5.2.1. ☺

sup S := min {α ordinal tq α majorant large de S}

sup$^+$ S := min {α ordinal tq α majorant strict de S}

Proposition 5.3.11. Tout ensemble S d'ordinaux a une borne supérieure : autrement dit, il existe un ordinal $\sup S$ qui est le plus petit majorant (large) de S (i.e., le plus petit ordinal α tel que $\beta \leq \alpha$ pour tout $\beta \in S$), et un ordinal $\sup^+ S$ qui est le plus petit majorant strict de S (i.e., le plus petit ordinal α tel que $\beta < \alpha$ pour tout $\beta \in S$).

(On verra plus loin que $\sup^+ S = \sup\{\beta + 1 \colon \beta \in S\}$, donc cette notion n'est pas vraiment nouvelle.)

Ex :
$\sup\{0,1,5\} = 5$
$\sup^+\{0,1,5\} = 6$
$\sup \mathbb{N} = \omega$
$\sup^+ \mathbb{N} = \omega$

Démonstration. D'après ce qu'on vient de voir (dernière affirmation de 5.3.10), il suffit de montrer qu'il existe un majorant strict de S. Quitte à remplacer S par sa réunion avec l'ensemble des ordinaux inférieurs à un ordinal quelconque de S (pour les ordinaux de von Neumann, ceci revient à remplacer S par $S \cup \bigcup_{\alpha \in S} \alpha$), on peut supposer que (*) si $\alpha \in S$ et $\beta < \alpha$ alors $\beta \in S$. On vient de voir que

S est bien-ordonné : si $\alpha = \#S$, montrons qu'il s'agit d'un majorant strict de S ; or si $\beta \in S$, on a $\beta = \#\operatorname{precs}_S(\beta)$ d'après l'hypothèse (*) qu'on vient d'assurer, et la définition de l'ordre sur les ordinaux donne $\beta < \alpha$: ainsi, α est bien un majorant strict comme voulu. ☺

5.3.12. Une conséquence de cette proposition est qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ordinaux (car si S était un tel ensemble, il aurait un majorant strict, qui par définition ne peut pas appartenir à S) : c'est le **« paradoxe » de Burali-Forti** ; le mot « paradoxe » fait référence à une conception ancienne de la théorie des ensembles, mais selon les fondements modernes des mathématiques, ce phénomène n'a rien de paradoxal (intuitivement, il y a trop d'ordinaux pour pouvoir tenir dans un ensemble, de même qu'il n'y a pas d'ensemble de tous les ensembles). Ces subtilités ensemblistes ne poseront pas de problème dans la suite de ces notes, il faut juste reconnaître leur existence.

5.4 Ordinaux successeurs et limites

5.4.1. On appelle **successeur** d'un ordinal α le plus petit ordinal strictement supérieur à α (qui existe d'après la proposition 5.3.11 : si on veut, c'est $\sup^+\{\alpha\}$) : il est facile de voir que cet ordinal est fabriqué en ajoutant un unique élément à la fin d'un ensemble bien-ordonné d'ordinal α ; on le note $\alpha + 1$, et on a $\beta \leq \alpha$ si et seulement si $\beta < \alpha + 1$. Réciproquement, tout ordinal ayant un plus grand élément (i.e., l'ordinal d'un ensemble bien-ordonné ayant un plus grand élément) est un successeur : en effet, si W a un plus grand élément x, alors $\#W$ est le successeur de $\#\operatorname{precs}(x)$.

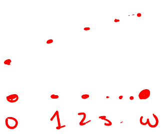
Ex. :
- $5 = \#\{\equiv\}$ est successeur ($5 = 4+1$)
- $\omega+1 = \#\{\ldots\}$ "ω" $\mathbb{N}$ est le successeur de ω
- ω n'est pas un successeur
  $\omega 2$ non plus
  ω^2 non plus

$\#W$ est successeur ssi W a un plus grand élément x (et alors $\#W = (\#x)+1$)

5.4.2. On distingue maintenant trois sortes d'ordinaux :
- l'ordinal **nul** $0 = \#\varnothing$, mis à part de tous les autres,
- les ordinaux **successeurs**, c'est-à-dire ceux qui ont un plus grand élément (au sens expliqué ci-dessus),
- les autres, qu'on appelle ordinaux **limites**.

La terminologie d'ordinaux « limites » s'explique ainsi : si δ est un ordinal non nul qui n'est pas successeur, cela signifie que pour chaque $\beta < \delta$ il existe β' avec $\beta < \beta' < \delta$ (puisque β n'est pas le plus grand élément de δ). Ceci permet de dire que $\sup\{\beta < \alpha\} = \sup^+\{\beta < \alpha\}$ (de façon générale, on a $\sup^+\{\beta < \alpha\} = \alpha$ par définition), et on va définir la notion de limite ainsi :

5.4.3. Si δ est un ordinal limite et f est une fonction *croissante* définie sur les ordinaux strictement plus petits que δ et à valeurs ordinales, on appelle **limite** de f en δ la valeur $\sup\{f(\xi) : \xi < \delta\}$. On pourra la noter $\lim_{\xi\to\delta} f(\xi)$ ou simplement $\lim_\delta f$. (Il s'agit bien d'une limite pour une certaine topologie : la topologie de l'ordre ; plus exactement, c'est une limite car pour tous $\beta_1 < \lim_\delta f < \beta_2$, il



$\lim_\delta f := \sup\{f(\xi) \mid \xi < \delta\}$ ou $\lim_{\xi\to\delta} f(\xi)$ pour f croissante existe ξ_0 tel que $\beta_1 < f(\xi) < \beta_2$ si $\xi_0 \leq \xi < \delta$.) Si f est aussi définie en δ et que $f(\delta) = \lim_\delta f$, on dit que f est **continue** en δ.

Ainsi, si δ est un ordinal limite, on peut écrire $\delta = \lim_{\xi\to\delta} \xi$ (et réciproquement, si f est *strictement* croissante, alors $\lim_{\xi\to\delta} f(\xi)$ est forcément un ordinal limite).

$\lim_{n\to\omega} 2^n := \sup\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\} = \sup\{1, 2, 4, 8 \ldots\} = \omega$

À titre d'exemple, si (u_n) est une suite croissante d'entiers naturels, sa limite en tant que fonction ordinale $\omega \to \omega$ est soit un entier naturel (lorsque la suite est bornée, donc constante à partir d'un certain rang) soit ω (lorsque la suite n'est pas bornée). Notamment, $\lim_{n\to\omega} 2^n = \omega$ (ce qui permettra de dire que $2^\omega = \omega$ quand on aura défini cet objet).

5.5 Somme, produit et exponentielle d'ordinaux

Les résultats de cette section seront admis (ils ne sont pas très difficiles à montrer — presque toujours par induction transfinie — mais seraient trop longs à traiter en détails).

SOMME

$\boxed{W}$ $\boxed{W'}$

$\#W = \alpha$ $\#W' = \beta$

$\boxed{W''}$

$\#W'' = \alpha + \beta$

5.5.1. Il existe deux façons équivalentes de définir la somme $\alpha + \beta$ de deux ordinaux.

$\overbrace{| \; | \ldots}^{\omega} \; \overbrace{||||}^{5}$ — $\omega + 5$

La première façon consiste à prendre un ensemble bien-ordonné W tel que $\alpha = \#W$ et un ensemble bien-ordonné W' tel que $\beta = \#W'$, et définir $\alpha + \beta := \#W''$ où W'' est l'ensemble bien-ordonné qui est réunion disjointe de W et W' avec l'ordre qui place W' *après* W, c'est-à-dire formellement $W'' := \{(0, w) : w \in W\} \cup \{(1, w') : w' \in W'\}$ ordonné en posant $(i, w_1) < (i, w_2)$ ssi $w_1 < w_2$ et $(0, w) < (1, w')$ quels que soient $w \in W$ et $w' \in W'$ (il est facile de voir qu'il s'agit bien d'un bon ordre).

Autrement dit, intuitivement, une rangée de $\alpha + \beta$ allumettes s'obtient en ajoutant β allumettes *après* (i.e., *à droite d'*)une rangée de α allumettes.

La seconde façon consiste à définir $\alpha + \beta$ par induction transfinie sur β (le *second* terme) :

— $\alpha + 0 = \alpha$,
— $\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1$ (cas successeur),
— $\alpha + \delta = \lim_{\xi\to\delta}(\alpha + \xi)$ si δ est limite. ← "continuité de la somme en la 2e variable"

Nous ne ferons pas la vérification du fait que ces définitions sont bien équivalentes, qui n'est cependant pas difficile (il s'agit de vérifier que la première définition vérifie bien les clauses inductives de la seconde).

5.5.2. Quelques propriétés de l'addition des ordinaux sont les suivantes :

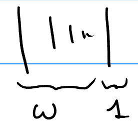
— l'addition est associative, c'est-à-dire que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (on notera donc simplement $\alpha + \beta + \gamma$ et de même quand il y a plus de termes) ;
— l'ordinal nul est neutre à gauche comme à droite, c'est-à-dire que $0 + \alpha = \alpha = \alpha + 0$;

Exemple de la somme par induction transfinie:

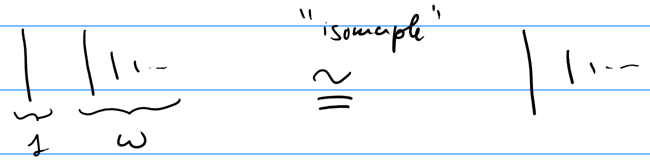
$$\omega+5 = \omega + (4\underbrace{+1}_{\text{"successeur"}}) = (\omega+4)+1 = ((\omega+3)+1) = ((((\omega+1)+1)+1)+1)+1$$

$$\omega+\omega = \lim_{n\to\omega} (\omega+n) = \sup\{\omega, \omega+1, \omega+2, \omega+3, \dots\}$$

$\omega+1 =$ successeur de ω $> \omega$



$1+\omega$



$$1+\omega = \lim_{k\to\omega} 1+k = \sup\{1,2,3,4,\dots\} = \omega$$

Bref, $1+\omega = \omega$ alors que $\omega+1 > \omega$.

— le successeur de α est $\alpha + 1$;

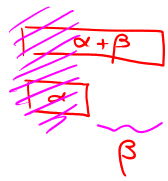
— l'addition n'est pas commutative en général : par exemple, $1 + \omega = \omega$ (en décalant d'un cran toutes les allumettes) alors que $\omega + 1 > \omega$;

— l'addition est croissante en chaque variable, et même strictement croissante en la seconde (si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha + \beta \leq \alpha' + \beta$, et si $\beta < \beta'$ alors $\alpha + \beta < \alpha + \beta'$; le fait que $0 < 1$ mais $0 + \omega = 1 + \omega$ explique qu'il n'y a pas croissante stricte en la première variable) ;

$\lim_{\xi \to \delta} \alpha + \xi = \alpha + \delta$

— l'addition est continue en la seconde variable (c'est exactement ce que dit le cas limite dans la définition par induction transfinie) ;

— lorsque $\alpha \leq \alpha'$, il existe un unique β tel que $\alpha' = \alpha + \beta$ (certains auteurs le notent $-\alpha + \alpha'$: on prendra garde au fait qu'il s'agit d'une soustraction *à gauche*) ;



— comme conséquence de l'une des deux propriétés précédentes : si $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ alors $\beta = \beta'$ (simplification *à gauche* des sommes ordinales).

5.5.3. On pourrait aussi définir des sommes de séries d'ordinaux, ces séries étant elles-mêmes indicées par d'autres ordinaux (le cas des séries ordinaires étant le cas où l'ensemble d'indices est ω). Précisément, si α_ι est un ordinal pour tout $\iota < \gamma$ (avec γ un autre ordinal), on peut définir $\sum_{\iota<\gamma} \alpha_\iota$ par induction transfinie sur γ :

— $\sum_{\iota<0} \alpha_\iota = 0$ (somme vide !),

— $\sum_{\iota<\gamma+1} \alpha_\iota = \left(\sum_{\iota<\gamma} \alpha_\iota\right) + \alpha_\gamma$ (cas successeur),

— $\sum_{\iota<\delta} \alpha_\iota = \lim_{\xi\to\delta} \sum_{\iota<\xi} \alpha_\iota$ (cas limite).

Ainsi, dans le cas d'une série indicée par les entiers naturels, $\sum_{n<\omega} \alpha_n$ est la limite $n \to \omega$ de la suite croissante d'ordinaux $\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-1}$ (limite qui existe toujours en tant qu'ordinal).

Cette notion de somme peut servir à définir le produit, $\alpha\beta = \sum_{\iota<\beta} \alpha$, mais on va le redéfinir de façon plus simple :

5.5.4. Il existe deux façons équivalentes de définir le produit $\alpha \cdot \beta$ (ou $\alpha\beta$) de deux ordinaux.

2ω :

|| || ıı ıı ıı ...

$= \omega$

$\boxed{W'}$

remplacer chaque élément de W' par une copie de W

La première façon consiste à prendre un ensemble bien-ordonné W tel que $\alpha = \#W$ et un ensemble bien-ordonné W' tel que $\beta = \#W'$, et définir $\alpha \cdot \beta := \#(W \times W')$ où $W \times W'$ est l'ensemble bien-ordonné qui est le produit cartésien de W et W' avec l'ordre lexicographique donnant plus de poids à W', c'est-à-dire $(w_1, w_1') < (w_2, w_2')$ ssi $w_1' < w_2'$ ou bien $w_1' = w_2'$ et $w_1 < w_2$ (il est facile de voir qu'il s'agit bien d'un bon ordre).

$\omega 2$:

|ı... |ı...

$= \omega + \omega$

Autrement dit, intuitivement, une rangée de $\alpha\beta$ allumettes s'obtient en prenant une rangée de β allumettes et en y *remplaçant* chaque allumette par une rangée de α allumettes.

La seconde façon consiste à définir $\alpha\beta$ par induction transfinie sur β (le *second* facteur) :

$\omega 2 = \omega(1+1) = \omega 1 + \omega = \omega + \omega$

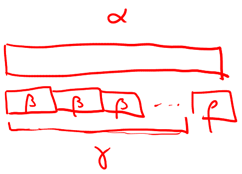
$2\omega = \lim_{n \to \omega} 2n = \sup\{0,2,4,6,\dots\} = \omega$

— $\alpha \cdot 0 = 0$,
— $\alpha \cdot (\beta + 1) = (\alpha \cdot \beta) + \alpha$ (cas successeur),
— $\alpha \cdot \delta = \lim_{\xi \to \delta}(\alpha \cdot \xi)$ si δ est limite. ← calculé à droite

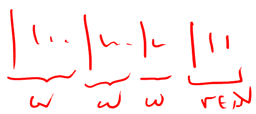
Nous ne ferons pas la vérification du fait que ces définitions sont bien équivalentes, qui n'est cependant pas difficile (il s'agit de vérifier que la première définition vérifie bien les clauses inductives de la seconde).

5.5.5. Quelques propriétés de la multiplication des ordinaux sont les suivantes :

— la multiplication est associative, c'est-à-dire que $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (on notera donc simplement $\alpha\beta\gamma$ et de même quand il y a plus de facteurs) ;
— l'ordinal nul est absorbant à gauche comme à droite, c'est-à-dire que $0 \cdot \alpha = 0 = \alpha \cdot 0$;
— l'ordinal 1 est neutre à gauche comme à droite, c'est-à-dire que $1 \cdot \alpha = \alpha = \alpha \cdot 1$;
— la multiplication est distributive *à droite* sur l'addition, c'est-à-dire que $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ (en particulier, $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$) ;
— la multiplication n'est pas commutative en général : par exemple, $2 \cdot \omega = \omega$ (en doublant chaque allumette) alors que $\omega \cdot 2 > \omega$;
— la distributivité à gauche ne vaut pas en général : par exemple, $(1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega = \omega$ n'est pas égal à $\omega + \omega = \omega \cdot 2$;
— la multiplication est croissante en chaque variable, et même strictement croissante en la seconde lorsque la première est non nulle (si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha \cdot \beta \leq \alpha' \cdot \beta$, et si $\beta < \beta'$ et $\alpha > 0$ alors $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \beta'$) ;
— la multiplication est continue en la seconde variable (c'est exactement ce que dit le cas limite dans la définition par induction transfinie) ;



— **division euclidienne** : pour tout α (ici appelé dividende) et tout $\beta > 0$ (ici appelé diviseur) il existe γ (ici appelé quotient) et $\rho < \beta$ (ici appelé reste) uniques tels que $\alpha = \beta\gamma + \rho$ (on prendra garde au fait qu'il s'agit d'une division *à gauche*) ;
— comme conséquence de l'une des deux propriétés précédentes : si $\beta\gamma = \beta\gamma'$ avec $\beta > 0$, alors $\gamma = \gamma'$ (simplification *à gauche* des produits ordinaux).



À titre d'exemple concernant la division euclidienne, tout ordinal α peut s'écrire de façon unique comme $\alpha = \omega\gamma + r$ avec r un entier naturel : on a alors $r > 0$ si et seulement si r est successeur (les ordinaux limites sont donc exactement les $\omega\gamma$ avec $\gamma > 0$) ; ce r sera le « chiffre des unités » de l'écriture de α en forme normale de Cantor ($\xi_{(0)}$ dans la notation de 5.5.9). On peut aussi écrire tout ordinal α de façon unique comme $\alpha = 2\gamma + r$ avec r valant 0 ou 1 : on peut dire que α est « pair » ou « impair » selon le cas (à titre d'exemple, ω est pair car $\omega = 2 \cdot \omega$) ; ce r sera de même le « chiffre des unités » de l'écriture binaire. $r<\omega$

5.5.6. On pourrait aussi définir des produits d'ordinaux, ces produits étant eux-